



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**Acerca de Algunas Condiciones Topológicas de  
Estabilizabilidad en Sistemas de Control**

Tesis que presenta

**Rafael Castañeda Díaz**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias Aplicadas**

En la opción de

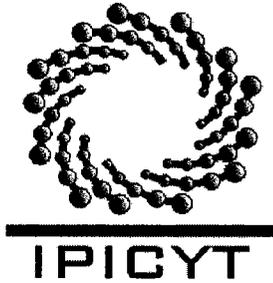
**Control y Sistemas Dinámicos**

Director de la Tesis:

Dr. Hugo Cabrera Ibarra

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro

San Luis Potosí, S.L.P., Agosto de 2005.



# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

COPIA CERTIFICADA

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 008 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 25 días del mes de agosto del año 2005, se reunió a las 18:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Hugo Cabrera Ibarra</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Arturo Zavala Río</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. David Antonio Lizárraga Navarro</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS  
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Rafael Castañeda Díaz**

sobre la Tesis intitulada:

*Acerca de Algunas Condiciones Topológicas de Estabilizabilidad en Sistemas de Control*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. David Antonio Lizárraga Navarro**  
**Dr. Hugo Cabrera Ibarra**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 19:41 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fé el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 25 días del mes agosto de 2005.



  
**Mtra. Ma. Elisa Lucio Aguilar**  
Jefa del Departamento de Asuntos Escolares

## **Abstract**

In this thesis we proposed a theoretical framework that allowed us to reformulate various control problems means of a unified formalism procedure. The reformulation of the problems using a conceptual framework can easily the study under which conditions some of them admit a solution. In particular, some conditions necessary to solve the asymptotic stabilization problem of equilibrium points, given by authors like Brockett, Coron and Ryan are studied and described briefly in this thesis. As an additional contribution, we extended the Coron's result of 1990 proving that it –the surjectively of the homomorphism between homology groups induced by the map defining a system– is necessary for existence of a continuous feedback law that renders a compact set as a globally attractive for the same system.

## **Resumen**

En esta tesis se propone un marco teórico que permite reformular diversos problemas de control mediante un formalismo unificador. La formulación de tales problemas en un solo marco conceptual puede facilitar el estudio de condiciones bajo las cuales algunos de éstos admiten solución. En particular, varias condiciones necesarias para resolver el problema de la estabilización asintótica de puntos de equilibrio, establecidas por autores como Brockett, Coron y Ryan, son estudiadas y descritas brevemente en esta tesis. Como contribución adicional, se extiende el resultado de Coron de 1990 al mostrar que su condición —la suprayectividad del homomorfismo entre grupos de homología inducido por el mapeo que define a un sistema— es necesaria para la existencia de una retroalimentación continua que haga de un conjunto compacto un conjunto globalmente atractivo para el mismo sistema.

## Agradecimientos

- Agradezco a los doctores David Antonio Lizárraga Navarro y Hugo Cabrera Ibarra por su disposición en la dirección de este trabajo de tesis.
- Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de posgrado en el Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A. C. (IPICYT).

## Cuadro de símbolos

$\equiv$	idénticamente igual
$\neq$	diferente
$\mathbb{R}^n$	espacio Euclidiano $n$ -dimensional
$\Phi_t^s(\cdot)$	flujo del campo vectorial $s$
$T_z M$	espacio tangente a la variedad $M$ en el punto $z$
$C^k$	$k$ -veces diferenciable
$\mathcal{V}(Q)$	conjunto de vecindades abiertas que contienen a $Q$
$\coprod$	unión disjunta
$\text{id}$	mapeo identidad
$i$	mapeo inclusión
$f_*$	homomorfismo
$\pi$	mapeo proyección
$\Delta_M$	el conjunto diagonal de $M \times M$
$\ x\ $	la norma del vector $x$
$\overline{\mathbb{B}}_\delta(0)$	la bola cerrada $\{x \in \mathbb{R}^n : \ x\  \leq \delta\}$
$\sum$	sumatoria
$f \circ g$	la composición de las funciones $f$ y $g$
$\ker f$	kernel de $f$
$\text{Im} f$	la imagen de $f$
$\mathbb{Z}$	el conjunto de los números enteros
$\sigma_p$	$p$ -simplejo estándar
$\partial$	el operador frontera
$S_n(X)$	el conjunto de $n$ -cadenas singulares
$B_n(X)$	el conjunto de las $n$ -fronteras
$Z_n(X)$	el conjunto de los $n$ -ciclos
$[0, 1]$	el intervalo unitario
$[x]$	la clase de equivalencia de $x$
$\in$	pertenece
$\forall$	para todo
$\exists$	existe

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>7</b>
2.1. Control retroalimentado . . . . .	8
2.2. Algunos problemas de control . . . . .	9
2.2.1. Problema de estabilización asintótica local . . . . .	10
2.2.2. Problemas de seguimiento . . . . .	11
2.2.3. Sincronización . . . . .	18
<b>3. Formalismo teórico unificador</b>	<b>20</b>
3.1. Nociones preliminares . . . . .	20
3.2. Definición del marco . . . . .	22
3.3. Algunos problemas típicos de control . . . . .	24
<b>4. Condiciones de estabilizabilidad</b>	<b>29</b>
4.1. Construcciones Básicas . . . . .	29
4.1.1. Grupos de homología . . . . .	32
4.2. Condiciones de estabilizabilidad . . . . .	41
4.2.1. Condición de Brockett . . . . .	42
4.2.2. Condición de Coron . . . . .	49
4.2.3. Condiciones de Ryan . . . . .	52
4.3. Extensión del resultado de Coron . . . . .	54
<b>5. Conclusiones</b>	<b>60</b>
5.1. Trabajo a futuro . . . . .	60

# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis está orientada a presentar al lector un concepto que unifica y caracteriza algunos problemas clásicos de la teoría de control a partir de una serie de definiciones y condiciones basadas en nociones fundamentales de la teoría de variedades diferenciables  $n$ -dimensionales. Esta serie de condiciones y definiciones será llamado, en este trabajo, formalismo teórico unificador.

La importancia en esta tesis de unificar tales problemas usando el formalismo, o dígase el marco también, consiste en que permite reformulaciones de los problemas equivalentes a las formulaciones ya establecidas en la literatura. Las reformulaciones de los problemas establecidas a partir de este marco teórico son útiles para el estudio de condiciones de solubilidad de los mismos. Sin embargo, puede no ser una tarea fácil concebir una definición que incluya varios de estos problemas. Parte del trabajo desarrollado es la discusión de algunas de las causas que no permiten incluir varios problemas en el marco haciendo una reformulación de éstos.

Una descripción intuitiva sobre la cuál se fundamenta el marco es la siguiente: Sean  $M$ ,  $N$  y  $X$  variedades diferenciables  $n$ -dimensionales y sean  $f : M \times N \rightarrow M$  y  $h : M \rightarrow X$  mapeos continuos. Considérese el sistema  $\dot{z} = f(z, u)$  y la ecuación  $y = h(z)$  que define la salida del sistema. En teoría de control, la pregunta natural que surge es: ¿existe una función continua  $\alpha : M \rightarrow N$  de-

finida por  $u = \alpha(z)$ , que permita que un subconjunto  $Q \subseteq X$  satisfaga un objetivo de control previamente definido para el sistema de control en lazo cerrado  $\dot{z} = f(z, \alpha(z))$ ? En el marco teórico se proponen definiciones que involucran al conjunto  $Q$ , como ejemplos, la definición de *conjunto  $Q$  estable*,  *$Q$  localmente atractivo*,  *$Q$  globalmente atractivo*, entre otras. Dichas definiciones se relacionan con los conceptos de estabilidad, estabilidad asintótica, atractividad y otros, como se verá más adelante.

Por otro lado, siguiendo este mismo orden de ideas, como caso particular de los problemas reformulados, en esta tesis se estudian algunas condiciones necesarias para encontrar leyes de control para la estabilización asintótica de puntos de equilibrio establecidas en la literatura. En este sentido, como contribución en este trabajo, se hace una extensión del resultado o condición establecida por el autor Coron basándonos en nociones básicas de teoría de homología, especialmente las de estructuras algebraicas asociadas a un espacio topológico, llamadas grupos de homología, otras nociones como la teoría de grado o grado de Brouwer y la teoría de homotopía.

La organización del contenido de la tesis es la siguiente: En el capítulo 2 se presentan, de manera breve, algunos antecedentes básicos en teoría de control sobre los sistemas de control retroalimentado y la formulación de algunos problemas en este tipo de sistemas, tales como: estabilización asintótica local, sincronización, seguimiento de salida, regulación de salida, rechazo o atenuación de perturbaciones.

En el capítulo 3 se inicia con la presentación del marco teórico unificador, y después se emplea el marco para hacer la reformulación de los problemas de control descritos en el capítulo 2.

En el capítulo 4 se inicia con algunas nociones básicas de las teorías de homotopía, homología e inclusiones diferenciales usadas en las demostraciones de los teoremas o condiciones de estabilizabilidad. Se incluyen además varias condiciones establecidas por distintos investigadores en particular en [2], [6] y [20]. Coron en [6] prueba que su resultado implica el teorema de Brockett. En este

mismo sentido Ryan, en [20], haciendo un estudio de la condición de Brockett en el contexto de las inclusiones diferenciales y bajo nociones más débiles con respecto a las consideradas en [6], prueba que para la existencia de un conjunto compacto globalmente atractivo, la condición de Brockett sigue siendo necesaria. En este mismo capítulo, como contribución, se conjetura que la condición de Coron es necesaria para la existencia de un conjunto compacto contráctil globalmente atractivo. La demostración se realiza siguiendo ideas similares a las de la prueba de Coron.

En el capítulo 5 se discute la importancia de estas condiciones de estabilizabilidad y se presentan varias líneas para profundizar en el tema.

# Capítulo 2

## Antecedentes

Controlar un sistema significa ejercer una influencia sobre su conducta para lograr un objetivo específico, [24]. En particular, **controlar** es una de las tareas que se realiza en teoría de control, para la cual, en muchos casos, se necesita hacer previa o simultáneamente otras tareas llamadas **de análisis**.

Las motivaciones por las que se realiza la tarea de controlar son diversas y ejemplos hay muchos, algunos ya históricos y otros bastante actuales. Un ejemplo de relevancia histórica, común en la literatura, es la máquina de vapor que diseñó el inglés James Watt en el siglo XVIII. La máquina tenía un mecanismo de bolas, las cuales, a cambios de presión, variaban su velocidad permitiendo que determinadas válvulas se abrieran o cerraran dejando escapar un flujo de vapor.

El problema que se planteó en la máquina de Watt consistió en controlar el sistema para que la velocidad fuese constante. Problemas tan antiguos como éste hay muchos en la literatura, [24, 25]. Por otro lado, dar ejemplos actuales resulta fácil. Entre otros, los aparatos electrónicos del hogar, los medios de transporte, los robots en la industria, aparatos en hospitales, etc., son algunos ejemplos en donde se desarrollan muchas tareas de control, [10]. En teoría de control se ha adoptado el término **sistema** o **sistema de control** para identificar a los objetos cuyo comportamiento puede o ha sido influenciado para lograr un objetivo específico, tales como la máquina de Watt y los demás ejemplos citados.

En la mayoría de los ejemplos de sistemas mencionados, los problemas de control se han planteado por motivaciones tales como mejorar la eficiencia, reducir los costos de operación, facilitar su manejo, entre otras.

Esencialmente, la teoría de control se inspira en la noción de **retroalimentación**, [25]. Este concepto fue adoptado en los años 20 en el siglo pasado por los ingenieros de Bell Telephone Laboratory debido a que el sistema recibe información llamada **entrada de control** o **acción de control**, consecuencia de las modificaciones que ocurren con sus estados o componentes mínimas que lo definen. En la siguiente sección se podrán leer definiciones básicas de un sistema de control establecidas en teoría de control. Estas definiciones son adoptadas de [10].

## 2.1. Control retroalimentado

Un sistema, al ser controlado, éste admite una entrada o una acción de control. La generación de tal acción de control se clasifica de dos modos: un sistema que involucra a una persona para la generación de las acciones de control, se dice ser **controlado manualmente**; por ejemplo, la conducción de un automóvil por un ser humano. Un sistema cuyas acciones de control son generadas por otro sistema se dice ser **controlado automáticamente**; por ejemplo, dentro del mismo automóvil hay sistemas de control automático, tales como el sistema de encendido y el control de velocidad del motor.

Los sistemas de control también pueden ser clasificados en términos de la información usada para imponer la acción de control. Si se considera la conducta resultante de una acción de control en un momento en particular de tal manera que se emplee ésta para actuar sobre el sistema con el fin de lograr el funcionamiento del mismo, entonces el sistema se dice ser **retroalimentado** o controlado en **lazo cerrado**.

Muchos sistemas de control se diseñan para lograr un objetivo fijo, independientemente de las perturbaciones de su medio físico. Tales perturbaciones suelen aparecer en cualquier diseño, por ejemplo, se tiene la fricción en una máquina,

una corriente de aire frío en un lugar cuya temperatura está regulada por sistemas de calefacción, etc. Por razones como ésta, a tales sistemas se les llama **sistemas regulados**. Otro tipo de sistemas, llamados **servo-sistemas**, son diseñados para seguir una señal de referencia. Una señal de referencia puede ser, por ejemplo, un valor variable, especificado en función del tiempo, al que deberá operar el reactor.

De manera muy genérica, las componentes de un sistema de control retroalimentado se presentarán a continuación. La parte central del sistema es el **proceso**, cuya salida será controlada. El proceso, en la mayoría de los casos, puede ser alterado por **perturbaciones** del medio, de manera que éstas forman parte del sistema retroalimentado. Un **actuador** es la componente que puede influenciar la (o las) variables controlada(s) dentro del proceso. Los siguientes son algunos ejemplos de actuadores: motores, válvulas, amplificadores e incluso, una persona que maneje un automóvil. La combinación del proceso y el actuador es llamada **planta** y la componente del sistema que calculará la señal de control deseada es el **controlador**. Otra componente importante es el **sensor**, que mide la o las salidas del sistema y manda la información al controlador, para así cerrar el lazo. Ejemplos de sensores incluyen voltmetros, termómetros, cámaras, entre otros. Finalmente, si el controlador no usa medidas de la salida emitidas por el sensor para calcular la acción de control, se dice que el sistema es controlado en **lazo abierto**.

## 2.2. Algunos problemas de control

Una tarea de control a realizar dependerá del objetivo de control que se defina. En esencia, definir con precisión el objetivo de control será uno de los puntos más importantes en la formulación de problemas de control. Algunos problemas de control considerados, particularmente en este trabajo de tesis, y que ya han sido formulados en la literatura, se nombran como sigue: **estabilización asintótica local, seguimiento, sincronización, regulación de salida y rechazo/atenuación de perturbaciones**. La mayor parte de éstos pueden ser formulados de manera precisa en un lenguaje matemático. A lo largo de éste capítulo se presentan tales

definiciones.

La forma en que se presentarán los problemas en este capítulo es una motivación importante para la creación del marco teórico que se desarrolla en el capítulo 3. Técnicamente, los problemas han sido formulados considerando que los sistemas evolucionan en variedades euclidianas o subvariedades de éstas. Sin embargo, cabe la posibilidad de hacer una reformulación más general en donde los sistemas evolucionen en variedades más generales. Al hacer tal reformulación, conceptos como estabilidad y convergencia asintótica de soluciones, donde se define una noción de error, pueden manejarse únicamente en términos topológicos, sin necesidad de utilizar alguna métrica en particular.

### 2.2.1. Problema de estabilización asintótica local

Sea  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ , llamado espacio de estados, y sea  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  un subconjunto abierto, llamado espacio de entradas de control, donde, además  $1 \leq m \leq n < +\infty$ .

Sea  $f : \mathcal{X} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo continuo tal que  $f(0, 0) = 0$ . Considérese al sistema

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.1)$$

donde  $x(t) \in \mathcal{X}$  y  $u(t) \in U$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

El problema de **estabilización asintótica local** se formula como sigue: Construir una ley de control continua  $u : \mathcal{X} \rightarrow U$  tal que para este caso  $u(0) = 0$  y con la propiedad de que la solución  $x = 0$  sea localmente asintóticamente estable para el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t))). \quad (2.2)$$

Como se ha exhibido, en el problema de estabilización asintótica local se requiere que  $u$  dependa sólo de las variables de estados  $x \in \mathcal{X}$ , las cuales pueden

ser medidas. Dos planteamientos admisibles del problema, y que se dan en la literatura, ver [13], son los siguientes: En el primero, se requiere que la entrada de control sea una función de la salida, la cual se supone medible. En este sentido, se define una función de salida  $y = h(x)$ , donde  $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Q}$ , y  $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^q$ , con  $q \leq n$ . En el segundo, se considera que  $u$  sea función tanto de los estados  $x$  del sistema como de una entrada  $z$ , que representa la solución de un sistema dinámico  $\dot{z} = g(x, z)$ ; llamado **sistema dinámico exógeno**. Cuando se considera una ley de control de tal naturaleza, ésta recibe el nombre de **ley de control dinámica**.

Nótese que en todos estos casos el objetivo final de control es el mismo. Este problema ha motivado el interés de diversos grupos de investigación, ver [2, 6, 13, 19, 20, 22, 24, 23]. Especialmente, en los trabajos [2, 6, 20] se han reportado condiciones topológicas necesarias para la estabilizabilidad. Estas condiciones de estabilizabilidad son presentadas con detalle en el capítulo 4.

### 2.2.2. Problemas de seguimiento

Aquí se presentan las formulaciones de algunos problemas clásicos de control, llamados **de seguimiento**.

- El primero es llamado **problema de seguimiento de trayectorias**. Este problema se plantea como sigue: Sea el sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  con  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y sea  $\dot{y} = f(y, v)$  un **sistema de referencia** asociado. Este último, que puede ser considerado una copia del primero, admite por entrada a  $v$ , una señal (función del tiempo) que se supone elemento de un conjunto  $\mathcal{U}$  de funciones continuas por partes. Nótese que el sistema  $\dot{y} = f(y, v)$  evoluciona de manera independiente es decir, no se puede ejercer control sobre él.

Se define una señal de **error**  $z = x - y$ , cuya dinámica está dada por  $\dot{z} = f(z + y, u) - f(y, v) = F(z, y, u, v)$ . Un señalamiento importante a considerar respecto del error es que éste está bien definido debido a que  $x$  y  $y$  pertenecen al mismo espacio vectorial. En este problema, el objetivo

general es construir una ley de control  $u = \alpha(z, y(t), v(t), t)$  definida por medio de una función continua  $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que, para toda entrada  $v \in \mathcal{U}$  en el sistema de referencia, la solución  $z \equiv 0$  sea localmente asintóticamente estable para la dinámica del error en lazo cerrado  $\dot{z} = F(z, y(t), \alpha(z, y(t), v(t), t), v(t))$ . A este tipo de ley de retroalimentación se le llama en [16]  **$\mathcal{U}$ -estabilizador**. De este problema, el de estabilización asintótica hacia un valor constante es un caso particular.

- Un segundo problema de seguimiento es el llamado **seguimiento asintótico de salida en presencia de perturbaciones**, cuya formulación es la siguiente: Sean los mapeos  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  con  $q \leq n$ . Considérese el sistema  $\dot{x} = f(x, u, w)$  y la ecuación de salida  $y = h(x)$ , donde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa el estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  las entradas de control y  $w \in \mathbb{R}^r$  ciertas entradas al sistema que son llamadas **perturbaciones**.

El objetivo de control en este problema es diseñar una retroalimentación  $u$ , que permita que la salida  $y(\cdot)$  siga asintóticamente una señal de referencia  $y_r(\cdot)$ , perteneciente a una familia dada. En este sentido, se define una señal de error

$$e(t) = y(t) - y_r(t)$$

y se requiere que  $e(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow +\infty$  a partir de cierto  $t_0$  inicial en  $\mathbb{R}$ .

- En el problema de seguimiento asintótico de salida, es importante considerar que se debe garantizar la estabilidad de la dinámica interna del sistema. En ese sentido, en ausencia total de perturbaciones o para cierto subconjunto de éstas en  $\mathbb{R}^r$ , el seguimiento asintótico de salida es factible y se dice que hay **rechazo asintótico de perturbaciones**, [13, Cap. 11].

Como se expone en esta misma referencia, si las perturbaciones  $w$  varían en el tiempo, no es posible en general lograr su rechazo. Como objetivo alternativo en tal caso, se pide garantizar con un acotamiento asintótico de

la función  $e(t)$ , es decir, se predefine un  $\epsilon > 0$  y se pide que exista  $T \in \mathbb{R}$  tal que  $\|e(t)\| \leq \epsilon$  para todo  $t \geq T$ . Si se logra esta tarea, se dice que se han **atenuado las perturbaciones**.

- Finalmente, se presenta la formulación de un tercer problema llamado **Problema de Regulación de Salida**. Intuitivamente, el objetivo de control en este problema es construir, de ser posible, una retroalimentación  $u$  con el propósito de predefinir para el sistema  $\dot{x} = f(x, w, u)$  una respuesta de estado estable a cada entrada  $w$  que pertenece a una familia ya conocida. Otra característica de este problema es que se define una función de error  $e = h(x, w)$ , tal como se hizo en el problema de seguimiento asintótico de salida, y se busca que  $e(t)$  tienda a 0 cuando  $t$  tienda a  $+\infty$ .

Para tal fin, es necesario introducir las nociones de respuesta de estado estable, estabilidad de Poisson, estabilidad neutral y estabilidad en la primera aproximación, [12, Cap. 8].

Sea el mapeo  $f : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  una vecindad del origen en  $\mathbb{R}^n$ , y supóngase que  $f(0, 0) = 0$ . Considérese el sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.3}$$

y denótese por  $x(t, x_0, u(\cdot))$  el valor que alcanza el estado en un tiempo  $t > 0$  bajo la acción de la entrada  $u(\cdot)$ , comenzando en el estado inicial  $x_0$  en el instante inicial  $t = 0$ . Sea  $u^*(\cdot)$  una entrada de control específica y supóngase que existe una condición inicial  $x^*$  con la propiedad de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, u^*(\cdot)) - x(t, x^*, u^*(\cdot))\| = 0$$

para cada  $x_0$  en alguna vecindad  $U^*$  de  $x^*$ . Si éste es el caso, entonces la respuesta

$$x_{ss}(t) = x(t, x^*, u^*(\cdot))$$

es llamada **respuesta de estado estable** de (2.3) a la entrada  $u^*(\cdot)$ .

La noción de respuesta de estado estable es útil en análisis de la respuesta de un sistema a entradas que son "persistentes" en el tiempo, es decir, funciones periódicas acotadas. La respuesta de estado estable es por sí misma una función persistente en el tiempo, la cual depende completamente de la entrada  $u^*(\cdot)$  propuesta para el sistema. En este sentido, entradas de tal tipo pueden generarse por un sistema exógeno,

$$\begin{aligned}\dot{w} &= s(w) \\ u &= p(w),\end{aligned}\tag{2.4}$$

con  $s : W \subseteq \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  y  $p : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^m$ , donde  $W$  es una vecindad del origen en  $\mathbb{R}^r$ , y se cumple que  $s(0) = 0$  y  $p(0) = 0$ . Nótese que, para que las entradas  $w$  sean acotadas, basta suponer que  $w = 0$  es un punto de equilibrio **estable** (en el sentido ordinario) para el sistema  $\dot{s} = s(w)$  y para una condición inicial  $w^0 = w(0)$  en alguna vecindad apropiada  $W^0 \subseteq W$  del origen. Para garantizar que las entradas son persistentes en el tiempo, es conveniente suponer que todo punto  $w$  en  $W^0$  es **estable en el sentido de Poisson (PS)**.

Se dice que un punto  $w^0$  es PS si el flujo  $\Phi_t^s(w^0)$  del campo vectorial  $s(w)$  es completo, es decir, está definido para toda  $t \in \mathbb{R}$  y satisface que, para cada vecindad  $U^0$  de  $w^0$  y cada número real  $T > 0$ , existe un tiempo  $t_1 > T$  tal que  $\Phi_{t_1}^s(w^0) \in U^0$ , y un tiempo  $t_2 < -T$  tal que  $\Phi_{t_2}^s(w^0) \in U^0$ . Lo anterior se traduce en que las trayectorias  $w(t)$  que inician en  $w^0$ , dado que  $\Phi_0^s(w^0) = w^0$ , éstas permanecen en vecindades muy cercanas de  $w^0$  después de un tiempo  $t$  arbitrariamente grande.

Recordemos que el flujo vectorial del campo  $s$ , que se denota por  $\Phi_t^s(\cdot)$ , es una función  $\Phi : \coprod_{w^0 \in W^0} \mathcal{T}_{w^0} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow W^0$ , con  $\mathcal{T}_{w^0}$  abierto, tal que para cada  $w^0 \in W^0$ ,  $\Phi(w^0, \cdot) : \mathcal{T}_{w^0} \rightarrow W^0$  es la curva solución de  $s$  que pasa

por  $w^0$ . El dominio de  $\Phi$  se reescribe como

$$\prod_{w^0 \in W^0} \mathcal{T}_{w^0} = \bigcup_{w^0 \in W^0} \{w^0\} \times \mathcal{T}_{w^0}$$

donde  $w^0$  parametriza las curvas integrales del flujo.

Por lo tanto, todo punto  $w^0 \in W^0$  es PS y eso garantiza que la trayectorias  $w(t)$  de  $s(w)$  no tienden a cero conforme  $t$  tienda a infinito. Si se supone que el campo vectorial  $s(w)$  satisface que  $w = 0$  es estable y, además, existe una vecindad abierta  $W^0$  tal que todos sus puntos son estables en el sentido de Poisson, entonces se dice que el sistema (2.4) es **neutralmente estable**.

Otro hecho importante que hay que notar es que estabilidad neutral implica que la matriz que caracteriza la aproximación lineal, denotada por  $\left[ \frac{\partial s}{\partial w}(0) \right]$ , en

$$s(w) = s(0) + \left[ \frac{\partial s}{\partial w}(0) \right] w + O(0, w),$$

tiene todos sus eigenvalores sobre el eje imaginario. Si se satisface esto para la aproximación lineal de  $s(w)$  alrededor de 0, se dice que  $s$  es **estable en la primera aproximación** respecto de 0.

Dadas las definiciones anteriores, ahora considérese al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, u) \\ e &= h(x, w), \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde  $x \in U$  es el estado y  $U$  una vecindad del origen en  $\mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control, y  $w$  pertenece a un subconjunto de entradas exógenas en  $\mathbb{R}^r$  generadas por el sistema (2.4). En la segunda ecuación,  $e$  define una variable de error en  $\mathbb{R}^m$ , la cual se expresa como función de  $x$  y  $w$ . Supóngase que  $f$ ,  $h$  y  $s$  son lisas o infinitamente diferenciables, y además

$$f(0, 0, 0) = 0, s(0) = 0 \text{ y } h(0, 0) = 0.$$

Al suponer las anteriores características de (2.5), ahora se puede formular el **problema de regulación de salida**. Su planteamiento se hace en dos sentidos:

1. En el primero, es llamado **problema de regulación de salida en presencia de información completa**. En términos informales, en este caso se pretende diseñar un controlador  $u = \alpha(x, w)$  bajo el supuesto de que éste tiene a su disposición información completa tanto de las componentes de los estados  $x$  de la planta como de las entradas exógenas  $w$ . En lazo cerrado el sistema resultante se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \alpha(x, w)) \\ \dot{w} &= s(w), \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde se supone que  $\alpha(0, 0) = 0$  y que el sistema (2.6) tiene un punto de equilibrio  $(x, w) = (0, 0)$ .

Procediendo más formalmente, el problema es el siguiente. Dado un sistema de la forma (2.5) y un sistema exógeno neutralmente estable como (2.4), encontrar una retroalimentación  $\alpha(x, w)$ , tal que

- a) el punto de equilibrio  $x = 0$  de  $\dot{x} = f(x, 0, \alpha(x, 0))$  sea asintóticamente estable en la primera aproximación;
- b) exista una vecindad  $V \subset U \times W$  de  $(0, 0)$  tal que, para toda condición inicial  $(x(0), w(0)) \in V$ , la solución de (2.5) satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t), w(t)) = 0.$$

2. En el segundo, se le llama **problema de regulación de salida por retroalimentación del error**. En este problema se parte de las mismas hipótesis respecto a los sistemas (2.5) y (2.4). Sin embargo, cuando

sólo es posible medir del error  $e$ , se procede a crear una extensión dinámica definida por

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta(\xi, e) \\ u &= \theta(\xi),\end{aligned}\tag{2.7}$$

con el estado interno  $\xi$  definido en alguna vecindad  $\mathcal{Q}$  del origen de  $\mathbb{R}^v$ . Tal sistema, con (2.5), toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w, \eta(\xi)) \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, w)) \\ \dot{w} &= s(w),\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde se supone que  $\eta(0, 0) = 0$  y  $\theta(0) = 0$ , de modo tal que  $(x, w, \xi) = (0, 0, 0)$  es un punto de equilibrio de (2.8). De manera similar a como se procedió en el caso anterior, dado un sistema de la forma (2.5) y un sistema exógeno neutralmente estable como (2.4), se buscará un entero  $v$  y dos mapeos  $\theta(\cdot)$  y  $\eta(\cdot, \cdot)$ , tales que

a) el punto de equilibrio  $(x, \xi) = (0, 0)$  de

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w, \eta(\xi)), \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, w)),\end{aligned}\tag{2.9}$$

sea asintóticamente estable en la primera aproximación,

b) exista una vecindad  $V \subset U \times \mathcal{Q} \times W$  de  $(0, 0, 0)$  tal que, para toda condición inicial  $(x(0), \xi(0), w(0)) \in V$ , la solución de (2.8) satisfaga que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t), \omega(t)) = 0.$$

### 2.2.3. Sincronización

En términos intuitivos, se puede definir sincronizar como el efecto de dos o más osciladores. Un oscilador es un sistema dinámico cuya evolución es periódica en el tiempo, ver [1]. El concepto de sincronización es un tópico relevante en muchas áreas por su potencial aplicación.

Según la definición de sincronía, se puede decir que sincronización es lograr, en dos o más osciladores, el mismo patrón dinámico. Para tener dos osciladores acoplados es necesario introducir algún término de acoplamiento entre ambos y usando retroalimentación en alguno de éstos o en ambos eventualmente se puede lograr que las trayectorias de uno de los sistemas converjan a las del otro, en cuyo caso se dirá que se ha logrado la sincronización de ambos sistemas.

Existen dos métodos generales para acoplar dos sistemas, el método de Pecora-Carroll y el método definido por Kapitaniak, ver [7], los cuales se explican a continuación.

- Según el método de Pecora-Carroll, dado un mapeo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sea el sistema  $\dot{x} = f(x)$ ,  $n$ -dimensional. Se divide a  $f(x)$  en los sistemas  $\dot{y} = g(y, w)$ , llamado **sistema guía** con  $g : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  con  $m \leq n$ , y  $\dot{w} = h(y, w)$ , llamado **sistema respuesta** con  $h : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Considérese el sistema  $\dot{w}' = h(y, w')$ , el cual es una copia del sistema respuesta, y supóngase que  $w(t)$  y  $w'(t)$  son las trayectorias respectivas. Se dice que  $w(\cdot)$  converge a  $w'(\cdot)$  si el límite de la función de error  $\Delta w(t) = w(t) - w'(t)$  tiende a cero conforme  $t$  tiende a  $+\infty$ . Se puede pensar que  $\Delta w(t)$  es la distancia entre ambas trayectorias.

- El método de Kapitaniak, la manera de proceder, es tomar dos sistemas idénticos  $\dot{x} = f(x)$  y  $\dot{y} = f(y)$  e introducir el término de acoplamiento  $\epsilon(x - y)$  en el segundo sistema, de tal manera que se tenga el sistema acoplado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ \dot{y} &= f(y) + \epsilon(x - y).\end{aligned}\tag{2.10}$$

# Capítulo 3

## Formalismo teórico unificador

Este capítulo contiene la primera contribución de esta tesis, consistente en reformular los problemas del capítulo 2 desde una sola perspectiva, denominada **marco o formalismo teórico unificador**. Su fundamentación se hace con elementos de variedades  $n$ -dimensionales. En la siguiente sección se dan tales nociones de manera sintetizada.

### 3.1. Nociones preliminares

Se le llama variedad topológica de dimensión  $n$ , a un espacio topológico  $M$  que es Hausdorff, segundo contable y satisface que para todo  $x \in M$  existe un abierto  $U$ , vecindad de  $x$ , que es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Su dimensión se denota por  $\dim M = n$ . Se le llama carta coordenada sobre  $M$  al par  $(\mathcal{U}, \phi)$ , donde  $\mathcal{U}$  es un abierto en  $M$  y  $\phi$  es un homeomorfismo de  $\mathcal{U}$  en un abierto  $\phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ . Un atlas de clase  $C^k$  para una variedad topológica  $M$  de dimensión  $n$  es una colección de cartas  $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\lambda, \phi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$  tal que:

1.  $\{\mathcal{U}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  es una cubierta abierta para  $M$ ;
2. todo par de cartas  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$  y  $(\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta)$  en  $\mathcal{A}$  es  $C^k$ -**compatible**, es decir,

tanto la aplicación  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  como su inversa  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  son  $k$  veces diferenciables.

Un atlas  $\mathcal{A}$  es una estructura diferenciable de clase  $C^k$  sobre  $M$  si  $\mathcal{A}$  es un atlas maximal, es decir, tal que si  $(\mathcal{V}, \psi)$  es una carta coordenada para  $M$  que es  $C^k$  compatible con todo elemento de  $\mathcal{A}$ , entonces  $(\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{A}$ . Si, además de admitir un atlas maximal  $\mathcal{A}$  de clase  $C^k$ ,  $M$  admite una base numerable, entonces al par  $(M, \mathcal{A})$  se le llama **variedad diferenciable de clase  $C^k$**  de dimensión  $n$ .

Si  $M$  y  $N$  son variedades, es factible construir una variedad  $M \times N$  cuya dimensión es  $\dim M + \dim N$ . Nótese que si  $(M, \mathcal{A}_M)$  y  $(N, \mathcal{A}_N)$  son variedades diferenciables. El atlas  $\mathcal{A}_{M \times N} = \{(\mathcal{U}_\lambda \times \mathcal{V}_\mu, \alpha_\lambda \times \beta_\mu)\}$  definirá una estructura diferenciable para la variedad  $M \times N$ , cuyas cartas coordenadas están definidas por  $\alpha_\lambda \times \beta_\mu : \mathcal{U}_\lambda \times \mathcal{V}_\mu \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , donde  $\mathcal{U}_\lambda \times \mathcal{V}_\mu \subseteq (M \times N)$ ,  $(\mathcal{U}_\lambda, \alpha_\lambda) \in \mathcal{A}_M$  y  $(\mathcal{V}_\mu, \beta_\mu) \in \mathcal{A}_N$ .

Un mapeo  $F$  entre dos variedades  $M$  y  $N$  es diferenciable en  $z \in M$  si el mapeo  $\beta \circ F \circ \alpha^{-1}$  es diferenciable en  $\alpha(z)$  para dos cartas coordenadas  $(\mathcal{U}, \alpha)$  y  $(\mathcal{V}, \beta)$  cualesquiera de  $M$  y  $N$  respectivamente, tales que  $z \in \mathcal{U}$  y  $F(z) \in \mathcal{V}$ . Si  $F$  es diferenciable en todo punto de  $M$ , entonces  $F$  se dice ser diferenciable.

Dada una carta coordenada  $(\mathcal{U}, \alpha)$  para  $M$ , y un punto  $p \in M$ , si  $z^i = r^i \circ \alpha$ , se define el operador  $\frac{\partial}{\partial z^i}|_p$  como aquél que a toda función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciable en  $p$ , asocia un número real  $\frac{\partial}{\partial r^i}|_{\alpha(p)}(f \circ \alpha^{-1})$ . Aquí,  $r^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  representa la función  $r^i : (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i, i = 1, \dots, n$ . De esta forma, dada una función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z^i}|_p : f \mapsto \frac{\partial}{\partial r^i}|_p(f)$  asocia a  $f$  su derivada direccional en la dirección de la coordenada  $z^i$  en el punto  $p$ .

Se define  $T_z M$ , el **espacio vectorial tangente** a la variedad  $M$  en  $z$ , como el espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  engendrado por el conjunto  $\{\frac{\partial}{\partial z^i}|_z : i = 1, \dots, n\}$ , cuyos elementos pueden escribirse como  $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial z^i}|_z$ . A la unión de todos los espacios tangentes  $\bigcup_{z \in M} T_z M$  a  $M$ , que se denota por  $TM$ , se le llama **haz tangente** debido a que se le puede dotar de una estructura de haz vectorial, lo cual no se hará aquí.

Si  $M$  es una variedad de clase  $C^\infty$ , un **campo vectorial** en  $M$  es una aplicación  $X : M \rightarrow TM$  de clase  $C^\infty$  tal que  $\pi \circ X = \text{id}_M$ , donde  $\pi : TM \rightarrow M$  está definida como la proyección del haz tangente en la variedad. Al conjunto de los campos vectoriales de clase  $C^\infty$  se le denota por  $\Gamma^\infty(TM)$ .

Sea  $z = (z^1, \dots, z^n)$  el vector de coordenadas asociadas con la carta  $\alpha_\lambda \times \beta_\lambda$  para el caso de  $M \times M$ , defínase la proyección  $\pi_1(z) = (z_1 \dots z_n)$  y  $\pi_2(z) = (z_{n+1}, \dots, z_{2n})$ . Si los campos vectoriales  $X$  y  $Y \in \Gamma^\infty(M)$  son campos vectoriales localmente representados por  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$   $(Y_i)_{i=1, \dots, n}$  en sus respectivas cartas coordenadas, se define el campo vectorial en  $M \times M$  dado por:

$$\zeta(X, Y)(z) = \sum_{i=1}^n X_i(\pi_1(z)) \frac{\partial}{\partial z_i} + Y_i(\pi_2(z)) \frac{\partial}{\partial z_{i+n}}.$$

## 3.2. Definición del marco

Sea  $M$  una variedad lisa  $n$ -dimensional, y sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$ , donde  $1 \leq m \leq n$ .

Considérese al sistema de control

$$\dot{z} = f(z, u), \tag{3.1}$$

donde  $f : M \times U \rightarrow TM$  denota un mapeo continuo y localmente Lipschitz que, a cada  $u \in U$ , asocia un campo vectorial diferenciable  $f_u = f(\cdot, u)$ .  $f_u$  es supuesto completo, es decir, que para toda condición inicial  $z_0$ , la solución que parte de  $z_0$  en  $t = t_0$  está definida para todo  $t$  en  $\mathbb{R}$ .

Sea  $\Phi(t_0, \cdot, z_0) : \mathbb{R} \rightarrow M$  la solución de (3.1), que inicia desde  $z_0 \in M$  en el tiempo  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Sea  $N$  una variedad  $q$ -dimensional, con  $q \leq n$ , y sea  $y$  la salida dada por

$$y = h(z), \tag{3.2}$$

donde  $h : M \rightarrow N$  es un mapeo continuo. Llamaremos a  $h$  **mapeo de salida**.

Considérese a un subconjunto cualquiera  $Q \subseteq N$  y sea  $\mathcal{V}(Q) = \{V \subseteq N : Q \subseteq V \text{ y } V \text{ abierto}\}$  el conjunto de vecindades de  $Q$  en  $N$ . A continuación se enlistan algunas definiciones en relación con  $Q$ , con respecto al sistema (3.1):

**$Q$  es estable** si para toda  $t_0 \in \mathbb{R}$  y para todo  $U \in \mathcal{V}(Q)$ , existe  $V \in \mathcal{V}(Q)$  tal que, para todo  $z_0 \in M$  tal que  $h(z_0) \in V$ , la solución  $\Phi(t_0, t, z_0)$  del sistema (3.1) en  $M$ , satisface que  $h(\Phi(t_0, t, z_0)) \in U$  para todo  $t \geq t_0$ .

**$Q$  es localmente atractivo** si para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$  existe  $U \in \mathcal{V}(Q)$  tal que, para todo  $z_0 \in M$  que satisfaga  $h(z_0) \in U$ , y para todo  $V \in \mathcal{V}(Q)$ , existe  $T \in [t_0, +\infty)$  tal que para todo  $t \geq T$ , la solución  $\Phi(t_0, t, z_0) \in M$  de (3.1) satisface  $h(\Phi(t_0, t, z_0)) \in V$ .

**$Q$  es localmente asintóticamente estable** si este es estable y localmente atractivo.

**$Q$  es uniformemente estable** si para todo  $U \in \mathcal{V}(Q)$  existe  $V \in \mathcal{V}(Q)$  independiente de todo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y todo  $z_0 \in M$  que satisfaga  $h(z_0) \in V$ , la solución  $\Phi(t_0, t, z_0)$  de (3.1) satisface  $h(\Phi(t_0, t, z_0)) \in U$  para  $t \geq t_0$ .

**$Q$  es localmente uniformemente atractivo** si existe  $U \in \mathcal{V}(Q)$  tal que para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y todo  $z_0 \in M$  que satisfaga  $h(z_0) \in U$ , y para todo  $V \in \mathcal{V}(Q)$ , existe  $T \in [t_0, +\infty)$ , tal que, para todo  $t \geq T$ , la solución  $\Phi(t_0, t, z_0)$  de (3.1) satisface  $h(\Phi(t_0, t, z_0)) \in V$ .

**$Q$  es localmente uniformemente asintóticamente estable** si éste es uniformemente estable y localmente uniformemente atractivo.

**$Q$  es globalmente estable** en  $N$  si para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y para toda  $V \in \mathcal{V}(Q)$  tal que, para todo  $z_0 \in M$  tal que  $h(z_0) \in V$ , la solución  $\Phi(t_0, t, z_0)$  de (3.1) satisface  $h(\Phi(t_0, t, z_0)) \in N$  para todo  $t \geq t_0$ .

**$Q$  es globalmente atractivo** en  $N$  si para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ , todo  $z_0 \in M$  y todo  $V \in \mathcal{V}(Q)$ , existe  $T \in [t_0, +\infty)$ , tal que, para todo  $t \geq T$ , la solución  $\Phi(t_0, t, z_0) \in M$  de (3.1) satisface  $h(\Phi(t_0, t, z_0)) \in V$ .

Estas definiciones serán usadas en la reformulación de los problemas del capítulo 2 y están muy relacionadas con las nociones de estabilidad, estabilidad asintótica local, etc. conocidas ampliamente.

### 3.3. Algunos problemas típicos de control

El lector se familiarizó con la formulación de los problemas de control en el capítulo 2. Una adaptación adecuada de las definiciones en términos de  $Q$  nos permite incluir en una idea común estos problemas. En esta sección se redefinen los problemas dados en la sección 2.2.

#### **Problema de estabilización asintótica local.**

Para formular este problema, considérese al sistema de control

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(z, u) \\ y &= \text{id}(z), \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde el mapeo continuo  $f : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$  está definido en el producto de una variedad  $n$ -dimensional  $M$  y un subconjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ , y donde el mapeo continuo  $h : M \rightarrow M$  está definido por la función identidad  $h(z) = \text{id}(z)$ . Sea el subconjunto  $Q = \{0\} \subset M$ .

**Definición 3.1** Sean  $p \in M$  y  $\alpha : M \rightarrow U$  un mapeo continuo tal que  $\alpha(p) = 0$ . Se dice que  $\alpha$  tiene la propiedad de hacer de  $Q$  un conjunto local asintóticamente estable para el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(z, \alpha(z)) \\ y &= \text{id}(z), \end{aligned} \tag{3.4}$$

si  $Q$  es estable y localmente atractivo.

#### **Problemas de seguimiento.**

Ahora, se procede con los problemas de seguimiento mencionados con anterioridad.

**Problema de seguimiento de trayectorias.** Antes de plantear la reformulación es necesario dar algunas definiciones. Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional y  $M \times M$  el producto cartesiano de  $M$  consigo misma; denotaremos por  $M^2$  a  $M \times M$ . Del conjunto  $M^2$ , se define el subconjunto  $\Delta_M = \{(x, y) \in M^2 : x = y\}$ , llamado **conjunto diagonal**, [16]. Por las nociones preliminares de variedades diferenciables, considerando dos sistemas  $\dot{x} = f(x, u)$  y  $\dot{y} = f(y, v)$  idénticos, donde  $f : M \times U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow T(M)$ , y de los cuales, sólo se tiene control sobre el primero; definimos un campo vectorial  $\zeta(f_u, f_v) \triangleq F : M^2 \times U \times U \rightarrow T(M^2)$  tal que  $(z, u, v) \mapsto F(z, u, v)$  con  $z = (x, y)$ . Sean los controles del campo vectorial  $f_v$  elementos de un conjunto de funciones continuas por partes en el tiempo  $\mathcal{B} \subset PC(\mathbb{R}; U)$ .

En este sentido, considérese el sistema, definido por

$$\begin{aligned}\dot{z} &= F(z, u, v) \\ y &= \text{id}(z),\end{aligned}\tag{3.5}$$

resultado de combinar  $f(x, u)$  y  $f(y, v)$ , donde  $F : M^2 \times U \times \mathcal{B} \rightarrow T(M^2)$  para todo  $(z, u, v) \in M^2 \times U \times \mathcal{B}$  y el mapeo  $h : M^2 \rightarrow M^2$  definido por  $h(z) = \text{id}(z)$ . En este caso fijaremos  $Q = \Delta_M \subset M^2$ .

**Definición 3.2** Sea  $\mathcal{B} \subset PC(\mathbb{R}; U)$  y sea  $\alpha$  una ley de control continua  $\alpha : M^2 \times U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ . Se dice que  $\alpha$  hace de  $Q = \Delta_M$  un conjunto localmente uniformemente asintóticamente estable, para el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{z} &= F(z, \alpha(z, v, t), v) \\ y &= \text{id}(z),\end{aligned}\tag{3.6}$$

si se satisface que  $Q = \Delta_M$  es uniformemente estable y localmente asintóticamente atractivo.

### Problema de seguimiento asintótico de salida.

Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional. Sea el sistema de control

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f(z, u, w) \\ y &= h(z, w),\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde  $f : M \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow TM$  y  $h : M \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^q$  ( $q \leq n$ ) son mapeos continuos. En el sistema (3.7),  $z$  son los estados,  $w$  son entradas al sistema denominadas perturbaciones, y  $u$  son las entradas de control.

Se define una función continua  $y_r(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  que llamaremos **referencia** para cualquier mapeo de salida  $h$  que pueda definirse. Sea

$$Q_r = \{x \in \mathbb{R}^q : x = y_r(t), \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\}.$$

El objetivo de control que se establece para el sistema (3.7) es el seguimiento asintótico de salida. Esencialmente, la tarea es encontrar una retroalimentación de control  $\alpha$  tal que la salida  $h$  converja al conjunto  $Q_r$ .

**Definición 3.3** Sea  $\alpha$  un mapeo continuo tal que  $\alpha : M \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dado un mapeo de salida  $h$ , se dice que  $\alpha$  permite seguimiento asintótico de  $h$  para el sistema en lazo cerrado, si para el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f(z, \alpha(z, w), w) \\ y &= h(z, w),\end{aligned}\tag{3.8}$$

$Q_r$  es globalmente atractivo.

Las perturbaciones juegan un papel importante, en el sentido de que depende de su presencia o no que se logre seguimiento. En la formulación dada en la sección (2.2) de este problema se consideraron dos casos; en el primero, se busca lograr el rechazo de perturbaciones debido a que pueden no entrar al sistema o bien, determinado subconjunto de estas en  $\mathbb{R}^r$ ; en el segundo, se busca atenuar el

efecto de las perturbaciones definiendo un determinado  $\epsilon > 0$ , tal que  $\|e(t)\| \leq \epsilon$ . En este sentido, traducir a nuestro formalismo el rechazo y la atenuación de perturbaciones se hace de la siguiente manera:

- Si no existen entradas al sistema, no tiene caso considerar esta situación, de lo contrario, habrá que definir un subconjunto de éstas por algún criterio en particular. En nuestro caso requeriremos que las perturbaciones  $w$  sean generadas por un sistema exógeno como (2.4), el cual sea neutralmente estable, eso garantiza que las entradas exógenas sean acotadas.
- Para lograr atenuación de perturbaciones, si se tiene una retroalimentación, habrá atenuación de éstas si el conjunto de salida  $Q_r$  es estable para el sistema enlace cerrado (3.7).

**Problema de sincronización:**

Para la reformulación del problema de sincronización, recordemos que se plantean dos métodos para acoplar dos sistemas; el de Pecora-Carroll y el de Kapitaniak. Por el método de Pecora-Carroll, se divide un sistema dado  $\dot{x} = f(x)$  en dos subsistemas, de los cuales, el sistema guía ejercerá influencia sobre el sistema respuesta.

En este caso, hay que considerar que es exactamente el mismo problema que el denominado seguimiento asintótico de trayectoria. Nótese que a partir de los sistemas  $\dot{w} = h(w, y)$  y  $\dot{w}' = h'(w', y)$ , es factible construir un sistema combinado

$$\begin{aligned} \dot{z} &= H(z, y), \\ y &= h'(z) \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde  $H : M^2 \rightarrow M^2$  y  $h' = \text{id}_{M^2}$ . Definiendo  $Q$  igual a  $\Delta_M$ , se formula la siguiente definición.

**Definición 3.4** Se dirá que los sistemas  $\dot{w} = h(w, y)$  y  $\dot{w}' = h(w', y)$  están sincronizados si se satisface que, para el sistema (3.9), el conjunto  $Q$  es localmente uniformemente asintóticamente estable.

Ahora, por el método de Kapitaniak, se considera a un sistema autónomo, como el caso siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ \dot{y} &= f(y) + \epsilon(x - y),\end{aligned}\tag{3.10}$$

del cual, se puede notar, que la evolución del primer subsistema  $\dot{x} = f(x)$  no se altera por la evolución del segundo subsistema  $\dot{y} = f(y) + \epsilon(x - y)$ .

Este caso se considera dentro de nuestro formalismo definiendo el siguiente sistema combinado

$$\begin{aligned}\dot{z} &= F(z) \\ h(z) &= \text{id}(z),\end{aligned}\tag{3.11}$$

donde  $z = (x, y) \in M^2$ , tal que  $F : M^2 \rightarrow M^2$  definido por  $F(z) = F((x, y)) = (f(x), f(y) + \epsilon(x - y))$  y  $h : M^2 \rightarrow M^2$ . Como en caso de Pecora-Carroll, definiendo  $Q = \Delta_M$  y proponemos la siguiente definición.

**Definición 3.5** Se dirá que los sistemas  $\dot{x} = f(x)$  y de  $\dot{y} = f(y) + \epsilon(x - y)$  están sincronizados si se satisface que, para el sistema (3.11), el conjunto  $Q$  es local uniformemente asintóticamente estable.

# Capítulo 4

## Condiciones de estabilizabilidad

De los problemas reformulados en el capítulo anterior, como caso particular, se retoma de éste el problema de estabilización asintótica de puntos de equilibrio para ser estudiado en este nuevo capítulo. En este capítulo, la primera sección presenta las nociones básicas que se utilizarán para el estudio de las condiciones necesarias para encontrar leyes de control que resuelvan ese problema.

### 4.1. Construcciones Básicas

Iniciamos esta sección con algunas definiciones básicas de las teorías de homotopía y homología. Estas nociones, que nos serán útiles para estudiar espacios topológicos, se exponen de manera simplificada para evitar extender en demasía el contenido de este capítulo. Se incluyen algunos teoremas y sus demostraciones. Las referencias [2, 6, 9, 20] se recomiendan para consultar con más detalle estos conceptos.

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $f, g : X \rightarrow Y$  mapeos continuos. Se dice que  $f$  es **homotópica** a  $g$  si existe un mapeo continuo  $F : X \times I \rightarrow Y$ , llamado **homotopía**, con  $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ , tal que para todo  $x \in X$ : (1)  $F(x, 0) = f(x)$ ; (2)  $F(x, 1) = g(x)$ .

Supóngase que  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos tales que  $X \subseteq Y$  y sea  $i :$

$X \rightarrow Y$  el mapeo inclusión del subespacio  $X$  en  $Y$ . Se dice que  $X$  es un **retracto** de  $Y$  si existe un mapeo continuo  $r : Y \rightarrow X$  tal que  $r \circ i = \text{id}_X$ ; si tal mapeo existe, y además,  $i \circ r : Y \rightarrow Y$  es homotópica a  $\text{id}_Y$ , se dice que  $r$  es una **retracción por deformación** y que  $X$  es un **retracto por deformación** de  $Y$ . En el caso en que un singleton  $\{x\} \subseteq Y$  es un retracto por deformación de  $Y$ ,  $Y$  se dice ser **contráctil**. A continuación se dan ejemplos de retracts por deformación.

**Ejemplo 4.1** Sea  $I = [0, 1]$  y  $X = \{0\} \subseteq I = Y$ . El singleton  $X$  es una retracción de  $Y$  en  $X$  por el mapeo continuo  $r(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Por otro lado la composición  $i \circ r : x \mapsto 0$  es homotópica a  $\text{id}_Y$ . Una homotopía es  $F : Y \times I \rightarrow Y$ , definida por  $F(x, t) = tx$ . Notemos que, evaluando  $F$  en  $t = 0$  y  $t = 1$ , tenemos que  $F(x, 0) = 0 = i \circ r(x)$  y  $F(x, 1) = x = \text{id}_Y(x)$ . Por otro lado, nótese que  $F$  es continua en  $Y \times I$ , probando así que  $F$  es una homotopía. Se concluye que  $X = \{0\}$  es un retracto por deformación de  $Y = I$ .

**Ejemplo 4.2** Considérese el conjunto  $\mathbb{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ . El conjunto  $\{0\} \subseteq \mathbb{B}_1(0)$  es un retracto por deformación de  $\mathbb{B}_1(0)$ . Por la retracción  $r(x) = 0$  para  $x \in \mathbb{B}_1(0)$  y la homotopía  $F : \mathbb{B}_1(0) \times I \rightarrow \mathbb{B}_1(0)$  definida por  $F(x, t) = tx$  se afirma éste hecho. La prueba de continuidad de  $F$  es análoga a la prueba del ejemplo anterior. Además, nótese que  $F(x, 0) = 0 \cdot x = 0 = i(0) = i \circ r(0)$  y  $F(x, 1) = x = \text{id}_{\mathbb{B}_1(0)}$ , para todo  $x \in \mathbb{B}_1(0)$ . Entonces  $\mathbb{B}_1(0)$  es contráctil.

**Ejemplo 4.3** En este ejemplo, se prueba que el conjunto  $X = [-1, 1] \times \{0\}$  es un retracto por deformación del conjunto  $Y = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Intuitivamente, éste último es un cuadrado en el plano. La retracción existente está definida por  $r(x, y) = (x, 0)$ . El mapeo  $r$  es continuo en todo su dominio, es decir, para cualquier  $(x_0, y_0) \in Y$  se satisface que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} r(x, y) = (x_0, 0)$ . Si se elige un  $\varepsilon > 0$  arbitrario, entonces debe existir un  $\delta > 0$  tal que

$$\|r(x, y) - r(x_0, y_0)\| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta.$$

En esta prueba,  $\|(x, y)\|$  denota la norma euclidiana del vector  $(x, y)$ . Debido a

que  $(y - y_0)^2 \geq 0$ ,  $\|(x, 0) - (x_0, 0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , eligiendo  $\delta = \varepsilon$ ,  $\|(x, 0) - (x_0, 0)\| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta = \varepsilon$  por lo que se prueba la continuidad  $r$ . Por otro lado, sea  $i$  el mapeo inclusión de  $X$  en  $Y$ . El mapeo  $i \circ r$  es homotópico a  $\text{id}_Y$ , con homotopía  $F : Y \times I \rightarrow Y$  dada por  $F((x, y), t) = (x, ty)$ . La función es continua debido a que sus componentes son continuas y, además, si evaluamos en  $t = 0$  y  $t = 1$ , obtenemos  $F((x, y), 0) = (x, 0)$  y  $F((x, y), 1) = (x, y)$ .

Las nociones ya presentadas de teoría de homotopía son útiles al calcular los grupos de homología de un espacio topológico cualquiera. Un grupo de homología, como se explicará más adelante, es un invariante topológico que da información sobre la naturaleza del espacio topológico al cual está asociado. A continuación definiremos qué es un grupo abeliano libre, debido a que los grupos de homología son de este tipo.

Un grupo  $G$  abeliano (o conmutativo) se dice ser **abeliano libre** si existe un subconjunto  $B \subseteq G$ , no vacío, tal que cada  $g$  en  $G$  tiene una representación única  $g = \sum n_x x$ , con  $x \in B$ , donde  $n_x$  es un entero igual a cero excepto para un número finito de elementos  $x$  en  $B$ . Si tal subconjunto  $B$  existe, entonces es llamado **base** de  $G$ .

Existe un procedimiento para la construcción de un grupo abeliano libre a partir de un conjunto no vacío  $A$ , como se ilustra a continuación.

Sea  $A$  un conjunto no vacío y  $F(A)$  el conjunto de todas las funciones  $f$  de  $A$  en  $\mathbb{Z}$  tales que  $f(x) \neq 0$  para sólo un número finito de elementos de  $A$ . Definiendo la suma en  $F(A)$  por medio de  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , entonces  $F(A)$  es un grupo abeliano. Probemos que  $F(A)$  satisface las condiciones que definen un grupo conmutativo. (a) *Asociatividad*: Sean  $f, g, h \in F(A)$  y sea  $x \in A$ , nótese que  $(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = ((f + g) + h)(x)$ , de donde se concluye la asociatividad; (b) *Identidad*: Probemos que existe un elemento identidad en  $F(A)$ , denotado por  $e$ , tal que para cualquier elemento  $f \in F(A)$  y  $x \in A$  debe satisfacer que  $(f + e)(x) = (e + f)(x) = f(x)$ . Recordemos que  $f(x)$  es un entero, sumando su elemento inverso  $-f(x)$ ,

entonces  $-f(x) + f(x) + e(x) = -f(x) + f(x)$ , entonces  $0 + e(x) = 0$ . Por lo que la función identidad es la función constante  $e(x) = 0$ ; (c) *Inverso*: Para cada  $f \in F(A)$ , debe de existir un elemento  $g \in F(A)$ , llamado elemento inverso, tal que  $(f+g)(x) = e(x) = (g+f)(x)$ . Empleando propiedades de los enteros, nótese que  $-f(x) + f(x) + g(x) = -f(x) + e(x)$ , entonces  $0 + g(x) = -f(x) + 0$  por lo que  $g = -f$  en  $F(A)$ ; (d) *Conmutatividad*: Esta propiedad se deduce a partir de la conmutatividad de la suma en los enteros. Si, para cualquier  $a \in A$ , se define una función  $f_a$  en  $F(A)$  por

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

entonces el conjunto  $\{f_a \mid a \in A\}$  es una base para  $F(A)$ . Si se identifica  $a$  con  $f_a$  se completa la construcción del grupo abeliano libre.

#### 4.1.1. Grupos de homología

Los grupos de homología son grupos abelianos libres. A continuación se dan los elementos necesarios para su construcción.

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se llama **casco convexo** de  $A$  a la intersección de todos los conjuntos convexos en  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $A$ . Un  **$p$ -simplejo**  $s$  en  $\mathbb{R}^n$  es el casco convexo de una colección de  $(p + 1)$  puntos  $x_0, x_1, \dots, x_p$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que los vectores  $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$  forman un conjunto linealmente independiente. A los puntos  $x_0, \dots, x_p$  se les llama **vértices** del  $p$ -simplejo  $s$ . Dado un  $p$ -simplejo  $s$ , se tiene que cada punto  $y \in s$  se expresa como

$$y = x_0 + \sum_{i=1}^p c_i(x_i - x_0).$$

Nótese que, podemos escribir  $y = \sum_{i=0}^p c_i x_i$  donde  $c_0 = 1 - \sum_{i=1}^p c_i$ .

Por ejemplo, si  $x_0$  y  $x_1$  son dos puntos en  $\mathbb{R}^n$ , el 1-simplejo  $s$  que los contiene

es un segmento de recta (casco convexo), con extremos en  $x_0$  y  $x_1$ . Un vector (o punto)  $x$  que esté en este 1-simplejo tiene la forma

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t(x_1 - x_0) \\ &= c_0x_0 + c_1x_1, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $c_0 = (1 - t)$  y  $c_1 = t$ . Lo anterior se formaliza en el siguiente resultado, ver demostración en [9, Cap. 1].

**Teorema 4.1** *Si el  $p$ -simplejo  $s$  es el casco convexo de los puntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ , entonces todos los puntos de  $s$  tienen una representación única en la forma  $x = \sum_{i=0}^p c_i x_i$ , donde  $\sum_{i=0}^p c_i = 1$  y  $c_i \geq 0$  para  $i = 0, 1, \dots, p$ .*

El siguiente es un ejemplo de 2-simplejo  $s$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 4.4** Sean  $x_0 = (1, 2)$ ,  $x_1 = (4, 0)$  y  $x_2 = (4, 4)$ . La expresión general de un punto cualquiera  $x$  en el 2-simplejo con vértices  $x_0, x_1$  y  $x_2$  es:

$$x = (t_0 + 4t_1 + 4t_2, 2t_0 + 4t_2),$$

con  $t_0 + t_1 + t_2 = 1$ ,  $t_i \geq 0$  para  $i = 0, 1, 2$ . Algunos ejemplos de puntos localizados en  $s$  son:

1.  $x = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 = (2\frac{1}{2}, 1)$
2.  $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = (4, 2)$
3.  $x = \frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = (3, 2)$ .

Si se da un orden específico en  $s$  a los vértices  $x_0, x_1, \dots, x_p$ , a  $s$  se le llama  **$p$ -simplejo ordenado**. Se define  $\sigma_p$ , llamado  **$p$ -simplejo estándar**, como el conjunto de puntos  $(c_0, c_1, \dots, c_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ , tales que  $\sum_{i=0}^p c_i = 1$  y  $c_i \geq 0$  para  $i = 0, 1, \dots, p$ . Es fácil mostrar que los conjuntos  $\sigma_p$  y  $s$  son homeomorfos, con homeomorfismo  $f : \sigma_p \rightarrow s$  dado por  $f(c_0, \dots, c_p) = \sum c_i x_i$ . Nótese que  $\sigma_p$

es un  $p$ -simplejo con vértices  $x_0 = (1, 0, \dots, 0), x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, x_p = (0, 0, \dots, 1)$ .

Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\phi$  una función continua

$$\phi : \sigma_p \rightarrow X,$$

a  $\phi$  se le llama  **$p$ -simplejo singular**.

Si  $X$  es un espacio topológico, se define el conjunto  $S_n(X)$  como el grupo abeliano libre generado por el conjunto de todos los  $n$ -simplejos singulares en  $X$ . De esta manera, los elementos de  $S_n(X)$ , llamados  **$n$ -cadenas singulares** de  $X$ , tienen la forma

$$C = \sum a_\phi \phi$$

donde cada  $\phi$  es un  $n$ -simplejo singular en  $X$  y  $a_\phi$  es un entero para cada  $\phi$ . A partir de aquí nos referiremos a las  $n$ -cadenas singulares en  $S_n(X)$  simplemente por  $n$ -cadenas.

Dadas  $n$ -cadenas  $C_1$  y  $C_2$ , se define su suma por medio de

$$C_1 + C_2 = \sum a_\phi \phi + \sum b_\phi \phi = \sum (a_\phi + b_\phi) \phi.$$

Observe que el conjunto de  $n$ -simplejos singulares es una base de  $S_n(X)$ . Por otro lado, si  $\phi$  es un  $n$ -simplejo singular e  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  se define un  $(n - 1)$ -simplejo singular  $\partial_i \phi$  en  $X$ , llamado  **$i$ -ésima cara** de  $\phi$  por

$$\partial_i \phi(c_0, \dots, c_{n-1}) = \phi(c_0, c_1, \dots, c_{i-1}, 0, c_i, \dots, c_{n-1}).$$

La asignación  $\partial_i : \phi \mapsto \partial_i \phi$  define un mapeo del conjunto de  $n$ -simplejos singulares en el conjunto de  $(n - 1)$ -simplejos singulares, y éste admite una única extensión natural a un homomorfismo entre los grupos abelianos  $S_n(X)$  y  $S_{n-1}(X)$  definida por  $\partial_i(\sum a_\phi \phi) = \sum a_\phi \partial_i \phi$ . A partir de esta extensión se define el **ope-**

**rador frontera** como el mapeo

$$\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

dado por

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \cdots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i.$$

Probemos que  $\partial$  es un homomorfismo. Dadas  $C_1$  y  $C_2$ ,  $n$ -cadenas en  $S_n(X)$ ,

$$\begin{aligned} \partial(C_1 + C_2) &= \sum (-1)^i \partial_i \left( \sum (a_\phi + b_\phi) \phi \right), \\ &= \sum (a_\phi + b_\phi) \sum (-1)^i \partial_i(\phi), \\ &= \sum a_\phi \left( \sum (-1)^i \partial_i(\phi) \right) + \sum b_\phi \left( \sum (-1)^i \partial_i(\phi) \right), \\ &= \partial(C_1) + \partial(C_2). \end{aligned}$$

Entonces se satisface que  $\partial(C_1 + C_2) = \partial(C_1) + \partial(C_2)$ . El siguiente teorema enuncia una propiedad importante de éste operador.

**Teorema 4.2** *Si  $\phi$  es un  $n$ -simplejo singular, entonces  $\partial \circ \partial(\phi) = 0$ .*

**Demostración** Primero notemos que,  $\partial_l \partial_k(\phi) = \partial_{k+1} \partial_l(\phi)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \partial \circ \partial(\phi) &= \partial \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \partial_k(\phi) \right), \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \partial \circ \partial_k(\phi), \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{k+l} \partial_l \circ \partial_k(\phi). \end{aligned}$$

Notemos que esto último se puede reacomodar como

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{i=0}^l (-1)^{l+i+1} \partial_{l+1} \circ \partial_i(\phi) + \sum_{i=0}^l (-1)^{l+i} \partial_i \circ \partial_l(\phi) \right),$$

utilizando el hecho de que  $\partial_i \circ \partial_l(\phi) = \partial_{l+1} \circ \partial_i(\phi)$  obtenemos

$$\sum_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{i=0}^l ((-1)^{l+i+1} + (-1)^{l+i}) \partial_{l+1} \circ \partial_i(\phi) \right) = 0,$$

lo que concluye la demostración. ■

El teorema anterior es útil para demostrar el siguiente teorema, donde el operador  $\partial$  se aplica a una  $n$ -cadena.

**Corolario 4.1** *La composición  $\partial \circ \partial$  en  $S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-2}(X)$  es cero.*

**Demostración** Sea  $C$  una  $n$ -cadena en  $S_n(X)$ , entonces

$$\partial(C) = \partial \left( \sum a_\phi \phi \right) = \sum a_\phi \partial(\phi),$$

ahora, debido a que  $\partial \circ \partial(C) = \partial(\partial(C))$ , entonces

$$\partial(\partial C) = \partial \left( \sum a_\phi \partial(\phi) \right) = \sum a_\phi \partial(\partial(\phi)) = \sum a_\phi \partial \circ \partial(\phi) = 0.$$

La última igualdad se desprende del Teorema 4.2. ■

Un elemento  $C \in S_n(X)$  se dice ser un  $n$ -**ciclo** si  $\partial(C) = 0$ . Debido a que  $\partial$  es un homomorfismo, su kernel, abreviado  $\ker(\partial)$ , cuyos elementos son precisamente todos los  $n$ -ciclos, es un subgrupo de  $S_n(X)$ , denotado  $Z_n(X)$ , para demostrarlo, sean  $C_1$  y  $C_2$   $n$ -ciclos en  $Z_n(X)$ , entonces  $\partial(C_1 + (-C_2)) = \partial(C_1 - C_2) =$

$\partial(C_1) - \partial(C_2) = 0 - 0 = 0$ , de donde se concluye que  $Z_n(X)$  es un subgrupo de  $S_n(X)$ .

Un elemento  $D \in S_n(X)$  se dice ser una  $n$ -**frontera** si  $D = \partial(E)$  para algún elemento  $E \in S_{n+1}(X)$ . La imagen de  $\partial$  en  $S_n(X)$ , denotada por  $B_n(X)$ , es un subgrupo de  $S_n(X)$ . Par probar lo anterior, basta con mostrar que, para todo  $C$  y para todo  $B$  en  $B_n(X)$ , existe  $V \in S_{n+1}(X)$ , tal que  $C - B = \partial(V)$ . Dado que  $C, B \in B_n(X)$ , existen  $Z$  y  $W$  en  $S_{n+1}(X)$  tales que  $C = \partial(Z)$  y  $B = \partial(W)$ . Entonces  $\partial(Z - W) = \partial(Z) - \partial(W) = C - B$ , de donde se desprende que  $C - B \in S_n(X)$  y, por consiguiente, que  $B_n(X)$  es un subgrupo de  $S_n(X)$ .

Se ha probado que tanto  $B_n(X)$  como  $Z_n(X)$  son subgrupos de  $S_n(X)$ . En este sentido, por ser  $Z_n(X)$  abeliano, entonces  $B_n(X)$  es un subgrupo normal de  $Z_n(X)$ . Para probar tal implicación, sólo verifiquemos que  $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$ . Sea  $C \in B_n(X)$ , entonces  $C = \partial(B)$  con  $B \in S_{n+1}(X)$ . Nótese que, por el Corolario (4.1)

$$\partial(C) = \partial(\partial(B)) = \partial \circ \partial(B) = 0,$$

por lo que  $C \in Z_n(X)$ , es decir,  $C$  es un  $n$ -ciclo y pertenece al  $\ker(\partial)$ .

Se define una relación en  $Z_n(X)$ , estableciendo que dos  $n$ -ciclos  $x$  y  $y$  están relacionados, denotado por  $x \sim y$ , si su diferencia es una  $n$ -frontera, i.e., si  $x - y = \partial(D) \in B_n(X)$ , para algún  $D \in S_{n+1}(X)$ .

Probemos que  $\sim$  es una relación de equivalencia. *Reflexiva:*  $x \sim x$ , puesto que  $x - x = 0 = \partial(C)$ , con  $C = 0$  en  $S_{n+1}(X)$ . *Simétrica:* Supongamos que  $x \sim y$ . Por definición existe  $D \in S_{n+1}(X)$  tal que  $x - y = \partial(D)$ , entonces  $(y - x) = -(x - y) = -\partial(D) = \partial(-D)$ , con  $-D \in S_{n+1}(X)$ . Por lo tanto  $y \sim x$ . *Transitiva:* Supongamos que  $x \sim y$ ,  $y \sim z$ . Entonces existen  $C$  y  $D$  tales que  $x - y = \partial(C)$  y  $y - z = \partial(D)$ . Sumando ambas ecuaciones obtenemos  $x - z = \partial(C) - \partial(D) = \partial(C - D)$ , con  $C - D \in S_{n+1}(X)$ , de donde se sigue que  $x \sim z$ . El grupo cociente que resulta, denotado  $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ , es llamado  $n$ -**ésimo grupo de homología singular** del espacio topológico  $X$ .

Por otro lado, definimos un **grupo (abeliano) graduado**  $G$  como una sucesión  $(G_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , donde cada  $G_i$  es un grupo abeliano; un elemento  $g \in G$  tiene la forma

$g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  donde  $g_i \in G_i$ . Un homomorfismo  $f$  entre dos grupos graduados  $G$  y  $G'$  es una colección de homomorfismos  $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , donde  $f_i : G_i \rightarrow G'_{i+r}$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$  y para algún entero fijo  $r$  llamado **grado** de  $f$ . Un subgrupo  $H$  de un grupo graduado  $G$  es también un grupo graduado, es decir, una sucesión de grupos  $(H_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  donde  $H_i$  es subgrupo de  $G_i$ . Lo anterior se extiende para grupos cocientes de grupos graduados.

Una sucesión de grupos abelianos  $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  y homomorfismos  $\partial_i$  tal que

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

y  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$  para cada  $n$ , recibe el nombre de **cadena compleja**. Nótese que una cadena compleja  $C$  es un ejemplo de grupo graduado con homomorfismo  $\partial : C \rightarrow C'$  de grado  $-1$ . Si  $C$  y  $C'$  son cadenas complejas con operadores  $\partial$  y  $\partial'$  respectivamente, un **mapeo de cadenas** de  $C$  a  $C'$ , es un homomorfismo  $\Phi = (\Phi_i)_{i \in \mathbb{Z}} : C \rightarrow C'$  de grado cero tal que  $\partial' \circ \Phi_i = \Phi_{i-1} \circ \partial$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{\partial} & C_{i-1} \\ \downarrow \Phi_i & & \downarrow \Phi_{i-1} \\ C'_i & \xrightarrow{\partial'} & C'_{i-1} \end{array}$$

Sea  $C$  una cadena compleja y sean  $Z_*(C) = (Z_i)$  y  $B_*(C) = (B_i)$  donde  $Z_i = \ker \partial_i$  y  $B_i = \text{Im} \partial_{i+1}$ . La **homología** de  $C$  se define como el grupo graduado  $H_*(C) = Z_*(C)/B_*(C) = (Z_i/B_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Si  $\Phi$  es un mapeo de cadena, entonces

$$\Phi(Z_*(C)) \subseteq Z_*(C') \quad \text{y} \quad \Phi(B_*(C)) \subseteq B_*(C').$$

Tal contención se prueba fácilmente.

**(a)**  $\Phi(Z_*(C)) \subseteq Z_*(C')$ . Sea  $y \in \Phi(Z_*(C))$ , de manera que  $y = \Phi(x)$  para algún  $x \in Z_*(C)$ . Si  $y \in \Phi(Z_*(C))$  entonces existe  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in Z_*(C)$  tal que  $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  y  $y_i = \Phi_i(x_i)$  para  $i \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $\partial(y_i) = \partial \circ \Phi_i(x_i) =$

$\Phi_{i-1}(\partial'(x_i)) = \Phi_{i-1}(0) = 0$ , de donde  $\partial(y_i) = 0$  para todo  $y_i \in \mathbb{Z}$ . Se sigue que  $\partial(y) = 0$ , por lo que  $y \in Z_*(C')$ .

**(b)**  $\Phi(B_*(C)) \subseteq B_*(C')$ . Como en (a), si  $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Phi(B_*(C))$ , entonces existe un  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in B_*(C)$  tal que  $y_i = \Phi_i(x_i)$  para  $i \in \mathbb{Z}$ . Por otro lado, como  $x \in B_*(C)$ , entonces existe  $w = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in C$  tal que  $x_i = \partial(w_i)$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $y_i = \Phi_i(x_i) = \Phi_i(\partial(w_i)) = \Phi_i \circ \partial(w_i)$  de donde  $\Phi_i \circ \partial(w_i) = \partial' \circ \Phi_{i+1}(w_i)$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Nótese, que  $\Phi_{i+1}(w_i) \in C'$ . Tomando  $\Phi_{i+1}(w_i) = v_i$  para  $i \in \mathbb{Z}$  tal que  $v = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Entonces se sigue que  $y = \partial(v) \in B_*(C')$ .

De lo anterior se concluye que si  $H_*(C)$  denota la sucesión de grupos de homología de la cadena compleja  $C$ , y si  $\Phi : C \rightarrow C'$  es un mapeo de cadenas, entonces  $\Phi$  induce un homomorfismo de grado cero entre los grupos de homología

$$\Phi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$$

definido por  $\Phi_*([x]) = [\Phi(x)]$ .

Probemos que si  $[x] = [y]$  se tiene  $[\Phi(x)] = [\Phi(y)]$ .

Si  $[x] = [y]$  tenemos que  $x - y$ , es decir, existe  $D \in C$  tal que  $x - y = \partial(D)$ . Aplicando  $\Phi$  a  $\partial(D)$  tenemos que  $\Phi(\partial(D)) = \Phi(x - y) = \Phi(x) - \Phi(y)$ . Por otra parte, usando el hecho de que  $\Phi_{i-1} \circ \partial_i = \partial_i \circ \Phi_i$ , tenemos que  $\Phi(\partial(D)) = \partial'(\Phi(D)) \in B_*(C)$  por que se sigue que  $\phi(x) - \phi(y)$ .

Regresando a  $(S_i(X))_{i \in \mathbb{Z}}$ , éste es un grupo graduado, y además, es una cadena compleja en virtud del operador  $\partial$ .

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Si  $f : X \rightarrow Y$  es un mapeo continuo y  $\phi$  un  $n$ -simplejo singular en  $X$ , se define un  $n$ -simplejo singular  $f_{\#}(\phi)$  en  $Y$  dado por  $f_{\#}(\phi) = f \circ \phi$ . Esto se extiende de única manera un homomorfismo  $f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  para cada  $n$ , dado por  $f_{\#}(\sum n_{\phi} \phi) = \sum n_{\phi} f_{\#}(\phi) = \sum n_{\phi} (f \circ \phi)$ .

Nótese que  $f_{\#}$  es un mapeo de cadena, dado que  $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$ . Para verificar

esta igualdad veamos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_n(Y) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ S_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

Sea  $\phi$  un  $n$ -simplejo singular en  $S_n(X)$ , entonces

$$f_{\#} \circ \partial(\phi) = f_{\#} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i(\phi) \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f_{\#}(\partial_i(\phi)),$$

entonces

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i(f_{\#}(\phi)) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i(f \circ \phi) = \partial(f \circ \phi) = \partial(f_{\#}(\phi)) = \partial \circ f_{\#}(\phi).$$

Lo que prueba que  $f_{\#}$  es un mapeo de cadena, el cual induce un homomorfismo de grado cero  $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ .

Por otro lado, usando las definiciones de homotopía presentadas inicialmente, tenemos que para un subespacio topológico  $X$  de un espacio topológico  $Y$ , los grupos de homología del subespacio  $X$  con respecto a los de  $Y$  se relacionan como sigue.

**Teorema 4.3** *Si  $X$  es un retracto por deformación de  $Y$ , entonces  $H_*(X) = H_*(Y)$ .*

Más aún, si  $f$  y  $g$  son funciones homotópicas de  $X$  en  $Y$ , los homomorfismo que estos inducen entre los grupos de homología son iguales.

**Teorema 4.4** *Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas, entonces*

$$f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

**Corolario 4.2** Si  $i : X \rightarrow Y$  es el mapeo inclusión de un retracto  $X$  de  $Y$ . entonces  $i_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$  es un monomorfismo sobre una suma directa. Si  $X$  es un retracto por deformación de  $Y$ , entonces  $i_*$  es un isomorfismo.

Para la demostración de este teorema ver [9].

**Ejemplo 4.5** Un ejemplo de grupo de homología es el siguiente. Sea el espacio topológico  $X = \{\text{punto}\}$ , por ser  $X$  un singleton, existe un único  $p$ -simplejo  $\phi_p : \sigma_p \rightarrow X$  que satisface  $\partial_i \phi_p = \phi_{p-1}$ . Como ejemplo,  $\partial_0 \phi_1 = \phi_0$  y  $\partial_1 \phi_1 = \phi_0$ . Cada  $S_n(X)$  es un grupo infinito cíclico generado por  $\phi_n$ . El operador frontera es dado por

$$\partial \phi_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \phi_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \phi_{n-1}$$

Dado que  $\partial \phi_{2n-1} = 0$  y  $\partial \phi_{2n} = \phi_{2n-1}$  para  $n > 0$ , entonces

$$Z_n(X) = B_n(X) \quad \text{para } n > 0.$$

En el caso  $n = 0$  se tiene que  $\partial(\phi_1) = 0$  por lo que  $B_0(X) = \{0\}$ , mientras que  $\partial(\phi_0) = 0$ , de donde  $Z_0(X) = \{\phi_0\} \cong \mathbb{Z}$ . Por lo tanto

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

## 4.2. Condiciones de estabilizabilidad

En esta sección se retoma el concepto de estabilización de sistemas controlados de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{4.2}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  (donde el entero  $n$  es la dimensión del sistema) y los controles o entradas  $u(\cdot)$  toman valores  $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ . Se asume que  $f$  es localmente Lipschitz y que  $f(0, 0) = 0$ . La solución del sistema (4.2) para una

condición inicial dada  $x_0$  y un control dado  $u$  se define en un intervalo maximal  $[0, t_{\max}(x_0, u)) \subseteq \mathbb{R}$  y se denota por  $x(t, x_0, u)$ .

El problema de estabilización de un punto de equilibrio para sistemas como (4.2) ha sido de gran interés para diversos grupos desde comienzos de la década de los 80's. En [2], Brockett establece una condición necesaria (que explicaremos posteriormente) para la estabilización asintótica local de un punto de equilibrio por medio de retroalimentación diferenciable e invariante en el tiempo. El resultado de Brockett fue mejorado [23, 24] al probarse que también es necesario para la estabilización por retroalimentación sólo continua. En este sentido, Coron, ver [6], establece una condición necesaria para que un sistema sea estabilizable, condición que, a su vez, implica la condición de Brockett.

Posteriormente Ryan en [20], haciendo un estudio en inclusiones diferenciales, prueba que para la existencia de un conjunto compacto globalmente atractivo, el resultado de Brockett sigue siendo una condición necesaria.

Los trabajos que ya han sido mencionados se desarrollaron considerando que la retroalimentación fuese invariante en el tiempo. Sin embargo, Samson en [21] probó que es posible la estabilización global asintótica de puntos de equilibrio por medio de una retroalimentación con dependencia explícita periódica del tiempo.

Cuando se emplea una retroalimentación discontinua, caso que no se considera en esta tesis, es de gran importancia resaltar el siguiente hecho: según la retroalimentación discontinua utilizada, deben definirse apropiadamente las soluciones del sistema implementado dado que el miembro derecho del sistema (4.2) es discontinuo. En este sentido se han obtenido algunos resultados como [3], [8], [23] y [24].

### 4.2.1. Condición de Brockett

En esta subsección presentamos con más detalle las condiciones de estabilizabilidad ya mencionadas, publicadas en [2], [6] y [20].

Sean  $n \geq 2$ ,  $m \geq 1$  enteros,  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tal que  $(0, 0) \in \Omega$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo continuo tal que  $f(0, 0) = 0$ .

**Definición 4.1** *El sistema*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4.3)$$

es **localmente asintóticamente estabilizable** (LAE, para abreviar) en el origen de  $\mathbb{R}^n$  si existe una vecindad  $V$  del origen en  $\mathbb{R}^n$  y un mapeo continuo  $u : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

(i) *El sistema en lazo cerrado*

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad x(t_0) = x_0,$$

tiene solución única  $x(t, x_0, u)$ , para todo  $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$  y para toda condición inicial  $x_0$  en una vecindad pequeña del origen en  $\mathbb{R}^n$ ;

(ii) *El origen de  $\mathbb{R}^n$  es localmente asintóticamente estable para*

$$\dot{x} = f(x, u(x)); \quad (4.4)$$

(iii)  $u(0) = 0$ .

A continuación se presenta parte del resultado de Brockett e ideas centrales de la demostración alternativa expuesta en [24, Secc.5.9], en la cual, se utilizan las nociones de grado de Brouwer, índice de campo vectorial y otros conceptos que se enuncian enseguida.

Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapeo liso donde  $M$  y  $N$  son dos variedades con la misma dimensión. Se dice que  $x \in M$  es un **punto regular** de  $f$  si la derivada de  $f$  en  $x$ , denotada por  $df_x$ , es no singular. Por el teorema de la función inversa, nótese que  $f$  asigna a una vecindad abierta de  $x$  en  $M$  de manera difeomorfa un subconjunto abierto en  $N$ . Un punto  $y \in N$  es llamado un **valor regular** si  $f^{-1}(y)$  contiene sólo puntos regulares. En caso contrario, si  $df_x$  es singular, entonces  $x$  es llamado **punto crítico** y la imagen  $f(x)$  es llamada un **valor crítico**. Se puede probar que si  $M$  es compacta y  $y \in N$  es un valor regular, entonces la preimagen  $f^{-1}(y)$  es un conjunto finito (posiblemente vacío).

Un concepto asociado a la noción de grado es el de orientación de una variedad. Una **variedad lisa orientada** es una variedad  $M$  junto con una orientación para cada espacio tangente  $T_x M$ . La orientación de un espacio vectorial real la determina la siguiente relación de equivalencia con sus bases: la base  $(b_1, \dots, b_n)$  determina la misma orientación que la base  $(b'_1, \dots, b'_n)$  si  $b'_i = \sum a_{ij} b_j$  con  $\det(a_{ij}) > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Esta determina la orientación opuesta si  $\det(a_{ij}) < 0$ .

Sean  $M$  y  $N$  variedades  $n$ -dimensionales orientadas sin frontera y sea  $f : M \rightarrow N$  un mapeo liso. Si  $M$  es compacta y  $N$  es conexa, entonces el grado de  $f$  se define como sigue: Sea  $x \in M$  un punto regular de  $f$ , tal que  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales orientados. Se define el **signo** de  $df_x$  como  $+1$  o  $-1$  de acuerdo a si  $df_x$  preserva, respectivamente, cambia su orientación. Para cualquier valor regular  $y \in N$  se define el **grado de  $f$  respecto a  $y$**  como

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(\det(df_x)).$$

Las siguientes propiedades del grado de Brouwer serán usadas en la demostración del teorema de Brouwer. (a) El entero  $\deg(f; y)$  no depende de la elección del valor regular  $y$ ; (b) Si  $f$  es homotópica a  $g$ , entonces  $\deg(f, y) = \deg(g, y)$  para cada  $y \in N$ ; (c) El grado  $\deg(g, y)$  es igual a  $\deg(f, y)$  para cualquier valor regular común  $y$ .

Antes de dar la noción de índice de un campo vectorial, recordemos que un **campo vectorial** diferenciable en una variedad  $M$ , es un mapeo liso  $v : M \rightarrow TM$  tal que  $v(x) \in T_x M$  para cada  $x \in M$ . En esta discusión nos limitaremos a considerar sólo campos vectoriales definidos en subvariedades definidas en variedades euclidianas como  $\mathbb{R}^m$ . En tal caso, un campo vectorial  $v$  se define como un mapeo  $v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  bajo la identificación natural  $T_x \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$ .

Considérese un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^m$  y un campo vectorial liso  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  con un cero aislado en el punto  $z \in U$ . La función

$$\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$$

asigna a una esfera centrada en  $z$  la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^m$ . El grado de Brouwer de  $\bar{v}$  es llamado el **índice** de  $v$  en el cero  $z$ . Todas las definiciones anteriores fueron consultadas y adaptadas de [17, Caps.5, 6 y 7]

A continuación se da parte del resultado de Brockett, ver [6].

**Teorema 4.5** *Si para el sistema (4.3) los mapeos  $f$  y  $u$  son  $C^1$  y satisfacen (ii) y (iii) de la Definición (4.1), entonces  $f$  mapea cada vecindad abierta de cero en una vecindad abierta de cero.*

Antes de presentar la demostración alternativa considérense los siguientes hechos necesarios para ésta. Tanto los enunciados como sus demostraciones son tomados de [24, Secc.5.9].

Sin pérdida de generalidad, supóngase que  $0 \in \mathbb{R}^n$  es un punto localmente asintóticamente estable para un campo vectorial  $f$ . Defínase el **dominio de atracción o de convergencia de las soluciones**, como el conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = 0\},$$

donde  $\phi(\cdot, x)$  representa la curva solución de  $f$  que pasa por un punto  $x$  en el tiempo  $t = 0$ . Los siguientes resultados dan información respecto al dominio de atracción  $D$ .

**Lema 4.1** [24] *Para cada  $x \in D$  y cada vecindad  $\mathcal{V}$  de 0 existe  $\mathcal{V}'$ , vecindad de  $x$ ,  $\mathcal{V}' \subseteq D$  y  $T \in \mathbb{R}$ , tal que para todo  $y \in \mathcal{V}'$ ,  $\phi(t, y) \in \mathcal{V}$  para todo  $t \geq T$ . En particular tenemos que  $D$  es abierto.*

El lema anterior asegura, en esencia, que el dominio de atracción es un conjunto abierto, lo que resulta útil para mostrar si  $\phi$  es continua en  $\mathbb{R} \times D$

**Teorema 4.6** *Sea  $\phi(t, x)$  continua en toda  $t \in \mathbb{R}$ , entonces el dominio de atracción  $D$  es un conjunto contráctil.*

La idea para probar que  $D$  es contráctil consiste en definir un mapeo continuo

$$H : [0, 1] \times D \rightarrow D$$

tal que, para todo  $t \in [0, 1]$  y  $x \in D$

$$H(t, x) = \begin{cases} \phi(\frac{t}{1-t}, x) & t \in [0, 1) \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

La continuidad de  $H$  en  $[0, 1] \times D$  se deduce fácilmente de la continuidad de  $\phi$ . La continuidad de  $H$  en  $(1, x)$  se prueba tomando cualquier  $x$  y cualquier vecindad  $\mathcal{V}$  de  $H(1, x) = 0$ . Entonces por el Lema 4.1, existe un  $\delta > 0$  y una vecindad  $\mathcal{V}'$ , tal que  $H(s, x) \in \mathcal{V}$  siempre que  $y \in \mathcal{V}'$  y  $1 - s < \delta$ . Nótese que siempre se cumple que  $\frac{s}{1-s} > T$  si se toma  $\delta = \frac{1}{1+T}$ .

Un hecho importante, en el que se hace uso de grado de Brouwer es el siguiente.

**Hecho** Sea  $\overline{\mathbb{B}}_\delta(0)$  la bola cerrada de radio  $\delta$  con centro en el origen de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $S_\delta$  el conjunto frontera  $S_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = \delta\}$ . Supóngase que

$$H : [0, 1] \times \overline{\mathbb{B}}_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es una función continua tal que  $H(1, \cdot) = -\text{id}$  para todo  $x$  en  $\overline{\mathbb{B}}_\delta(0)$  y  $H(t, x) \neq 0$  para todo  $x \in S_\delta$  y para todo  $t$ . Sea

$$F : \overline{\mathbb{B}}_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por  $F(x) = H(0, x)$ . Entonces existe algún  $\varepsilon > 0$  tal que  $\text{Im}(F)$  contiene la bola  $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon(0)$ .

La demostración de este hecho está basada en la teoría del grado. En este caso particular, el grado es un invariante homotópico, siempre que  $H(t, x) \neq 0$  para todo punto  $x$  en  $S_\delta$ . Por lo tanto,  $\deg(F, 0) = \deg(-\text{id}, 0) = (-1)^n$ , donde  $n$  es la dimensión del sistema. También, nótese que como  $F$  no es cero, para todo

$x$  en  $S_\delta$  y  $S_\delta$  es compacto, entonces existe un  $\varepsilon > 0$  de modo que  $\|F(x)\| > \varepsilon$  para  $x \in S_\delta$ . Así,  $F(x) \neq y$  para todo  $y \in \overline{\mathbb{B}_\varepsilon(0)}$  y  $x \in S_\delta$ . Por propiedades de grado enunciadas antes del Teorema 4.5,  $\deg(F, y) = \deg(F, 0) \neq 0$  para todo  $y \in \overline{\mathbb{B}_\varepsilon(0)}$ . Por ser el grado un entero diferente de cero en cada  $y$ , entonces  $F(x) = y$  tiene al menos una solución, con lo que se concluye la demostración de este hecho.

Ahora se puede completar la demostración del resultado de Brockett. Para esto se debe de probar que si el sistema (4.4), definido en una bola cerrada suficientemente pequeña con centro en el origen de  $\mathbb{R}^n$ , es localmente asintóticamente estable, entonces que la imagen de  $x \mapsto f(x, u(x))$  contiene una vecindad del origen. Denotaremos  $F(x) = f(x, u(x))$  en la demostración.

**Demostración:** [24, Cap. 5] Considérese la bola cerrada  $\overline{\mathbb{B}_\delta(0)} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$  y partiendo del Hecho 1, probado antes, considérese también la homotopía  $H : [0, 1] \times \overline{\mathbb{B}_\delta(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por

$$H(t, x) := \begin{cases} F(x) & \text{si } t = 0 \\ -x & \text{si } t = 1 \\ \frac{1}{t}[\phi(\frac{t}{1-t}, x) - x] & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$

para todo  $x$  en  $\overline{\mathbb{B}_\delta(0)}$ , la cual conecta  $F$  y  $-\text{id}$ . Nótese que  $H(t, x) \neq 0$  para toda  $x \neq 0$ , debido a que  $H$  está definida en la región de atracción por lo que no existe más que 0 como punto de equilibrio.

Para puntos de la forma  $(t, x)$  con  $t > 0$ ,  $H$  es continua por ser el producto de las funciones continuas  $\frac{1}{t}$  y  $\phi(\frac{t}{1-t}, x) - x$ , lo que se probó en el Teorema 4.6. Finalmente, resta probar la continuidad de  $H$  en  $(0, x)$ . Por definición del flujo del campo vectorial  $F$ , se satisface que para todo  $y \in \overline{\mathbb{B}_\delta(0)}$  y para todo  $s \in (0, s)$  se satisface que  $\frac{1}{s}(\phi(s, y) - y) = \frac{1}{s} \int_0^s F(\phi(\tau, y)) d\tau$ , entonces

$$\frac{1+s}{s}(\phi(s, y) - y) - F(x) = \frac{1}{s} \int_0^s \{F(\phi(\tau, y)) - F(x)\} d\tau + \int_0^s F(\phi(\tau, y)) d\tau$$

Por continuidad de  $F(\phi(\cdot, \cdot))$ , existen una vecindad  $\mathcal{W}$  de  $x$  y  $\delta > 0$  tal que  $|F(\phi(\tau, y)) - F(x)| < \varepsilon/2$  siempre que  $y \in \mathcal{W}$  y  $\tau < \delta$ . Sea  $M$  una cota de los valores de  $\|F(\phi(\tau, y))\|$  para  $y \in \mathcal{W}$  y  $\tau \leq \delta$ . Por lo tanto, si  $s < \delta$  se cumple que, con  $\frac{s}{1+s}$ ,

$$\|H(t, y) - F(x)\| < \varepsilon/2 + M \frac{t}{1-t}$$

siempre que  $y \in \mathcal{W}$  y  $s = \frac{t}{1-t} < \delta$ . Por el Teorema 4.6 se completa la demostración tomando  $\delta$  suficientemente pequeña tal que  $t < \delta$  implica que el segundo término  $M \frac{t}{1-t}$  es menor que  $\varepsilon/2$  ■.

En otras referencias, por ejemplo en [23], se establecen que si existe una retroalimentación  $u$  regular y continua en  $0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces el mapeo  $(x, u) \mapsto f(x, u)$  es abierto en cero. En este sentido, entiéndase por **regular** que  $u$  es localmente Lipschitz en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y se satisface la condición (i) de la definición 4.1. Sobre este resultado hay que recalcar que si se tiene un sistema no controlado el resultado se formula de manera diferente. Para la demostración de esta formulación son necesarias algunas nociones básicas del grado de Brouwer, como se verá a continuación, ver [20].

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente Lipschitz y considérese el sistema

$$\dot{x} = f(x). \tag{4.5}$$

Si el sistema (4.5) tiene un punto de equilibrio  $\bar{x}$  asintóticamente estable, entonces el cero aislado  $\bar{x}$  de  $-f$  tiene índice  $\text{ind}(-f, \bar{x}) = 1$  y, por lo tanto, para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $\text{deg}(-f, \mathbb{B}_\varepsilon(\bar{x}), 0) = 1$ , donde  $\text{deg}$  denota el grado de Brouwer y  $\mathbb{B}_\varepsilon(\bar{x})$  denota la bola abierta de radio  $\varepsilon$  centrada en  $\bar{x}$ . Entonces por las propiedades del grado de Brouwer,  $f(\mathbb{R}^n)$  contiene una vecindad abierta de 0.

Como ilustraciones de la aplicación de la condición de Brockett, consideremos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 4.6** Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, u) \mapsto x^2 + 0 \cdot u$ . Este sistema,  $\dot{x} = x^2$ , es un caso ilustrativo donde no se cumple la condición del Teorema 4.5. Nótese que

$f$  no es abierta en  $0$ , dado que cualquier vecindad  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  de  $0$  no está contenida en  $\text{Im}(f) = f(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ .

**Ejemplo 4.7** Nótese que el siguiente sistema:  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, u) = (x_1, x_2, u_1, u_2) \mapsto (u_1, u_1 u_2)$  no satisface la condición del Teorema 4.5. Los puntos de la forma  $(0, \varepsilon)$  con  $\varepsilon \neq 0$  no están en la imagen de  $f$ . Razonando como en el ejemplo anterior, sea  $y = (0, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$  un punto cualquiera tal que  $\varepsilon \neq 0$  y supóngase que  $(0, \varepsilon)$  pertenece a la imagen de  $f$ , de manera que  $(0, \varepsilon) = (u_1, u_1 u_2)$ . Esto implica que  $u_1 = 0$  y  $\varepsilon = u_1 u_2$ , lo cual es contradictorio. Por consiguiente la imagen de  $f$  no es abierta en cero. Finalmente se concluye que no existe una retroalimentación continua que estabilice el sistema en  $0 \in \mathbb{R}^2$ .

## 4.2.2. Condición de Coron

El resultado publicado por Coron (1990), ver [6], es una condición necesaria para la estabilizabilidad del sistema (4.1). Más aún, Coron probó que su resultado implica el resultado de Brockett.

Sean  $n \geq 2$ ,  $m \geq 1$  enteros,  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tal que  $(0, 0) \in \Omega$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo continuo tal que  $f(0, 0) = 0$ .

Dado  $\varepsilon$  en  $(0, +\infty]$ , sea el conjunto

$$\Sigma_\varepsilon = \{(x, u) \in \Omega; \quad f(x, u) \neq 0, \quad \|x\| < \varepsilon \quad y \quad \|u\| < \varepsilon\}.$$

La condición necesaria de Coron, ver [6], es la siguiente.

**Teorema 4.7** *Si el sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  es localmente asintóticamente estabilizable en el origen, entonces*

$$f_*(H_{n-1}(\Sigma_\varepsilon)) = H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad (4.6)$$

para todo  $\varepsilon$  en  $(0, +\infty]$ .

En la ecuación (4.6),  $f_*$  denota el homomorfismo de grado cero inducido por el mapeo  $f$  entre los grupos de homología de  $\Sigma_\varepsilon$  y  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . La demostración del Teorema 4.7 se estructura como sigue.

**Demostración** Supóngase que el sistema (4.3) es LAS, es decir, existe  $u$  continua definida en una vecindad suficientemente pequeña  $V$  de  $0 \in \mathbb{R}^n$ , tal que (i), (ii) y (iii) de la Definición 4.1 se satisfacen. Dado  $\delta$  en  $[0, +\infty)$ , sea  $\mathbb{B}_\delta$  la bola abierta de radio  $\delta$  centrada en  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Sea  $\varepsilon$  en  $(0, \infty]$ , por ser  $0$  en  $\mathbb{R}^n$  localmente asintóticamente estable para (4.4), se sigue que para valores pequeños de  $\|x\|$ , se cumple que  $f(x, u(x)) \neq 0$ . La demostración consiste en probar la igualdad (4.6), es decir, probar la suprayectividad de  $f_*$ , que más adelante denotaremos por  $(f)_*$ . Considérese el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\} & \xrightarrow{v} & (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow h & \swarrow f \\ & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \end{array}$$

donde  $h(x) = f(x, u(x))$  y  $v(x) = (x, u(x))$ . Ahora, sea el mapeo continuo  $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}$ , definido por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\} \\ \delta \frac{x}{\|x\|} & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}}_\delta(0) \end{cases},$$

y sea  $i : \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  el mapeo inclusión. Nótese que  $\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}$  es un retracto por deformación de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  debido a que  $g$  es una retracción por deformación; al satisfacerse que  $g \circ i = \text{id}_{\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}}$  y también que  $i \circ g$  es homotópica a  $\text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ , con homotopía  $H : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  definida por

$$H(t, x) = (1 - t)r(x) + tx,$$

donde  $r := i \circ g$  además,  $H$  es continua, lo que se deduce fácilmente de la conti-

nidad de la composición  $r$ .

Por ser  $\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}$  un retracto por deformación de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , del Corolario 4.2 se concluye que  $i_*$  es un isomorfismo entre los grupos de homología  $H_{n-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\})$  y  $H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

Por otro lado, retomando el hecho de que  $h$  es homotópica a  $-\text{id}$ , recordemos que una homotopía existente es  $F : \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  definida por

$$F(t, x) = \begin{cases} \phi\left(\frac{t}{1-t}, x\right) & t \in [0, 1) \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

que fue usada en la demostración del Teorema 4.5.

Sea el mapeo  $-\text{id} : \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}$  y el mapeo inclusión  $i : \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Bajo el mismo razonamiento, nótese que,  $i \circ -\text{id}$  es homotópico al mapeo  $-i$ , e incluso, son iguales. Una homotopía

$$F' : \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

definida por  $F'(x, t) = (1-t)(i \circ -\text{id})(x) + t(-i(x))$ . Por ser  $i \circ (-\text{id})$  homotópica a  $-i$ , entonces  $(-i)_* = (i \circ (-\text{id}))_*$ . De esta conclusión se sigue que  $(-\text{id})_*$  es un isomorfismo dado que  $i_*$  lo es.

Retomando los mapeos  $h, f$ , éstos inducen el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}) & \xrightarrow{(v)_*} & H_{n-1}\left(\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{R}^m\right) \\ & \searrow (h)_* & \swarrow (f)_* \\ & H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \end{array}$$

Como se ha probado que  $h$  es homotópica a  $-\text{id}$ , y que  $(-\text{id})_*$  es un isomorfismo, entonces  $(h)_*$  inducida por  $h$ , como se muestra en el diagrama, es biyectiva, en particular es suprayectiva, de donde se concluye que  $(f \circ v)_*$  también es suprayectiva por ser el diagrama conmutativo, lo que completa la prueba del teorema de Coron.

### 4.2.3. Condiciones de Ryan

En [20], Ryan haciendo un estudio en el contexto de las inclusiones diferenciables, prueba que para la existencia de un conjunto compacto globalmente atractivo, la condición de Brockett sigue siendo necesaria.

La prueba del resultado no se incluye en esta tesis; pero para hacer una descripción del resultado de Ryan, se dan a continuación elementos básicos en relación a las inclusiones diferenciales.

Sea  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  el mapeo multivaluado que asigna a puntos  $(t, x)$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Una **inclusión diferencial** (para abreviar ID) es un objeto de la forma

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad (4.7)$$

donde  $t \in [a, b]$ .

La solución  $x(\cdot)$  de (4.7) es una función absolutamente continua  $x(\cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuya derivada  $\dot{x}$  respecto a  $t$  pertenece a  $F(t, x(t))$  para cada  $t \in [a, b]$ . Recordemos que una función  $f$  de variable real o con dominio en  $\mathbb{R}$  es absolutamente continua si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un número positivo  $\delta$  tal que la sucesión de intervalos  $[x_k, y_k]$ , con  $k = 1, \dots, n$ , satisface que  $\sum_{k=1}^n \|f(y_k) - f(x_k)\| < \varepsilon$  siempre que  $\sum_{k=1}^n |y_k - x_k| < \delta$ .

En la literatura, [5], a las funciones absolutamente continuas  $x : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se les denota por *arc* en  $[a, b]$ . Dicha notación la adoptaremos para referirnos a *arc* aquellas funciones  $x$  que sean solución de  $F$ . En la teoría de ID, las propiedades de semicontinuidad acotada y la condición de Lipschitz son de particular importancia. La semicontinuidad acotada es persistente respecto de las ID debida la **Hipótesis Persistente**, que supone lo siguiente:

1. Para cada  $(t, x)$ ,  $F(x, t)$  es un conjunto compacto convexo no vacío.
2.  $F$  es semicontinua acotada.
3. Para algunas constantes positivas  $\gamma$  y  $c$ , y para todo  $(t, x)$ ,

$$v \in F(x, t) \implies \|v\| \leq \gamma\|x\| + c.$$

En referencia a la segunda condición de la Hipótesis Persistente, recordemos que  $F$  es semicontinua acotada superiormente en  $x$  si dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|x' - x\| < \delta$  implica que  $F(x') \subset F(x) + \varepsilon B$ .

Se consideran retroalimentaciones admisibles para (4.7) aquéllas que pertenecen a la clase de funciones semicontinuas acotadas superiormente  $x \mapsto k(x) \subset \mathbb{R}^m$  con  $x \in \mathbb{R}^n$ , y con valores compactos convexos no vacíos, que se les denota por  $\mathcal{K}$ .

Por lo supuesto sobre  $F$ , para todo mapeo  $k \in \mathcal{K}$  el mapeo  $F(x, k(x))$  es un mapeo semicontinuo acotado superiormente definido en algún dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ , con valores compactos convexos no vacíos.

Para el sistema (4.7), una retroalimentación  $k \in \mathcal{K}$  hace de un conjunto compacto  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto estable y atractivo, si  $A$  es estable y atractivo para el sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x(t))), \quad x(0) = x^0, \quad (4.8)$$

el cual admite soluciones y cada solución puede extenderse a una solución maximal<sup>1</sup>. El siguiente teorema y corolario son consecuencia inmediata del Teorema 7 en [20].

**Teorema 4.8** *Sea  $k \in \mathcal{K}$  y sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  no vacío y compacto. Si se satisfacen cualquiera de las siguientes condiciones, entonces el sistema (4.7) satisface la condición del Teorema 4.5:*

- (i)  *$k$  convierte a  $C$  en un conjunto globalmente atractivo para el sistema (4.8);*

---

<sup>1</sup>Por solución se define a una función  $x \in AC([0, \alpha]; \mathbb{R}^n)$ , con  $0 < \alpha \leq +\infty$  y  $x(0) = x^0$ ; y por solución maximal se define al no tener una extensión derecha. En general, se denota por  $AC(I; \mathbb{R}^n)$  el espacio de funciones absolutamente continuas definidas en subintervalos compactos de  $I$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

- (ii)  $k$  convierte alguna bola cerrada  $\mathbb{B}$  en un conjunto estable y atractivo para el sistema (4.8).

### 4.3. Extensión del resultado de Coron

Esta sección contiene la segunda contribución que se han realizado en esta tesis. Interesados en discutir condiciones de estabilizabilidad local, se prueba que (i) del Teorema 4.8 implica el resultado 4.7. Esta implicación se establece como sigue. El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 4.7.

**Teorema 4.9** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto compacto contráctil. Supóngase que existe una función  $k \in \mathcal{K}$  que hace de  $K$  un conjunto compacto contráctil globalmente atractivo para el sistema (4.8), entonces  $f_*(H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)) = H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .*

Antes de incluir la demostración, consideremos el siguiente hecho. Sea  $K$  un subconjunto compacto en  $\mathbb{R}^n$ . Se define la siguiente relación  $R$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Dados  $x$  y  $y$  en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$xRy \quad \text{si y sólo si} \quad x, y \in K.$$

Probemos que es una relación de equivalencia. Sea  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ . (a) Sea  $x \in K$ , entonces  $xRx$ , y  $R$  es *reflexiva*. (b) Sean  $x$  y  $y$  en  $K$ , entonces  $xRy$  y  $yRx$  por lo que  $R$  es *simétrica*. (c) Análogamente, sean  $x, y$  y  $z$  en  $K$ , y sean que  $xRy$ , y  $yRz$ . Entonces  $xRz$  dado que  $x, z \in K$ , y así se verifica la *transitividad* de  $R$ . Agrupemos por clases de equivalencia  $[x]$ , notando que

$$[x] = \begin{cases} \{x\} & x \notin K \\ K & \text{otro caso.} \end{cases}$$

El conjunto de clases de equivalencia, denotado por  $\mathbb{R}^n/K$ , es el grupo cociente de  $\mathbb{R}^n$  por la relación  $R : \mathbb{R}^n/K = \{[x] : x \in \mathbb{R}^n\}$ . Habiendo definido el espacio

cociente  $\mathbb{R}^n/K$ , éste se equipa con la topología cociente heredada de  $\mathbb{R}^n$ , ver [14]. Definamos los siguientes mapeos  $\varphi$  y  $\pi$  como sigue. Sea el mapeo  $\pi : \mathbb{R}^n \setminus K \rightarrow (\mathbb{R}^n/K) \setminus K$ , definido por  $\pi(x) = [x]$ . El mapeo  $\pi$ , llamado proyección de  $\mathbb{R}^n \setminus K$  sobre  $(\mathbb{R}^n/K) \setminus K$ , es un homeomorfismo. Probemos que  $\pi$  es biyectivo.

$\pi$  es inyectivo. Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus K$  tales que  $\pi(x) = \pi(y)$ . Dado que  $x \notin K$  y  $y \notin K$ , la suposición implica que  $\{x\} = \{y\}$ , de donde se deduce que  $x = y$ .

$\pi$  es suprayectiva. Sea  $[y]$  cualquier elemento en  $(\mathbb{R}^n/K) \setminus K$ ; como  $y \notin K$ , entonces  $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$  y se tiene que  $\pi(y) = [y]$ . Por ser  $\pi$  inyectiva y suprayectiva, entonces  $\pi$  es biyectiva.

Para ver que  $\varphi$  es continua basta probar recordar que  $\varphi$  es continua si dado un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n \setminus K$  entonces  $\varphi^{-1}(U)$  debe ser abierto en  $(\mathbb{R}^n/K) \setminus K$ , pero  $\varphi^{-1}(U) = \pi(U)$ , el cual es un abierto en  $\mathbb{R}^n \setminus K$ , por la topología cociente, y por lo se concluye que es un abierto en la topología de  $(\mathbb{R}^n/K) \setminus K$ . En general se cumple que, para cualquier compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$ , los espacios  $(\mathbb{R}^n/K) \setminus K$  y  $\mathbb{R}^n \setminus K$  son homeomorfos.

Para hacer la demostración de (i) del Teorema 4.9, consideraremos el caso donde  $K$  es una bola cerrada de radio  $\delta$  centrada en el origen, denotada por  $\overline{\mathbb{B}}_\delta(0)$ .

**Demostración:** Usando ideas semejantes a la demostración del resultado de Coron, bajo el supuesto que  $K$  es globalmente atractivo, se demuestra que  $f_*(H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)) = H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Para la demostración se usará el siguiente diagrama. En la demostración denotaremos la restricción de  $f$  a  $(\mathbb{R}^n/K) \setminus K$  por  $\tilde{f}$  y  $f'_*$  el homomorfismo inducido por  $f'$  (entre los grupos de homología  $H_*((\mathbb{R}^n/K) \setminus K)$  y  $H_*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ).

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{R}^n \setminus K) \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\pi \times \text{id}_{\mathbb{R}^m}} & ((\mathbb{R}^n/K) \setminus K) \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\varphi \times \text{id}_{\mathbb{R}^m}} & (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m \\
 \downarrow f' & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \tilde{f} \\
 \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^n \setminus \{0\}
 \end{array}$$

Sea el mapeo  $\varphi : \mathbb{R}^n / K \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  definido por  $\varphi(x) = x(\|x\| - \delta)$ , donde  $\delta$  es el radio de la bola cerrada  $\overline{\mathbb{B}}_\delta(0) = K$ . Nótese que este mapeo es un homeomorfismo entre los espacios en que está definido.

Sea el mapeo continuo  $\hat{f} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con  $\hat{f} = f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ . Considérese el siguiente sistema

$$\dot{x} = \hat{f}(x, \hat{u}(x)), \quad (4.9)$$

y sea el mapeo  $\hat{F}(x) = \hat{f}(x, \hat{u}(x))$  donde  $\hat{v}(x) = (x, \hat{u}(x))$ .

Nótese que el siguiente diagrama conmuta por la definición de los mapeos. Ahora probemos que  $\hat{F}$  es suprayectivo.

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\} & \xrightarrow{\hat{v}} & (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow \hat{F} & \swarrow \hat{f} \\ & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \end{array}$$

Considerando el hecho de que  $\pi$  y  $\varphi$  son homeomorfismos, y supóngase que  $\Phi(t, x)$  es el flujo del campo vectorial  $f'$  del sistema (4.8), entonces el flujo  $\hat{\Phi}$  del campo vectorial  $\hat{f}$  se define como  $\varphi \circ \pi \circ \Phi = \hat{\Phi}$ . Por ser  $K = \overline{\mathbb{B}}_\delta(0)$  globalmente atractivo en  $\mathbb{R}^n$ , es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Phi}(t, x) = 0$ . Esto se prueba como sigue: Sea un abierto  $V \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  de  $0$ , entonces  $\pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(V)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n \setminus K$ , dado que existe un  $T_0 \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $t \geq T_0$ ,  $\Phi(T_0, x) \in \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(V)$ . De la definición de  $\hat{\Phi}$  se concluye que existe un  $T \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $t \geq T$ ,  $\hat{\Phi}(t, x) \in V$  y además  $T = T_0$ .

Por otro lado, recordemos que  $\hat{F}$  es homotópica a la función  $-\text{id}$ . Una homotopía existente, por cierto ya conocida, es definida por  $\hat{H} : \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  como

$$\hat{H}(x, t) = \frac{1}{t} [\hat{\Phi}(\frac{t}{1-t}, x) - \hat{\Phi}(0, x)].$$

La prueba de continuidad de  $\hat{H}$  se realizó al demostrar el Teorema 4.7. Sólo recordemos que  $\lim_{t \rightarrow 0} \hat{H}(x, t) = \hat{F}(x)$  y  $\lim_{t \rightarrow 1} \hat{H}(x, t) = -\text{id}(x)$ . Para los

valores de  $t = 0$  y  $t = 1$ ;  $\hat{H}(t, x)$  tiene singularidades. Lo que no representa problema alguno para demostrar continuidad de  $\hat{H}$ ; esta se demuestra al probar que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1-t} = 0$ , si dado  $\epsilon > 0$  y tomando  $\delta = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$ , tal que  $|t| < \delta$  implica que  $\epsilon > \frac{|t|}{|1-t|}$  para todo  $t$ , lo que prueba que 0 es el límite.

Por ser  $\hat{F}$  y  $-\text{id} |_{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}}$  homotópicas, entonces  $(\hat{F})_* = (-\text{id} |_{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}})_*$  como homomorfismos entre grupos de homología  $H_*(\overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}})$  y  $H_*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Por otro lado, nótese que  $(-\text{id} |_{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}})_*$  es un isomorfismo, por ser  $\overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}}$  un retracto por deformación de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; Para verificar este último se tiene la retracción  $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}}$  definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & : \text{ si } x \in \overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}} \\ \delta \frac{x}{|x|} & : \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Si se considera el mapeo inclusión  $i : \overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , entonces la función  $i \circ g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  es homotópica a la  $\text{id} |_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ . Una homotopía  $H : \overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}} \times [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}}$  es la siguiente:

$$H(x, t) = (1 - t)(i \circ g(x)) + t \text{id}(x).$$

La cual es continua y satisface  $H(x, 0) = i \circ g(x)$  y  $H(x, 1) = \text{id}(x)$ . Lo anterior, aunado a que  $g \circ i = \text{id}_{\overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}}}$  demuestra que  $\overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}}$  es un retracto por deformación de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

En consecuencia, por ser  $-\text{id} : \mathbb{B}_\delta \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  homotópica a  $i : \mathbb{B}_\delta \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $\hat{F}$  homotópica a  $-\text{id}$  entonces se sigue que  $(\text{id} |_{\overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}}})_* = (\hat{F})_*$ . Puesto que  $i \circ g = \text{id} |_{\overline{\mathbb{B}_\delta \setminus \{0\}}}$ , entonces  $(\text{id})_*$  es un isomorfismo. De esto se deduce que  $(\hat{F})_*$  es un isomorfismo. Finalmente, considerando el siguiente diagrama

conmutativo, se concluye que en  $\hat{F}_* = \hat{f}_* \circ \hat{v}_*$ ,  $\hat{f}_*$  es suprayectivo.

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\hat{v}_*} & H_{n-1}((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m) \\ & \searrow \hat{F}_* & \swarrow \hat{f}_* \\ & H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \end{array}$$

Ahora, sea el sistema

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u}(\tilde{x})), \quad (4.10)$$

con  $\tilde{f} : ((\mathbb{R}^n/K) \setminus K) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , tal que  $\tilde{x} = \varphi^{-1}(x)$  y  $\tilde{u}(\tilde{x}) = (\text{id}_{\mathbb{R}^m} \circ \hat{u}) \circ \varphi^{-1}(x)$  para todo  $x \in \overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}$ . Sea el diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\tilde{v}} & ((\mathbb{R}^n/K) \setminus K) \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow \tilde{F} & \swarrow \tilde{f} \\ & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \end{array}$$

Siguiendo el procedimiento empleado para el sistema (4.9) se prueba la suprayectividad de  $\tilde{F}_*$ , y así concluimos que  $\tilde{f}_*$  es suprayectivo también.

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\})) & \xrightarrow{\tilde{v}_*} & H_{n-1}((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m) \\ & \searrow \tilde{F}_* & \swarrow \tilde{f}_* \\ & H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \end{array}$$

Par probar la suprayectividad de  $\tilde{F}_*$ , se prueba que  $\tilde{F}$  es homotópica a  $\text{id}_{\varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\})}$ , con homotopía  $\tilde{H} : \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\})$  definida por

$$\tilde{H}(\tilde{x}, t) = \frac{1}{t} [\tilde{\Phi}(\frac{1}{1-t}, \tilde{x}) - \tilde{\Phi}(0, \tilde{x})].$$

La continuidad de  $\tilde{H}$  ha sido probada para el sistema (4.9). Por ser  $\varphi$  un homeomorfismo, se prueba de manera natural que  $\varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\})$  es un retracto por deformación dada  $(\mathbb{R}^n/K) \setminus K$ .

Sea el sistema dado

$$\dot{x}' = f'(x', u'(x')), \quad (4.11)$$

con  $f' : (\mathbb{R}^n \setminus K) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , donde  $x' = \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(x)$  y  $u'(x') = (\text{id}_{\mathbb{R}^m} \circ \text{id}_{\mathbb{R}^m} \circ \hat{u}) \circ \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(x)$ . Procediendo de manera semejante, concluimos la demostración definiendo el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}) & \xrightarrow{v'} & (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow^{F'} & \swarrow_{f'} \\ & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \end{array}$$

Como se muestra en el diagrama previo, una de las partes más importantes en la demostración, es probar que  $F'$  es homotópica a  $\text{id}_{\pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\})}$ , y una homotopía existente es  $H' : \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow \pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\})$  definida por

$$H'(x', t) = \frac{1}{t} [\Phi'(\frac{1}{1-t}, x') - \Phi'(0, x')].$$

Nótese que  $\pi^{-1} \circ \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\})$  es un retracto por deformación de  $\mathbb{R}^n \setminus K$ . Esto se hereda por ser  $\pi^{-1} \circ \varphi^{-1}$  por ser homeomorfismo. Del siguiente diagrama conmutativo, la suprayectividad de  $F'_*$  se da de manera natural.

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\varphi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}_\delta \setminus \{0\})) & \xrightarrow{v'_*} & H_{n-1}((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m) \\ & \searrow^{F'_*} & \swarrow_{f'_*} \\ & H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \end{array}$$

Dada la prueba de suprayectividad de  $(F')'_*$  se infiere que  $(f' \circ v')_*$  es suprayectiva, con lo que el teorema queda demostrado.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El formalismo teórico desarrollado en esta tesis permite tener una perspectiva mayor sobre la solubilidad de los problemas reformulados en el capítulo 3, vistos como parte de un mismo concepto. Fundamentalmente, las nociones de variedades diferenciables  $n$ -dimensionales hacen factible tal perspectiva. En general, en la literatura, los problemas reformulados se estudian desde ángulos muy diferentes, en el sentido de verlos como problemas independientes, lo cual no necesariamente tiene que ser así. Por ejemplo, los problemas de seguimiento de trayectorias y de sincronización son lo mismo al traducirse mediante el formalismo establecido.

Por otro lado, sobre el problema de estabilización asintótica de puntos de equilibrio, la manera en que se desarrolló la extensión de la condición de Coron es similar a la empleada por Ryan al extender el resultado de Brockett. Nuestro resultado es interesante dado que el resultado de Coron es más fuerte que el resultado de Brockett.

### 5.1. Trabajo a futuro

La prueba desarrollada, sin pérdida de generalidad, al considerar una bola cerrada con centro en el origen de  $\mathbb{R}^n$ , es un avance importante sobre el desarrollo de la demostración. Nótese que hay dos direcciones ha seguir en la demostración: la

primera, indica que se debe de probar la igualdad  $f_*(H_*(\mathbb{R}^n \setminus K)) = H_*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  con  $K$  un compacto contráctil globalmente atractivo cualquiera y la segunda dirección, indica que hay que probar que si dado cualquier compacto globalmente atractivo no necesariamente contráctil, la igualdad  $f_*(H_*(\mathbb{R}^n \setminus K)) = H_*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  se satisface.

# Bibliografía

- [1] Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D. L., Zhou, C. S. *The synchronization of chaotic systems*. J. Physics Reports. 366 (2002) pp. 1–101.
- [2] Brockett, R. W. *Asymptotic stability and feedback stabilization*, In R. W. Brockett, R. S. Millman, & H. J. Sussmann, Eds., *Differential Geometric Control Theory*, Birkhäuser, Basel–Boston, 1983. pp. 181–191.
- [3] Ceragioli F. *A remark on Ryan’s generalization of Brockett’s condition to discontinuous stabilizability*. A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue and W. Respondek (Eds.), *Nonlinear Control in the year 2000*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [4] Chen, G., Dong, X. *From Chaos to Order, Methodologies, Perspectives and Applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Series A., Vol. 24. 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923, USA. pp. 570–576.
- [5] Clarke, F. H., Sladyaev, Yv. S., Slem, R., J., Wolenski, P., R. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. Springer-Verlag, New York, 1998, pp. 176-189.
- [6] Coron, J. M. *A necessary condition for feedback stabilization*. J. Systems & Control Letters, 14 (1999) pp. 227–232.
- [7] Costello, J. S. *Synchronization of Chaos in a Generalized Lotka-Volterra Actuator*. The Nonlinear Journal, Vol. 1., (1999). Tucson Az. USA. pp. 11–17.

- [8] Filipov, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer, Dordrecht. Academic Publisher, 1998.
- [9] Fulton, W. *Algebraic Topology. A First Course. Graduate Texts in Mathematics*. Springer–Verlag. New York, 1995.
- [10] Gene, F., Powel, J., Emami, A. N. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 4th. Edition, Printence–Hall, Inc. New Jersey, 2000. pp. 9–100.
- [11] Guillemin, V., Pollack, A. *Differential Topology*. Prentice–Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974. pp. 1–13.
- [12] Isidori, A. *Nonlinear Control Systems*. Third Edition. Springer–Verlag. London. 2001.
- [13] Khalil, H. K. *Nonlinear Systems. Second Edition*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 074458.
- [14] Kasriel, R. H. *Undergraduate Topology*. W. B. Saunders Philadelphia 1971 (ISBN: 0882754440)
- [15] Krasnolesl’ski, M.A., Zabreiko, P. P. *Geomtrical Methods of Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berling. 1984.
- [16] Lizárraga, D. A. *Obstructions to the Existence of Universal Stabilizers for Smooth Control Systems*. J. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 16 (2003) pp. 255–277.
- [17] Milnor, J. W. *Topology from the Differential Viewpoint*. Princeton University Press Princeton, New Jersey. 1997.
- [18] Nijmeijer, H., Schaft, A. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer–Verlag. 1995. pp. 1–70.

- [19] Orsi, R., Praly, L., Mareeles, I. *Necessary Conditions for Stability and Attractivity of Continuous Systems*. International Journal of Control, Volumen 76, Número 11, 20 July 2003, pp. 1070-1077(8)
- [20] Ryan, E. P. *Asymptotic behaviour of feedback controlled systems and the ubiquity of the Brockett/Krasnosel'ski/Zabreiko property*. Nonlinear Dynamics & Systems Theory. 2(2002) pp.57-67.
- [21] Samson C. *Velocity and torque feedback control of a wheeled mobile robot: Stability analisis*, preprint, INRIA, Sophia-Antipolis, 1990.
- [22] Sastry, S. *Nonlinear systems. Analysis, stability and control, Inredisciplinary Applied Mathematics*. vol. 10. Springer-Verlag. Heidelberg, 1999.
- [23] Sontag, E. D. *Stability and Stabilization: Discontinuities and the Effect of Disturbances, in Nonlinear Analysis, Differential Equation and Control*. F. H. Clarke and R. J. Stern editors, NATO Siences Series, Series C: Mathematical and Physical Sciences, vol. 528, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1999) pp. 551-598.
- [24] Sontag, E. D. *Mathematical control theory. Deterministics finite-dimensional systems. Second Edition. Texts in Applied Mathematics*, 6. Springer-Verlag. Nueva York, 1998. pp. 1.
- [25] Zuazua, E. *Las Matemáticas del Control*. Notas de clase del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid, España. [http : //www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/ezuazua/default.html](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/default.html)