INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos

Tesis que presenta

Jessica Carmín Mendiola Fuentes

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Directores de la Tesis:

Dr. Hugo Cabrera Ibarra

Dr. Haret Codratian Rosu Barbus

San Luis Potosí, S.L.P., 22 de Marzo de 2013

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos** presentada para obtener el Grado de Maestra en Ciencias Aplicadas en la opción Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Jessica Carmín Mendiola Fuentes** y aprobada el **22 de Marzo de 2013** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Codirector de tesis

Dr. Haret Codratian Rosu Barbus
Codirector de tesis

Dr. José Salomé Murguía Ibarra
Sinodal

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
Sinodal

Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la codirección de los Doctores Hugo Cabrera Ibarra y Haret Codratian Rosu Barbus

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 322282 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 032 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 22 días del mes de marzo del año 2013, se reunió a las 10:20 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. José Salomé Murguía Ibarra	**Presidente**	**UASLP**
Dr. Hugo Cabrera Ibarra	**Secretario**	**IPICYT**
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar	**Sinodal**	**IPICYT**
Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus	**Sinodal**	**IPICYT**

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó la C.

Jessica Carmín Mendiola Fuentes

sobre la Tesis intitulada:

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus
Dr. Hugo Cabrera Ibarra

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 11:50 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 22 días del mes de marzo de 2013.

Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.
IPICYT
SECRETARIA ACADEMICA

Dedicatorias

Dedico este trabajo a mi querida familia:
A mis padres Rafael Mendiola y Carmín Fuentes.
A mis hermanas Zaira y Stephany
A mi hija Sofía Herrera.

Resumen

El tema de esta tesis abunda en las propiedades de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos y sus soluciones. Ecuaciones de este tipo empezaron a surgir desde la mitad del siglo XVIII cuando dÁlembert publicó un estudio sobre la trayectoria de un punto arbitrario de una cuerda en movimiento vibracional. Sin embargo, el primer estudio analítico de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes periódicos lo realizó E. Mathieu en su trabajo de 1868 sobre las vibraciones de las membranas elípticas.

En el primer capítulo de la tesis se presentan varias definiciones y conceptos básicos para este tipo de ecuaciones que servirán en el segundo capítulo en el desarrollo de uno de los métodos principales de construcción de soluciones períodicas más generales, llamadas inicialmente de segunda especie siguiendo el trabajo fundamental de Floquet publicado en 1883. Este análisis se hace para un orden arbitrario, $m \in \mathbf{N}$, de la ecuación diferencial. Además, estas soluciones de tipo Floquet se presentan de manera equivalente a través del formalismo de las matrices en forma canónica de Jordan. Una parte de la contribución del trabajo de tesis versa sobre una presentación detallada de algunos resultados olvidados de Floquet que podrían tener impacto en la actualidad si fueran más conocidos. Entre estos, mencionamos la reducción del orden de la ecuación a través de un ingenioso cambio de la variable dependiente. En el mismo capítulo, se construyen las soluciones de Floquet para el caso del oscilador armónico, uno de los ejemplos ilustrativos más sencillos.

Finalmente, el capítulo tres contiene otros casos útiles de sistemas físicos regidos por ecuaciones diferenciales de coeficientes periódicos para los cuales se escribe la forma de las soluciones de Floquet. Otros conceptos fundamentales se incluyen en la parte de apéndices para la completitud y autoconsitencia del trabajo.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales lineales, coefcientes periódicos, exponentes de Floquet, soluciones periódicas de segunda especie, ecuación de Mathieu.

Abstract

The main subject of this thesis refers to the properties of the linear differential equations with periodic coefficients and their solutions. Equations of this kind occurred for the first time towards the middle of the 18th century when dÁlembert published a work on the trajectory of an arbitrary point of a string in vibrational motion. However, the first analytic study of a linear differential equation of the second order with periodic coefficients belongs to E. Mathieu in 1868 on the vibrations of elliptic membranes.

In the first chapter of the thesis, we present the basic definitions and concepts required for this type of equations, which will be used in the second chapter to develop one of the most important methods to build more general periodic solutions, initially called periodic solutions of the second kind, on the lines of the seminal paper of G. Floquet published in 1883. The analysis is performed for an arbitrary order $m \in \mathbf{N}$ of the differential equation. Moreover, the Floquet solutions are obtained by the equivalent formalism of matrices in the canonical Jordan form. Another part of the contributions in the thesis refers to some of the forgotten results in the work of Floquet, which nevertheless could still have an impact in the literature if they were better known. Among them, we mention the reduction of the order of a differential equation with periodic coefficients by a remarkable change of the dependent variable. In the same chapter, the Floquet solutions of the harmonic oscillator are built explicitly as one of the simplest illustrative examples.

Finally, the third chapter contains other useful cases of physical systems whose dynamical behavior is described by differential equations with periodic coefficients, for which the form of the Floquet solutions is written down. Some other fundamental concepts are inclosed in the appendices of the thesis to assure the selfconsistency of the work.

Key words: Differential equations, periodic coefficients, Floquet multipliers, periodic solutions of second kind, Mathieu equation.

Índice general

Prefacio

Si conociésemos exactamente las leyes de la naturaleza
y la situación del universo en el instante inicial,
podríamos predecir con exactitud la situación del
universo en un instante ulterior.
Henri Poincaré.

Las matemáticas han contribuido al desarrollo de la humanidad desde sus orígenes; disciplinas matemáticas como la artimética y la geometría son ramas que tienen una aplicación directa en muchas áreas, entre ellas economía, arquitectura, etc. Sin embargo la teoría de ecuaciones diferenciales, teoría de control óptimo y optimización son ramas que han tenido un desarrollo considerable en las últimas décadas. Las ecuaciones diferenciales son una herramienta que se utiliza para el modelado de fenómenos físicos. Por lo tanto su uso es común en las ciencias aplicadas, como física, química y biología.

Dentro de la clase de las ecuaciones diferenciales lineales, encontramos el caso en donde los coeficientes pueden ser no constantes entonces, no es posible en general determinar una base del espacio de soluciones. Sin embargo, cuando los coeficientes son periódicos y tienen el mismo período, es posible si no encontrar una base de soluciones, al menos predecir una serie de propiedades de éstas, y sobre todo hablar de la existencia de soluciones periódicas. Un caso general de este tipo de ecuaciones recibe el nombre de ecuación de Hill, la cual podemos escribir de la siguiente manera:

$$u''(t) + a(t)u(t) = 0 \; , \tag{1}$$

donde $a(t)$ es una función periódica. G. W. Hill en 1887 realizó su investigación de esta ecuación relacionada con el perigeo lunar, dando valiosas contribuciones en el área de la astronomía. Esta ecuación modela numerosos fenómenos en física e ingeniería, como es el caso de los sistemas que se modelan mediante un oscilador. En particular el estudio de las propiedades de estabilidad de dicha ecuación es de gran interés. De forma particular podemos mencionar: el problema de la vibración de la membrana elíptica (problema original enunciado por Mathieu en 1868), la variación de la órbita lunar debido a la atracción del sol (problema de los tres cuerpos de Hill), la difracción de la luz alrededor de un cilindro elíptico, el modelado en la mecánica cuántica del electrón de un cristal, rotaciones de moléculas de un cristal, la vibración tensorial de algunas moléculas en el grupo de los etilenos o étanos.

Desde el punto de vista teórico en 1883 Gaston Floquet propone una forma canónica para las solución de una ecuación diferencial con coeficientes periódicos. Es importante mencionar que G. Floquet fue el primero en escribir una teoría mas completa para las ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos. En un artículo de Floquet [1] se estudian las formas analíticas de las soluciones en ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

En el presente trabajo haremos un análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos, es decir, partiendo de la existencia de soluciones periódicas, llegaremos a describir la forma que tendrá el sistema fundamental de soluciones.

En donde surge la principal dificultad, ya que en general, no es posible encontrar las expresiones exactas correspondientes a dichas soluciones, es decir no se pueden escribir usando funciones elementales. Por otra parte analizaremos la parte de existencia de soluciones, por que es bien sabido que el hecho de que la ecuación diferencial tenga coeficientes periódicos no implica que sus soluciones sean periódicas, caso análogo podemos encontrar que las soluciones son periódicas en ecuaciones con coeficientes constantes.

Una de las áreas en donde la teoría de Floquet es importante es en el estudio de estabilidad de los sistemas dinámicos, ya que nos permite hacer un análisis de la estabilidad mediante los eigenvalores de un arreglo matricial, que llamamos matriz de monodromía, la cual conserva las propiedades del sistema para el caso donde los coeficientes son periódicos.

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos

Se presentan varias definiciones y conceptos básicos referentes a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos, comenzando con las definiciones de funciones periódicas y continuando con algunos conceptos generales sobre las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos. La parte central de este capítulo es la construcción de una clase de soluciones llamadas soluciones periódicas de segunda especie, las cuales cumplen ciertas propiedades mismas que también son expuestas con detalle. Finalmente, para ejemplificar lo anterior veremos el caso del oscilador armónico y la contrucción de las soluciones periódicas de segunda especie según la terminología de Floquet.

1.1. La función periódica

Definición 1.1 (función periódica de primera especie)**.** *Una función $f(t)$ se dice* periódica *o* periódica de primera especie*, si existe $\omega_p \in \mathbb{R}$ tal que para todo t, $f(t+\omega_p) = f(t)$, a ω_p se le llama el período fundamental de la función.*

Dicho en otras palabras una función $f(t)$ es periódica, si después de cada intervalo de tiempo fijo vuelve a adquirir el mismo valor. Algunas funciones periódicas de las más conocidas son las funciones trigonométricas, $sen(t)$, $cos(t)$ y $tan(t)$. En la siguiente figura 1.1 se muestra la gráfica de las funciones periódicas seno y coseno: Por otro lado también podemos hablar de funciones periódicas las cuales satisfacen otra propiedad, y las definimos de la siguiente manera:

Definición 1.2 (función periódica de segunda especie)**.** *Una función $F(t)$ es* periódica de segunda especie *si existe un $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\Omega \in \mathbb{R}$, tal que la función $F(t)$ cumple con la propiedad $F(t+\Omega) = \varepsilon f(t)$ tal que $|\varepsilon| = 1$.*

Nótese que una función periódica de primera especie es un caso particular cuando $\varepsilon = 1$.

Ejemplo 1. *La función $sen(t)$ por naturaleza notamos que es periódica de período 2π, por lo tanto es de primera especie por que cumple $sen(t) = sen(t+2\pi)$.*
En cambio eligiendo $\Omega = \pi$, notamos que $sen(t+\pi) = -sen(t)$ es periódica de segunda

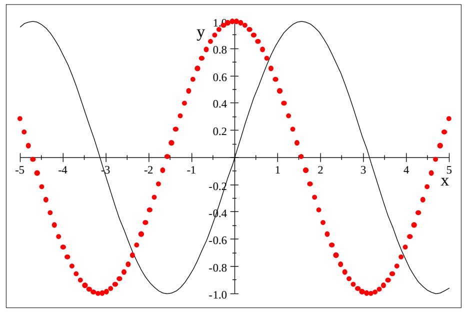

Figura 1.1: Gráfica de funciones seno y coseno

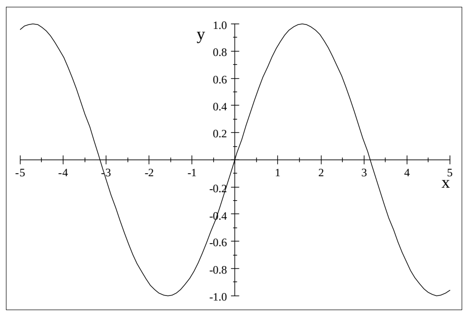

Figura 1.2: Gráfica de $sen(t)$

especie.
Por otro lado, cuando tenemos una función constante $f(t) = k$, sea $k = 3$, dicha función es periódica para cualquier valor de ω_p, $f(t+\omega_p) = f(t) = 3$, en este caso siempre es periódica de primera especie y de ninguna manera puede ser de segunda especie.

Una propiedad especial de las funciones periódicas es que:

Teorema 1. *Toda función f continua y periódica es acotada.*

Demostración. Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[0,\omega]$, entonces $f(x)$ alcanza un máximo en el intervalo $[0,\omega]$. Es decir, existe h, tal que $0 \leq h \leq \omega$ entonces $|f(x)| \leq |f(h)|$ para todo $x \in [0,\omega]$. Suponiendo que f es una función no acotada, entonces para $k = |f(x)|$ existe $x_k \in D$ tal que $|f(x_k)| > k$ pero como $x_k = \bar{x}_k + \gamma\omega$ con $0 \leq x_k \leq \omega$, donde $\gamma \in \mathbb{Z}$. Por hipótesis f es periódica, entonces $k < f(x_k) = f(x_k + \gamma\omega) = |f(\bar{x}_k)| \leq k$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto toda función periódica y continua es acotada. $\square$

La historia de las funciones periódicas comienza con los estudios de D'Alembert (1747) en su tratado sobre las oscilaciones de las cuerdas del violín, y es ahí en donde se empieza a trabajar con una ecuación diferencial usando una función impar de período 2, para esto Leonhard Euler (1777) propuso que la solución de tal ecuación podía ser expresada en términos de series y propone una fórmula para calcular sus coeficientes. Más adelante, Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1807) contribuye con sus estudios del problema del flujo del calor,

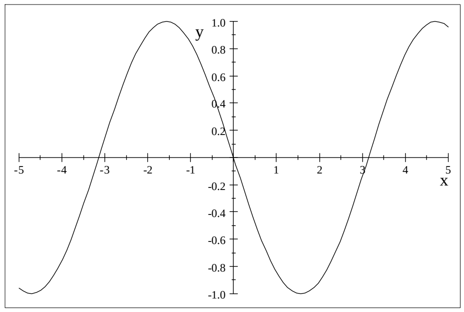

Figura 1.3: Gráfica de $-sen(t)$

en donde demostró que toda función periódica puede ser expresada como una suma de funciones trigonométricas de senos y cosenos del mismo período. Posteriomente Émile Léonard Mathieu (1868) hace uso de ciertas funciones especiales útiles, referentes a la ecuación de la onda para un cilindro elíptico, dando con ello una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes periódicos, en general con soluciones no periódicas. La importancia y una de las aplicaciones de las funciones periódicas la podemos encontrar en física clásica en el problema de los $n-$cuerpos, el cual consiste en describir el movimiento de una partícula de masa despeciable, sujeta a la fuerza de atracción gravitatoria provocada por $n-1$ masas que se mueven en órbitas conocidas, las cuales son periódicas. Dicha descripción del movimiento de la partícula es modelado mediante un sistema de ecuaciones diferenciales, en donde tiene sentido encontrar soluciones periódicas del mismo período. En mecánica celéste, las soluciones periódicas ayudan a explicar el posicionamiento de asteroides, u otros cuerpos celéstes para describir órbitas satelitales.
A continuación veremos una introducción a los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales, así como algunas definiciones que nos serán necesarias mas adelante.

1.2. Generalidades acerca de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos

Se consideran ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales, homogéneas de tipo:

$$P(y) = \frac{d^m y}{dt^m} + p_1(t)\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \ldots + p_{m-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_m(t)y = 0, \tag{1.1}$$

en donde los coeficientes $p_1, p_2, \ldots, p_m$ son funciones periódicas del mismo período ω_p. El sistema asociado de esta ecuación diferencial lo podemos escribir como un conjunto de m ecuaciones diferenciales, de tal manera que (1.1) puede ser transformado en el siguiente sistema:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \ , \tag{1.2}$$

siendo $A(t)$ una matriz en cuyas entradas están los coeficientes periódicos de (1.1). Para poner la ecuación (1.1) en forma del sistema (1.2), hacemos un cambio de variable:

$$x_1 = y,\ x_2 = \frac{dy}{dt},\ \ldots,\ x_m = \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}\ ,$$

obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\ ,\\
\dot{x}_2 &= x_3\ ,\\
&\vdots\\
\dot{x}_m &= -p_1(t)x_m - p_2(t)x_{m-1} - p_3(t)x_{m-2} - \ldots - p_m(t)x_1\ ,
\end{aligned}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. De aquí, lo ponemos en su forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_1(t) & -p_2(t) & -p_3(t) & \ldots & -p_m(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\ , \tag{1.3}$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_1(t) & -p_2(t) & -p_3(t) & \ldots & -p_m(t) \end{pmatrix}.$$

Dado el sistema (1.3) es natural que nos preguntemos sobre la naturaleza de sus soluciones, en este caso, conocer si las soluciones son necesariamente siempre periódicas. Uno de los procedimientos generales para encontrar soluciones a una ecuación diferencial, es mediante la integración, pero no toda función puede integrarse de forma sencilla, lo cual no significa que no exista solución a esta ecuación, existe por el hecho de que se pueda integrar, más no la podemos expresar analíticamente como una función conocida.

Por otra parte, cuando transformamos la ecuación (1.1) en forma de ecuación matricial es decir, del tipo (1.3), nos será mas útil utilizar el concepto de matriz fundamental, que definimos a continuación.

Sea $\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)\}$ un conjunto de soluciones linealmente independientes de (1.3), es claro que este conjunto genera, mediante una combinación lineal, todas y cada una de las soluciones del sistema.

Definición 1.3. *Se llama* matriz fundamental *a la matriz cuyas columnas son los vectores soluciones* $\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)\}$*:*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \ldots & f_{1m}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \ldots & f_{2m(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(t) & \ldots & \ldots & f_{mm}(t) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Siendo cada vector columna $f_i(t)$ linealmente independientes, es decir, $f_i(t) = \alpha_1 f_{1i}(t) + \alpha_2 f_{2i}(t) + \alpha_3 f_{3i}(t) + \ldots + \alpha_m f_{mi}(t) = 0$ si y sólo si $\alpha_i = 0$.
Se sigue entonces que la matriz fundamental $\Phi(t)$ es no singular, por consecuencia tiene una matriz inversa $\Phi(t)^{-1}$. La matriz fundamental no es única, hay un número infinito de ellas y cada una satisface la ecuación diferencial matricial:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t).$$

Por otro lado, como diferentes conjuntos de soluciones linealmente independientes, nos dan diferentes matrices fundamentales, ya que las componentes de un conjunto se pueden expresar como combinación lineal de las componentes del otro conjunto. Es decir que si $\Phi(t)$ y $\Phi_\omega(t)$ son matrices fundamentales, entonces existe una matriz no singular C tal que $\Phi_\omega(t) = \Phi(t)C$. Podemos entonces escribir $C = \Phi_\omega(t)\Phi^{-1}(t)$.

La ventaja de transformar una ecuación diferencial lineal en un sistema de m ecuaciones de primer orden, reside en la formulación de las condiciones de Cauchy, las cuales resultan ser más sencillas para el caso de un sistema de la forma (1.3). Es necesario precisar la existencia de soluciones, mediante el problema del valor inicial o problema de Cauchy, asociado al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x \ , \\ x(t_0) &= x_0 \in U \ , \end{aligned}$$

para $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y A una matriz con entradas funciones continuas. Decimos que una curva parametrizada

$$x : I \to U \ ,$$

definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contiene al instante inicial t_0 es una solución del problema de Cauchy, si x es continuamente diferenciable en I, satisface la condición inicial y la ecuación diferencial para todo $t \in I$. De aquí podemos concluir que el sistema puede no tener soluciones, tener exactamente una solución o tener más de una solución, lo cual lleva a realizarnos las siguientes preguntas, bajo que condiciones un problema de Cauchy tiene al menos una solución y tiene solución única. A los teoremas que establecen dichas condiciones se les llama teoremas de existencia y unicidad.

Por otra parte, cuando tenemos una ecuación diferencial como (1.1) hay que tener en cuenta que sus soluciones no necesariamente son siempre periódicas. Lo cual mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. *Analicemos la ecuación:*

$$\frac{dy}{dt} - (1 + sen(t))y = 0 \ , \tag{1.5}$$

en este caso $p_1(t) = 1 + sen(t)$ es un coeficiente periódico. Podemos ver que la solución general de la ecuación (1.5), es $y_1(t) = ce^t e^{-cost}$, la cual no es periódica, ya que $y_1(t)$ tiende a infinito cuando t tiende a infinito, $y_1(t)$ no puede ser acotada. La gráfica de la solución anterior, cuando $y_0 = 0$, se muestra en la figura 1.4.

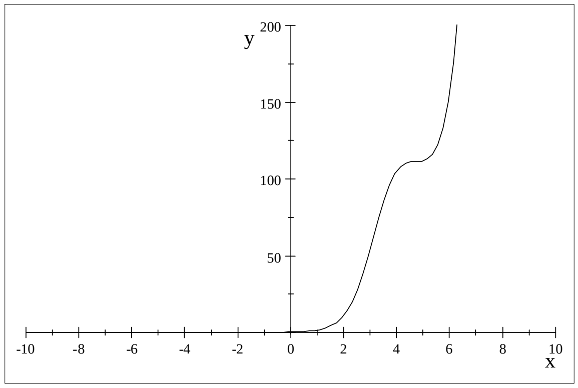

Figura 1.4: Gráfica de la solución $y_1(t) = ce^t e^{-cost}$, tomando $c = 1$

Hablemos ahora de una propiedad importante que podemos encontrar en el caso en donde consideramos que la ecuación diferencial (1.1) es lineal, obtenemos que la suma de soluciones es también solución. Comenzamos con la definición de función lineal.

Definición 1.4. *Una función $f : V \to K$, donde V es un espacio vectorial sobre K, es llamada una función lineal si para todo $x, y \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in K$, satisface:*

$$i) f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$ii) f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Es equivalente a pedir que la función f satisfaga:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \ .$$

Ejemplo 3. *Consideremos la ecuación (1.1)*

$$P(y) = \frac{d^m y}{dt^m} + p_1(t)\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} + \ldots + p_{m-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_m(t)y \ ,$$

es fácil demostrar que P es una función lineal. En efecto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$, usando la definición anterior tenemos:

$$P(\alpha x + \beta y) = \frac{d^m}{dt^m}(\alpha x + \beta y) + p_1(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}(\alpha x + \beta y) \ + \ldots$$
$$\ldots + p_{m-1}(t)\frac{d}{dt}(\alpha x + \beta y) + p_m(t)(\alpha x + \beta y),$$

por la propiedad de la derivada, $\frac{d}{dt}(\alpha x + \beta y) = \frac{d}{dt}\alpha x + \frac{d}{dt}\beta y = \alpha\frac{dx}{dt} + \beta\frac{dy}{dt}$, para el caso general de $\frac{d^m}{dx}(\alpha x + \beta y) = \frac{d^m}{dx}\alpha x + \frac{d^m}{dx}\beta y$ escribimos que:

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha\frac{d^m x}{dt^m} + \beta\frac{d^m y}{dt^m} + p_1(t)[\alpha\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \beta\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}] \ + \ldots$$
$$\ldots + p_{m-1}(t)[(\alpha x + \beta y)],$$

agrupando, tenemos:

$$P(\alpha x+\beta y)=\alpha[\frac{d^m x}{dt^m}+p_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\ldots+p_{m-1}(t)\frac{dx}{dt}+p_m(t)x]$$
$$+\beta[\frac{d^m y}{dt^m}+p_1(t)\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\ldots+p_{m-1}(t)\frac{dy}{dt}+p_m(t)y].$$

Ahora sean $f_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ *soluciones para* $P(y)=0$ *es decir,* $P(f_i(t))=0$*, tenemos pues que, por la linealidad de* P*:*

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(t)) &= \sum_{i=1}^{m}P(\alpha_i f_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i P(f_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\cdot 0=0\ . \end{aligned}$$

De aquí concluimos que la linealidad de la ecuación diferencial (1.1) garantiza el principio de superposición, el cual asegura que la suma de soluciones es una nueva solución y enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 2. *Si tenemos que* $f_1(t),f_2(t),\ldots,f_m(t)$ *son* m *soluciones de la ecuación (1.1), entonces la suma* $\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)+\ldots+\alpha_m f_m(t)$*, es también solución de (1.1).*

Definición 1.5. *El conjunto* $\{f_1(t),f_2(t),\ldots,f_m(t)\}$*, se dice que es* linealmente independiente *si la combinación lineal* $\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f(t)+\ldots+\alpha_m f_m(t)=0$*, sólo se satisface si* $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0$*. De lo contrario, se dice que es* linealmente dependiente.

Ejemplo 4. *Las funciones* $f_1(t)=sen(t)$ *y* $f_2(t)=cos(t)$ *son linealmente independientes pues si existiesen unas constantes reales* α_1 *y* α_2 *tales que para todo* $t\in\mathbb{R}$*:*

$$\alpha_1 sen(t)+\alpha_2 cos(t)=0, \quad para \quad todo \quad t\ ,$$

se seguiría que, para $t=\frac{\pi}{2}$ *tenemos* $\alpha_1=0$ *y en* $t=0$ *se tendría* $\alpha_2=0$*, por lo tanto concluimos que son linealmente independientes.*
Ahora si tomáramos el conjunto $\{sen(t),cos(t),3sen(t)\}$*, es fácil verificar que este conjunto es linealmente dependiente ya que si tomamos* $\alpha_1=3$*,* $\alpha_2=0$*,* $\alpha_3=-1$ *tenemos que* $\alpha_1 sen(t)+\alpha_2 cos(t)+\alpha_3 3sen(t)=0$*, para todo* $t\in\mathbb{R}$*.*

A continuación definiremos el concepto de Wronskiano, el cual es necesario ya que a partir del Wronkiano podemos contruir un sistema fundamental de soluciones.

Definición 1.6 (Wronskiano)**.** *Sean* $f_1(t),f_2(t),\ldots,f_m(t)$ *un conjunto de* m *funciones. Se denomina Wronskiano al determinante que está dado por:*

$$W[f_1(t),f_2(t),\ldots,f_m(t)]=\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \ldots & f_m(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \ldots & f_m'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(t) & f_2^{(m-1)}(t) & \ldots & f_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

El Wronskiano puede usarse para determinar si un conjunto de soluciones es linealmente independiente.

Teorema 3. *Sean $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ m funciones, continuas y diferenciables hasta $m-1$, definidas en un intervalo I. Tales que si existe un $t_0 \in I$ para el cual*

$$W[f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_m(t_0)] \neq 0 \ ,$$

entonces $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ son linealmente independientes.

Demostración. Supongamos por contradicción que $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ son linealmente dependientes, entonces existen constantes $a_1, a_2, \dots, a_m$ distintas de cero tales que

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots + a_m f_m(t) = 0 \qquad para \quad todo \quad t \in I \ ,$$

derivando sucesivas veces esta igualdad tenemos,

$$\begin{aligned}
&a_1 f_1'(t) + a_2 f_2'(t) + \ldots + a_m f_m'(t) = 0 \ , \\
&a_1 f_1''(t) + a_2 f_2''(t) + \ldots + a_m f_m''(t) = 0 \ , \\
&\qquad \vdots \\
&a_1 f_1^{(m-1)}(t) + a_2 f_2^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m f_m^{(m-1)}(t) = 0 \ .
\end{aligned}$$

En particular, para t_0 y de manera matricial tenemos,

$$\begin{pmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) & \dots & f_m(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) & \dots & f_m'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(t_0) & f_2^{(m-1)}(t_0) & \dots & f_m^{(m-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = 0 \ . \tag{1.7}$$

El determinante de (1.7), es por hipótesis, $W[f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_m(t_0)] \neq 0$ lo que implica que $a_1 = a_2 = \ldots, = a_m = 0$, lo cual es una contradicción. □

Definición 1.7 (Sistema fundamental de soluciones para $P(y) = 0$)**.** *Si dadas m funciones $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ las cuales son soluciones de (1.3) y además son linealmente independientes, entonces estas funciones $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)\}$ constituyen un sistema fundamental de soluciones.*

Teorema 4. *Si las soluciones de una ecuación diferencial lineal $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ son linealmente independientes para algún t_0, entonces son linealmente independientes para todo t.*

Demostración. Si $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, al menos una distinta de cero, satisfacen que:

$$a_1 f_1(t_1) + a_2 f_2(t_1) + \ldots + a_m f_m(t_1) = 0 \ ,$$

para algún t_1, $t_1 \neq t_0$. Por el teorema (2) la combinación lineal $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots + a_m f_m(t)$ es solución de (1.1). Por otro lado la función $f_0(t) = 0$ es también solución de (1.1) y en particular $f_0(t_1) = 0$. Por unicidad de las soluciones se tiene que

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots + a_m f_m(t) = f_0(t) \quad para \quad todo \quad t \ .$$

En particular para t_0 tenemos,

$$a_1 f_1(t_0) + a_2 f_2(t_0) + \ldots + a_m f_m(t_0) = 0 \ ,$$

lo cual es una contradicción, por el hecho de suponer que al menos una de las constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ es distinta a cero. $\square$

Teorema 5. *El conjunto de todas las soluciones del sistema (1.3) forma un espacio vectorial m-dimensional, cuya base puede ser cualquier sistema fundamental de soluciones.*

Demostración. Sean $\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)\}$ un sistema fundamental de soluciones de (1.3), entonces

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \ldots + a_m f_m(t) \ , \tag{1.8}$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_m$ constantes arbitrarias, representa en virtud del Teorema 2, una solución de (1.3). La suma de dos soluciones y el producto escalar también es solución de (1.3). Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones del sistema (1.3) forma un espacio vectorial de dimensión m, cuya base puede ser cualquier sistema fundamental de soluciones. $\square$

Por el teorema anterior tenemos que si $\{f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots, f_m(t_0), f_{m+1}(t_0)\}$, son $m+1$ soluciones evaluadas en $t_0 \in \mathbb{R}^m$ entonces el conjunto anterior es linealmente dependiente, por lo tanto $\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t), f_{m+1}(t)\}$ es también linealmente dependiente, esto demuestra que sólo pueden existir a lo mucho m soluciones para la ecuación diferencial de orden m.

1.3. Construcción de soluciones periódicas de segunda especie

En el artículo de 1883 [1], Floquet expone una clase de soluciones periódicas generalizadas, que llamó soluciones periódicas de segunda especie, en el cual partiendo de un conjunto fundamental de soluciones periódicas, de una ecuación diferencial ordinaria del tipo (1.1) construye ahí estas soluciones periódicas que cumplen la propiedad mencionada en Definición 1.2. En esta sección seguimos esta idea de construir las soluciones a partir de las soluciones periódicas con las que se cuenta.

Teorema 6. *Sean $\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)\}$ un conjunto de m soluciones periódicas de primera especie de (1.1). Si $f_i(t)$ es solución de (1.1) entonces $f_i(t+\omega_p)$ también es solución.*

Demostración. Definamos la función $f_1(t+\omega_p) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de manera que, $f_1(t+\omega_p) = f_1(g_1(t)) = f_1(t) \circ g_1(t)$ la podemos escribir como una composición de funciones, donde $g_1(t) : t \mapsto (t+\omega_p)$ como partimos del hecho de que $f_1(t)$ es una solución de (1.1), entonces sabemos que satisface:

$$\frac{d^m}{dt^m} f_1(t) + p_1(t) \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} f_1(t) + \ldots + p_{m-1}(t) \frac{d}{dt} f_1(t) + p_m(t) f_1(t) = 0 \ .$$

Ahora veamos si $f_1(g_1(t)) = f_1(t+\omega_p)$ es solución. De aquí que debe de satisfacer:

$$\frac{d^m}{dt^m}f_1(g_1(t)) + p_1(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}f_1(g_1(t)) + \ldots + p_{m-1}(t)\frac{d}{dt}f_1(g_1(t)) + p_m(t)f_1(g_1(t)) = 0, \tag{1.9}$$

podemos ver que:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}f_1(g_1(t)) = \frac{df_1(t)}{dt}g_1(t)\cdot\frac{dg_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt}f_1(t+\omega_p) \qquad \textit{porque} \qquad \frac{dg_1(t)}{dt} = 1\\
&\frac{d^2}{dt^2}f_1(g_1(t) = \frac{d^2f_1}{dt^2}(g_1(t)) = \frac{d^2}{dt^2}f_1(t+\omega_p)\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{d^m}{dt^m}f_1(g_1(t)) = \frac{d^mf_1}{dt^m}g_1(t) = \frac{d^m}{dt^m}f_1(t+\omega_p)
\end{aligned}$$

Por lo tanto (1.9) satisface:

$$\frac{d^m}{dt^m}f_1(t+\omega_p) + p_1(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}f_1(t+\omega_p) + \ldots + p_{m-1}(t)\frac{d}{dt}f_1(t+\omega_p) + p_m(t)f_1(t+\omega_p) = 0\ .$$

Nótese que cada uno de los coeficientes $p_i(t)$ de (1.9) es periódico de período ω_p, de aquí tomamos el mismo período ω_p para $f_1(t+\omega_p)$, la cual concluimos que también es solución, mismo que ocurre para cualquier $f_i(t+\omega_p)$. $\square$

Por otro lado cada componente del conjunto $\{f_i(t+\omega_p)\}$, como ya se vió, es solución de (1.1), entonces el conjunto también forma un sistema fundamental. Como tanto $\{f_i(t+\omega_p)\}$ y $\{f_i(t)\}$ son una base, entonces cada elemento de $\{f_i(t+\omega_p)\}$ se puede expresar como una combinación lineal de la base $\{f_i(t)\}$, es decir,

$$\begin{aligned}
f_1(t+\omega_p) &= a_{11}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + a_{13}f_3(t) + \ldots + a_{1m}f_m(t)\ ,\\
f_2(t+\omega_p) &= a_{21}f_1(t) + a_{22}f_2(t) + a_{23}f_3(t) + \ldots + a_{2m}f_m(t)\ ,\\
&\ \ \vdots\\
f_m(t+\omega_p) &= a_{m1}f_1(t) + a_{m2}f_2(t) + a_{m3}f_3(t) + \ldots + a_{mm}f_m(t)\ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una matriz $\mathcal{A}$ de $m\times m \in \mathbb{R}$ tal que,

$$f_i(t+\omega_p) = \mathcal{A}f_i(t)\ ,$$

que es lo mismo de manera matricial:

$$\begin{pmatrix} f_1(t+\omega_p)\\ f_2(t+\omega_p)\\ \vdots\\ f_m(t+\omega_p)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_m(t)\end{pmatrix}\ . \tag{1.10}$$

La matriz $\mathcal{A}$ es una matriz de cambio de base (ver Apéndice B.1), cumple con la propiedad

$det(A) \neq 0$, esto debido a que las columnas de la matriz A son linealmente independientes. De esta manera, al calcular la ecuación característica, $det(\mathcal{A} - \varepsilon I) = 0$, obtenemos las raíces o eigenvalores de $\mathcal{A}$. Los eigenvalores de $\mathcal{A}$ representan una parte importante para la teoría aquí desarrollada, mismos que más adelante obtienen el nombre de multiplicadores de Floquet. Por otro lado los eigenvalores son independientes de la elección de la matriz fundamental, por lo tanto son una propiedad del sistema y no de cualquier solución particular. Dependiendo de cómo sean los eigenvalores de dicha matriz podemos escribir las soluciones de cierta manera, veamos qué forma toman las soluciones dependiendo de las características que guardan cada uno de los eigenvalores de la matriz $\mathcal{A}$.

Teorema 7. *Sean $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \mathbb{R}$ las raíces de la ecuación característica, las cuales son todas distintas entre ellas y a la vez $\varepsilon_i \neq 1$. Entonces hay m soluciones periódicas de segunda especie $F_1(t), \ldots, F_m(t)$ de período Ω.*

Demostración. Partimos del hecho de que las soluciones periódicas $\{f_i(t)\}$ las podemos escribir de la forma (1.10). De aquí al calcular los eigenvalores de la matriz $\mathcal{A}$, observamos que por hipótesis admite m raíces distintas. Nos planteamos por ello el problema de encontrar una base en la que la matriz de dicha expresión matricial sea diagonal. Sabemos que una condición necesaria y suficiente para que el endomorfismo (ver apéndice B.4) sea diagonalizable, es que el número de vectores propios linealmente independientes sea igual a la dimensión del espacio vectorial. Por lo tanto, la matriz $\mathcal{A}$ al admitir m raíces distintas la podemos llevar a su forma diagonal, es decir, por la forma de Jordan existe una matriz C tal que

$$C^{-1}\mathcal{A}C = D \ ,$$

siendo C una matriz no singular y D una matriz diagnonal. Por otra parte despejando $\mathcal{A} = CD^{-1}C$ y al sustituir en (1.10) tenemos que

$$f(t+\omega_p) = CDC^{-1}f(t) \ ,$$

multiplicando por C^{-1}

$$C^{-1}f(t+\omega_p) = CDC^{-1}f(t) \ ,$$

si hacemos, $F_{1i}(t+\omega_p) = C^{-1}f(t+\omega_p)$ y $F_{1i}(t) = C^{-1}f(t)$, tenemos:

$$F_i(t+\omega) = DF_i(t) \ .$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$F_i(t+\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_m \end{pmatrix} F_i(t).$$

Entonces, tenemos que existen m soluciones periódicas de segunda especie:

$$\begin{aligned} F_1(t+\omega) &= \varepsilon_1 F_1(t) \ , \\ F_2(t+\omega) &= \varepsilon_2 F_2(t) \ , \\ &\vdots \\ F_m(t+\omega) &= \varepsilon_m F_m(t) \ . \end{aligned}$$

□

Lo anterior muestra que cuando tenemos m raíces distintas de la ecuación característica $det(\mathcal{A}-\varepsilon I)=0$, podemos construir un conjunto de eigenvectores $\{g_1(t), g_2(t), \ldots, g_m(t)\}$ que son linealmente independientes y sus elementos pueden utilizarse como base, por lo tanto, estas m funciones forman un sistema fundamental. Pasamos ahora al caso de eigenvalores repetidos de la matriz $\mathcal{A}$.

Raíces Múltiples

Ahora para el caso de tener raíces repetidas o múltiples, no se puede generar una base para el conjunto de soluciones de (1.3) usando el procedimiento anterior. Notamos que es posible que no tengamos una representación diagonal de $\mathcal{A}$ como en el caso anterior, sin embargo, se puede llevar la matriz $\mathcal{A}$ a una forma de Jordan, dicha matriz tiene una forma particular (ver Apéndice B.5).

Usando (1.10), considerando que estamos en el caso de raíces múltiples y tomando en cuenta que la matriz $\mathcal{A}$ tiene una matriz semejante J, entonces existe una matriz C tal que

$$C^{-1}\mathcal{A}C = J \ ,$$

donde ahora la matriz J tiene la forma especificada en (Apéndice B.5). Entonces al despejar $\mathcal{A}$ tenemos:

$$\mathcal{A} = CJC^{-1} \ ,$$

sustituyendo en (1.10):

$$f(t+\omega_p) = CJC^{-1}f(t) \ ,$$

multiplicando ambos lados por C^{-1}:

$$C^{-1}f(t+\omega_p) = JC^{-1}f(t) \ ,$$

si hacemos $C^{-1}f(t+\omega_p) = F_{1i}(t+\omega)$ y $C^{-1}f(t) = F_{1i}(t)$, tenemos:

$$F_{1i}(t+\omega) = JF_{1i}(t) \ . \tag{1.11}$$

Entonces las soluciones se escribirán dependiendo de la forma que tenga la matriz semejante. Supongamos que tenemos una matriz $\mathcal{A}$ de 5×5, con 3 eigenvalores distintos, dos de ellos de multiplicidad 2, entonces la matriz $\mathcal{A}$ es semejante a:

$$J = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \ ,$$

escribimos (1.11) de forma matricial:

$$F_{1i}(t+\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} F(t)_{1i} \ . \tag{1.12}$$

Tenemos que las soluciones son:

$$\begin{aligned}
&F_{11}(t+\omega)=\varepsilon_1 F_{11}(t)\ ,\\
&F_{12}(t+\omega)=\varepsilon_2 F_{12}(t)\ ,\\
&G_3(t+\omega)=F_{12}(t)+\varepsilon_2 G_3(t)\ ,\\
&F_{14}(t+\omega)=\varepsilon_3 F_{14}(t)\ ,\\
&G_{15}(t+\omega)=F_4(t)+\varepsilon_3 G_5(t)\ ,
\end{aligned}$$

donde podemos observar cuáles soluciones son periódicas de segunda especie, tal es el caso de $F_{11}(t), F1_2(t)$ y $F_{14}(t)$.
Por otra parte tenemos el caso en donde tenemos una única raíz ε_1 de multiplicidad m, supongamos que la matriz J es de la forma:

$$J=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \varepsilon_1 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_1 \end{pmatrix}\ ,$$

en este caso las soluciones serán de este forma:

$$\begin{aligned}
&F_{11}(t+\omega)=F_{11}(t)\varepsilon_2+F_{12}(t)\ ,\\
&F_{12}(t+\omega)=F_{12}(t)\varepsilon_1+F_{13}(t)\\
&\qquad\vdots\\
&F_{1m}(t+\omega)=\varepsilon_1 F_{1m}(t)\ ,
\end{aligned}$$

Raíces complejas

Procedemos de manera similar que en los casos anteriores donde teníamos raíces con multiplicidad, la diferencia aquí es que la matriz semejante J tiene una forma particular (ver Apéndice B.7) y se hace consideración de que las raíces complejas vienen en pares conjugados. Usando (1.10), tomando en cuenta que la matriz $\mathcal{A}$ tiene una matriz semejante D, entonces existe una matriz C tal que $C^{-1}\mathcal{A}C=J$. Por otra parte despejando $\mathcal{A}$ tenemos que $\mathcal{A}=CJC^{-1}$ sustituyendo en (1.10):

$$f(t+\omega_p)=CJC^{-1}f(t)\ ,$$

al igual que el caso anterior, multiplicando ambos lados por C^{-1}:

$$C^{-1}f(t+\omega_p)=JC^{-1}f(t)\ ,$$

haciendo $C^{-1}f(t+\omega_p)=H(t+\omega)$ y $C^{-1}f(t)=H(t)$, tenemos:

$$H(t+\omega)=JH(t)\ . \tag{1.13}$$

Entonces las soluciones se escribirán dependiendo de la forma que tenga la matriz semejante. Supongamos que tenemos una matriz $\mathcal{A}$ de 2×2 con una raíz compleja $\varepsilon=\alpha+\beta i$ y su conjugado, entonces:

$$J=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta\\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

de manera similar como hemos hecho en los casos anteriores de raíces repetidas, de manera general podemos escribir las soluciones como:

$$H(t+\omega) = JH(t)\ .$$

Considerando la forma de la matriz J, podemos escribir las soluciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_1(t+\omega) &= \alpha H_1(t) - \beta H_2(t)\ , \\ H_2(t+\omega) &= \beta H_1(t) + \alpha H_2(t)\ . \end{aligned}$$

Otro caso particular es cuando tenemos raíces complejas y reales, para esto supongamos que la matriz $\mathcal{A}$ de 3×3 tiene una raíz real ε_1, y otra raíz compleja $\varepsilon_2 = \alpha + i\beta$ con correspondiente par conjugado $\varepsilon_3 = \alpha - i\beta$. Podemos escribir las soluciones:

$$H(t+\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} H(t),$$

es decir,

$$\begin{aligned} H_1(t+\omega) &= \varepsilon H_1(t)\ , \\ H_2(t+\omega) &= \alpha H_2(t) - \beta H_3(t)\ , \\ H_3(t+\omega) &= \beta H_2(t) + \alpha H_3(t)\ . \end{aligned}$$

En esta parte pudimos describir la forma que tienen las soluciones, según las características de las raíces de la matriz semejante a $\mathcal{A}$, ya sea que tengan multiplicidad, sean reales o complejas. A continuación presentamos la forma en cómo G. Floquet construye dichas soluciones partiendo de que se tienen raíces distintas con multiplicidad, concluyendo la forma general que tienen dichas soluciones y mencionando, bajo ciertas restricciones, cuando son periódicas de segunda especie.
Considerando el caso de raíces múltiples distintas donde las raíces son $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ y las multiplicidades de cada raíz son $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Podemos construir una solución periódica de segunda especie $F_{11}(t)$ de período ω y de multiplicador ε_1, si consideramos que la multiplicidad de $\varepsilon_1 > 1$. El primer subíndice de F_{11} representa el subíndice de la raíz ε_1 y el segundo esta asociado al grado de multiplicidad de la raíz ε_1. Más delante se mencionará como se construyen las demás soluciones $F_{1\mu}(t)$, $\mu = 2, 3, \ldots, \mu_1$.
Representando $F_{11}(t)$ en términos de la base $\{f_i(t)\}$, escribimos pues:

$$F_{11}(t) = u_1 f_1(t) + u_2 f_2(t) + \ldots + u_m f_m(t)\ ,$$

donde las u_i no todas nulas, y tomando $u_1 \neq 0$. Notamos que $F_{11}(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ es también un sistema fundamental, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} F_{11}(t+\omega) &= \varepsilon_1 F_{11}(t)\ , \\ f_2(t+\omega) &= B_{21}F_{11}(t) + B_{22}f_2(t) + \cdots + B_{2m}f_m(t)\ , \\ f_3(t+\omega) &= B_{31}F_{11}(t) + B_{32}f_2(t) + \cdots + B_{3m}f_m(t)\ , \\ &\vdots \\ f_m(t+\omega) &= B_{m1}F_{11}(t) + B_{m2}f_2(t) + \cdots + B_{mm}f_m(t)\ . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Escribiéndolo en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} F_{11}(t+\omega) \\ f_2(t+\omega) \\ \vdots \\ f_m(t+\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11}(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix} , \tag{1.16}$$

de (1.16) nombramos a la matriz de cambio de base:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mm} \end{pmatrix} . \tag{1.17}$$

Aplicando operaciones elementales a las filas, podemos convertir en ceros todos los elementos situados debajo de ε_1 en la primera columna, dejando invariables los demás elementos. Por ejemplo, si multiplicamos la primera fila de B_2 por $-B_{21}$ y sumamos el resultado a la segunda fila, la nueva segunda fila será $(0, B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2m})$. Por medio de una sucesión de esas operaciones elementales con las filas obtenemos una nueva matriz que tiene la forma:

$$B_1' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & B_{m2} & \dots & B_{mm} \end{pmatrix} .$$

Puesto que las operaciones elementales de filas no modifican el determinante, tenemos:

$$det B_1 = det B_1' ,$$

pero como B_1' es una matriz diagonal en bloques y en virtud del teorema de matrices diagonales en bloques (ver Apéndice C.1), el cual dice que si tenemos dos matrices cuadradas cualesquiera C y C' tales que

$$det \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} = (det C)(det C') ,$$

entonces, tenemos:

$$det B_1' = \varepsilon_1 det \begin{pmatrix} B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m2} & \dots & B_{mm} \end{pmatrix} . \tag{1.18}$$

Por hipótesis, se sabe la parte derecha de (1.18), que llamaremos B_2, admite nuevamente a ε_1 como raíz. Es decir, la ecuación característica de B_2 satisface:

$$det \begin{pmatrix} B_{22} - \varepsilon_1 & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m2} & \dots & B_{mm} - \varepsilon_1 \end{pmatrix} = 0 , \tag{1.19}$$

por lo tanto existen $u'_2, \ldots, u'_m$ constantes no todas nulas, tales que:

$$u'(B_2 - \varepsilon_1 I) = 0 \ ,$$

es decir,

$$u' B_2 = \varepsilon_1 u' \ . \tag{1.20}$$

donde B es la matriz de (1.18) y u' es el vector $\{u'_2, \ldots, u'_m\}$.
A partir de aquí podemos construir una segunda solución, la cual no necesariamente va a ser de segunda especie. Usando las constantes $u'_2, \ldots, u'_m$, entonces escribimos:

$$F_{12}(t) = u'_2 f_2(t) + u'_3 f_3(t) + \ldots + u'_m f_m(t) \ ,$$

donde las $u'_2, \ldots, u'_m$ no son todas nulas, y tomando $u'_2 \neq 0$. Cambiando el argumento de t a $t+\omega$:

$$F_{12}(t+\omega) = u'_2 f_2(t+\omega) + u'_3 f_3(t+\omega) + \ldots + u'_m f_m(t+\omega) \ , \tag{1.21}$$

usando (1.15) y sustituyendo en (1.21):

$$\begin{aligned} F_{12}(t+\omega) = &\, u'_2[B_{21}F_{11}(t) + B_{22}f_2(t) + \cdots + B_{2m}f_m(t)] \\ &+ u'_3[B_{31}F_{11}(t) + B_{32}f_2(t) + \cdots + B_{3m}f_m(t)] + \\ &\vdots \\ &+ u'_m[B_{m1}F_{11}(t) + B_{m2}f_2(t) + \cdots + B_{mm}f_m(t)] \ , \end{aligned}$$

agrupando,

$$F_{12}(t+\omega) = F_{11}[u'_2 B_{21} + u'_3 B_{31} + \ldots + u'_m B_{m1}] + (u'_2, \ldots, u'_m) \begin{pmatrix} B_{22} & \ldots & B_{2m} \\ B_{32} & \ldots & B_{3m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m2} & \ldots & B_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix} .$$

Separando la suma $F_{12}(t+\omega)$ en dos términos, en el primer término hacemos

$$[B_{21}u'_2 + B_{31}u'_3 + \ldots + B_{m1}u'_m] = \varepsilon_{21} \ ,$$

y en el segundo término considerando que ε_1 es raíz y que se cumple (1.20), entonces

$$F_{12}(t+\omega) = \varepsilon_{21} F_{11}(t) + \varepsilon_1 (u'_2, \ldots, u'_m) \begin{pmatrix} f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix} .$$

Usando la definición de $F_{12}(t)$, cumple con la propiedad:

$$F_{12}(t+\omega) = \varepsilon_{21} F_{11}(t) + \varepsilon_1 F_{12}(t) \ . \tag{1.22}$$

Siguiendo el procedimiento anterior ahora con el sistema fundamental

$$\{F_{11}(t), F_{12}(t), f_3(t), \ldots, f_m(t)\} \ ,$$

es posible obtener una solución $F_{13}(t)$ que satisface:

$$F_{13}(t+\omega) = \varepsilon_{31}F_{11}(t) + \varepsilon_{32}F_{12}(t) + \varepsilon_1 F_{13}(t) \ . \tag{1.23}$$

Donde ε_{31} y ε_{32} son constantes que se construyen de manera similar a ε_{21}, ahora el conjunto $\{F_{11}(t), F_{12}(t), F_{13}(t), \ldots, f_m(t)\}$ es otro sistema fundamental.
Siguiendo el procedimiento anterior $\mu_1 - 1$ veces llegamos al conjunto fundamental

$$\{F_{11}(t), F_{12}(t), \ldots, F_{1\mu_1}(t), f_{\mu_{1+1}}, \ldots, f_m(t)\} \ ,$$

tenemos pues existen μ_1 soluciones asociadas a la raíz ε_1, ahora en el caso de ε_2, usando el procedimiento anterior, obtenemos μ_2 soluciones $F_{21}(t), F_{22}(t), \ldots, F_{2\mu_2}(t)$, donde F_{12} es solución periódica de segunda especie. En conclusión para las multiplicidades de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tenemos que el sistema fundamental es:

$$F_{11}(t), F_{12}(t), \ldots, F_{1\mu_1}, F_{21}(t), F_{22}(t), \ldots, F_{2\mu_2}(t), f_{\mu_1+\mu_{2+1}}(t), \ldots, f_m(t) \ .$$

Si repetimos este procedimiento para las demás raíces $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots, \varepsilon_n$ llegamos a un sistema fundamental de soluciones compuesto por n conjuntos, los cuales gozan de las siguientes propiedades:

$$F_{i1}(t+\omega) = \varepsilon_i F_{i1}(t) \ , \tag{1.24}$$
$$F_{i2}(t+\omega) = \varepsilon_{2i}F_{i1}(t) + \varepsilon_i F_{i2}(t) \ , \tag{1.25}$$
$$F_{i3}(t+\omega) = \varepsilon_{3i}F_{i1}(t) + \varepsilon_{3i}F_{i2}(t) + \varepsilon_i F_{i3}(t) \ , \tag{1.26}$$
$$\vdots \tag{1.27}$$
$$F_{i\mu_i}(t+\omega) = \varepsilon_{\mu_i 1}F_{i1}(t) + \varepsilon_{\mu_i 2}F_{i2}(t) + \ldots + \varepsilon_{\mu_i i}F_{i\mu_i - 1}(t) + \varepsilon_i F_{i\mu_i}(t) \ . \tag{1.28}$$

En donde $F_{i1}(t)$ es periódica de segunda especie. De manera general concluímos que si tenemos n raíces distintas, entonces va a admitir al menos n soluciones periódicas de segunda especie de período ω.
Observemos también que se pueden calcular soluciones de segunda especie para $t + k\omega$, donde k es cualquier numero entero. Si cambiamos el argumento $t+\omega$ por $t+2\omega$ en

$$F_{11}(t+\omega) = \varepsilon_1 F_{11}(t) \ ,$$

tenemos:

$$\begin{aligned} F_{11}(t+2\omega) &= F_{11}(t+\omega+\omega) \ , \\ F_{11}(t+2\omega) &= \varepsilon_1 F_{11}(t+\omega) \ , \\ &= \varepsilon_1^2 F_{11}(t) \ . \end{aligned}$$

En general para calcular la solución en $t + k\omega$ tenemos:

$$F_{11}(t+k\omega) = \varepsilon_1^k F_{11}(t) \ .$$

En particular, si la ecuación característica de (1.17) admite como raíz una $k-$ésima raíz de la unidad, se obtiene una solución periódica de período $k\omega$.
Considerando la forma que tienen las μ_1 soluciones correspondientes a la raíz ε_1 y haciendo referencia a (1.24), tenemos que:

$$
\begin{aligned}
F_{11}(t+k\omega) &= \varepsilon_1^k F_{11}(t) \; , \\
F_{12}(t+k\omega) &= \varepsilon_1^k \left[k\frac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon} F_{11}(t) + F_{12}(t) \right] \; , \\
F_{13}(t+k\omega) &= \varepsilon_1^k \left[\left(\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\frac{\varepsilon_{32}\varepsilon_{21}}{\varepsilon^2} + \frac{k}{1}\frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon} \right) F_{11}(t) + \frac{k}{1}\frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon} F_2(t) + F_{13}(t) \right] \; , \\
&\vdots \\
F_{1i}(t+k\omega) &= \varepsilon_1^k \left[k_{i-1}F_{11}(t) + k_{i-2}F_{12}(t) + \ldots + k_j F_{1(i-j)}(t) + \ldots + k_1 F_{1(i-1)}(x) + F_{1i}(t) \right] \; ,
\end{aligned}
$$

donde $k_{i-1}, k_{i-2}, \ldots, k_1$ son polinomios en k, de grado $i-1$, $i-2$, ..., 1, respectivamente, sin que tengan términos independientes de k. Los coeficientes de las potencias en k en estos polinomios incluso pueden ser nulos.

1.4. Caso del oscilador armónico.

En esta sección mediante un ejemplo veremos la contrucción anterior para el oscilador armónico, el cual es uno de los sistemas más estudiados en la física, ya que todo sistema que oscila alrededor de un punto de equilibrio estable, se puede estudiar en una aproximación como si fuera un oscilador armónico.
La característica principal de un oscilador armónico es que está sometido a una fuerza recuperadora, que tiende a devolverlo a su punto de equilibrio estable, con una intensidad proporcional a la separación respecto de dicho punto, dicha fuerza la escribimos,

$$F = -k(y - y_0) \; , \tag{1.29}$$

donde k es la constante de recuperación y y_0 es la posición de equilibrio, la cual podemos tomar como $y_0 = 0$. Es decir, las condiciones iniciales son $y_0 = 0$ y $\dot{y}_0 = 0$.
El oscilador armónico simple, es el caso más sencillo, donde únicamente se considera la fuerza recuperadora, es decir, teniendo en cuenta que $F = ma = m\frac{d^2y}{dt^2}$ de la ecuación (1.29), nos da una ecuación diferencial homogénea de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_2 y = 0 \; , \tag{1.30}$$

donde $p_2 = \frac{k}{m} = p^2$, es la frecuencia natural de la vibración, teniendo como coeficiente periódico de la ecuación diferencial del tipo (1.1) a p_2, el cual al ser constante se considera de período arbitrario.
Para resolver la ecuación del movimiento del oscilador armónico, observamos que se trata de encontrar una función cuya segunda derivada sea proporcional a la propia función. Es fácil hallar dos funciones que cumplan esta condición:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= cos(\omega t) \; , \\
y_2(t) &= sen(\omega t) \; .
\end{aligned}
$$

Ninguna de estas dos soluciones particulares puede ser general, por que no cumplen con las condiciones iniciales del movimiento, es decir que, no cumplen:

$$y(0) = 0 \,,$$
$$\dot{y}(0) = 0 \,.$$

Verificando, tenemos que $y_1(t) = cos(\omega t)$ no cumple las condiciones iniciales antes mencionadas, por que $y_1(0) = cos(0) = 1$, lo mismo pasa cuando verificamos la segunda condición inicial en $y_2(t) = sen(\omega t)$ donde, $\dot{y_2}(0) = cos(0) = 1$. Sin embargo, corroboremos que una combinación lineal de ellas sí es una solución general y cumple las condiciones iniciales, escribamos pues la combinación lineal:

$$y(t) = acos(\omega t) + bsen(\omega t) \,.$$

Donde las constantes a y b se imponen mediante las condiciones iniciales. De la condición inicial de posición y_0 tenemos:

$$y(0) = acos(0) + bsen(0) = a \,, \tag{1.31}$$

y de la velocidad inicial:

$$\dot{y}(0) = -a\omega sen(0) + b\omega cos(0) = b\omega \,. \tag{1.32}$$

De aquí tenemos que el valor de $a = y_0$ y el de $b = \frac{\dot{y}_0}{\omega}$. Por lo tanto la solución general, en función de las condiciones iniciales es:

$$y = y_0 cos(\omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} sen(\omega t) \,. \tag{1.33}$$

Una vez que vimos las características de la ecuación del oscilador armónico, ahora vamos a hacer la construcción de soluciones periódicas de segunda especie para dicha ecuación, como se vió en la sección anterior. Haciendo referencia al punto (1.10), es decir, $y_1(t+\omega)$ y $y_2(t+\omega)$ son soluciones de (1.30), donde $\omega_p = 2\pi$ es el período de las soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$. Por lo tanto, podemos escribir $y_1(t+\omega)$ y $y_2(t+\omega)$ como combinación lineal de los elementos del sistema fundamental de soluciones $\{y_1(t), y_2(t)\}$:

$$y_1(t+\omega) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) \,,$$

$$y_2(t+\omega) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) \,.$$

Aplicándolo al ejemplo del oscilador armónico y por conveniencia tomando $p = 1$:

$$cos(t+\omega) = a_{11}cos(t) + a_{12}sen(t) \,, \tag{1.34}$$

$$sen(t+\omega) = a_{21}cos(t) + a_{22}sen(t) \,, \tag{1.35}$$

Para obtener el valor de los coeficientes de la matriz A_{osc}, usamos (1.34) y en (1.35) para $t = 0$,

$$cos(\omega) = a_{11},$$
$$sen(\omega) = a_{21},$$

y para $t = \frac{\pi}{2}$,

$$cos(\frac{\pi}{2} + \omega) = a_{12},$$
$$sen(\frac{\pi}{2} + \omega) = a_{22}.$$

Ahora podemos contruir la matriz

$$A_{osc} = \begin{pmatrix} cos(\omega) & -sen(\omega) \\ sen(\omega) & cos(\omega) \end{pmatrix} . \tag{1.36}$$

Calculando la ecuación característica $det(A_{osc} - \varepsilon I) = 0$ para obtener sus eigenvalores, tenemos

$$\varepsilon^2 - (2cos(\omega))\varepsilon + (cos^2(\omega) + sen^2(\omega)) = 0 . \tag{1.37}$$

calculando las raíces de (1.37), obtenemos:

$$\varepsilon_1 = cos(\omega) + isen(\omega),$$
$$\varepsilon_2 = cos(\omega) - isen(\omega) .$$

Haciendo referencia a la parte en donde hablamos de la forma que toman las soluciones cuando las raíces son complejas, como se dice en (1.14) podemos escribir la matriz de Jordan de la siguiente manera:

$$J = \begin{pmatrix} cos(\omega) & -sen(\omega) \\ sen(\omega) & cos(\omega) \end{pmatrix}.$$

Analizando los eigenvalores de A_{osc} notamos que la norma de los eigenvalores $\varepsilon_1 = cos(\omega) + isen(\omega) = \varepsilon_2 = cos(\omega) - isen(\omega) = 1$, para que la ecuación diferencial (1.30) admita 2 soluciones periódicas de primera especie, es necesario y suficiente que los eigenvalores sean iguales a la unidad. En este caso la norma de los eigenvalores es igual a 1, por lo tanto, la ecuación diferencial para el oscilador armónico admite 2 soluciones periódicas de primera especie, las cuales escribimos de la siguiente manera:

$$y_1(t) = c_{11}cos(t) - c_{12}sen(t),$$
$$y_2(t) = c_{21}cos(t) + c_{22}sen(t) .$$

A continuación mostramos la manera en como según el artículo publicado en 1883, G. Floquet contruye las soluciones periódicas de segunda especie, es importante mencionar que en el artículo se habla de manera general de la forma que toman estas soluciones, más nunca se propone un ejemplo.

Sean y_1 y y_2 soluciones que corresponden a la ecuación diferencial (1.30) es necesario asumir que existe una solución periódica de segunda especie. Tenemos pues que:

$$F_{11}(t) = u_1 y_1(t) + u_2 y_2(t) ,$$

cambiando el argumento de t a $t + \omega$

$$F_{11}(t + \omega) = u_1 y_1(t + \omega) + u_2 y_2(t + \omega) ,$$

tenemos pues:

$$F_{11}(t+\omega) = u_1[cos(\omega)cos(t) - sen(\omega)sen(t)] + \tag{1.38}$$
$$+ u_2[sen(\omega)cos(t) + cos(\omega)sen(t)] \ . \tag{1.39}$$

Escribiendo (1.38) en forma matricial, de acuerdo a (1.10), $F(t+\omega)$ obtiene de la siguiente forma:

$$F_{11}(t+\omega) = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} cos(\omega) & -sen(\omega) \\ sen(\omega) & cos(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(t) \\ sen(t) \end{pmatrix} \ . \tag{1.40}$$

Por otro lado, para que se satisfaga la propiedad de ser una solución periódica de segunda especie, escribimos:

$$F_1(t+\omega) = \varepsilon(u_1, u_2) \begin{pmatrix} cos(t) \\ sen(t) \end{pmatrix} \ . \tag{1.41}$$

Calculando de (1.40) la ecuación característica de $det(A_{osc} - \varepsilon I) = 0$, tenemos:

$$\begin{vmatrix} cos(\omega) - \varepsilon & -sen(\omega) \\ sen(\omega) & cos(\omega) - \varepsilon \end{vmatrix} = 0, \tag{1.42}$$

lo que nos lleva a calcular sus raíces:

$$(\cos(\omega) - \varepsilon)^2 + (\sin^2(\omega)) = 0 \ ,$$

despejando para encontrar los valores de ε:

$$cos^2(\omega) - 2\varepsilon cos(\omega) + \varepsilon^2 + sen^2(\omega) = 0 \ ,$$

de aquí obtenemos:

$$\varepsilon^2 - 2\varepsilon cos(\omega) + 1 = 0 \ .$$

Las soluciones de esta ecuación algebráica son:

$$\varepsilon = cos(\omega) \pm \sqrt{cos^2(\omega) - 1} \ ,$$

lo que también se puede escribir de la forma:

$$\varepsilon_{1,2} = cos(\omega) \pm \sqrt{-sen^2(\omega)} \ ,$$

de la forma trigonométrica compleja;

$$\varepsilon_{1,2} = cos(\omega) \pm i sen(\omega),$$

o como exponencial de Euler:

$$\varepsilon_{1,2} = e^{\pm i\omega}.$$

Ahora nos proponemos a encontrar los valores de u_1 y u_2, los cuales son fáciles ver que no influyen para la existencia de ε. Es importante resaltar que en el artículo de G. Floquet no se habla de como son las u_i, sin embargo se consideró que puede ser de utilidad el realizar su cálculo. Considerando los valores de $\varepsilon_1 = e^{i\omega}$ y $\varepsilon_2 = e^{-i(p\omega)}$, construimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1 a_{11} + u_2 a_{21} &= \varepsilon_1 u_1, \\ u_1 a_{12} + u_2 a_{22} &= \varepsilon_2 u_2. \end{aligned}$$

Como $det(A_{osc} - \varepsilon I) = 0$, vemos que $u_2 = \frac{u_1(\varepsilon_1 - a_{11})}{a_{21}}$, u_1 queda en función de u_2. Si escogemos $u_2 = 1$ resulta $u_1 = i$. Es fácil verificar que se cumple la identidad anteriormente mencionada, tenemos pues:

$$F_1(t+\omega) = \varepsilon F_1(t) \ , \tag{1.43}$$

de donde

$$F_1(t+\omega) = u_1 \cos(t+\omega) + \sin(t+\omega) \ , \tag{1.44}$$

de (1.43) y (1.44)

$$u_1 \cos(t+\omega) + \sin(\omega + t) = \varepsilon F_1(t) \ , \tag{1.45}$$

recordando el valor de

$$\varepsilon_1 = \cos(\omega) + i \sin(\omega) \ ,$$

llegamos a la conclusión que

$$F_1(t+\omega) = \varepsilon F_1(t) \ .$$

Por lo tanto las soluciones alternativas de segunda especie están dadas por:

$$F_1(t) = icos(t) + sen(t) = ie^{it} \ ,$$

$$F_2(t) = -icos(t) + sen(t) = -ie^{it} \ .$$

Una forma diferente de abordar el problema se puede ver en en el apéndice A.

Capítulo 2

Exponentes de Floquet como raíces de la ecuación fundamental

En la primera parte de este capítulo se expone un resultado importante de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos, el cual habla de que los eigenvalores están bien definidos, en otras palabras, la matriz de cambio de base conserva los mismos eigenvalores independientemente de la base elegida. La parte central de este capítulo es la presentación detallada de algunos resultados publicados en el artículo de Floquet [1], entre ellos se describe una forma distinta de escribir las soluciones periódicas de segunda especie y la reducción del orden de una ecuación diferencial lineal con coeficientes periódicos mediante un cambio de variable.

2.1. Independencia de los eigenvalores de $\mathcal{A}$

A continuación veamos que los eigenvalores de la matriz $\mathcal{A}$, son independientes de la elección de la base del espacio de soluciones que elijamos. Sea $\mathcal{A}$ matriz tal que se cumple la siguiente relación

$$\mathbf{f}(t+\omega) = \mathcal{A}\mathbf{f}(t) \ , \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{f}(t) = \{f_i(t)\}$ conforma una base del espacio de soluciones. Ahora sea $\mathbf{g}(t) = \{g_i(t)\}$ otra base que genera el mismo espacio de soluciones, tenemos pues que existe una matriz B tal que

$$\mathbf{g}(t+\omega) = \mathcal{B}\mathbf{g}(t) \ .$$

Como $\{g_i(t)\}$ y $\{f_i(t)\}$ generan cada uno una base, podemos concluir que existe una matriz P tal que

$$\mathbf{f}(t) = P\mathbf{g}(t) \ ,$$

donde P es una matriz de cambio de base. Cambiando a $(t+\omega)$, tenemos:

$$\mathbf{f}(t+\omega) = P\mathbf{g}(t+\omega) \ ,$$

por (2.1)

$$P\mathbf{g}(t+\omega) = \mathcal{A}\mathbf{g}(t) \ ,$$

entonces

$$\mathbf{g}(t+\omega) = P^{-1}\mathcal{A}P\mathbf{g}(t) \ ,$$

por lo tanto concluimos que

$$\mathcal{B} = P^{-1}\mathcal{A}P \ . \tag{2.2}$$

Para verificar que las matrices $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen los mismos eigenvalores calculamos el determinante caracterśtico de $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
det(\mathcal{B}-\varepsilon I) &= det(P^{-1}\mathcal{A}P-\varepsilon I) \ , \\
&= det(P^{-1}\mathcal{A}P-\varepsilon P^{-1}IP) \ , \\
&= det(P^{-1}(\mathcal{A}-\varepsilon I)P) \ , \\
&= det(\mathcal{A}-\varepsilon I) \ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto de aquí concluímos que independientemente de la base de soluciones que se elija, los eigenvalores van a ser los mismos.

2.2. Caso de los exponentes de Floquet degenerados

Vamos a analizar el caso de raíces simples, hablamos de la existencia de m soluciones de segunda especie distintas entre sí, denotaremos dichas soluciones:

$$F_{1i}(t+\omega) = \varepsilon_i F_i(t) \ , \tag{2.3}$$

en donde el primer subíndice hace referencia al eigenvalor ε_1 y el segundo subíndice está asociado al grado de multiplicidad de dicho eigenvalor.
Por otro lado cuando tenemos el caso de las raíces múltiples, se pueden construir conjuntos de soluciones compuestas de n grupos según el grado de multiplicidad, estos n grupos los obtenemos de restar el total de elementos menos el grado de multiplicidad (las raíces repetidas), en otras palabras $n = m - \mu$, donde μ es el grado de multiplicidad, dichos conjuntos de ecuaciones gozan las propiedades mencionadas en (1.24). Partiendo de este conjunto de propiedades tomamos la segunda ecuación, es decir, $F_{12}(t+\omega) = \varepsilon_{21}F_{11}(t) + \varepsilon_1 F_{12}(t)$, la cual no es necesariamente periódica y dividimos ambos lados de la ecuación entre $F_{11}(t+\omega)$ obteniendo:

$$\frac{F_{12}(t+\omega)}{F_{11}(t+\omega)} = \frac{F_{12}(t)}{F_{11}(t)} + \frac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon_1} \ . \tag{2.4}$$

Si nombramos:

$$\theta_2(t) = \frac{F_{12}(t)}{F_{11}(t)} - \frac{\varepsilon_{21}t}{\omega\varepsilon_1} \ , \tag{2.5}$$

la cual al cambiar su argumento t por $t+\omega$ notamos que es una función periódica:

$$\begin{aligned}
\theta_2(t+\omega) &= \tfrac{F_{12}(t+\omega)}{F_{11}(t+\omega)} - \tfrac{\varepsilon_{21}(t+\omega)}{\omega\varepsilon_1} \ , \\
&= \tfrac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon} + \tfrac{F_{12}(t)}{F_{11}(t)} - \tfrac{\varepsilon_{21}(t+\omega)}{\omega\varepsilon_1} \ , \\
&= \tfrac{F_{12}(t)}{F_{11}(t)} - \tfrac{\varepsilon_{21}t}{\omega\varepsilon_1} = \theta_2(t) \ .
\end{aligned}$$

Concluimos $\theta_2(t) = \theta_2(t+\omega)$. Definamos ahora las siguientes funciones periódicas de segunda especie $\varphi_{21}(t)$, y $\varphi_{22}(t)$ las cuales tienen período ω :

$$\varphi_{21}(t) = F_{11}(t)\theta_2(t) \ , \quad \varphi_{22}(t) = \frac{\varepsilon_{21}}{\omega\varepsilon_1}F_{11}(t) \ , \tag{2.6}$$

entonces ahora podemos escribir $F_{12}(t)$ como una sumatoria polinomial, $F_{12}(t) = \varphi_{21}(t) + t\varphi_{22}(t)$, de manera análoga para la solución $F_{13}(t)$, en donde al obtener el valor de las $\varphi_{3i}(t)$:

$$\varphi_{31}(t) = F_{11}(t)\theta_3(t) \ , \quad \varphi_{32}(t) = \frac{\varepsilon_{32}}{\omega\varepsilon_1}F_{11}(t)\varphi_{21}(t) + \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_{31} - \varepsilon_{32}\varepsilon_{21}}{2\omega^2\varepsilon_1^2} \ , \quad \varphi_{33}(t) = \frac{\varepsilon_{32}\varepsilon_{21}}{2\omega^2\varepsilon_1^2}F_{11}(t)$$

tenemos $F_{13}(t) = \varphi_{31}(t) + t\varphi_{32}(t) + t^2\varphi_{33}(t)$. Si por simetría de las notaciones hacemos, $F_{11}(t) = \varphi_{11}(t)$ en general tenemos:

$$\begin{aligned}
&F_{11}(t) = \varphi_{11}(t) \ , \\
&F_{12}(t) = \varphi_{21}(t) + t\varphi_{22}(t) \ , \\
&F_{13}(t) = \varphi_{31}(t) + t\varphi_{32}(t) + t^2\varphi_{33}(t) \ , \\
&\quad \vdots \\
&F_{1\mu}(t) = \varphi_{\mu 1}(t) + t\varphi_{\mu 2}(t) + t^2\varphi_{\mu 3}(t) + \ldots + t^{\mu-1}\varphi_{\mu\mu}(t) \ ,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Donde las funciones $\varphi(t)$ son continuas, periódicas de segunda especie, de período ω y del mismo multiplicador ε_1. Estas funciones $\varphi(t)$ se pueden expresar como funciones lineales, homogéneas, de coeficientes constantes, de aquellas de las que tienen un segundo subíndice igual a 1, en particular, las funciones $\varphi(t)$ con los dos subíndices iguales, es decir, $\varphi_{11}(t), \varphi_{22}(t), \ldots, \varphi_{\mu,\mu}(t)$, difieren entre ellas solamente por factores constantes.

2.3. Reducción del grado de una ecuación diferencial de coeficientes periódicos

Sean $F_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ soluciones de $P(y) = 0$, con $F_1(t) \neq 0$, una función periódica de segunda especie, de período ω con multiplicador ε_1. Haciendo el siguiente cambio de variable:

$$y = F_1(t)\int z dt \tag{2.8}$$

y sustituyendo en (1.1) vemos que:

$$Q(z) = \frac{d^{m-1}z}{dt^{m-1}} + q_1\frac{d^{m-2}z}{dt^{m-2}} + \ldots + q_{m-1}z = 0 \ . \tag{2.9}$$

Verificaremos que $Q(z)$ efectivamente tiene la forma (2.9), basta con sustituir las derivadas de y en (1.1). Hagámoslo para el caso de $m = 3$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= F_1'(t)\int z dt + F_1(t)z(t) \ , \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= F_1''(t)\int z dt + 2F_1'(t)z(t) + F_1(t)z'(t) \ , \\
\frac{d^3y}{dt^3} &= F_1'''(t)\int z dt + 3F_1''(t)z(t) + 3F_1'(t)z'(t) + F_1(t)z''(t).
\end{aligned}$$

sustituyendo en (1.1) y agrupando, tenemos que:

$$\begin{aligned}Q(z) = F_1(t)z''(t) + [3F_1'(t) + p_1F_1(t)]z'(t)+\\ +[3F_1''(t) + 2p_1F_1'(t) + p_2F_1(t)]z(t) = 0\end{aligned}$$

Lo cual podemos escribir de la siguiente manera:

$$Q(z) = \frac{d^{m-1}z}{dt^{m-1}} + q_1\frac{d^{m-2}z}{dt^{m-2}} + \ldots + q_{m-1}z = 0 \; . \tag{2.10}$$

en donde; $q_1 = \frac{1}{F_1(t)}[3F_1(t) + p_1F_1(t)]$ y $q_2 = \frac{1}{F_1(t)}[3F_1(t) + 2p_1F_1'(t) + p_2F_1(t)]$, de manera general tenemos

$$\begin{aligned}q_1(t) &= \frac{1}{F_1(t)}\left[m\frac{dF_1(t)}{dt} + p_1F_1(t)\right] \; ,\\ q_2(t) &= \frac{1}{F_1(t)}\left[\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{d^2F_1(t)}{dt^2} + (m-1)p_1\frac{dF_1(t)}{dt} + p_2F_1(t)\right] \; ,\\ &\vdots\end{aligned}$$

Son los primeros coeficientes que estamos buscando, de manera análoga podemos encontrar los restantes. De aquí logramos obtener una ecuación $Q(z)$ con $m-1$ soluciones, ahora para obtener una raíz de $Q(z) = 0$, de $y = F_1(t)\int zdt$, despejamos:

$$z = \frac{d}{dt}\frac{y}{F_1(t)} \; . \tag{2.11}$$

Por lo tanto $Q(z)$ admite $m-1$ soluciones distintas:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f_2(t)}{F_1(t)}\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{f_3(t)}{F_1(t)}\right), \ldots, \frac{d}{dt}\left(\frac{f_m(t)}{F_1(t)}\right),$$

denotamos un sistema fundamental generado por $\{F_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)\}$. Suponiendo que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$ son las raíces de la ecuación fundamental, entonces las $m-1$ raíces asociadas a $Q(z)$ son los cocientes: $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1}$.

Ejemplo 5. *Sea*

$$Q(z) = \frac{d^2z}{dt^2} + q_1\frac{dz}{dt} + q_2z = 0 \; . \tag{2.12}$$

Sustituyendo el valor de $z = \frac{f_2(t)}{F_1(t)}$ en (2.12) tenemos:

$$Q(z) = \frac{d^3}{dt^3}\frac{f_2(t)}{F_1(t)} + q_1\frac{d^2}{dt^2}\frac{f_2(t)}{F_1(t)} + q_2\frac{d}{dt}\frac{f_2(t)}{F_1(t)} = 0 \; . \tag{2.13}$$

Ahora calculando el valor de sus derivadas:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f_2(t)}{F_1(t)}\right) = \frac{f_2'(t)F_1(t) - f_2(t)F_1'(t)}{F_1^2(t)} \ ,$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{f_2(t)}{F_1(t)}\right) = \frac{f_2''(t)F_1(t) - f_2(t)F_1''(t)}{F_1^2(t)} - \frac{-2F_1'(t)[f_2'(t)F_1(t) - f_2(t)F_1'(t)]}{F_1^3(t)} \ ,$$
$$\frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{f_2(t)}{F_{11}(t)}\right) = \frac{f_2'''(t)F_{11}(t) + f_2''(t)F_1'(t) - f_2'(t)F_1''(t) - f_2(t)F_1'''(t)}{F_1^2(t)}$$
$$- \frac{2F_1'(t)[f_2''(t)F_1(t) - f_2(t)F_1''(t)]}{F_1^3(t)}$$
$$- \frac{2F_1''(t)[f_2'(t)F_1(t) - f_2(t)F_1'(t)] - 2F_1'(t)[f_2''(t)F_1(t) - f_2(t)F_1''(t)]}{F_1^3(t)}$$
$$+ 6F_1'^2(t)\frac{[f_2'(t)F_1(t) - f_2(t)F_1'(t)]}{F_1^4(t)} \ .$$

Sustituyendo las derivadas en (2.13)se verifica que es igual a cero, entonces $z = \frac{d}{dt}\frac{f_2(t)}{F_1(t)}$ *es solución.*

Para el caso para m raíces distintas, usando el sistema fundamental $\{F_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)\}$, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$ raíces de $det(A - \varepsilon I) = 0$, entonces las $m-1$ raíces asociadas a $Q(z)$ son los cocientes $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1}$. Si fueran $\{R_2(t), R_3(t), \ldots, R_m(t)\}$ soluciones para $Q(z) = 0$, tenemos que se cumple que $R_i(t+\omega) = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1}R_i(t)$ para $i = 2, 3, \ldots, m$.

2.4. Propiedades de la integral $\int \zeta(t)dt$

Sean $\{F_{11}(t), F_{21}(t), \ldots, F_{m1}(t)\}$ los elementos de un sistema fundamental de soluciones, en donde, el primer subíndice corresponde al subíndice del multiplicador y el segundo subíndice corresponde numera la de multiplicidad, todas son periódicas de segunda especie, con su respectivo multiplicador, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$. Como se hizo anteriormente en $P(y) = 0$ hacemos el cambio de variable $y = F_{11}(t)\int zdt$ obtenemos una ecuación $Q(z) = 0$ de orden $m-1$ la cual satisface las mismas condiciones de (1.1). Suponiendo que $\int zdt$ es periódica de segunda especie de período ω y de multiplicador ε, estudiaremos las propiedades de esta integral. Sea

$$\int \zeta(t)dt = \int zdt, \tag{2.14}$$

donde $\zeta(t)$ es una función periódica de segunda especie, tenemos entonces que

$$\zeta(t+\omega) = \varepsilon\zeta(t) \ ,$$

suponiendo que $\varepsilon = 1$, es decir, $\zeta(t)$ es de primera especie. Entonces

$$\zeta(t+\omega) = \zeta(t).$$

Ahora representemos $H(t)$ una de las soluciones de $\zeta(t)dt$, es decir,

$$H(t) = \int \zeta(t)dt \ ,$$

de otra manera podemos decir que:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \zeta(t)$$

por lo tanto también ocurre que,

$$\frac{dH(t+\omega)}{dt} = \zeta(t+\omega) = \zeta(t).$$

De aquí concluimos que $H(t+\omega)$ y $H(t)$, al ser ambas soluciones, difieren por una constante, es decir,

$$H(t+\omega) = H(t) + C.$$

Propongamos ahora

$$H(t) - \frac{Ct}{\omega} = h(t).$$

Veamos que efectivamente $h(t)$ es periódica, por lo tanto se satisface la propiedad $h(t) = h(t+\omega)$, de aquí que:

$$\begin{aligned} h(t+\omega) &= H(t+\omega) - \frac{C(t+\omega)}{\omega} \ , \\ &= H(t+\omega) - \frac{Ct}{\omega} - \frac{C\omega}{\omega} \ , \end{aligned}$$

como $H(t+\omega) = H(t) + C$, tenemos:

$$\begin{aligned} h(t+\omega) &= H(t) + C - \frac{Ct}{\omega} - C \ , \\ &= H(t) - \frac{Ct}{\omega} = h(t). \end{aligned}$$

Entonces $h(t)$ es periódica.
Si utilizamos $\alpha = \frac{C}{\omega}$, para simplificar $h(t+\omega)$, tenemos

$$H(t) = h(t) + \alpha t \ ,$$

asumiendo que α puede ser cero, esto por que cuando la constante $C = 0$ la relación $H(t+\omega) = \varepsilon H(t)$ se cumple para $\varepsilon = 1$.
Consideremos ahora el caso para $\varepsilon \neq 1$, a diferencia del caso anterior aquí tenemos que las funciones $\varepsilon H(t)$ y $H(t+\omega)$ tiene la misma derivada, y entonces difieren por una constante de la siguiente manera:

$$H(t+\omega) = \varepsilon H(t) + C \ , \tag{2.15}$$

y para la integral indefinida tenemos

$$H(t+\omega) = \varepsilon H(t) + C' \ ,$$

con C' constante arbitraria. Para verificar se satisface, sumamos C' a (2.15) y tenemos:

$$\begin{aligned}
&H(t+\omega)+C' = \varepsilon \, , \\
&H(t)+C+C' = \varepsilon[H(t)+C']+C-C'(\varepsilon-1) \, , \\
&\varepsilon H(t)+C+C' = \varepsilon[H(t)+C']+C-C'(\varepsilon-1) \, , \\
&H(t+\omega)+C' = -\varepsilon H(t)+C+C' \, .
\end{aligned}$$

Por otro lado si tomamos

$$C' = \frac{C}{\varepsilon-1},$$

lo cual cumple por que es un valor admisible para la condición de $\varepsilon \neq 1$. Designamos la variable

$$l(t) = H(t)+C' = H(t)+\frac{C}{\varepsilon-1}, \tag{2.16}$$

nos preguntamos si *l(t)* es periódica de segunda especie, para comprobarlo, escribimos(2.16) cambiando t por $t+\omega$, es decir,

$$l(t+\omega) = H(t+\omega)+\frac{C}{\varepsilon-1},$$

por hipótesis tenemos que $H(t+\omega) = \varepsilon H(t)$, entonces,

$$\begin{aligned}
l(t+\omega) &= \varepsilon H(t)+C+\frac{C}{\varepsilon-1} \, , \\
&= \varepsilon H(t)+\frac{(\varepsilon-1)C+C}{(\varepsilon-1)} \, , \\
&= \varepsilon H(t)+\frac{\varepsilon C}{(\varepsilon-1)} \, , \\
&= \varepsilon[H(t)+\frac{C}{(\varepsilon-1)}] \, .
\end{aligned}$$

comprobamos que efectivamente *l(t)* es periódica de segunda especie.
Podemos concluir que si $\zeta(t)$ es de segunda especie, entonces podemos determinar la constante de integración C, de tal manera que $\int \zeta(t)dt$ sea también periódica de segunda especie, con el mismo período y multiplicador que $\zeta(t)$.

Hasta ahora, repasamos varios resultados del artículo de Floquet que quedaron ignorados en la literatura moderna de las ciencias aplicadas. Sin embargo, entre los últimos resultados presentados por Floquet en su artículo, en particular uno fue el que tuvo un considerable impacto a lo largo del tiempo y su aplicación se puede encontrar en una amplia gama de artículos en la actualidad. Se trata de que, una solución periódica de segunda especie se puede escribir como el producto de una función exponencial por una función periódica de primera especie, donde la función exponencial contiene el llamado exponente de Floquet.

Observamos que las funciones periódicas de segunda especie se expresan a través de las funciones de primera especie. Sea $\mathcal{F}(t)$ una función tal que

$$\mathcal{F}(t+\omega) = \varepsilon\mathcal{F}(t) \, . \tag{2.17}$$

Tomamos $\varepsilon = e^{\omega r}$, siendo $r = \frac{\log \varepsilon}{\omega}$. La función $\theta(t) = e^{-rt}\mathcal{F}(t)$ satisface $\theta(t+\omega) = \theta(t)$, consecuentemente se tiene:

$$\mathcal{F}(t) = e^{rt}\theta(t)\ . \tag{2.18}$$

En resumen, una función periódica de segunda especie de período ω y de multiplicador ε es de forma $e^{rt}\theta(t)$, donde r es cualquiera de los valores de $\frac{\log \varepsilon}{\omega}$ y $\theta(t)$ es una función periódica de primera especie de perído ω.
Para dos funciones de segunda especie del mismo período y multiplicador, las dos cantidades r van a diferir o por cero o por un múltiplo de $\frac{2\pi}{\omega}i$; si los multiplicadores son distintos, la diferencia en las cantidades r no sera ni nula ni un múltiplo de $\frac{2\pi}{\omega}i$.
Por otra parte, si el $det(A-\varepsilon I) = 0$ tiene solamente raíces distintas, el sistema fundamental de soluciones tendrá la forma:

$$e^{r_i t}\theta(t) \quad (i = 1,2,3,\ldots,m)\ , \tag{2.19}$$

donde las r_i no pueden ser nulas ni múltiplos de $\frac{2\pi}{\omega}i$. En el otro caso, si el $det(A-\varepsilon I) = 0$ tiene raíces múltiples, la multiplicidad μ forma el grupo Φ correspondiente a la raíz $\varepsilon = e^{\omega r}$, entonces el sistema fundamental de soluciones tendrá la forma:

$$\begin{aligned}
&e^{rt}\theta_{11}(t)\ ,\\
&e^{rt}[\theta_{21}(t) + t\theta_{22}(t)]\ ,\\
&e^{rt}[\theta_{31}(t) + t\theta_{32}(t) + t^2\theta_{33}(t)]\ ,\\
&\qquad\vdots\\
&e^{rt}[\theta_{\mu 1}t) + t\theta_{\mu 2}(t) + t^2\theta_{\mu 3}(t) + \ldots + t^{\mu-1}\theta_{\mu\mu}(t)]\ .
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Ejemplos de aplicaciones

3.1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales de coeficientes periódicos más conocidas son las de segundo orden, siendo precisamente ellas las que más se encuentran en las aplicaciones. En cuanto a las ecuaciones diferenciales de primer orden, en general son fácilmente integrables. Ecuaciones diferenciales de orden superior a dos con coeficientes periódicos son relativamente poco encontradas en la literatura y no se van a considerar en lo que sigue. Entre las ecuaciones de segundo orden con coeficientes periódicos las de mas aplicaciones son las ecuaciones de Mathieu y de Hill. Esto se debe a las formas cosinusoidales de sus coeficientes que ocurren con mucha frecuencia en la mayoría de los campos modernos de las nanociencias y nanotecnología. En principio, cualquier ecuación de segundo orden de la puede ser transformada a la forma normal de Mathieu o de Hill en el momento que alguno de sus coeficientes presenta periodicidad cosinusoidal. Sin embargo, hay muchos casos en los cuales el análisis general de tipo Floquet se ha considerado, precisamente uno de los mas relevantes es el de las ondas de Bloch, soluciones de la ecuación de Schrödinger para los electrones en materiales cristalinos.

3.2. Ejemplo 1: Las vibraciones de una membrana elíptica

La ecuación que describe las vibraciones de una membrana elíptica, fue introducida por E. L. Mathieu en 1868 [6], es una de las ecuaciones de coeficientes periódicos más sencillas. La forma normal de la ecuación de Mathieu es:

$$w''(z) + (a + b\cos 2z)w(z) = 0 \ . \tag{3.1}$$

Los parámetros a y b son reales y aplicado a las vibraciones de membrana las soluciones pueden ser periódicas de período π o 2π. La ecuación de Mathieu surge también del análisis del fenómeno de resonancia paramétrica asociado a un oscilador cuyos parámetros varíen con el tiempo. Históricamente se ha empleado en la resolución de problemas como el análisis del movimiento de un péndulo con su origen desplazándose en la dirección vertical en torno a una posición de equilibrio.
En el trabajo de Mathieu surgió el problema de la existencia de soluciones periódicas para

una ecuación diferencial con coeficientes periódicos. En el caso de la ecuación de Mathieu hay cuatro tipos de soluciones periódicas en función de las condiciones de frontera, las parejas de soluciones periódicas linealmente independientes son:

$$\begin{array}{ll} ce_1(z), & se_1(z) \\ ce_2(z), & se_2(z) \end{array}$$

estas soluciones tienen la propiedad de

$$\lim_{b\to 0} ce_m(z) = \cos mz\ , \qquad \lim_{b\to 0} se_m(z) = \sin mz \tag{3.2}$$

satisfaciendo para m par como impar. Las expresiones efectivas de las funciones ce y se son las siguientes series de Fourier

$$ce_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1,n}^k \cos(2n+1)z\ , \qquad se_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2,n}^k \sin(2n+1)z\ , \tag{3.3}$$

con las condiciones de frontera $ce_1'(0) = ce_1'(\pi) = 0 \quad y \quad se_1(0) = se_1(\pi) = 0$

$$ce_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{4,n}^k \cos 2nz\ , \qquad se_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{3,n}^k \sin 2nz\ , \tag{3.4}$$

cuyas condiciones de frontera son:$ce_2'(0) = ce_2'(\frac{\pi}{2}) = 0,\quad \text{y} \quad se_2(0) = se_2(\frac{\pi}{2}) = 0.$
Las primeras dos soluciones son periódicas de período 2π, de los cuales ce_1 es solución par que cumple con las condiciones de frontera $ce_1'(0) = 0$ y $ce_1'(\pi) = 0$, mientras que se_1 es solución impar que cumple con las condiciones de frontera $se_1(0) = 0$ y $se_1(\pi) = 0$. Por otro lado, la $se_2(z)$ es impar y de período π que cumple con las condiciones de frontera $se_2(0) = 0$ y $se_2(\pi/2) = 0$, mientras que la $ce_2(z)$ es par de período π que cumple con las condiciones de frontera $ce_2'(0) = 0$ y $ce_2'(\pi/2) = 0$. Los coeficientes en las series de Fourier (3.3) y (3.4) se determinan de las condiciones de frontera. Además de estas soluciones periódicas, la ecuación de Mathieu tiene también soluciones de tipo Floquet que en general se escriben en la forma

$$w_F = e^{cz} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2niz}\ .$$

donde c es un exponente de Floquet.

Los ejemplos clásicos de aplicación de la ecuación de Mathieu son las ecuaciones de movimiento del péndulo de longitud variable en el tiempo y el péndulo con punto de suspensión en movimiento oscilatorio vertical, los cuales se reducen a ecuaciones de Mathieu.

3.3. Ejemplo 2: Péndulo de longitud oscilante en el tiempo

La ecuación de movimiento del péndulo de longitud variable es:

$$\phi'' + \left(\frac{g - L''}{L}\right)\phi = 0 \tag{3.5}$$

donde

$$L = L_0(1 + \Delta \cos \omega t) \; . \tag{3.6}$$

Sustituyendo (3.6) en (3.5) y considerando $\Delta \ll 1$, se obtiene

$$\phi'' + [\Omega^2 + \Delta(\omega^2 - \Omega^2)\cos \omega t]\phi = 0 \tag{3.7}$$

donde $\Omega^2 = \frac{g}{L}$. Usando $\tau = \frac{\omega}{2}t$, $a = \frac{4\Omega^2}{\omega^2}$, $b = 4\Delta\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)$ se obtiene la forma normal de la ecuación de Mathieu:

$$\phi''(\tau) + (a + b\cos 2\tau)\phi(\tau) = 0 \; . \tag{3.8}$$

Las soluciones de tipo Floquet para este péndulo son:

$$\phi_F = e^{c\tau}\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2ni\tau} \; .$$

3.4. Ejemplo 3: Péndulos con pivote en movimiento oscilatorio vertical

En este caso de péndulo, asumiendo que el pivote oscila en la dirección vertical de acuerdo a una función $p(t) = Acos\omega t$, como se observa en la figura (3.1), se obtiene la siguiente ecuación de movimiento para el ángulo polar θ con respecto a la vertical

$$\theta'' + \left(\frac{g + p''(t)}{L}\right) sen\theta = 0 \tag{3.9}$$

Escojemos $\theta = \pi$ cuando el péndulo apunta en la dirección positiva del eje vertical, es decir

Figura 3.1: Gráfica de péndulo pendulo con pivote en movimiento oscilatorio vertical

para la posición de equilibrio inestable). Cuando el péndulo esta muy cerca de esta posición podemos introducir la desviación pequeña $x = \theta - \pi$ tal que $|x| \ll 1$ para la cual la ecuación de movimiento se reduce a la siguiente forma lineal

$$x'' - \left(\frac{g + p''(t)}{L}\right) x = 0 \; . \tag{3.10}$$

Como $p(t) = A\cos\omega t$ nos lleva a

$$x'' + \left(\frac{-g + A\omega^2\cos\omega t}{L}\right) x = 0 \; . \tag{3.11}$$

Con el cambio de variable $2\tau = \omega t$ se obtiene

$$x'' + \left(\frac{-4g}{\omega^2 L} + \frac{4A}{L}(\cos 2\tau)\right) x = 0 \; . \tag{3.12}$$

Identificando $a = \frac{-4g}{\omega^2 L}$ y $b = \frac{4A}{L}$ se llega a la forma normal de la ecuación de Mathieu en la variable τ:

$$\phi''(\tau) + (a + b\cos 2\tau)\phi(\tau) = 0 \; . \tag{3.13}$$

En general, el parámetro b es pequeño si la amplitud de las oscilaciones del pivote es pequeña comparada con la longitud del péndulo. En este caso las soluciones de la dicha ecuación del péndulo, son de la forma:

$$w_F = e^{cx}\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2nix} \; ,$$

donde c es un exponente de Floquet.

3.5. Ejemplo 4: Movimiento del perigeo lunar

En 1877 el astrónomo norte americano G.W. Hill publicó un artículo sobre el movimiento del perigeo de la luna (distancia más próxima de la órbita de la luna a la tierra), en el que aparecen las primeras soluciones periódicas del problema de los tres cuerpos, desde el descubrimiento hecho por Lagrange de las soluciones de equilibrio relativo en 1772. En este trabajo, Hill determinó primero una solución periódica y dedujo las ecuaciones de variación, después redujo el sistema a una sola ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$w''(z) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kz\right) w(z) = 0 \; , \tag{3.14}$$

donde w es la desviación normal de la luna respecto a la órbita promedio y el término $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kz$, sólo depende de la posición relativa de la luna con referencia al sol, la cual esta expresada como una serie de Fourier. La ecuación de Hill puede ser considerada como una forma generalizada de la ecuación de Mathieu:

$$w''(z) + \left(\sum_{k=0}^{1} a_k \cos 2kz\right) w(z) = 0 \; . \tag{3.15}$$

En la actualidad, las ecuaciones de segundo orden con coeficientes periódicos se llaman con mucha frecuencia ecuaciones de Hill, aunque Hill investigó solamente ecuaciones de tipo (3.14). Las soluciones de tipo Floquet de (3.14) se escriben en la forma:

$$w_F = e^{cz} \sum_{n}^{\infty} c_n e^{2niz} \tag{3.16}$$

como ya se ha mencionado en el caso de la ecuación de Mathieu y por lo tanto se deben determinar los parámetros c y c_n. Para determinarlos se sustituye w_F en (3.14) lo que nos lleva al sistema de ecuaciones

$$(c + 2ni)^2 c_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m c_{n-m} = 0 \tag{3.17}$$

donde $n \in Z^+$. La solución del sistema infinito (3.17) se obtiene a través del método de los determinantes infinitos iniciado por Hill y formalizado de manera completa por von Koch [8]. Lo que es de notar es que las soluciones de tipo Floquet son las que llevan al procedimiento de determinantes infinitos de Hill, el cual sirve para determinar los parametros de este tipo de soluciones.

3.6. Ondas de Bloch en medios periódicos

La ecuación de Schrödinger fue introducida en 1926 en una serie de artículos fundamentales de Erwin Schrödinger. Es la ecuación que rige el movimiento no relativista de cualquier partícula cuántica por la cual su Hamiltoniano $H(p,q)$ se expresa como un operador diferencial de segundo orden. Dos años después, la ecuación de Schrödinger tres-dimensional con coeficientes periódicos fue estudiada en un largo trabajo de Bloch [9] sobre el movimiento de los electrones en cristales. Bloch obtuvo soluciones con un factor parecido a las ondas planas pero tomando también en cuenta la periodicidad de la red cristalina en sus expresiones. Tales soluciones se conocen desde entonces como ondas de Bloch. En realidad, las ondas de Bloch son soluciones de tipo Floquet para ecuaciones diferenciales parciales en dimensiones superiores o iguales a dos.
En tres dimensiones, las ondas de Bloch para H son soluciones de la ecuación de Schrödinger

$$H\psi(q) \equiv -\Delta\psi(q) + V(q)\psi(q) = \lambda\psi(q) \ , \qquad q \in R^3 \tag{3.18}$$

con potencial periódico

$$V(q + \omega) = V(q) \ , \tag{3.19}$$

de la forma

$$\psi(q) = e^{2\pi i p \cdot q}\phi(q) \tag{3.20}$$

donde $p \in R^3$, $p \cdot q = \sum_{j=1}^{3} p_j q^j$ y $\phi(q)$ es una función no nula con la periodicidad de $V(q)$:

$$\phi(q + \omega) = \phi(q) \tag{3.21}$$

para todo $q \in R^3$ y $\omega \in Z^3$. Las condiciones (3.20), (3.21) son equivalentes a la propiedad:

$$\psi(q + \omega) = e^{2\pi i p \omega}\psi(q) \tag{3.22}$$

para todo $q \in R^3$ y $\omega \in Z^3$. Estas soluciones fueron introducidas por Bloch pero se ve que ellas son de hecho soluciones periódicas de tipo Floquet. La interpretación física que se da a los parámetros de Floquet p_i es la de las componentes covariantes del vector impulso de los electrones en propagación en el medio cristalino, es decir

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^{3} p_j a^j \tag{3.23}$$

donde a^j son las componentes de la base dual a la base a_k de la red cristalina, relacionadas por ortogonalidad:

$$a^j a_k = 2\pi \delta^j_k \ . \tag{3.24}$$

Capítulo 4

Conclusiones

En el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos, es imprescindible hablar de las soluciones de dicha ecuación sin hacer mención del artículo publicado en 1883 por G. Floquet. Dicho trabajo es de gran relevancia cuando es necesario escribir las soluciones de una ecuación diferencial con coeficientes periódicos. Cabe mencionar que el artículo de Floquet abarca más resultados matemáticos, que solamente describir la estructura que toman las soluciones.

En esta tesis, se realizó un análisis cualitativo de algunos de estos otros aspectos, que llevaron a Floquet a la idea de plantear lo que hasta ahora es su resultado principal. Particularmente se estudió:

- La construcción de soluciones periódicas de segunda especie a partir de soluciones periódicas.
- La particularización de la forma que toman las soluciones cuando el $det(A-\varepsilon I)=0$ tiene raíces distintas, múltiples y complejas.
- La reducción del orden de una ecuación diferencial con coeficientes periódicos.
- Las propiedades de la integral $\int \zeta(t)dt$, con $\zeta(t)$ función periódica de segunda especie, la cual aparece en la reducción del orden de una ecuación con coeficientes periódicos.

En adición al marco teórico de [1], se trabajó en el ejemplo, usando el caso más sencillo del oscilador armónico y se construyeron las soluciones periódicas de segunda especie.

Finalmente se buscaron ejemplos análogos al caso del oscilador armónico en donde, partiendo de una ecuación diferencial y usando el resultado de Floquet, es muy sencillo describir la estructura de las soluciones. Entre ellos se encuentran: la ecuación de las vibraciones de una membrana elíptica, la ecuación del movimiento del perigeo lunar, la ecuación de algunos péndulos y en la mecánica cuántica, la descripción de las ondas de Bloch en medios periódicos.

Apéndice A

Soluciones de Floquet del oscilador armónico

Tenemos la ecuacion diferencial del oscilador armónico de la siguiente manera:

$$P(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + p^2 y = 0 \ ,$$

en donde los coeficientes constantes 1 y p^2 los tomamos periódicos de período arbitrario, podemos escribir la ecuación anterior de manera matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ ,$$

de otra manera tenemos:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t),$$

en donde $A(t)$ es una matriz periódica de período ω, es decir, $A(t+\omega) = A(t)$. Ahora calculamos su matriz fundamental:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} cos(pt) & sen(pt) \\ -psen(pt) & pcos(pt) \end{pmatrix} \ .$$

Una matriz fundamental se puede escribir como la matriz Wronskiano, que es la matriz construida al colocar las funciones solución en el primer renglón, la primera derivada de cada función y en el segundo renglón la derivada consecutiva y así de manera sucesiva hasta la derivada m-1.

Como $\Phi(t)$ es una matriz fundamental, entonces cumple:

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$$

de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi}_{11} & \dot{\Phi}_{12} \\ \dot{\Phi}_{21} & \dot{\Phi}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(pt) & sen(pt) \\ -psen(pt) & pcos(pt) \end{pmatrix}$$

Si evaluamos la matriz $\Phi(t)$ en $t+\omega$, para cualquier ω, ya que se considera de período arbitrario, en este caso vamos a elegir $\omega = 2\pi$, entonces podemos escribir

$$\dot{\Phi}(t+\omega) = A(t+\omega)\Phi(t+\omega) \ ,$$

como $A(t+\omega) = A(t)$ entonces:

$$\dot{\Phi}(t+\omega) = A(t)\Phi(t+\omega) \ .$$

Lo cual significa que $\Phi(t+\omega)$ es otra matriz fundamental. Al ser ambas matrices fundamentales entonces existe una matriz C tal que $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)C$. Despejando C:

$$C = \Phi(t)^{-1}\Phi(t+\omega).$$

La matriz C se conoce con el nombre de matriz de monodromía.

Haciendo que $\Phi(t)$ sea principal en cero, es decir que $\Phi(0) = I$, entonces el valor de $C = \Phi(\omega)$. Entonces la matriz de monodromía es la matriz fundamental obtenida $\Phi(t)$ valuada en $t = \omega$ definida por la condición inicial $\Phi(0) = I$.

Podemos ver que en el ejemplo del oscilador armónico, la matriz fundamental $\Phi(t)$ no cumple con ser principal en cero, o sea que $\Phi(0) \neq I$. Haciendo una manipulación algebraica en el término de $sen(pt)$, cambiandolo por $\frac{1}{p}sen(pt)$, nos conduce a:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} cos(pt) & \frac{1}{p}sen(pt) \\ -psen(pt) & cos(pt) \end{pmatrix} \ , \tag{A.1}$$

evaluando la matriz en el período ω tenemos la matriz de monodromía:

$$\Psi(2\pi) = \begin{pmatrix} cos(2\pi p) & \frac{1}{p}sen(2\pi p) \\ -psen(2\pi p) & cos(2\pi p) \end{pmatrix} \ . \tag{A.2}$$

Ahora falta calcular los eigenvalores de dicha matriz, la ecuación característica es el $det[\psi(\omega) - \varepsilon I] = 0$. Desarrollando obtenemos el polinomio:

$$\varepsilon^2 - (2cos(2\pi p))\varepsilon + (cos^2(2\pi p) + sen^2(2\pi p)) = 0 \ ,$$

de donde obtenemos que las raíces son:

$$\varepsilon_1 = cos(2\pi p) + isen(2\pi p)$$
$$\varepsilon_2 = cos(2\pi p) - isen(2\pi p)$$

Finalmente, las soluciones de Floquet las podemos escribir como:

$$y_1(t) = e^{2\pi p}cos(pt) \ ,$$
$$y_2(t) = e^{2\pi p}sen(pt) \ .$$

Apéndice B

Conceptos básicos

Matriz de transicion de cambio de base

Definición B.1. *Una matriz cuadrada A mapea vectores de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^n$*, si representamos los vectores de* $\mathbb{R}$ *con respecto a una nueva base* $B_2 = \{b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2m}\}$*, tenemos entonces que la matriz* $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ *y* $A = Q\bar{A}Q^{-1}$*, se dice entonces que las matrices* A *y* $\bar{A}$ *son matrices semejantes.*

Sean B_1 *y* B_2 *dos bases de un espacio vectorial* V*. Se llama Matriz de transición de cambio de la base* B_1 *a* B_2 *a la matriz* M *de* $m \times m$ *que cumple, para todo* $x \in V$*.*

$$(x)_{B_1} = M(x)_{B_2}$$

en donde $(x)_{B_2}$ *y* $(x)_{B_1}$ *es la representación de* x *en la base,* B_1 *y* B_2 *respectivamente.*

Ejemplo 6. *Sea* $B_1 = \{b_{11}, b_{12}, \ldots, u_{1m}\}$ *y* $B_2 = \{b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2m}\}$ *dos bases de un espacio vectorial* V *de dimensión* m*. Sea* $x \in V$*, entonces se puede expresar* x *en términos de ambas bases:*

$$\begin{aligned}(x)_{B_1} &= a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + \ldots + a_m b_{1m} \\ (x)_{B_2} &= c_1 b_{21} + c_2 b_{22} + \ldots + c_m b_{2m}\end{aligned}$$

Ahora bien, como B_2 *es una base, cada* b_{2j} *en* B_1 *se puede escribir como una combinación lineal de las* b_{1j}*. Por lo tanto, existe un sólo conjunto de escalares* $v_{1j}, v_{2j}, \ldots, v_{nj}$ *tal que para* $j = 1, 2, \ldots, m$

$$b_{1j} = v_{1j} b_{21} + v_{2j} b_{22} + \ldots + v_{mj} b_{2m} \tag{B.1}$$

Entonces la matriz de transición de cambio de base M esta dada por las columnas de(B.1).

Endomorfismo

Definición B.2. *Se llama endomorfismo a la aplicación lineal* $f : V \to V$ *de un espacio vectorial* V *a si mismo.*

La expresión matricial de un endomorfismo de un espacio vectorial, depende de la base escogida. Sea V un espacio vectorial y $f: V \to V$ un endomorfismo cuya matriz en la base B_1 es A, es decir:

$$f(u) = Au$$

La matriz correspondiente es una matriz cuadrada. Al hacer un cambio de base de la matriz cambia y puede llegar a ser más sencilla.
Si una matriz es diagonalizable, el endomorfismo expresado por dicha matriz (en cualquier base) es diagonalizable.
La importancia de encontrar un endomorfismo que lleve nuestra matriz a su forma diagonal, reside en que es más sencillo trabajar con una matriz diagonal, por ejemplo, al realizar el procedimiento de calcular la potencia de una matriz.

Formas de Jordan

Cuando un endomorfismo es diagonalizable, es decir, dada su matriz en una base dada A, entonces existe una matriz de cambio de base C tal que $C^{-1}AC$ es diagonal. Para el caso donde el endomorfismo no es diagonalizable, esto no es posible.

Definición B.3. *Dada una matriz cuadrada $\mathcal{A} \in M_m(\mathbb{R})$ se denomina* forma de Jordan de $\mathcal{A}$ *a toda matriz J semejante a ella (es decir existe una matriz $C \in M_m(\mathbb{R})$ invertible tal que $\mathcal{A} = CJC^{-1}$)que es diagonal por bloques de la forma:*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_r \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{R}). \tag{B.2}$$

En donde cada $\mathbf{J}_i$ es un bloque de Jordan de orden m_i, asociado a algún eigenvalor ε_i de $\mathcal{A}$ y en donde $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m$. Cada uno de los bloques de Jordan son matrices cuadradas que tienen iguales todos los elementos de la diagonal, tienen 1 en todos los sitios inmendiatamente encima o por debajo de la diagonal y ceros en los demás sitios. La matriz:

$$J = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix}.$$

es un ejemplo de una forma de Jordan de orden 3 con raíces distintas.

Caso raíces complejas

Tenemos que considerar también el caso en el que las raíces son complejas, en este caso, supongamos que los valores propios de la matriz A son distintos y complejos, entonces la matriz A es diagonalizable en $\mathbb{C}$ pero no en $\mathbb{R}$. Los valores propios complejos de una matriz con entradas reales, aparecen por parejas de valores conjugados: $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$, por ser raíces del polinomio característico de la matriz.
Hay que considerar dos casos, el caso de una matriz de orden $m \times m$, con todos sus eigenvalores complejos, donde al venir en pares conjugados entonces el número de eigenvalores

será par. El otro caso es cuando sólo algunos pares de eigenvalores son complejos y los demás son reales.
El primer caso de una matriz de orden 2, tenemos que $\alpha+i\beta$ y $\alpha-i\beta$ son todos los eigenvalores complejos. Entonces decimos que existe un eigenvector w de coordenadas complejas $w=u+iv$, las cuales se pueden descomponer en parte real e imaginaria. Siendo A una matriz de orden 2, entonces podemos calcular $f(u)$ y $f(v)$, considerando como anteriormente se mencionó que f y $\bar{f}$ corresponde al endomorfismo de matriz A en la base canónica en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ respectivamente y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
&\bar{f}(w)=(\alpha+i\beta)w \Rightarrow \\
&f(u)+if(v)=\bar{f}(u)+i\bar{f}(v) \\
&\bar{f}(u+iv)=(\alpha+i\beta)(u+iv)=\alpha u-\beta v+i(\beta u+\alpha v)
\end{aligned}$$

Al igualar partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned}
f(u)&=\alpha u-\beta v \\
f(v)&=\beta u+\alpha v
\end{aligned}$$

Podemos comprobar también que el eigenvector complejo correspondiente a $\alpha-\beta i$ es $w=u-iv$. Ya que

$$\begin{aligned}
&\bar{f}(u-iv)=\bar{f}(u)-i\bar{f}(v) \\
&=f(u)-if(v) \\
&=\alpha u-\beta v-i(\beta u+\alpha v) \\
&=(\alpha-\beta i)(u-iv)\ .
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que eigenvectores $w=u+iv$ y $\bar{w}=\bar{u}+i\bar{v}$ son vectores linealmente independientes de $\mathbb{C}^2$, por corresponder a eigenvalores distintos, es decir, los eigenvectores w y $\bar{w}$ son combinación lineal de los u, v y recíprocamente. Por lo tanto, los vectores $\{u,v\}$ son una base de $\mathbb{R}^2$. Llamada base de Jordan real y f se expresa en esa base por:

$$J=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Que es la forma de Jordan real del endomorfismo de f no diagonalizable en $\mathbb{R}$, pero sí diagonalizable en $\mathbb{C}$.

Por otro lado cuando tenemos el caso de un valor real y otro complejo, lo que hacemos es suponer que v_1 es el eigenvector correspondiente al único eigenvalor real, w y $\bar{w}$ eigenvectores asociados a los eigenvalores complejos, por lo tanto, tenemos la base $\{v_1,w,\bar{w}\}\in\mathbb{C}^3$ y de $\mathbb{R}^3$, el endomorfismo f se expresa por:

$$J=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}\ .$$

Apéndice C

Iniciadores de la teoría de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos

Gaston Floquet: 15 Diciembre 1847 Epinal Francia, 7 Octubre 1920 Nancy Francia

Gaston Floquet estudió en el Lycée Louis-le-Grand en París, en 1869 ingresó a la Escuela Normal Superior. Luego, en el año siguiente comenzó la guerra franco-prusiana, la cual en muchos aspectos sería desastrosa para Francia, con ello la situación política entre Francia y Prusia se deterioro, por lo tanto disminuyo la popularidad de Napoleón III, emperador francés, con lo cual, se planeó que una guerra con Prusia podría cambiar esa suerte política con la idea de que el Ejército francés podría derrotar a Prusia. En cambio, Bismarck el canciller prusiano, vió una guerra con Francia como una oportunidad para unir a los estados del sur de Alemania. Con ambos, sintiendo que la guerra sería para su beneficio, se hizo inevitable la guerra franco-prusiana. El 14 de julio, Bismarck envió un telegrama dirigido a enfurecer al gobierno francés. Logrando el éxito esperado, el 19 de julio Francia declaró la guerra a Prusia. Por otra parte, Floquet se unió al ejército del Loire como segundo teniente y luchó en la guerra hasta la firma del tratado de paz, cuando regresó a sus estudios en la École Normale Supérieure, la situación en el país era difícil, por el motivo de seguir buscando motivos por los que perdieron la guerra de forma tan decisiva y en donde el sistema educativo obtuvo grandes consecuencias. En este ambiente difícil Floquet terminó sus estudios en 1873 y el 19 de septiembre de ese año fue nombrado miembro del Lycée de Belfort donde se hizo cargo del campo de las matemáticas.

Floquet obtuvo su título en matemáticas el 15 de septiembre de 1875 y una semana más tarde fue nombrado profesor de matemáticas elementales en el Lycée dÁngers. El 8 de noviembre del año siguiente, Floquet fue nombrado para el puesto de profesor de matemáticas especiales en el Liceo de Clermont-Ferrand. El 13 de febrero 1878 fue nombrado maitre conférences en la Facultad de Ciencias de Nancy. Como resultado de la guerra franco-prusiana la cual había resultado desastrosa para Francia, un territorio francés había sido anexado por Alemania, lo que aumentó la importancia de Nancy, universidad que estaba situada cerca de la frontera, con habitantes negados a ser ciudadanos alemanes.

Floquet presentó su tesis doctoral Sur la théorie des Ecuaciones différentielles linéaires (Sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales) a la Facultad de Ciencias en París el 8 de abril de 1879. Gran parte de la labor que realizó durante los próximos años se basó en las ideas que se han incorporado en su tesis. Por ejemplo, publicó tres artículos con el título Sur les Ecuaciones linéaires différentielles a coeficientes périodiques (Sobre ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos), dos en 1881 y la tercera en 1883. En 1884 publicó La adición a un mémoire sur les Ecuaciones différentielles linéaires (además de una memoria sobre ecuaciones diferenciales lineales) y Sur Ecuaciones les linéaires différentielles coeficientes a périodiques doublement (en ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos dobles). Los dos artículos en 1881 y el documento mencionado en segundo lugar de 1884 apareció en Comptes Rendus mientras que los otros aparecieron en la revista Annals of la École Normale Supérieure.

En noviembre de 1879 Floquet recibió un nombramiento temporal como profesor en Nancy y en el año siguiente, fue puesto a cargo del curso de matemáticas. En julio de 1880 se le dio una cátedra permanente y para el final del año en que fue titular de la cátedra de matemáticas puras y análisis. Fue nombrado director de la Facultad de Ciencias de Nancy en octubre de 1905. Era un personaje de mucho éxito, creó una serie de institutos que ayudaron a que Nancy a converirse en el principal centro de investigación científica fuera de París. Continuó publicando documentos de alta calidad en las matemáticas y la astronomía en Comptes Rendus y en diversas revistas asociadas a Nancy. Por ejemplo, publicó sur une classe dÉcuaciones différentielles linéaires no homogénes (1887), Sur une propriété de la superficie $xyz = l^3$ (1888), Sur le mouvement dún fil dans un plan de precio fijo (1889), Sur l ´équation de Lamé (1895), Sur le mouvement dún punto ou dún fil sur glissant plan de la ONU horizontal fixe lorsqún paciente compte de la rotación de la terre et du frottement (1898), Sur les Ecuaciones du mouvement intrinséques d ún fil et sur le calcul de sa tensión (1901), y Lástronome Messier (1902).

La Primera Guerra Mundial estalló en 1914 y Nancy estaba fuertemente bombardeada. Floquet permaneció en Nancy durante la guerra, ni una sola vez salió de la ciudad durante los cuatro años de guerra hasta 1918.

George William Hill: 3 de Marzo 1838 Nueva York EUA, 16 de Abril 1914 West Nyack, EUA

Se graduó de Rutgers en 1859. En su último año, Hill recibió el premio otorgado por la Universidad de Harvard por la solución de un problema. Al parecer, había absorbido un fuerte interés por el movimiento planetario, posteriormente se hizo el trabajo de su vida. Trabajó para la oficina Almanaque Náutico en Cambridge, Massachussets desde 1861-1892, tiempo durante el cual desarrolló la teoría de las ecuaciones diferenciales necesarias, describiendo las órbitas de Venus, Júpiter y Saturno (1872-4) y finalmente la Luna (1877). En 1874 fue elegido miembro de la Academia Nacional de Ciencias, y en 1887 recibió la medalla de la Real Sociedad Astronómica británica. En su artículo de 1886 en Acta Mathematica, desarrolló la teoría de la ecuación diferencial lineal:

$$y'' = p(t)y \tag{C.1}$$

donde $p(t)$ es una función periódica del tiempo t. Hoy llamada ecuación de Hill, con el fin de explicar de las observaciones de la distancia a la Luna como una función del tiempo. Después de este trabajo, regresó a su casa de la infancia en West Nyack, Nueva York, durante 1892-5 para dio clases en la Universidad de Columbia, pero su fama creció después de que fue elegido como el primer presidente de la Sociedad Americana de Matemáticas (1894-1896). Regresó a Colombia 1898-1900, y murió en 1904. Las Obras Completas de George Hill, que se pueden encontrar en la Biblioteca de Matemáticas, la cual contiene una biografía de 20 páginas por el famoso matemático Henri Poincaré, alabando el trabajo original y profundo de Hill en la órbita de la Luna. Hoy en día, George Hill es honrado en varias formas en Rutgers. En 1996, Hill fue elegido al Salón de la Fama del Alumnado de Rutgers (en la placa en el Salón Winants se le reconoce como astrónomo, sin hacer mención de las matemáticas).

Bibliografía

[1] G. Floquet, *Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques*, Annales de l'École Normale Supérieure 12: 47-88, (1883).

[2] V. A. Yakubovich, V. M. Starzhinskii, *Linear differenctial equations with periodic coefficients I*, John Wiley & Sons, Inc., New York. (1975).

[3] S.I. Grossman, *Elementary Linear Algebra*, Wadsworth, Inc., Estados Unidos de América.(1987).

[4] C.H. Edwards, D.E. Penney, *Ecuaciones diferenciales*, Pearson Educación, México, (2001).

[5] M. S. P. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Diferential Equations*, Scottish Academic Press, Edinburgh and London, (1973).

[6] E. Mathieu, *Le mouvement vibratoire dúne membrane de forme elliptique*, J. de Math. pures et appliquées **13**, 137-203 (1868).

[7] G.W. Hill, *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and the moon*, Acta Math. **8**, 1-36 (1886).

[8] H. von Koch, *Sur les determinants infinis et les equations differentielles linéaires*, Acta Math. **16**, 217-295 (1892).

[9] F. Bloch, *Uber die Quantenmechanik der Electronen in Kristallgittern*, Z. Phys. **52**, 555-600 (1928).

[10] P. Alpatov , L.E. Reichl, *Spectral properies of a time-periodic Fokker-Planck equation*, Phys. Rev. E **49**, 2630-2638 (1994).

[11] K.F. Milfeld, R.E. Wyatt, *Study, extension, and application of Floquet theory for quantum molecular system in an oscillating field*, Phys. Rev. A **27**, 72-94 (1983).

[12] W.R. Salzman, *Quantum mechanics of systems periodic in time*, Phys. Rev. A **10**, 461-465 (1974).

[13] C.A. Klausmeier, *Floquet theory: a useful tool for understanding nonequilibrium dynamics*, Theor. Ecol. **1**, 153-161 (2008).

[14] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, (2009).