



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**Análisis de Estabilidad Robusta de Polinomios**

Tesis que presenta

**Ana Marcela Garza Burgos**

Para obtener el grado de

**Maestra en Ciencias Aplicadas**

En la opción de

**Control y Sistemas Dinámicos**

**Codirectores de Tesis:**

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

Dr. Hugo Cabrera Ibarra

San Luis Potosí, S.L.P., Mes de Julio Año 2013



## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “**Análisis de Estabilidad Robusta de Polinomios**” presentada para obtener el Grado de Maestra en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Ana Marcela Garza Burgos** y aprobada el **doce de julio del dos mil trece** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

**Dr. Hugo Cabrera Ibarra**  
Codirector de la tesis

**Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar**  
Codirector de la tesis

**Dr. Daniel Ulises Campos Delgado**  
Jurado en el Examen

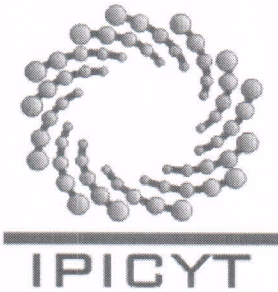
**Dr. Jorge Alberto Morales Saldana**  
Jurado en el Examen



## Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la codirección de los Doctores Daniel Alejandro Melchor Aguilar y Hugo Cabrera Ibarra

Durante la realización del trabajo, yo el autor, recibí una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con número 375670 y del Proyecto de CONACYT con número 131587 titulado *Análisis de Estabilidad de Sistemas Continuos en Diferencias Mediante Funcionales de Lyapunov*.



# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 033 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 12 días del mes de julio del año 2013, se reunió a las 13:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Daniel Ulises Campos Delgado</b>	<b>Presidente</b>	<b>UASLP</b>
<b>Dr. Hugo Cabrera Ibarra</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Jorge Alberto Morales Saldaña</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>UASLP</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS  
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó la C.

**Ana Marcela Garza Burgos**

sobre la Tesis intitulada:

*Análisis de Estabilidad Robusta de Polinomios*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar**  
**Dr. Hugo Cabrera Ibarra**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLA**

Dándose por terminado el acto a las 14:20 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 12 días del mes de julio de 2013.

**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

**Dr. Marcial Boñilla Marín**  
Secretario Académico



# Agradecimientos

A CONACYT por haberme otorgado la beca No. 375670 con la que me fue posible realizar mis estudios de maestría.

A mis asesores Hugo Cabrera y Daniel Melchor por su paciencia, tiempo, comprensión, orientación y conocimiento transmitido.

A Oscar Saucedo por más de 11 años de verdadera hermandad, a ti te dedico no solo esta tesis sino todo logro de mi vida.

A Fany Mendéz quien ha sido una verdadera amiga, apoyo y guía en los tiempos difíciles.

A Ilse Cervantes e Irwin Allen Díaz por sus consejos y amistad.

A Carlos Portillo, Juan Bribiesca, Carlos Sabas y Jose Luis Sandoval porque sin ustedes mi locura ya no sería sana.

# Resumen

En este trabajo de tesis se realiza un análisis de estabilidad robusta de familias intervalo de polinomios de tercer y cuarto grado. Se consideran familias de polinomios determinadas cuando los coeficientes varían en intervalos dependientes de un solo parámetro desconocido. Para tales familias presentamos resultados que determinan las cotas máximas para éste parámetro. Una característica principal de los resultados es que se obtienen fórmulas explícitas para dichas cotas en el caso de polinomios de tercer grado y para casos particulares de polinomios de cuarto grado mónicos. Para el caso general de cuarto grado únicamente se presenta un algoritmo numérico sencillo para determinar las cotas máximas.

Los resultados obtenidos se aplican al análisis de estabilidad robusta del polinomio característico describiendo la dinámica en lazo abierto de un convertidor elevador CD-CD. Se muestra que las cotas máximas obtenidas son bastante conservadoras debido al sobredimensionamiento implícito en la metodología y a la interdependencia de los coeficientes del polinomio con los parámetros físicos del convertidor. Se presenta un análisis distinto que toma en cuenta la estructura de los coeficientes del polinomio con el cual se concluye la estabilidad de éste para cualquier selección de parámetros físicos del convertidor, proporcionando así una demostración a un resultado conocido en electrónica de potencia.

# Abstract

In this thesis, an analysis of robust stability of interval polynomials families of third and fourth degree is performed. Here are considered families of polynomials which are determined when the coefficients vary in intervals dependent on a single unknown parameter. For such families, results that determine the maximum bound for this parameter are presented. A main feature of the results is that explicit formulas are obtained for these bounds in the case of third degree polynomials and in particular cases of fourth degree polynomials. For the general case of fourth degree only presents a simple numerical algorithm to determine the maximum bounds.

The results are applied to the robust stability analysis of the characteristic polynomial describing the open-loop dynamics of a DC-DC boost converter. It is shown that the maximum coordinates obtained are quite conservative due to oversizing implicit in the methodology and the interdependence of the coefficients of the polynomial with the physical parameters of the converter. We present a different analysis that takes into account the structure of the coefficients of the polynomial with which it concludes stability for any choice of physical parameters of the converter, thus providing a demonstration to a known result in power electronics.

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>VIII</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Problema de Investigación</b>	<b>4</b>
<b>3. Preliminares</b>	<b>6</b>
3.1. Continuidad en las Raíces de un Polinomio Respecto al Cambio de sus Coeficientes . . . . .	6
3.2. El Teorema de Cruce de Frontera . . . . .	11
3.3. Estabilidad . . . . .	12
3.4. Teorema de Kharitonov . . . . .	14
3.5. Condiciones de Estabilidad de Argound . . . . .	15
<b>4. Resultados Principales</b>	<b>18</b>
4.1. Caso de Polinomios de Tercer Grado . . . . .	18
4.1.1. El Caso General . . . . .	20
4.1.2. El Caso Mónico . . . . .	24
4.2. Caso de Polinomios de Cuarto Orden . . . . .	26
4.2.1. El Caso General . . . . .	26
4.2.2. El Caso Mónico . . . . .	29
4.3. Aplicación a un Convertidor de Potencia . . . . .	32
<b>5. Conclusiones y Trabajo a Futuro</b>	<b>38</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	38
5.2. Trabajo a Futuro . . . . .	39
<b>Bibliografía</b>	<b>40</b>



# Índice de figuras

4.1. Caja cuadrada en el espacio de coeficientes . . . . .	19
4.2. Cajas resultantes de modificar $\lambda_0$ en el espacio de coeficientes . . . . .	19
4.3. Existencia de una raíz real positiva de $h(\varepsilon)$ . . . . .	21
4.4. Diagrama del convertidor . . . . .	33
4.5. Diagrama promediado del convertidor . . . . .	33
4.6. Diagrama a bloques del convertidor . . . . .	34

## Notación

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial de dimensión $n$
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espacio vectorial de las matrices de $n \times n$
$I_n$	Matriz identidad de $n \times n$
$\mathbb{C}$	Plano complejo
$\partial S$	Frontera del conjunto $S$
$S^\circ$	Interior del conjunto $S$
$ \cdot $	Valor absoluto de un número
$ z $	Magnitud del número $z$
$\ x\ $	Norma euclidiana del vector $x$
$\det(A)$	Determinante de la matriz $A$

# Capítulo 1

## Introducción

Un sistema dinámico puede ser descrito por ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad (1.1)$$

donde  $\lambda$  se encuentra en un conjunto cerrado  $G \subset \mathbb{R}^\ell$  y representa ciertos parámetros de la ecuación diferencial, mientras que  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto y conexo. Para poder obtener soluciones de tal ecuación es necesario asegurar que  $f(x, \lambda)$  es una función continua para  $x$  en  $D$  y  $\lambda$  en  $G$  y localmente Lipschitz respecto a  $x$  en  $D$  independientemente de  $\lambda$  en  $G$ . El problema de continuidad de soluciones ante cambios en el vector de parámetros  $\lambda$  se ha estudiado matemáticamente [8] y formalmente se expresa como:

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|\lambda - \lambda_0\| < \delta \rightarrow \|x(t, x_0, \lambda) - x(t, x_0, \lambda_0)\| < \varepsilon, \forall t \in E, \quad (1.2)$$

donde  $x(t, x_0, \lambda)$  y  $x(t, x_0, \lambda_0)$  denotan las soluciones correspondientes a  $\lambda$  y  $\lambda_0$  de (1.1) con condición inicial  $x_0$ , mientras que  $E$  denota el intervalo de existencia de las soluciones.

Ahora bien cuando se realiza una linealización alrededor de un punto de equilibrio se obtiene como resultado un sistema lineal invariante en tiempo, el cual se describe como

$$\dot{x} = A(\lambda)x, \quad (1.3)$$

donde  $\lambda \in G$  y  $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

En aplicaciones, el vector de parámetros  $\lambda$  sólo es conocido generalmente con un cierto grado de precisión, por lo que resulta de gran interés investigar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (1.3) ante cambios en el vector de parámetros  $\lambda$ .

Si se considera que cada cambio en las entradas de  $\lambda$  de la ecuación (1.3), representa un sistema distinto, entonces se tiene una familia  $\mathcal{F}$  de sistemas. Dada una familia  $\mathcal{F}$  y alguna propiedad  $P$ , se dice que  $\mathcal{F}$  es robusta si cada miembro  $f \in \mathcal{F}$  tiene la propiedad  $P$  [4].

Como es bien conocido, el comportamiento asintótico de las soluciones de (1.3) se rige por la ubicación de las raíces del polinomio característico asociado a la matriz  $A$  el cual se determina como

$$P(s) = \det(sI_n - A(\lambda)) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)s + \dots + s^n, \quad (1.4)$$

donde  $p_i(\lambda), i = 0, 1, \dots, n$ , son funciones continuas del parámetro  $\lambda$ .

Comúnmente se desea saber si todas las raíces del polinomio característico de la matriz del sistema se localizan en una determinada región abierta del plano complejo, tales como el semiplano izquierdo o el círculo unitario, conocidas como regiones de estabilidad.

Un punto importante al tratar con el polinomio característico de la matriz de un sistema consiste en asegurar la continuidad de las raíces del polinomio respecto a variaciones en los coeficientes de éste. En este sentido existen resultados tales como el Teorema de Rouché [5] el cual aplicado a polinomios garantiza la continuidad de las raíces respecto a cambios en los coeficientes del polinomio asociado. El Teorema de Cruce de Frontera [5] es una herramienta que utiliza la continuidad de las raíces de los polinomios respecto a variaciones en los coeficientes y sirve para determinar cuando las raíces tocan la frontera de una región predeterminada en el plano complejo. El resultado anterior sirve como punto de partida para diversos resultados posteriores.

Adicional al conocimiento de la ubicación de las raíces del polinomio característico asociado a un sistema lineal, es deseable que el sistema se diseñe de tal manera que la propiedad de estabilidad se mantenga aún cuando existan incertidumbres paramétricas y/o perturbaciones. Tal propiedad se conoce como estabilidad robusta.

La mayor parte de la investigación en el campo del control robusto se estudia principalmente desde cinco áreas distintas [4] :  $H_\infty$ ,  $QFT$ ,  $\mu$ -síntesis, Lyapunov y Kharitonov. Cada uno de los enfoques tiene ventajas y desventajas, por ejemplo el enfoque  $H_\infty$  por ejemplo es muy útil para lidiar con problemas de estabilidad robusta y desempeño ante perturbaciones no estructuradas [5], pero es deficiente al trabajar los mismos temas cuando se encuentran incertidumbres paramétricas. Para lidiar con la estabilidad robusta ante perturbaciones paramétricas el enfoque Kharitonov [12] es una herramienta poderosa, siendo este último en el cual se enmarca el presente trabajo.

Cuando los parámetros del sistema presentan variaciones en su comportamiento, se dice que existen incertidumbres paramétricas. Realizando un recuento sobre la teoría que trata con las incertidumbres paramétricas, mucho trabajo existente se deriva de la teoría que trata de las caracterizaciones del dominio de estabilidad. Como el de Neimark en 1949 [16], donde trata técnicas para el análisis de estabilidad robusta, las cuales trabajan bien cuando se tiene un pequeño número de incertidumbres paramétricas.

Para problemas que involucran análisis de robustez con incertidumbres paramétricas entrando multilínealmente en los coeficientes de las funciones de transferencia, una poderosa herramienta es el Teorema del Mapeo, dado en el libro de Zadeh y Desoer en 1963 [23]. Siljak en su libro en 1969 [17] considera clases especiales de problemas de análisis de estabilidad robusta para sistemas con incertidumbres paramétricas reales. Después de una década Ackerman [1] renueva el interés en el campo de las incertidumbres paramétricas reales con su artículo "Diseño del espacio de parámetros de sistemas de control robusto" publicado en 1980.

El Principio de Exclusión del Cero es un resultado importante que sirve como base a otros

resultados; una versión de esta condición se remonta al menos tan atrás como el artículo de 1929 Frazer y Duncan [6], quienes son considerados por algunos como pioneros en los trabajos sobre robustez de sistemas.

Pero es en 1978 cuando el matemático ruso Vladimir Leonidovich Kharitonov publica el artículo cuya aportación es en el sentido de la estabilidad robusta de familias polinomiales en intervalos. El Teorema de Kharitonov [12], consiste en determinar la estabilidad de una familia entera de polinomios con sólo revisar la estabilidad de 4 de sus miembros, lo cual lo hace un resultado fundamental en el campo de las incertidumbres paramétricas.

Posterior a Kharitonov existe una gran cantidad de resultados, entre ellos un trabajo poco conocido enunciado por Argound en 1987 [2], el cual proporciona desigualdades para revisar la estabilidad de familias de polinomios de grado menor a 6; el resultado de Argound se tomará como punto de partida para el análisis presentado en esta tesis.

El presente trabajo abordará el problema de determinar un intervalo real  $[\beta_i, \gamma_i]$  dentro del cual la familia de polinomios dada por

$$P(s, \lambda) = p_0 + p_1s + \dots + p_ns^n, \quad p_i \in [\beta_i, \gamma_i] \subset \mathbb{R}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

es estable.

Una vez se haya proporcionado un método para la obtención de las cotas de los intervalos se procederá a realizar una aplicación sobre un convertidor de potencia. La gran mayoría de los resultados obtenidos en el área de electrónica de potencia presentan simulaciones y/o experimentos para ilustrar la robustez de los esquemas propuestos, sin embargo, sólo en pocos trabajos se proporcionan cotas derivadas de enfoques analíticos. En este trabajo se realizará un análisis para obtener de manera analítica las cotas para la variación de carga en el convertidor CD-CD elevador de voltaje presentado en [15].

# Capítulo 2

## Problema de Investigación

Considere la familia de polinomios

$$Q(s) = q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots + q_ns^n \quad (2.1)$$

donde cada coeficiente  $q_i$  varía dentro de un intervalo acotado, es decir,

$$q_i \in [\beta_i, \gamma_i] \subset \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Para determinar la estabilidad de toda la familia de polinomios el Teorema de Kharitonov [12] representa una herramienta poderosa, ya que sólo se requiere revisar la estabilidad Hurwitz de 4 polinomios extremos de la familia, los cuales se construyen a partir de las cotas de los intervalos de los coeficientes. Argound [3] proporciona un conjunto de desigualdades las cuales proporcionan un método sencillo para verificar la estabilidad robusta de familias de polinomios de orden pequeño. En el caso cuando no tenemos conocimiento *a priori* sobre las cotas de los coeficientes, el problema de encontrar dichas cotas garantizando la estabilidad robusta de la familia de polinomios mediante los resultados de Argound y el Teorema de Kharitonov no puede resolverse satisfactoriamente en el caso general.

Un problema interesante surge cuando se intentan encontrar cotas superiores e inferiores para  $\gamma_i$  y  $\beta_i$  respectivamente tales que la familia de polinomios formada por los coeficientes  $q_i$  que satisfacen (2.2) sea estable. En la literatura existen diversas soluciones a este problema muchas de las cuales se basan en el Teorema del Cruce de Frontera o el Principio de Exclusión del Cero [5].

En general, el problema que se ha planteado es encontrar la máxima región de estabilidad en el espacio de coeficientes alrededor de un polinomio nominal estable tal que la propiedad de estabilidad se mantenga. En solución a tal problema en [18] se desarrolla un resultado que presenta la bola de estabilidad  $\ell_2$  mas grande centrada en un punto dado en el espacio de coeficientes de un polinomio.

En [21], Tsytkin y Polyak generalizan el resultado anterior y presentan un método para calcular la bola de estabilidad  $\ell_p$  mas grande para el espacio de coeficientes, para  $p$  arbitrario.

Recordemos que para un vector  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  la norma  $\ell_p$  está definida por

$$\|a\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde  $p \in \mathbb{N}$ . El resultado de Tsytkin y Polyak es un método gráfico basado en barridos de frecuencia, el cual es muy conveniente para la implementación en computadoras.

En el presente trabajo de tesis abordamos el problema de estabilidad robusta de familias intervalo de polinomios, en el espíritu original del Teorema de Kharitonov, considerando que no se tiene conocimiento *a priori* sobre las cotas de los coeficientes. Explícitamente consideramos la siguiente familia de polinomios

$$Q(s) = q_0 + q_1s + \dots + q_ns^n, \quad (2.3)$$

y definimos una caja de lado variable dependiente del parámetro  $\varepsilon \geq 0$  como sigue:

$$q_i \in [p_i - \lambda_i\varepsilon, p_i + \lambda_i\varepsilon], \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

donde  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  son conocidos. Suponiendo que el polinomio  $P(s) = p_0 + p_1s + \dots + p_ns^n$  es Hurwitz, queremos encontrar el máximo  $\varepsilon$  tal que (2.3) es Hurwitz para todos los coeficientes  $q_i$  satisfaciendo (2.4). En otras palabras queremos encontrar la caja de estabilidad más grande en el espacio de coeficientes de un polinomio.

En particular en este trabajo nos enfocaremos en los casos  $n = 3$  y  $n = 4$ . Para el caso general  $n = 4$  presentamos un procedimiento para determinar el máximo  $\varepsilon$ . Para los casos  $n = 4$  mónico cuando  $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0\lambda_3$  y  $n = 3$  general proporcionaremos fórmulas explícitas para el máximo  $\varepsilon$  garantizando la estabilidad robusta de la familia.

Una vez obtenido el resultado anterior, se realizará una aplicación del resultado obtenido para polinomios mónicos de cuarto grado, al polinomio asociado al circuito de un convertidor elevador CD-CD estudiado en [15]. Dicho polinomio tiene la forma siguiente:

$$P(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + s^4, \quad (2.5)$$

donde

$$b_3 = \frac{1}{RC_2}, \quad b_2 = \frac{1}{L_2C_1} + \frac{(1-D)^2}{L_2C_2} + \frac{(1-D)^2}{L_1C_1},$$

$$b_1 = \frac{1}{L_2C_2C_1R} + \frac{(1-D)^2}{L_1C_2C_1R}, \quad b_0 = \frac{(1-D)^4}{L_2C_2C_1L_1}.$$

Como se puede observar los coeficientes del polinomio (2.5) dependen de un conjunto de parámetros tales como capacitores  $C_i$ , bobinas  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ , la resistencia de carga  $R$  y el ciclo de trabajo  $D$ . Más aún, la variación de cualquier parámetro implica la variación de más de un coeficiente del polinomio. En este escenario se conoce que resultados tipo caja pueden ser bastante limitados en cuanto a que involucran sobredimensionamiento. Motivado en lo anterior se analizará la estabilidad del convertidor tomando en cuenta la estructura de los coeficientes con lo cual se concluirá la estabilidad del circuito.

# Capítulo 3

## Preliminares

En este capítulo se presentan algunos resultados básicos para abordar el problema de estabilidad robusta paramétrica polinomial. Se presentará el resultado fundamental de continuidad en las raíces de un polinomio respecto al cambio de coeficientes, el cual es una aplicación a polinomios del Teorema de Rouché [5]. Se estudia el Teorema de Cruce de Frontera [5] el cual es una herramienta de suma importancia en la teoría de robustez paramétrica. Así mismo se presentarán condiciones de estabilidad tal como el criterio de Hurwitz [5] y el Principio de Exclusión del Cero [5] para familias de polinomios. Finalmente se incluyen los resultados obtenidos por Argound [3] y Kharitonov [12] que sirven como base para el desarrollo del resto del trabajo.

### 3.1. Continuidad en las Raíces de un Polinomio Respecto al Cambio de sus Coeficientes

Un resultado fundamental para estudiar la estabilidad robusta de polinomios es garantizar la continuidad de las raíces ante variaciones en los coeficientes. El siguiente resultado, basado en el Principio del Argumento es fundamental para entender la continuidad de las raíces

**Teorema 1 (Teorema de Rouché) [5]** Sean  $f(s)$  y  $g(s)$  dos funciones analíticas dentro y sobre un contorno cerrado  $C$  en el plano complejo. Si

$$|g(s)| < |f(s)| \tag{3.1}$$

para cualquier  $s$  sobre el contorno  $C$ , entonces  $f(s)$  y  $f(s) + g(s)$  tienen el mismo número de ceros dentro del contorno  $C$ , incluyendo multiplicidades.

Note que la condición (3.1) implica que ni  $f(s)$  ni  $f(s) + g(s)$  tienen ceros sobre el contorno  $C$ . De hecho, si  $g(s)$  tiene un cero  $s_0$  en el contorno  $C$ , entonces de la condición (3.1) tenemos

$$0 = |g(s_0)| < |f(s_0)|$$

y entonces  $s_0$  no es cero de  $f(s)$  ni de  $f(s) + g(s)$ .



A continuación se presenta un ejemplo de la utilización del Teorema de Rouché.

**Ejemplo 1.** Sea

$$G(s) = s^8 - 4s^5 + s^2 - 1.$$

Queremos encontrar el número de ceros de  $G(s)$  que se encuentran dentro del círculo unitario.

Tome  $P(s) = -4s^5$  y  $Q(s) = s^8 + s^2 - 1$ , de manera que  $G(s) = P(s) + Q(s)$ . En este caso el contorno cerrado  $C$  es el círculo unitario, es decir,  $C_0 = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ . De la desigualdad del triángulo en  $\mathbb{C}$  tenemos que

$$|Q(s)| = |s^8 + s^2 - 1| \leq |s^8| + |s^2| + |-1|.$$

Para  $s \in C_0$  se tiene que

$$|Q(s)| \leq 3.$$

Por otro lado para  $s \in C_0$

$$|P(s)| = |-4s^5| = 4.$$

Se sigue que

$$|Q(s)| < |P(s)|.$$

Como  $P(s)$  tiene una raíz en  $s = 0$  de multiplicidad 5 entonces  $G(s)$  tiene 5 raíces en el círculo unitario.

El siguiente teorema se obtiene al aplicar el teorema de Rouché a polinomios

**Teorema 2** [5] Sean los polinomios

$$P(s) = p_0 + p_1s + \dots + p_n s^n = p_n \prod_{j=1}^m (s - s_j)^{t_j}, p_n \neq 0,$$

$$G(s) = (p_0 + \epsilon_0) + (p_1 + \epsilon_1)s + \dots + (p_n + \epsilon_n)s^n,$$

y considere un círculo  $C_k$ , de radio  $r_k$ , centrado en  $s_k$  la cual es una raíz de  $P(s)$  de multiplicidad  $t_k$ . Fijando  $r_k$  de manera que

$$0 < r_k < \min\{|s_k - s_j| : j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m\},$$

donde  $m = n - t_k$ . Entonces, existe un número positivo  $\epsilon$ , tal que  $|\epsilon_i| \leq \epsilon$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ ; implica que  $G(s)$  tiene precisamente  $t_k$  ceros dentro del círculo  $C_k$ .

El teorema anterior indica que si los coeficientes del polinomio  $P(s)$  son perturbados ligeramente, entonces las raíces del polinomio perturbado  $G(s)$  se encuentran suficientemente cerca de las raíces del polinomio original  $P(s)$ .

Apliquemos el Teorema 2 a ejemplos numéricos.

**Ejemplo 2.** Consideremos el polinomio

$$P(s) = s + 1.$$

En este caso  $P(s)$  tiene una única raíz  $s_1 = -1$ . En consecuencia podemos escoger arbitrariamente el radio del círculo  $C_1$  centrado en  $s_1 = -1$ . Sea  $r = 1$  el radio del círculo  $C_1$ . Consideremos ahora el polinomio perturbado

$$G(s) = (1 + \varepsilon_1)s + (1 + \varepsilon_0),$$

Deseamos calcular  $\varepsilon \geq |\varepsilon_i|$  tal que  $G(s)$  tiene el mismo número de ceros dentro de un círculo  $C_1$ . Definamos

$$\Delta(s) = \varepsilon_1 s + \varepsilon_0.$$

Tenemos que

$$|\Delta(s)| = |\varepsilon_1 s + \varepsilon_0| = \left| \sum_{i=0}^1 \varepsilon_i s^i \right| \leq \sum_{i=0}^1 |\varepsilon_i| |s^i|.$$

Si  $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$  entonces

$$\sum_{i=0}^1 |\varepsilon_i| |s^i| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^1 |s^i| = \varepsilon \sum_{i=0}^1 |(s + s_1 - s_1)|^i \leq \varepsilon \sum_{i=0}^1 (|s - s_1| + |s_1|)^i.$$

Si  $s$  pertenece al círculo  $C_1$  entonces

$$|s - s_1| = 1.$$

Tomando en cuenta que  $s_1 = -1$  se tiene que

$$|\Delta(s)| \leq 3\varepsilon, \quad \forall s \in C_1.$$

Debido a que  $P(s)$  es una función continua en  $s$  y el círculo  $C_1$  es un conjunto compacto en  $\mathbb{C}$ , entonces existe

$$\delta = \min\{|P(s)| : s \in C_1\}.$$

Observemos que  $P(s)$  mapea el círculo  $C_1$  centrado en  $s_1 = -1$  al círculo unitario centrado en el origen. Entonces

$$|P(s)| = 1, \quad \forall s \in C_1,$$

y por lo tanto  $\delta = 1$ . Si escogemos  $\varepsilon$  tal que

$$\varepsilon < \frac{\delta}{3} = \frac{1}{3}$$

entonces

$$|\Delta(s)| < |P(s)|, \quad \forall s \in C_1.$$

Luego entonces, el Teorema de Rouché implica que  $P(s)$  y  $G(s) = P(s) + \Delta(s)$  tienen el mismo número de ceros en el círculo  $C_1$ . Observemos que debido a que el círculo  $C_1$  está completamente contenido dentro del semiplano izquierdo abierto del plano complejo, entonces

el resultado implica que el polinomio perturbado  $G(s)$  tiene su única raíz en el semiplano izquierdo del plano complejo para todo  $\epsilon_0$  y  $\epsilon_1$  tales que

$$|\epsilon_0| < \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad |\epsilon_1| < \frac{1}{3}.$$

**Ejemplo 3.** Sea el polinomio

$$P(s) = s^2 + 2s + 1$$

el cual tiene una raíz de multiplicidad dos en  $s_1 = -1$ , por lo que es posible establecer un radio arbitrario para el círculo  $C_1$  centrado en  $s_1 = -1$ . Escojamos  $r = 1$ .

Deseamos encontrar  $\epsilon \geq |\epsilon_i|$  tal que el polinomio perturbado

$$G(s) = (1 + \epsilon_2)s^2 + (2 + \epsilon_1)s + (1 + \epsilon_0)$$

contenga el mismo número de raíces que  $P(s)$  en el círculo  $C_1$ . Definamos el polinomio de perturbaciones

$$\Delta(s) = \epsilon_2 s^2 + \epsilon_1 s + \epsilon_0.$$

Se tiene que

$$|\Delta(s)| = |\epsilon_2 s^2 + \epsilon_1 s + \epsilon_0| = \left| \sum_{i=0}^2 \epsilon_i s^i \right|.$$

Por la desigualdad del triángulo se obtiene que

$$\left| \sum_{i=0}^2 \epsilon_i s^i \right| \leq \sum_{i=0}^2 |\epsilon_i| |s^i|.$$

Si  $|\epsilon_i| \leq \epsilon$  entonces

$$\sum_{i=0}^2 |\epsilon_i| |s^i| \leq \epsilon \sum_{i=0}^2 |s^i| = \epsilon \sum_{i=0}^2 |s + s_1 - s_1|^i \leq \epsilon \sum_{i=0}^2 (|s - s_1| + |s_1|)^i.$$

Si  $s \in C_1$  entonces

$$|\Delta(s)| \leq \epsilon \sum_{i=0}^2 (r + |s_1|)^i.$$

Sustituyendo los valores de  $r = 1$  y  $s_1 = -1$  se obtiene

$$|\Delta(s)| \leq 7\epsilon, \quad \forall s \in C_1.$$

Tomando en cuenta que  $P(s)$  es una función continua sobre  $C_1$  en  $s$  y el círculo  $C_1$  es un conjunto compacto en  $\mathbb{C}$  entonces existe

$$\delta = \min\{|P(s)| : s \in C_1\}.$$

Luego, observando que  $P(s)$  mapea el círculo  $C_1$  centrado en  $s_1 = -1$  al círculo unitario centrado en el origen se tiene que  $|P(s)| = 1$  para toda  $s$  en  $C_1$ , por lo que  $\delta = 1$ . Escogiendo

$$\epsilon < \frac{\delta}{7} = \frac{1}{7}$$

se sigue que

$$|\Delta(s)| < |P(s)|, \quad \forall s \in C_1.$$

Entonces por el Teorema de Rouché  $P(s)$  y  $G(s) = P(s) + \Delta(s)$  tienen el mismo número de ceros dentro de  $C_1$ . Dado que  $C_1$  se encuentra totalmente contenido en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo entonces  $G(s)$  sigue siendo estable para todo  $|\varepsilon_i| \leq \frac{1}{7}$ .

**Ejemplo 4.** Tome  $P(s)$  como en el ejemplo anterior, y considere ahora que el polinomio perturbado  $G(s)$  es de la forma

$$G(s) = \varepsilon_3 s^3 + (1 + \varepsilon_2) s^2 + (2 + \varepsilon_1) s + (1 + \varepsilon_0).$$

Definamos

$$\Delta(s) = \varepsilon_3 s^3 + \varepsilon_2 s^2 + \varepsilon_1 s + \varepsilon_0,$$

Tomando el círculo  $C_1$ , como el círculo centrado en  $s_1$  con radio  $r = 1$ , queremos encontrar  $\varepsilon \geq |\varepsilon_i|$  tal que se cumpla el teorema 2. Tenemos que

$$|\Delta(s)| = \left| \sum_{i=0}^3 \varepsilon_i s^i \right| \leq \sum_{i=0}^3 |\varepsilon_i| |s^i|.$$

Si  $\varepsilon \geq |\varepsilon_i|$  se obtiene que

$$\sum_{i=0}^3 |\varepsilon_i| |s^i| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^3 |s + s_1 - s_1|^i \leq \varepsilon \sum_{i=0}^3 (|s - s_1| + |s_1|)^i.$$

Si  $s \in C_1$  entonces

$$\varepsilon \sum_{i=0}^3 (|s - s_1| + |s_1|)^i \leq \varepsilon \sum_{i=0}^3 (r + |s_1|)^i = 15\varepsilon.$$

Debido a que  $\delta(s) = 1$ , al igual que en el ejemplo anterior, se sigue que escogiendo  $\varepsilon < \frac{\delta}{15} = \frac{1}{15}$ , la desigualdad

$$|\Delta(s)| < |P(s)|, \quad \forall s \in C_1,$$

se satisface. El Teorema 1 implica que  $P(s)$  y  $G(s)$  tienen la misma cantidad de ceros dentro del círculo unitario. Formando ahora el polinomio de perturbaciones  $\Delta(s)$ , dado que  $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon = \frac{1}{15} = 0.0667$  es posible tomar por simplicidad  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.062$  y formar entonces el polinomio

$$\Delta(s) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 s + \varepsilon_2 s^2 + \varepsilon_3 s^3.$$

Luego el polinomio de perturbaciones  $G(s) = P(s) + \Delta(s)$  queda de la forma

$$G(s) = 1.062 + 2.062s + 1.062s^2 + 0.062s^3$$

cuyas raíces son  $s_1 = -1.1430, s_2 = -1, s_3 = -14.9860$ . Observe que  $P(s)$  tiene una raíz con multiplicidad dos ubicada en  $-1$ , y  $G(s)$  tiene 2 raíces dentro de  $C_1$ , tal como se esperaba. Note que el polinomio perturbado  $G(s)$  es de tercer grado mientras que el polinomio nominal  $P(s)$  es de segundo grado, lo cual pone de manifiesto el hecho de que el grado de  $G(s)$  y el de  $P(s)$  no tiene que ser igual, sin embargo se observa que al agregar un grado al polinomio perturbado  $G(s)$  la cota  $\varepsilon$  para las perturbaciones disminuye de  $\frac{1}{7}$  a  $\frac{1}{15}$ .

Del Teorema 2 se deriva el siguiente corolario.

**Corolario 1** [5] Fije los círculos  $C_1, C_2, \dots, C_m$  los cuales se encuentran por pares, disjuntos y centrados en  $s_1, s_2, \dots, s_m$  respectivamente. Por una aplicación repetida del teorema previo, siempre es posible encontrar un  $\varepsilon > 0$  tal que para cualquier conjunto de números  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$  que satisfagan  $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $G(s)$  tiene precisamente  $t_j$  ceros dentro de cada uno de los círculos  $C_j$ .

Note que en este caso  $G(s)$  siempre tiene  $n$  ceros y debe permanecer entonces de grado  $n$ , por lo que necesariamente  $\varepsilon < |p_n|$ .

Con el Teorema 2 y el Corolario 1 se garantiza la continuidad de las raíces del polinomio con respecto a cambios o perturbaciones en sus coeficientes. Si consideramos el problema de estabilidad y suponemos que  $P(s)$  tiene todas sus raíces en el semiplano izquierdo abierto entonces los resultados proporcionan una primer medida de robustez ya que se obtiene una cota para tales perturbaciones mediante el cálculo de la cota  $\varepsilon$ . Así si  $\mathcal{S}$  es la región de estabilidad de interés, el polinomio nominal tiene todas sus raíces en dicha región, entonces todos los polinomios que tengan una perturbación menor al  $\varepsilon$  asociado seguirán siendo estables. De esta manera se obtiene una cierta medida de variación en los coeficientes del polinomio tales que el polinomio sigue siendo estable. En este resultado la cota obtenida no es la óptima ya que, además de que puede cambiar al modificar el radio del círculo o la posición de las raíces, el  $\varepsilon$  obtenido no es el máximo posible. Sin embargo, resulta complicado aplicarlo directamente ya que para polinomios de grado mayor a uno, es difícil en general determinar el  $\min\{|P(s)|\}$  cuando  $s$  toma puntos en la frontera del círculo, y dicho cálculo es necesario para encontrar el valor  $\varepsilon$  que acota las perturbaciones.

## 3.2. El Teorema de Cruce de Frontera

Considere  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$  cualquier conjunto abierto. Entonces  $\mathcal{S}$  junto con la frontera de  $\mathcal{S}$ , denotada por  $\partial\mathcal{S}$  y el interior  $U^\circ$  del conjunto cerrado  $U = \mathbb{C} - \mathcal{S}$ , donde  $\mathbb{C} - \mathcal{S}$  denota la operación de complemento, forman una partición de  $\mathbb{C}$ , esto es

$$\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S} \cup U^\circ = \mathbb{C}, \quad \mathcal{S} \cap U^\circ = \mathcal{S} \cap \partial\mathcal{S} = \partial\mathcal{S} \cap U^\circ = \emptyset.$$

Asuma que cada uno de estos conjuntos  $(\mathcal{S}, \partial\mathcal{S}, U^\circ)$  es no vacío. Considere una familia de polinomios  $Q(\lambda, s)$  que satisface las siguientes suposiciones:

1. Grado invariante  $n$
2. Continua con respecto a  $\lambda$  en un intervalo real fijo  $E = [a, b]$ .

En otras palabras un elemento de  $Q(\lambda, s)$  puede ser escrito como

$$P(\lambda, s) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)s + \dots + p_n(\lambda)s^n, \quad p_n(\lambda) \neq 0, \forall \lambda \in E,$$

donde  $p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$  son funciones continuas en  $E$ , y donde  $p_n(\lambda) \neq 0$  para toda  $\lambda$  en  $E$ .

Del Teorema 2 y el Corolario 1 se puede concluir que, en general, para cualquier conjunto abierto  $O$ , el conjunto de polinomios de grado  $n$  que tiene todas sus raíces en  $O$  es abierto. En el caso de la familia  $Q(\lambda, s)$ , para algún  $\lambda \in E$ , tal que  $P(\lambda, s)$  que tiene todas sus raíces en  $\mathcal{S}$ , siempre es posible encontrar  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  tal que para todo  $\lambda' \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap E$ , entonces se tiene que  $P(\lambda', s)$  también tiene todas sus raíces en  $\mathcal{S}$ . De aquí es posible enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 3 (Teorema de Cruce de Frontera)** [5] *Considere la familia de polinomios  $Q(\lambda, s)$  dada anteriormente, la cual satisface las hipótesis 1 y 2. Suponga que un miembro  $P(\tilde{a}, s)$  tiene todas sus raíces en  $\mathcal{S}$ , mientras que  $P(\tilde{b}, s)$  tiene al menos una raíz en  $U^\circ$ , entonces existe al menos un  $\rho \in (\tilde{a}, \tilde{b}]$  tal que:*

- a)  $P(\rho, s)$  tiene todas sus raíces en  $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ , y
- b)  $P(\rho, s)$  tiene al menos una raíz en  $\partial\mathcal{S}$ .

El resultado anterior establece que al ir de un conjunto abierto a otro conjunto abierto disjuncto del primero, el conjunto de raíces de una familia continua de polinomios  $Q(\lambda, s)$  de grado fijo debe intersectar en alguna etapa intermedia la frontera del primer conjunto.

Si  $P(\lambda, s)$  pierde grado, es decir,  $p_n(\lambda) = 0$  para algunos valores de  $\lambda$ , entonces el Teorema del cruce de frontera no se mantiene, aunque puede ser modificado para tal caso [5].

### 3.3. Estabilidad

El Teorema 2 y el Corolario 1 se enfocan en la continuidad de las raíces de un polinomio cuando existen variaciones en sus coeficientes. Por medio del Teorema 3 es posible detectar cuando, al haber variaciones continuas en los coeficientes, las raíces de un polinomio cruzan por la frontera de una cierta región abierta  $\mathcal{S}$  del plano complejo. En la teoría de estabilidad el interés se centra en el caso específico en que la región  $\mathcal{S}$  es el semiplano izquierdo abierto del plano complejo (para sistemas continuos en el tiempo) o en el círculo unitario abierto (para sistemas discretos en el tiempo). Debido a que este trabajo considerará únicamente el caso de sistemas continuos en el tiempo, la región  $\mathcal{S}$  será el semiplano izquierdo abierto del plano complejo, la cual llamaremos región de estabilidad.

La siguiente definición caracteriza polinomios con raíces dentro de la región de estabilidad:

**Definición 1 (Criterio de Hurwitz)** *Considere el polinomio*

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n, \quad (3.2)$$

*se dice que  $P(s)$  es un polinomio Hurwitz si, y sólo si, todas sus raíces están ubicadas en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo.*

Adicionalmente una condición necesaria para que un polinomio sea Hurwitz es la condición de Stodola presentada a continuación:

**Condición 1 (Condición de Stodola)** Si  $P(s)$  es un polinomio real y Hurwitz, entonces todos sus coeficientes son distintos de cero y tienen el mismo signo.

En el resto del trabajo consideraremos polinomios que cumplan con la condición de Stodola, concretamente con polinomios con coeficientes positivos.

Cuando las raíces de un polinomio se encuentran dentro de la región de estabilidad diremos que el polinomio es estable, en el caso que un polinomio sea Hurwitz es equivalente a tener un polinomio estable.

Es posible aplicar el Teorema de Cruce de Frontera para detectar la presencia de polinomios inestables dentro de una familia. Suponga que  $\delta(s, r)$  denota un polinomio de grado  $n$  cuyos coeficientes dependen continuamente de un vector de parámetros  $r \in \mathbb{R}^l$ , el cual, varía en un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ , es decir, existe una función continua que va de  $\Omega$  al espacio de coeficientes en el polinomio; con lo cual se genera la familia de polinomios

$$\Delta(s) = \{\delta(s, r) : r \in \Omega\}. \quad (3.3)$$

Al tener una región de estabilidad  $\mathcal{S}$ , es deseable poder determinar si la familia de polinomios dada por  $\Delta(s)$  contiene polinomios inestables. Para esto, asuma que existe al menos un  $r_a$  en  $\Omega$  tal que  $\delta(s, r_a)$  es estable y cada polinomio en la familia tiene el mismo grado. Entonces, si existe  $r_c \in \Omega$  tal que el polinomio  $\delta(s, r_c)$  es inestable, se sigue del teorema de cruce de frontera que cualquier camino continuo que conecte  $r_a$  y  $r_c$ , entonces debe de existir un punto  $r_b$  tal que el polinomio dado por  $\delta(s, r_b)$  contiene al menos una raíz en la frontera de la región de estabilidad  $\partial\mathcal{S}$ . Si tal camino puede ser construido enteramente dentro de  $\Omega$ , esto es si  $\Omega$  es arco conexo, es decir, que cada par de puntos distintos  $r_x, r_y \in \Omega$  existe un arco  $\rho$  tal que  $\rho(0) = r_x$  y  $\rho(1) = r_y$ , entonces este punto debe pertenecer a  $\Omega$ . Dado lo anterior la presencia de polinomios inestables dentro de la familia implica la presencia de polinomios con raíces en la frontera.

Si  $s^*$  es una raíz de un polinomio de la familia, se sigue que  $\delta(s^*, r) = 0$  para algún  $r \in \Omega$ , lo cual implica entonces que  $0 \in \Delta(s^*)$ , donde  $\Delta(s^*)$  es el conjunto de números complejos resultante de evaluar la familia  $\Delta(s)$  en  $s^*$ . Por lo tanto la presencia de polinomios inestables en la familia  $\Delta(s)$  puede ser detectada generando el conjunto imagen en el plano complejo  $\Delta(s^*)$  de la familia en  $s^* \in \partial\mathcal{S}$ , realizando un barrido de  $s^*$  a lo largo de la frontera de estabilidad  $\partial\mathcal{S}$  y revisando si la condición de exclusión del cero  $0 \notin \Delta(s^*)$  se viola para algún  $s^* \in \partial\mathcal{S}$ .

Lo anterior se establece como

**Teorema 4 (Principio de Exclusion Cero)** [5] Asuma que la familia de polinomios (3.3) es de grado constante y contiene al menos un polinomio estable, sea además  $\Omega$  un conjunto arco conexo, la familia entera de polinomios es estable si, y solo si,

$$0 \notin \Delta(s^*), \forall s^* \in \partial\mathcal{S} \quad (3.4)$$

El inconveniente que presenta el teorema anterior es que la condición (3.4) deberá revisarse para cada  $r \in \Omega$  y cada  $s^* \in \partial\mathcal{S}$ , por lo que se tendrá que revisar esta condición miembro a

miembro de la familia (3.3). Lo anterior significa revisar un número infinito de polinomios, esta complicación hace que el Teorema 3.4 no sea aplicado directamente, pero sirve como base para formular otros resultados prácticos.

El Teorema de Hermite-Biehler [5] permite establecer condiciones de estabilidad sobre un polinomio de acuerdo a su separación par e impar. Este resultado sirve como base para obtener resultados fundamentales para la teoría de robustez paramétrica, por tal motivo se presenta a continuación.

Las partes par e impar de un polinomio  $P(s)$  se definen como:

$$\begin{aligned} P^{par}(s) &:= p_0 + p_2s^2 + p_4s^4 + \dots \\ P^{impar}(s) &:= p_1s + p_3s^3 + p_5s^5 + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Propiedad 1 (Propiedad de Entrelazado)** *Un polinomio  $P(s) = P^{par}(s) + P^{impar}(s)$  real, satisface la propiedad de entrelazado si y sólo si*

1. *Los coeficientes que acompañan la variable de mayor exponente (coeficientes líderes), de  $P^{par}(s)$  y  $P^{impar}(s)$  son del mismo signo.*
2. *Todos los ceros de  $P^{par}(s) = 0$  y  $P^{impar}(s) = 0$  son distintos, descansan sobre el eje imaginario y se alternan a lo largo de éste.*

Ahora es posible enunciar el siguiente teorema

**Teorema 5 (Hermite-Biehler)** [5] *Un polinomio real  $P(s)$  es Hurwitz si, y sólo si, satisface la propiedad de entrelazado.*

### 3.4. Teorema de Kharitonov

Considere el conjunto  $Q(s)$  de polinomios reales de grado  $n$  de la forma

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n \quad (3.6)$$

donde los coeficientes se encuentran dentro de los rangos

$$p_0 \in [\beta_0, \gamma_0], \quad p_1 \in [\beta_1, \gamma_1] \quad \dots \quad p_n \in [\beta_n, \gamma_n].$$

Asuma que el grado permanece invariante, es decir  $0 \notin [\beta_n, \gamma_n]$ . Tal conjunto de polinomios es llamado familia intervalo real y nos referiremos a  $Q(s)$  como un intervalo polinomial. El Teorema de Kharitonov [12] provee condiciones de necesidad y suficiencia sorprendentemente simples para la estabilidad Hurwitz de toda la familia.

**Teorema 6 (Teorema de Kharitonov)** [12] *Cada polinomio en la familia  $Q(s)$  es Hurwitz si, y sólo si, los siguientes cuatro polinomios extremos son Hurwitz:*

$$\begin{aligned} K_1(s) &= \beta_0 + \gamma_1s + \gamma_2s^2 + \beta_3s^3 + \beta_4s^4 + \dots \\ K_2(s) &= \beta_0 + \beta_1s + \gamma_2s^2 + \gamma_3s^3 + \beta_4s^4 + \dots \\ K_3(s) &= \gamma_0 + \beta_1s + \beta_2s^2 + \gamma_3s^3 + \gamma_4s^4 + \dots \\ K_4(s) &= \gamma_0 + \gamma_1s + \beta_2s^2 + \beta_3s^3 + \gamma_4s^4 + \dots \end{aligned}$$



Lo sorprendente del resultado anterior es que revisando la estabilidad de Hurwitz de solamente 4 polinomios es posible determinar la estabilidad de un número infinito de ellos. Otro punto importante de este teorema, es que indica el modo de construir los polinomios a revisar, lo cual hace que este teorema sea sumamente útil e importante para determinar la robustez de un sistema dinámico lineal invariante en tiempo.

### 3.5. Condiciones de Estabilidad de Argound

Considere el polinomio

$$P(s) = p_0 + p_1s + \dots + p_ns^n, \quad (3.7)$$

cuyos coeficientes  $p_i$  varían entre los límites inferior y superior  $\beta_i$  y  $\gamma_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  respectivamente. Sustituyendo  $s = j\omega$  en (3.7) y definiendo  $\mu = \omega^2$  se obtiene

$$P(j\omega) = R(\mu) + j\omega Q(\mu)$$

donde

$$R(\mu) = p_0 - p_2\mu + p_4\mu^2 - p_6\mu^3 + \dots \quad (3.8)$$

$$Q(\mu) = p_1 - p_3\mu + p_5\mu^2 - p_7\mu^3 + \dots \quad (3.9)$$

Entonces  $R(\mu)$  contiene los términos pares y  $Q(\mu)$  los términos impares del polinomio. Dado que los coeficientes  $p_i$  varían entre límites superiores e inferiores, es posible entonces obtener polinomios extremos de (3.8) y (3.9), sustituyendo adecuadamente  $\beta_i$  y  $\gamma_i$  se tiene que el polinomio superior de la parte par denotado por  $\bar{R}(\mu)$  está dado por

$$\bar{R}(\mu) = \gamma_0 - \beta_2\mu + \gamma_4\mu^2 - \beta_6\mu^3 + \dots$$

mientras que el polinomio inferior  $\underline{R}(\mu)$  es de la forma

$$\underline{R}(\mu) = \beta_0 - \gamma_2\mu + \beta_4\mu^2 - \gamma_6\mu^3 + \dots$$

De igual manera para el polinomio  $Q(\mu)$  que contiene las potencias impares determinemos el polinomio superior

$$\bar{Q}(\mu) = \gamma_1 - \beta_3\mu + \gamma_5\mu^2 - \beta_7\mu^3 + \dots$$

y el polinomio inferior

$$\underline{Q}(\mu) = \beta_1 - \gamma_3\mu + \beta_5\mu^2 - \gamma_7\mu^3 + \dots$$

Ordenando las raíces de los polinomios  $\bar{R}(\mu)$ ,  $\underline{R}(\mu)$ ,  $\bar{Q}(\mu)$  y  $\underline{Q}(\mu)$  de acuerdo a su cercanía al origen, es posible definir las bandas de frecuencia de  $R(\mu)$  como los intervalos reales dados por  $B_{iR} = [r_{iR}, r_{i\bar{R}}]$ , mientras que las bandas de frecuencia de  $Q(\mu)$  están dadas por los intervalos  $B_{iQ} = [r_{iQ}, r_{i\bar{Q}}]$ ; donde  $r_{iR}$  representa la  $i$ -ésima raíz de  $\underline{R}$ .

En [2] se enuncian los siguientes lemas

**Lema 1** Para un polinomio Hurwitz  $P(s)$ , las raíces de  $\bar{R}(\mu)$ ,  $\underline{R}(\mu)$ ,  $\bar{Q}(\mu)$  y  $\underline{Q}(\mu)$  son reales y positivas.

**Lema 2** Para perturbaciones continuas  $p_i \in [\beta_i, \gamma_i]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  las bandas de frecuencia de  $R$  y  $Q$  son continuas y acotadas por las raíces de los polinomios extremos  $\overline{R}(\mu)$  y  $\underline{R}(\mu)$  para las bandas de frecuencia de  $R$ , y  $\overline{Q}$  y  $\underline{Q}$  para las bandas de frecuencia de  $Q$ .

Posterior a los resultados anteriores Argound obtiene el siguiente resultado

**Teorema 7 (Teorema de Argound)** [2] El polinomio  $P(s)$  es Hurwitz para todas las perturbaciones que satisfagan

$$p_i \in [\beta_i, \gamma_i],$$

si, y sólo si, las bandas de frecuencia de los polinomios resultantes de la descomposición par y e impar de  $P(s)$ , es decir  $R(\mu)$  y  $Q(\mu)$  respectivamente, se alternan y no se empalman.

Este teorema es el equivalente en el dominio de la frecuencia al resultado de Kharitonov.

Obteniendo las raíces de los polinomios extremos  $\overline{R}(\mu)$ ,  $\underline{R}(\mu)$ ,  $\overline{Q}(\mu)$  y  $\underline{Q}(\mu)$  y condicionando a que el Teorema 7 se cumpla, Argound [3] proporciona condiciones de estabilidad para polinomios de orden menor a 6. Dichas condiciones dependen solamente de las cotas de los intervalos de variación de los coeficientes, y a partir de éstas es posible determinar la estabilidad de una familia de polinomios. Las condiciones encontradas por Argound [3] para los casos de tercer y cuarto grado se enuncian en las siguientes proposiciones:

**Proposición 1 (Condición de Argound para Familias de Tercer Grado [3])** La familia de polinomios

$$Q(s) = q_3s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0,$$

donde

$$q_j \in [\beta_j, \gamma_j], j = 0, 1, 2, 3.$$

es Hurwitz si, y sólo si la siguiente condición se satisface:

$$\beta_1\beta_2 > \gamma_0\gamma_3 \quad (3.10)$$

De lo anterior es fácil obtener el siguiente corolario.

**Corolario 2** El polinomio

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + p_3s^3,$$

es Hurwitz si, y sólo si

$$p_1p_2 > p_0p_3.$$

**Proposición 2 (Condición de Argound para Familias de Cuarto Grado [3])** La familia de polinomios

$$Q(s) = q_4s^4 + q_3s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0,$$

donde

$$q_j \in [\beta_j, \gamma_j], j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

es Hurwitz si, y sólo si, las siguientes desigualdades se satisfacen:

$$\gamma_1\beta_2\beta_3 > \gamma_1^2\gamma_4 + \gamma_0\beta_3^2, \quad (3.11)$$

$$\beta_1\beta_2\gamma_3 > \beta_1^2\gamma_4 + \gamma_0\gamma_3^2. \quad (3.12)$$

A partir de la proposición anterior es posible concluir el siguiente corolario.

**Corolario 3** *El polinomio*

$$P(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + p_3s^3 + p_4s^4,$$

*es Hurwitz si, y sólo si*

$$p_1p_2p_3 > p_1^2p_4 + p_0p_3^2.$$

Para el caso de polinomios cuyo grado es menor a 6 revisar las condiciones dadas por Ar-gound [3] representa un método mas sencillo para verificar la estabilidad robusta de familias de polinomios que revisar la estabilidad de los 4 polinomios dados por Kharitonov, sin embargo para polinomios de mayor grado Kharitonov continúa siendo la mejor opción.

Las desigualdades (3.10), (3.11) y (3.12) pueden ser obtenidas a partir de los polinomios de Kharitonov, si se construye la matriz de Hurwitz correspondiente a cada uno de ellos y se condiciona a que los determinantes de Hurwitz sean positivos, lo cual es una condición necesaria y suficiente para la estabilidad del polinomio. Sin embargo la cantidad de cálculos a realizar aumenta significativamente, por ejemplo para el caso de un polinomio de cuarto grado Kharitonov nos llevaría a un conjunto de 16 condiciones por revisar, las cuales después de ser analizadas deben llevar a las condiciones (3.11) y (3.12).

# Capítulo 4

## Resultados Principales

### 4.1. Caso de Polinomios de Tercer Grado

Considere la familia de polinomios

$$Q(s) = q_3s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0, \quad (4.1)$$

donde

$$q_i \in [p_i - \lambda_i \varepsilon, p_i + \lambda_i \varepsilon], \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

para algún  $\varepsilon \geq 0$  y  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Suponga que  $P(s) = p_3s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0$ , es Hurwitz y que cada valor  $\lambda_i$  es conocido. Notemos que si  $\lambda_i = 0$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  la familia  $Q(s)$  se reduce a  $P(s)$ . El objetivo consiste en, encontrar el máximo  $\varepsilon$  tal que la familia (4.1) sea Hurwitz, utilizando para esto el resultado de la Proposición 1.

El conjunto de coeficientes de un polinomio  $P(s)$ , describen un punto  $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$  en el espacio de coeficientes, el cual se encuentra en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , siendo  $n$  el grado del polinomio. Si el polinomio nominal  $P(s)$  es Hurwitz entonces, por continuidad, existe una vecindad alrededor del punto  $p$  tal que  $P(s)$  es Hurwitz para todo vector de coeficientes  $p$  en la vecindad.

Al construir un intervalo de la forma

$$[p_i - \varepsilon, p_i + \varepsilon], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

dentro del cual la familia de polinomios es estable, y donde cada  $p_i$  representa un coeficiente del polinomio nominal Hurwitz, entonces se esta construyendo una caja cuadrada alrededor de ese punto, cuyos lados miden  $2\varepsilon$  (Ver Figura 4.1 en el caso de dos coeficientes).

Cuando el intervalo que se construye es de la forma

$$[p_i - \lambda_i \varepsilon, p_i + \lambda_i \varepsilon], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

cada  $\lambda_i$  influye sobre la medida del lado de la caja en cada coeficiente  $p_i$ . Una selección de un valor mayor de  $\lambda_i$  hará aumentar la medida del lado de la caja en dirección del  $i$ -ésimo coeficiente, o bien la selección de un valor menor de  $\lambda_i$  conducirá a una reducción de la variación en torno al  $i$ -ésimo coeficiente. Por otra parte la selección  $\lambda_i$  influirá sobre el cálculo

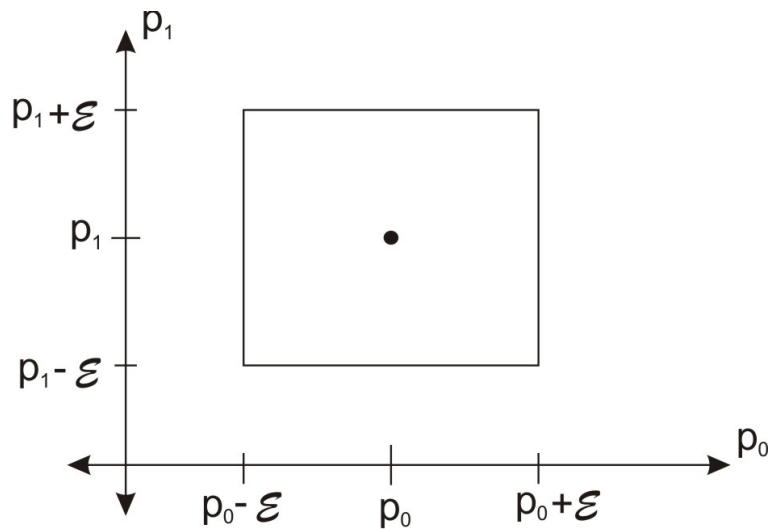


Figura 4.1: Caja cuadrada en el espacio de coeficientes

de la cota  $\epsilon$ .

Como se mostrará en ejemplos posteriores, al reducir el intervalo de variación permitida sobre uno de los coeficientes se logra aumentar la magnitud de uno o mas intervalos del resto de los coeficientes, ver Figura 4.2 en el caso de tres coeficientes. La asignación de los dis-

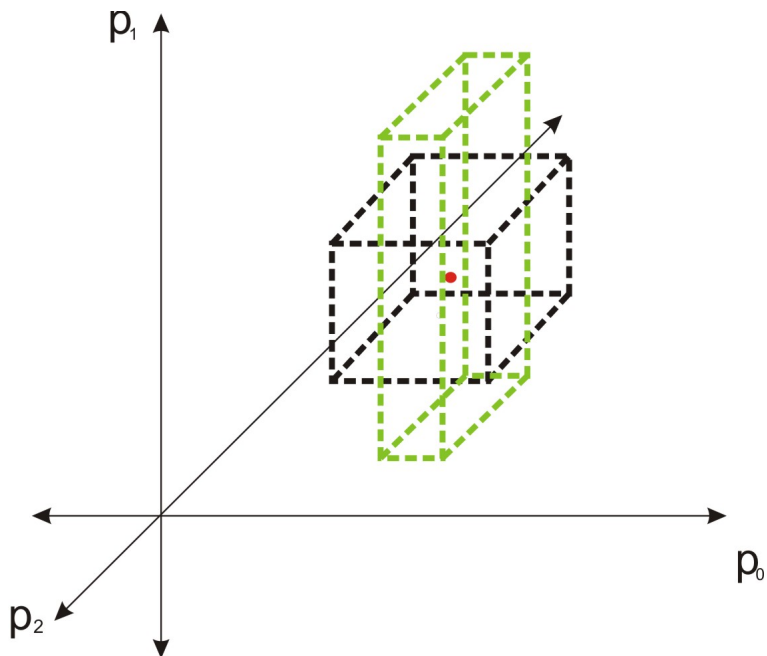


Figura 4.2: Cajas resultantes de modificar  $\lambda_0$  en el espacio de coeficientes

tintos valores de  $\lambda_i$  debe entonces efectuarse con base en la necesidad que exista de ampliar la variación de alguno de los coeficientes. Por ejemplo si en alguno de ellos se encuentra involucrada alguna ganancia de control, un cambio en la carga de un circuito, cambios en

constantes de fricción, etcétera.

### 4.1.1. El Caso General

**Proposición 3** *La familia de polinomios (4.1) es Hurwitz si, y sólo si,*

$$0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon},$$

donde  $\bar{\varepsilon}$  está dado por

$$\bar{\varepsilon} = \begin{cases} \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, & \text{si } A \neq 0, \\ -\frac{C}{B}, & \text{si } A = 0, \end{cases}$$

donde

$$A = \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3, \quad (4.2)$$

$$B = -(p_1 \lambda_2 + p_2 \lambda_1 + p_0 \lambda_3 + p_3 \lambda_0), \quad (4.3)$$

$$C = p_1 p_2 - p_0 p_3, \quad (4.4)$$

**Demostración.** Si  $P(s)$  es Hurwitz se cumple la condición (3.10). El objetivo es encontrar el intervalo máximo  $(\beta_i, \gamma_i)$  tal que la familia permanezca estable, donde

$$\beta_i = p_i - \lambda_i \varepsilon \text{ y } \gamma_i = p_i + \lambda_i \varepsilon, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Sustituyendo en la condición (3.10) se obtiene

$$(p_1 - \lambda_1 \varepsilon)(p_2 - \lambda_2 \varepsilon) > (p_0 + \lambda_0 \varepsilon)(p_3 + \lambda_3 \varepsilon).$$

Sea

$$h(\varepsilon) = f(\varepsilon) - g(\varepsilon),$$

donde

$$f(\varepsilon) = (p_1 - \lambda_1 \varepsilon)(p_2 - \lambda_2 \varepsilon),$$

$$g(\varepsilon) = (p_0 + \lambda_0 \varepsilon)(p_3 + \lambda_3 \varepsilon).$$

La familia (4.1) es Hurwitz si, y sólo si,  $h(\varepsilon) > 0$ . Mostraremos que  $\varepsilon$  está acotada por arriba y por lo tanto existe  $\bar{\varepsilon}$  tal que

$$h(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}), \quad \text{y} \quad h(\bar{\varepsilon}) = 0.$$

Comenzaremos mostrando que  $h(\varepsilon)$  tiene al menos una raíz real positiva. Ya que el polinomio sin perturbaciones se asume estable, se tiene que

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0) - g(0) \\ &= p_1 p_2 - p_0 p_3 > 0. \end{aligned}$$

Ahora observemos que

$$g(\varepsilon) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

y por lo tanto  $g(\varepsilon)$  no tiene raíces reales.

Por otro lado  $f(\varepsilon)$  tiene las raíces  $\varepsilon_1^* = \frac{p_1}{\lambda_1}$  y  $\varepsilon_2^* = \frac{p_2}{\lambda_2}$ . Sea

$$\varepsilon_1 = \min \left\{ \frac{p_1}{\lambda_1}, \frac{p_2}{\lambda_2} \right\} > 0.$$

Tenemos que

$$h(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_1) - g(\varepsilon_1) = -g(\varepsilon_1) < 0.$$

Como  $h(\varepsilon)$  es una función continua respecto a  $\varepsilon$ , el Teorema del Valor Intermedio [11] implica que existe  $\hat{\varepsilon} \in [0, \varepsilon_1]$  tal que

$$h(\hat{\varepsilon}) = 0,$$

mostrando así la existencia de, al menos, una raíz real positiva de  $h(\varepsilon)$ . Ver Figura 4.3.

Ahora bien, realizando los cálculos algebraicos sobre  $h(\varepsilon)$  se tiene que

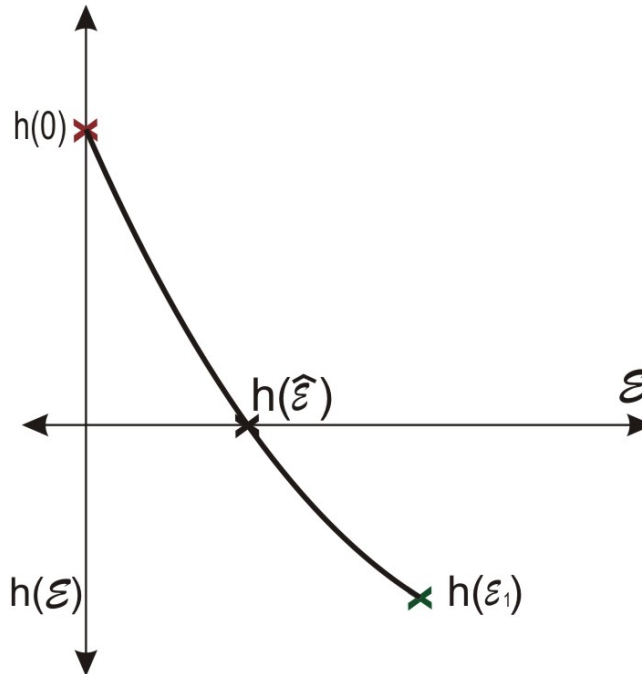


Figura 4.3: Existencia de una raíz real positiva de  $h(\varepsilon)$

$$h(\varepsilon) = A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C, \quad (4.5)$$

con  $A, B, C$  determinadas por las ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.4). Las raíces de (4.5) se obtienen por la fórmula general

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

El coeficiente  $B$  es negativo ya que  $\lambda_i$  y  $p_i$  son positivas, por lo tanto el análisis de  $A$  nos arroja 3 casos:

**Caso 1**  $A < 0$ . En este caso  $-B$  es un término positivo al igual que  $C$ , como  $A < 0$  el término  $-4AC$  es positivo al igual que  $B^2$ . Luego  $\sqrt{B^2 - 4AC}$  es también positivo y de magnitud mayor a  $-B$ . Dado lo anterior (4.5) tiene una raíz negativa y una raíz positiva, por lo tanto

$$\bar{\varepsilon} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

**Caso 2**  $A > 0$ . Este caso se obtiene cuando  $\lambda_1\lambda_2 > \lambda_0\lambda_3$ . Ahora el término  $-4AC$  es negativo, pero dado que se sabe que  $h(\varepsilon)$  tiene raíces reales, entonces el término  $\sqrt{B^2 - 4AC}$  es positivo pero de magnitud menor a  $-B$  por lo que la ecuación (4.5) tiene 2 raíces reales positivas, en tal caso

$$\bar{\varepsilon} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

**Caso 3**  $A = 0$ . Este caso sucede cuando se escogen  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , de tal manera que  $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0\lambda_3$  en tal caso tenemos

$$h(\varepsilon) = B\varepsilon + C = 0.$$

La raíz de  $h(\varepsilon)$  determina la cota buscada, por lo tanto

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{C}{B}.$$

Para cada caso se tiene que  $h(\varepsilon) > 0$ , para toda  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$  y llegamos al resultado de la Proposición 3 ■

Desarrollemos ahora un ejemplo numérico del resultado anterior.

**Ejemplo 5.** Considere el polinomio dado por

$$P(s) = 4s^3 + 9s^2 + 26s + 24.$$

Luego se cumple que

$$\begin{aligned} (26)(9) &> (24)(4), \\ 234 &> 96, \end{aligned}$$

por lo tanto el polinomio es Hurwitz de acuerdo al Corolario 2. Supongamos  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , por lo que los coeficientes (4.2)-(4.4) toman los siguientes valores:

$$A = 0, \quad B = -63, \quad C = 138,$$

por lo que siguiendo la Proposición 3,  $\bar{\varepsilon}$  toma un valor de

$$\bar{\varepsilon} = \frac{138}{63}.$$

Dado que se cumple la condición de que la familia de polinomios es estable para toda perturbación menor a  $\bar{\varepsilon}$ , entonces al tomar el valor de  $\bar{\varepsilon} = \frac{138}{63}$  se obtendrá al menos un polinomio



extremo que toca la frontera de la región de estabilidad. Los intervalos de variación de los coeficientes están dados entonces por

$$q_0 \in \left(24 - \frac{138}{63}, 24 + \frac{138}{63}\right), \quad q_1 \in \left(26 - \frac{138}{63}, 26 + \frac{138}{63}\right),$$

$$q_2 \in \left(9 - \frac{138}{63}, 9 + \frac{138}{63}\right), \quad q_3 \in \left(4 - \frac{138}{63}, 4 + \frac{138}{63}\right).$$

Formemos los polinomios de Kharitonov con los extremos de los intervalos, con lo que se obtendrán raíces en la frontera de la región de estabilidad en al menos uno de ellos.

$$K_1(s) = \left(24 - \frac{138}{63}\right) + \left(26 + \frac{138}{63}\right)s + \left(9 + \frac{138}{63}\right)s^2 + \left(4 - \frac{138}{63}\right)s^3,$$

$$K_2(s) = \left(24 - \frac{138}{63}\right) + \left(26 - \frac{138}{63}\right)s + \left(9 + \frac{138}{63}\right)s^2 + \left(4 + \frac{138}{63}\right)s^3,$$

$$K_3(s) = \left(24 + \frac{138}{63}\right) + \left(26 - \frac{138}{63}\right)s + \left(9 - \frac{138}{63}\right)s^2 + \left(4 + \frac{138}{63}\right)s^3,$$

$$K_4(s) = \left(24 + \frac{138}{63}\right) + \left(26 + \frac{138}{63}\right)s + \left(9 - \frac{138}{63}\right)s^2 + \left(4 - \frac{138}{63}\right)s^3,$$

Para revisar la estabilidad Hurwitz de cada uno de ellos utilicemos la condición dada en el Corolario 2. Tomando en cuenta que cuando se obtenga  $p_1p_2 - p_0p_3 = 0$  las raíces del polinomio tendrán parte real igual a cero y por tanto se encuentran en la frontera de la región de estabilidad.

Para  $K_1(s)$ :

$$\left(26 + \frac{138}{63}\right) \left(9 + \frac{138}{63}\right) - \left(24 - \frac{138}{63}\right) \left(4 - \frac{138}{63}\right) > 0.$$

Para  $K_2(s)$ :

$$\left(26 - \frac{138}{63}\right) \left(9 + \frac{138}{63}\right) - \left(24 - \frac{138}{63}\right) \left(4 + \frac{138}{63}\right) > 0.$$

Para  $K_3(s)$ :

$$\left(26 - \frac{138}{63}\right) \left(9 - \frac{138}{63}\right) - \left(4 + \frac{138}{63}\right) \left(24 + \frac{138}{63}\right) = 0.$$

Para  $K_4(s)$ :

$$\left(26 + \frac{138}{63}\right) \left(9 - \frac{138}{63}\right) - \left(4 - \frac{138}{63}\right) \left(24 + \frac{138}{63}\right) > 0.$$

Como es posible observar, en este caso cuando  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ , el polinomio de Kharitonov denotado por  $K_3$  tiene raíces con parte real cero. Aunque, en otros casos, bien podrían aparecer en cualquier otro de los polinomios según el extremo de la caja que se encuentre tocando la frontera de la región de estabilidad.

Mostremos ahora la variación sobre las cajas en el espacio de coeficientes que se obtienen

como resultado de variar  $\lambda_i$ . Cuando se toma  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  se obtiene  $\bar{\varepsilon} \approx 2.1905$ , es decir se forma una caja cuadrada centrada en el punto  $p$  cuyos lados miden aproximadamente 4.3810 unidades ( $2\bar{\varepsilon}$ ).

Suponga ahora que  $\lambda_0 = 2$ , mientras que  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , siguiendo la Proposición 3 la cota obtenida es  $\bar{\varepsilon} = 2$ , por lo tanto la nueva caja mide 8 unidades sobre  $p_0$  mientras que en  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  mide solo 4 unidades por lado. Comparando con la caja anterior, se han sacrificado aproximadamente 0.3810 unidades en cada lado de  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  para ganar 4 unidades en dirección de  $p_0$ , por lo tanto se ha aumentado la robustez para cambios en este coeficiente. Analicemos ahora el caso en que  $\lambda_0 = 0.5$ , manteniendo  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Con estos valores se obtiene  $\bar{\varepsilon} \approx 2.3059$ . De manera que la caja mide alrededor de 4.6118 unidades en  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  mientras que en  $p_0$  tiene una medida aproximada de 2.3059 por lado.

#### 4.1.2. El Caso Mónico

En el caso de los sistemas dinámicos el polinomio característico, dado en (1.4), es siempre mónico, es decir, el coeficiente líder  $p_3 = 1$  y no se encuentra sujeto a perturbaciones. Tomando en cuenta estas observaciones considere la familia de polinomios

$$Q(s) = s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0, \quad (4.6)$$

donde

$$q_i \in [p_i - \lambda_i\varepsilon, p_i + \lambda_i\varepsilon], \quad i = 0, 1, 2,$$

para algún  $\varepsilon \geq 0$  y  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Suponga que  $P(s) = s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0$ , es Hurwitz y que cada  $\lambda_i$  es conocida. El objetivo consiste en, encontrar el máximo  $\varepsilon$  tal que la familia (4.6) sea Hurwitz, utilizando para esto el resultado de la Proposición 1.

**Corolario 4** *La familia de polinomios dada en (4.6) es Hurwitz si, y sólo si,*

$$0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon},$$

donde

$$\bar{\varepsilon} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (4.7)$$

con

$$A = \lambda_1\lambda_2, \quad (4.8)$$

$$B = -(p_1\lambda_2 + p_2\lambda_1 + \lambda_0), \quad (4.9)$$

$$C = p_1p_2 - p_0. \quad (4.10)$$

**Demostración.** De acuerdo a la Proposición 1, la familia de polinomios (4.6) es Hurwitz si, y sólo si,  $h(\varepsilon) > 0$ , donde

$$h(\varepsilon) = A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C, \quad (4.11)$$

con  $A$ ,  $B$  y  $C$  según las ecuaciones (4.8)-(4.10). Por hipótesis  $h(0) = C > 0$ . Dado que  $A$  siempre positivo y  $B$  siempre negativo entonces del análisis de la Proposición 3 se sigue que (4.11) tiene 2 raíces positivas y luego

$$\bar{\varepsilon} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

■

Apliquemos el corolario anterior a un ejemplo con el fin de mostrar el uso de éste.

**Ejemplo 6.** Sea  $P(s) = s^3 + 8s^2 + 5s + 10$  y tomemos  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 0, 1, 2$ , recordando que  $p_3$  no está sometido a perturbaciones. Para verificar que tal polinomio sea Hurwitz basta con revisar que  $p_1 p_2 - p_0 > 0$  y de hecho

$$(8)(5) - 10 = 30 > 0$$

Los coeficientes (4.8)-(4.10) son

$$A = 1, \quad B = -14, \quad C = 30,$$

y de (4.7) se obtiene

$$\bar{\varepsilon} = \frac{14 - \sqrt{76}}{2} \approx 2.6411 \quad .$$

Así la familia de polinomios es Hurwitz para

$$\begin{aligned} q_0 &\in \left( 10 - \frac{14 - \sqrt{76}}{2}, 10 + \frac{14 - \sqrt{76}}{2} \right) \\ q_1 &\in \left( 5 - \frac{14 - \sqrt{76}}{2}, 5 + \frac{14 - \sqrt{76}}{2} \right) \\ q_2 &\in \left( 8 - \frac{14 - \sqrt{76}}{2}, 8 + \frac{14 - \sqrt{76}}{2} \right) \end{aligned}$$

Note que dado que se toma un redondeo de la cota  $\bar{\varepsilon}$ , se da el caso en que los cuatro polinomios de Kharitonov continúan siendo Hurwitz cuando  $\bar{\varepsilon}$  se redondea hacia abajo, o bien alguno deja de ser Hurwitz cuando  $\bar{\varepsilon}$  se redondea hacia arriba. Realicemos ahora variaciones sobre los valores de  $\lambda_0$  para ejemplificar en este caso la variación de las cajas en el espacio de coeficientes. La caja resultante cuando  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 0, 1, 2$  es una caja cuadrada cuyos lados miden aproximadamente 5.2822 unidades sobre cada coeficiente  $p_i$ . Fijemos entonces  $\lambda_0 = 2$  mientras que  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ . De acuerdo a la Proposición 4 se obtiene que  $\bar{\varepsilon} \approx 2.3765$  de esta manera ahora la caja se ha vuelto rectangular ya que mientras en los coeficientes  $p_1$  y  $p_2$  la caja tiene una medida aproximada de 4.7530 unidades, sobre el coeficiente  $p_0$  tiene una medida de alrededor de 9.5060 unidades, es decir mientras que la caja decreció en aproximadamente 0.5292 unidades sobre  $p_1$  y  $p_2$ , se tuvo una ganancia de alrededor de 4.2238 unidades sobre el coeficiente  $p_0$ . Suponga ahora  $\lambda_0 = 0.5$  mientras que  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ , en

este caso se obtiene  $\bar{\varepsilon} \approx 2.8051$ , de manera que sobre los ejes de los coeficientes  $p_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ , la medida de la caja es de aproximadamente 5.6102 unidades, mientras que sobre el eje  $p_0$  la medida de la caja es de alrededor de 2.8051.

Note que cuando se aumenta  $\lambda_0$ ,  $\bar{\varepsilon}$  disminuye, mientras que al disminuirlo  $\bar{\varepsilon}$  aumenta.

## 4.2. Caso de Polinomios de Cuarto Orden

### 4.2.1. El Caso General

Consideremos la siguiente familia de polinomios

$$Q(s) = q_4s^4 + q_3s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0, \quad (4.12)$$

donde

$$q_j \in [p_j - \lambda_j\varepsilon, p_j + \lambda_j\varepsilon], \quad j = 0, \dots, 4,$$

para algún  $\varepsilon \geq 0$  y  $\lambda_j > 0$ ,  $j = 0, \dots, 4$ . Suponiendo que  $P(s) = p_4s^4 + p_3s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0$ , es Hurwitz y que cada  $\lambda_j > 0$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ , es conocida. El objetivo consiste en encontrar el máximo  $\varepsilon$  tal que la familia (4.12) sea Hurwitz.

**Proposición 4** *La familia de polinomios (4.12) es Hurwitz si, y sólo si,*

$$0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon} = \min\{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2\},$$

donde  $\hat{\varepsilon}_1$  y  $\hat{\varepsilon}_2$  son respectivamente las raíces mínimas reales positivas de los polinomios  $h_1(\varepsilon)$  y  $h_2(\varepsilon)$  definidos por

$$h_1(\varepsilon) = f_1(\varepsilon) - g_1(\varepsilon), \quad (4.13)$$

$$h_2(\varepsilon) = f_2(\varepsilon) - g_2(\varepsilon), \quad (4.14)$$

con

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon) &= (p_1 + \lambda_1\varepsilon)(p_2 - \lambda_2\varepsilon)(p_3 - \lambda_3\varepsilon), \\ g_1(\varepsilon) &= (p_1 + \lambda_1\varepsilon)^2(p_4 + \lambda_4\varepsilon) + (p_0 + \lambda_0\varepsilon)(p_3 - \lambda_3\varepsilon)^2, \\ f_2(\varepsilon) &= (p_1 - \lambda_1\varepsilon)(p_2 - \lambda_2\varepsilon)(p_3 + \lambda_3\varepsilon), \\ g_2(\varepsilon) &= (p_1 - \lambda_1\varepsilon)^2(p_4 + \lambda_4\varepsilon) + (p_0 + \lambda_0\varepsilon)(p_3 + \lambda_3\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

**Demostración.** De acuerdo con la Proposición 2, desarrollando (3.11) y (3.12) en el caso en que  $\beta_i = p_i - \lambda_i\varepsilon$  y  $\gamma_i = p_i + \lambda_i\varepsilon$ , la familia de polinomios (4.12) es Hurwitz si, y sólo si, las siguientes desigualdades se satisfacen

$$h_1(\varepsilon) > 0, \quad (4.15)$$

$$h_2(\varepsilon) > 0, \quad (4.16)$$

donde  $h_1(\varepsilon)$  y  $h_2(\varepsilon)$  están definidas por (4.13) y (4.14), respectivamente. 1Por hipótesis tenemos que las desigualdades (4.15) y (4.16) se satisfacen para  $\varepsilon = 0$ . Por el Teorema 2 sobre

la continuidad de las raíces de polinomios con respecto a variaciones en sus coeficientes tenemos que existe  $\varepsilon > 0$  (suficientemente pequeño) tal que las desigualdades (4.15) y (4.16) se satisfacen.

Vamos a mostrar que  $\varepsilon > 0$  no puede crecer arbitrariamente, es decir, que  $\varepsilon > 0$  está acotado por arriba. Dado lo anterior, mostraremos que existe  $\bar{\varepsilon} > 0$  tal que

$$h_1(\varepsilon) > 0 \text{ y } h_2(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}], \quad (4.17)$$

y

$$h_1(\bar{\varepsilon}) = 0 \text{ o } h_2(\bar{\varepsilon}) = 0. \quad (4.18)$$

Primeramente necesitamos mostrar que  $h_1(\varepsilon)$  y  $h_2(\varepsilon)$  tienen al menos una raíz real positiva.

Consideremos la función  $h_1(\varepsilon)$ . Observemos primero que por hipótesis  $h_1(0) > 0$ , por lo que tenemos que

$$\begin{aligned} h_1(0) &= f_1(0) - g_1(0) \\ &= p_1 p_2 p_3 - (p_1^2 p_4 + p_0 p_3^2) > 0. \end{aligned}$$

Ahora observemos que la función  $g_1(\varepsilon)$  satisface que

$$g_1(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0,$$

y, por lo tanto,  $g_1(\varepsilon)$  no tiene raíces reales positivas. Por otro lado, el polinomio de tercer orden  $f_1(\varepsilon)$  tiene una raíz real negativa  $\varepsilon_1^* = -\frac{p_1}{\lambda_1}$  y dos raíces reales positivas  $\varepsilon_2^* = \frac{p_2}{\lambda_2}$  y  $\varepsilon_3^* = \frac{p_3}{\lambda_3}$ .

Sea

$$\varepsilon_1 = \min \left\{ \frac{p_2}{\lambda_2}, \frac{p_3}{\lambda_3} \right\} > 0.$$

Tenemos que

$$h_1(\varepsilon_1) = f_1(\varepsilon_1) - g_1(\varepsilon_1) = -g_1(\varepsilon_1) < 0.$$

Como  $h_1(\varepsilon)$  es una función continua con respecto a  $\varepsilon$ , el Teorema del Valor Intermedio [11] implica que existe  $\hat{\varepsilon}_1 \in [0, \varepsilon_1]$  tal que

$$h_1(\hat{\varepsilon}_1) = 0,$$

mostrando así la existencia de al menos una raíz real positiva de  $h_1(\varepsilon)$  como deseamos, tomemos la mínima de éstas raíces y denotémosla como  $\hat{\varepsilon}_1$ . Consideremos ahora la función  $h_2(\varepsilon)$ . Observemos que  $h_2(0) = h_1(0) > 0$ . El polinomio  $f_2(\varepsilon)$  tiene una raíz real negativa  $\varepsilon_1^* = -\frac{p_3}{\lambda_3}$  y dos raíces reales positivas  $\varepsilon_2^* = \frac{p_1}{\lambda_1}$  y  $\varepsilon_3^* = \frac{p_2}{\lambda_2}$  mientras que el polinomio  $g_2(\varepsilon)$  no tiene raíces reales positivas debido a que

$$g_2(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Sea

$$\varepsilon_2 = \min \left\{ \frac{p_1}{\lambda_1}, \frac{p_2}{\lambda_2} \right\} > 0.$$

Tenemos que

$$h_2(\varepsilon_2) = f_2(\varepsilon_2) - g_2(\varepsilon_2) = -g_2(\varepsilon_2) < 0.$$

Una vez más como  $h_2(\varepsilon)$  es una función continua con respecto a  $\varepsilon$ , podemos aplicar el Teorema del Valor Intermedio y concluir que existe  $\hat{\varepsilon}_2 \in [0, \varepsilon_2]$  tal que

$$h_2(\hat{\varepsilon}_2) = 0,$$

mostrando así la existencia de al menos una raíz real positiva de  $h_2(\varepsilon)$ , tomemos la mínima de éstas raíces y denotémosla como  $\hat{\varepsilon}_2$ . Escogiendo

$$\bar{\varepsilon} = \text{mín} \{ \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2 \},$$

se tiene que las condiciones (4.17) y (4.18) se satisfacen y, por lo tanto, la demostración de la proposición. ■

Obsérvese que al tomar el  $\bar{\varepsilon}$  anterior, alguno de los cuatro polinomios de Kharitonov tendrá raíces sobre la frontera de la región de estabilidad, ya que  $\bar{\varepsilon}$  representa el valor a partir del cual las desigualdades de Argound dejan de cumplirse, es decir  $h_1(\varepsilon) = 0$  ó  $h_2(\varepsilon) = 0$ . Basado en el resultado anterior, el máximo valor de  $\varepsilon$  para el cual se garantiza la estabilidad robusta de la familia de polinomios (4.12) se puede calcular mediante el siguiente procedimiento:

Paso 1: Calcular las raíces de los polinomios  $h_1(\varepsilon)$  y  $h_2(\varepsilon)$ ,

Paso 2: Determinar la mínima raíz positiva  $\hat{\varepsilon}_1$  de  $h_1(\varepsilon)$  y  $\hat{\varepsilon}_2$  de  $h_2(\varepsilon)$ .

Paso 3: El mínimo de  $\hat{\varepsilon}_1$  y  $\hat{\varepsilon}_2$  determina la cota buscada.

Para mostrar el uso de esta proposición se utilizará el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 7.** Considere el polinomio

$$P(s) = 2s^4 + 10s^3 + 15s^2 + 32s + 9,$$

el cual es Hurwitz según el Corolario 3 ya que

$$\begin{aligned} p_1 p_2 p_3 &> p_1^2 p_4 + p_0 p_3^2, \\ (32)(15)(10) &> (32^2)(2) + (9)(10^2), \\ 4800 &> 2948. \end{aligned}$$

Suponga  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . De acuerdo a la Proposición 4 se tiene que  $h_1(\varepsilon)$  y  $h_2(\varepsilon)$  están dadas por

$$\begin{aligned} h_1(\varepsilon) &= -\varepsilon^3 - 48\varepsilon^2 - 1722\varepsilon + 1852, \\ h_2(\varepsilon) &= -\varepsilon^3 - 4\varepsilon^2 - 1166\varepsilon + 1852. \end{aligned}$$

Las raíces de  $h_1(\varepsilon)$  calculadas numéricamente son

$$-24.5222 \pm 34.2328j, \quad 1.0444,$$

donde  $j^2 = -1$ , de manera que  $\hat{\varepsilon}_1 \approx 1.0444$ .

Por otro lado el cálculo numérico de las raíces de  $h_2(\varepsilon)$  indica que están situadas en

$$-2.7882 \pm 34.1616j, \quad 1.5765,$$

y por lo tanto  $\hat{\varepsilon}_2 \approx 1.5765$ . Finalmente calculando  $\min\{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2\}$  se tiene que

$$\bar{\varepsilon} \approx 1.0444,$$

por lo tanto la familia de polinomios es estable para todo  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon})$ .

Analicemos ahora el efecto de realizar cambios sobre algún  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . En este caso tomemos  $\lambda_1 = 2$ , mientras que  $\lambda_j = 1$ ,  $j = 0, 2, 3, 4$ . Siguiendo el procedimiento anterior se obtiene que  $\varepsilon = 1.003$ . Este nuevo  $\varepsilon$  no dista mucho del obtenido originalmente cuando  $\lambda_i = 1$  sin embargo el panorama es distinto al observar la forma de la caja obtenida en el espacio de coeficientes. La caja original tiene una medida de 2.0888 unidades por lado en dirección de cada coeficiente  $p_i$ , mientras que la caja obtenida cuando  $\lambda_1 = 2$  mide 2.006 unidades en dirección de  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 2, 3, 4$  y tiene una medida de 4.012 unidades en dirección de  $\lambda_1$ , es decir, se han sacrificado 0.0828 unidades en dirección de  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 2, 3, 4$ , pero se han ganado 1.9232 unidades en dirección de  $\lambda_1$ .

Fijando ahora  $\lambda_1 = 0.5$  y dejando  $\lambda_j = 1$ ,  $j = 0, 2, 3, 4$ , se obtiene que  $\varepsilon = 1.0668$ , de manera que la nueva caja resultante tiene una medida de 2.1336 unidades en dirección de cada coeficiente  $\lambda_j$ , y una medida de 1.0668 unidades en dirección de  $\lambda_1$ . Entonces sacrificando un total de 1.022 unidades en  $\lambda_1$ , se obtiene una ganancia de 0.0448 unidades en dirección de  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 2, 3, 4$ .

Observe que cuando  $\lambda_1$  aumenta,  $\varepsilon$  disminuye, mientras que cuando  $\lambda_1$  disminuye,  $\varepsilon$  aumenta.

## 4.2.2. El Caso Mónico

Existen aplicaciones donde el coeficiente líder está fijo y no sujeto a perturbación alguna. En este caso, consideramos la familia de polinomios

$$Q(s) = s^4 + q_3s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0, \quad (4.19)$$

donde

$$q_j \in [p_j - \lambda_j\varepsilon, p_j + \lambda_j\varepsilon], \quad j = 0, \dots, 3,$$

para algún  $\varepsilon \geq 0$  y  $\lambda_j > 0$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ . Suponiendo que  $P(s) = s^4 + p_3s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0$ , es Hurwitz y que cada  $\lambda_j > 0$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , es conocida. En este caso es posible determinar fórmulas explícitas para  $\hat{\varepsilon}_1$  y  $\hat{\varepsilon}_2$  como se muestra en el siguiente resultado.

**Proposición 5** *Considere la familia de polinomios (4.19) donde  $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0\lambda_3$ . La familia de polinomios (4.19) es Hurwitz si, y sólo si,*

$$0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon} = \min\{\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2\},$$

donde

$$\hat{\varepsilon}_1 = \begin{cases} \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, & \text{si } A \neq 0 \\ -\frac{C}{B}, & \text{si } A = 0, \end{cases}$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4DC}}{2D},$$

con

$$A = \lambda_2 \lambda_3 p_1 + \lambda_1 \lambda_2 p_3 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 p_0 - \lambda_1 \lambda_3 p_2, \quad (4.20)$$

$$B = 2\lambda_3 p_0 p_3 + \lambda_1 p_2 p_3 - 2\lambda_1 p_1 - \lambda_3 p_1 p_2 - \lambda_2 p_1 p_3 - \lambda_0 p_3^2, \quad (4.21)$$

$$C = p_1 p_2 p_3 - p_1^2 - p_0 p_3^2, \quad (4.22)$$

$$D = -(\lambda_1^2 + \lambda_3^3 p_0 + \lambda_2 \lambda_3 p_1 + \lambda_1 \lambda_3 p_2 + \lambda_0 \lambda_3 p_3), \quad (4.23)$$

$$E = \lambda_3 p_1 p_2 - \lambda_2 p_1 p_3 + 2\lambda_1 p_1 - 2\lambda_3 p_0 p_3 - \lambda_1 p_2 p_3 - \lambda_0 p_3^2. \quad (4.24)$$

**Demostración.** Realizando los cálculos algebraicos involucrados en las expresiones para  $h_1(\varepsilon)$  y  $h_2(\varepsilon)$ , y tomando en cuenta que por hipótesis  $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_0 \lambda_3$ , se llega a que

$$h_1(\varepsilon) = A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C,$$

$$h_2(\varepsilon) = D\varepsilon^2 + E\varepsilon + C,$$

donde los coeficientes  $A, B, C, D, E$  están determinados por (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) y (4.24), respectivamente. Así, las funciones  $h_1(\varepsilon)$  y  $h_2(\varepsilon)$  son de hecho polinomios cuadráticos.

De la Proposición 4 se tiene que  $h_1(\varepsilon)$  y  $h_2(\varepsilon)$  tienen siempre al menos una raíz real positiva  $\hat{\varepsilon}_1$  y  $\hat{\varepsilon}_2$  las cuales, en este caso, es posible determinar explícitamente como se muestra a continuación. Primeramente notemos que para polinomios cuadráticos la condición necesaria de Stodola (1) es también suficiente, es decir,  $P(s) = As^2 + Bs + C$  es Hurwitz si, y sólo si, los coeficientes  $A, B$  y  $C$  son distintos de cero y del mismo signo. Así, como en este caso tenemos que  $C > 0$ , entonces se sigue que para  $h_1(\varepsilon)$  los coeficientes  $A$  y  $B$  no pueden ser ambos positivos. La observación anterior nos lleva a considerar los siguientes casos para  $h_1(\varepsilon)$ :

**Caso 1**  $A > 0$  y  $B < 0$  o  $A < 0$  y  $B < 0$ . En estos casos, siguiendo el análisis de la demostración de la Proposición 3, concluimos que la raíz real positiva  $\hat{\varepsilon}_1$  está determinada por

$$\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (4.25)$$

**Caso 2**  $A < 0$  y  $B > 0$ . En este caso  $h_1(\varepsilon)$  tiene una raíz real positiva y una raíz real negativa. Realizando un análisis similar al hecho en la demostración de la Proposición 3 se obtiene que la raíz real positiva está determinada por (4.25).

**Caso 3**  $B = 0$ . En este caso se tiene  $A\varepsilon^2 + C = 0$ . Dado que existe al menos una raíz real positiva se tiene que  $A < 0$ . Luego

$$\hat{\varepsilon}_1 = \sqrt{\frac{-C}{A}},$$

que es (5) cuando  $B = 0$ .



**Caso 4  $A = 0$ .** En este caso, dado que existe al menos una raíz positiva de  $h_1(\varepsilon)$ , tenemos que  $B < 0$  y, por lo tanto, la raíz real positiva  $\hat{\varepsilon}_1$  está determinada por

$$-\frac{C}{B}. \quad (4.26)$$

En conclusión cuando  $A \neq 0$  el  $\bar{\varepsilon}$  está determinado por (4.25) y cuando  $A = 0$  por (4.26). Para  $h_2(\varepsilon)$  tenemos que  $D < 0$  y  $C > 0$ . Siguiendo un análisis similar al de los casos 1, 2 y 3 se concluye que  $\hat{\varepsilon}_2$  está determinada por

$$\hat{\varepsilon}_2 = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4DC}}{2D}.$$

Escogiendo el mínimo entre  $\hat{\varepsilon}_1$  y  $\hat{\varepsilon}_2$  el resultado sigue de la Proposición 4. ■  
Resolvamos algunos ejemplos que muestren cada uno de los casos.

**Ejemplo 8.** Encontramos las cotas para el polinomio dado por

$$P(s) = s^4 + 14s^3 + 20s^2 + 12s + 3.$$

Dado que

$$\begin{aligned} (14)(20)(12) &> 12^2 + (3)(14^2), \\ 3360 &> 732, \end{aligned}$$

se cumple el Corolario 3 y por lo tanto  $P(s)$  es Hurwitz. Escojamos  $\lambda_i$  de manera que se cumpla que  $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0\lambda_3$ , por ejemplo  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Con lo anterior, los valores numéricos para las expresiones (4.20)-(4.24) quedan como:

$$A = 2, \quad B = -264, \quad C = 2628, \quad D = -50, \quad E = -464.$$

Dado que  $A > 0$  y  $B < 0$  entonces estamos en el primer caso, por lo tanto, la raíz  $\hat{\varepsilon}_1$  está determinada según la ecuación (5), de la cual se obtiene que  $\hat{\varepsilon}_1 \approx 10.8457$ , mientras que  $\hat{\varepsilon}_2 \approx 3.9675$ . Se sigue que  $0 \leq \varepsilon < 3.9675$ .

**Ejemplo 9.** Dado el polinomio

$$P(s) = s^4 + s^3 + 4s^2 + s + 2,$$

el cual es Hurwitz según el Corolario 3 dado que cumple

$$\begin{aligned} (1)(4)(1) &> (1^2) + (2)(1^2), \\ 4 &> 3. \end{aligned}$$

Suponga  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , de manera que los coeficientes (4.20)-(4.24) toman los siguientes valores

$$A = -5, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = -9, \quad E = -4,$$

así, obtenemos que  $\widehat{\varepsilon}_1 \approx 0.4472$  y  $\widehat{\varepsilon}_2 \approx 0.1783$ . Por tanto obtenemos que  $0 \leq \varepsilon < 0.1783$ .

**Ejemplo 10.** Tomando el polinomio

$$P(s) = s^4 + 15s^3 + 24s^2 + 12s + 2.$$

Verifiquemos que el polinomio es Hurwitz mediante el Corolario 3:

$$\begin{aligned} (12)(24)(15) &> 12^2 + (2)(15^2), \\ 4320 &> 594. \end{aligned}$$

Tomemos  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , ante esta condición los coeficientes de las funciones  $h_1(\varepsilon)$  y  $h_2(\varepsilon)$  toman los valores

$$A = 0, \quad B = -297, \quad C = 3726, \quad D = -54, \quad E = -513,$$

con lo cual se muestra el caso 4, de manera que  $\widehat{\varepsilon}_1 \approx 12.54$  y  $\widehat{\varepsilon}_2 \approx 4.8188$ , tomando el mínimo de ambos, el resultado arroja que  $0 \leq \varepsilon < 4.8188$ .

Analicemos en este ejemplo el efecto de realizar una variación sobre  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  manteniendo  $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ .

La caja abierta formada por el  $\bar{\varepsilon}$  obtenido cuando  $\lambda_i = 1$  mide 9.6376 unidades por lado. Tomemos ahora  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ , esto para mantener la condición de que  $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0\lambda_3$ , de acuerdo a la Proposición 5 se obtiene  $\varepsilon \approx 3.7313$ , por lo que la caja resultante mide 7.4626 unidades en dirección de  $p_0$  y  $p_1$ , mientras que en dirección de  $p_2$  y  $p_3$  tiene una medida de 14.92 unidades. Respecto a la caja original, la caja se ha reducido en 5.9063 unidades sobre los coeficientes  $p_0$  y  $p_1$ , pero a cambio de esto se ha obtenido un aumento de 5.2824 unidades sobre los coeficientes  $p_2$  y  $p_3$ . Observe que  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  se han duplicado mientras que  $\varepsilon$  ha disminuido en 1.0875 unidades.

Suponga ahora  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.5$  para este caso  $\varepsilon \approx 5.5676$ . De manera que la caja ha aumentado sobre los coeficientes  $p_0$  y  $p_1$  ya que ahora mide 11.1352 unidades por lado, mientras que sobre  $p_2$  y  $p_3$  ha disminuido hasta tener solamente 5.5676 unidades por lado. Se observa entonces que al disminuir  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ , se ha incrementado el valor de  $\varepsilon$ .

### 4.3. Aplicación a un Convertidor de Potencia

Los resultados anteriores proporcionan un conjunto de intervalos dentro de los cuales pueden variar los coeficientes del polinomio, sin embargo no toma en cuenta un análisis explícito de las interdependencias entre los coeficientes. Este caso se vuelve por mucho, mas complicado que el caso anterior, ya que al variar uno de los coeficientes, entonces otro de ellos presentará una variación que puede no cumplir las condiciones del  $\bar{\varepsilon}$  proporcionado, y el caso se vuelve aún mas complicado cuando estas interdependencias presentan no linealidades.

El esfuerzo ahora se centrará en ejemplificar el procedimiento a seguir cuando en un sistema

se presentan interdependencias entre los coeficientes, para este caso se utilizará un convertidor cuadrático de CD-CD elevador estudiado en [15].

La figura 4.4 muestra el diagrama del circuito convertidor elevador de CD-CD, cuyo funcionamiento se describe en [13]. El voltaje de entrada en el circuito esta representado por  $E$ ,

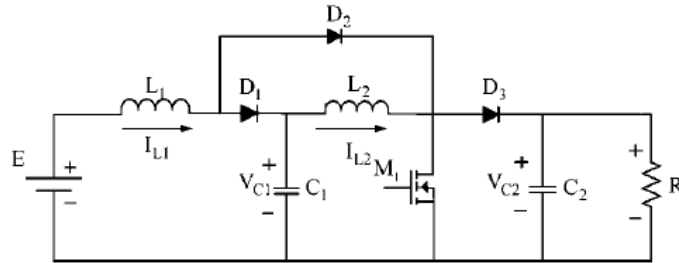


Figura 4.4: Diagrama del convertidor

siendo  $V_{c_2}$  el voltaje en la salida,  $L_1$  y  $L_2$  representan bobinas,  $C_1$  y  $C_2$  son los capacitores y  $R$  representa la resistencia de carga. El dispositivo representado por  $M_1$  es un interruptor independiente, por lo que para efectos de análisis se toma un modelo promediado del sistema [15] el cual aparece en la figura 4.5.

A partir del diagrama de la figura 4.5 se obtiene el modelo linealizado del sistema [15] que se utiliza para estudiar sus soluciones. El siguiente punto a considerar es obtener el polinomio característico del sistema para, a partir de este, encontrar cotas para las variaciones de los coeficientes, por lo que se recurre al diagrama a bloques mostrado en la figura 4.6. En este diagrama  $R_s$  representa una resistencia de sensado,  $K_n$  es una red divisora de voltaje,  $PI$  es un controlador, y las constantes  $d_1$  y  $d_2$  están dadas por

$$d_1 = \frac{1}{V_p}, \quad d_2 = \frac{(1-D)^2}{2L_1 f_s}$$

donde  $V_p$  es la magnitud de la rampa de estabilización,  $f_s$  la frecuencia de conmutación y  $D \in (0, 1)$  es el ciclo de trabajo nominal el cual se encuentra fijo.

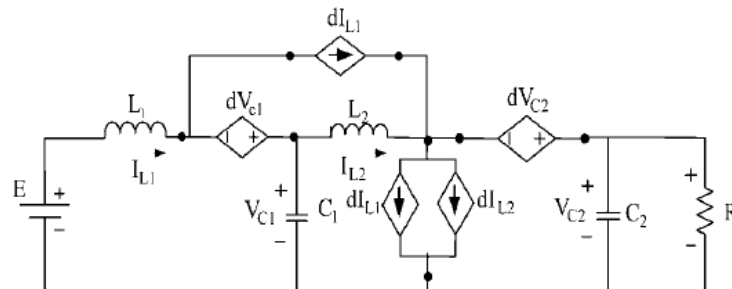


Figura 4.5: Diagrama promediado del convertidor

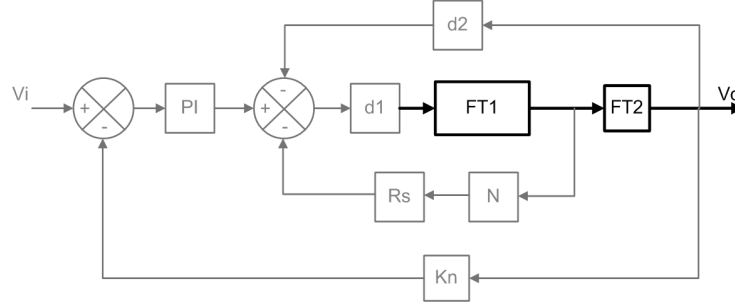


Figura 4.6: Diagrama a bloques del convertidor

En un primer acercamiento al análisis de estabilidad robusta de este circuito nos enfocaremos únicamente en la dinámica en lazo abierto.

La dinámica en lazo abierto está determinada por el producto de las funciones de transferencia  $FT_1$  y  $FT_2$ , resaltadas en la Figura 4.6. La función de transferencia  $FT_1$  está definida por

$$FT_1 = \frac{\tilde{i}_s(s)}{\tilde{d}(s)} = K \frac{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}, \quad (4.27)$$

donde  $\tilde{i}_s(s)$  denota la transformada de Laplace de la corriente en el interruptor y  $\tilde{d}(s)$  denota la transformada de Laplace de la señal de entrada del ciclo de trabajo. La constante  $K_i$  junto con los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , se definen como

$$\begin{aligned} K &= \frac{E}{(1-D)^3 R}, & a_3 &= \frac{R(1-D)^2}{L_1} + \frac{R(1-D)}{L_2}, & a_2 &= \frac{(1-D)^2}{L_1 C_2} + \frac{2(1-D)}{L_2 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1} - \frac{1}{L_2 C_1 (1-D)}, \\ a_1 &= \frac{2(2-D)(1-D)^2 R}{L_1 C_1 L_2} + \frac{R(1-D)^4}{L_2 C_2 L_1} + \frac{1}{L_1 C_1 C_2 R} - \frac{1}{L_2 C_1 C_2 R (1-D)}, & a_0 &= \frac{4(1-D)^2 + 3(1-D)^3}{L_2 L_1 C_2 C_1}, \\ b_3 &= \frac{1}{RC_2}, & b_2 &= \frac{1}{L_2 C_1} + \frac{(1-D)^2}{L_2 C_2} + \frac{(1-D)^2}{L_1 C_1}, \\ b_1 &= \frac{1}{L_2 C_2 C_1 R} + \frac{(1-D)^2}{L_1 C_2 C_1 R}, & b_0 &= \frac{(1-D)^4}{L_2 C_2 C_1 L_1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

El bloque  $FT_2$  representa la función de transferencia del voltaje de salida contra la corriente del interruptor y está dada por

$$FT_2 = \frac{\tilde{v}_0(s)}{\tilde{i}_s(s)} = \frac{m_3 s^3 + m_2 s^2 + m_1 s + m_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (4.29)$$

donde  $\tilde{v}_0(s)$  representa la transformada de Laplace del voltaje de salida y los coeficientes  $m_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , son

$$\begin{aligned} m_3 &= -\frac{E}{RC_2(1-D)^3}, & m_2 &= \frac{E}{L_2 C_2 (1-D)} \\ m_1 &= -\frac{E(2L_1 + L_2(1-D)^2)}{RL_2 C_2 L_1 C_1 (1-D)^3}, & m_0 &= \frac{2E(1-D)}{L_2 C_2 L_1 C_1}. \end{aligned}$$

Entonces el polinomio característico en lazo abierto es

$$P(s) = s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0. \quad (4.30)$$

Por ser este un polinomio mónico de cuarto orden, aplicaremos la Proposición 5. Para asegurar que una familia de polinomios sea estable, de acuerdo a la Proposición 5, se debe partir de un polinomio nominal estable. Los valores explícitos de los componentes reportados en [15], se seleccionaron de tal modo que  $FT_1$  sea de fase mínima y están dados por

$$\begin{aligned} C_1 = 22\mu\text{F}, \quad C_2 = 100\mu\text{F}, \quad L_1 = 90\mu\text{H}, \\ L_2 = 382\mu\text{H}, \quad R = 100\Omega, \quad D = 0.5, \end{aligned}$$

donde recordemos que  $C_1$  y  $C_2$  son capacitores,  $L_1$  y  $L_2$  son bobinas y  $R$  corresponde a la resistencia de carga.

Para estos valores se obtiene

$$b_3 = 100, \quad b_2 = 2.518 \times 10^8, \quad b_1 = 2.4525 \times 10^{10}, \quad b_0 = 8.2633 \times 10^{14}. \quad (4.31)$$

De acuerdo al Corolario 3 el polinomio  $P(s)$  será Hurwitz si, y sólo si,  $b_1b_2b_3 > b_1^2 + b_0b_3^2$ . Sustituyendo los valores de cada coeficiente  $b_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , se obtiene

$$2.5755 \times 10^{21} > 2.4861 \times 10^{21},$$

por lo que el polinomio (4.30) es Hurwitz. Obtengamos ahora el  $\bar{\epsilon}$  mencionado en la Proposición 5, suponiendo  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Entonces los coeficientes (4.20)-(4.24) toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} A = -8.26301800 \times 10^{14}, \quad B = -6.01017552 \times 10^{18}, \quad C = 7.78736620 \times 10^{18}, \\ D = -8.26350800 \times 10^{14}, \quad E = 6.01017062 \times 10^{18}. \end{aligned}$$

Con los valores anteriores se obtiene que  $\bar{\epsilon} \approx 1.295466249817$ , de esta manera la familia de polinomios

$$Q(s) = q_0 + q_1s + q_2s^2 + q_3s^3 + s^4,$$

con

$$q_i \in (b_i - \bar{\epsilon}, b_i + \bar{\epsilon}), \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (4.32)$$

es Hurwitz. Observemos que en este resultado los parámetros tales como los capacitores  $C$ , las bobinas  $L$ , el ciclo de trabajo  $D$  o la resistencia de carga  $R$  pueden variar, algunos o todos, siempre y cuando la variación total no provoque que los coeficientes salgan de los intervalos (4.32).

En la aplicación de convertidores resulta interesante considerar los valores de capacitores, bobinas y ciclo de trabajo como constantes y estudiar el comportamiento ante variaciones de carga. De la estructura de los coeficientes (4.28) se observa que, ante variaciones en la resistencia de carga  $R$ , los coeficientes  $q_0$  y  $q_2$  permanecen constantes mientras que  $q_1$  y  $q_3$  se ven afectados. La observación anterior motiva considerar  $\lambda_0 = \lambda_2$  iguales a cero. Debido a que en los resultados se pide  $\lambda_i > 0$ , tomamos  $\lambda_0 = \lambda_2 = \delta = 1 \times 10^{-50}$ , y  $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$  para

analizar la estabilidad del polinomio ante variaciones de carga. Realizando estos cambios, los coeficientes (4.20)-(4.24) quedan como

$$\begin{aligned} A &= -8.26326300 \times 10^{14}, & B &= -6.01017307 \times 10^{18}, & C &= 7.78736620 \times 10^{18}, \\ D &= -8.26326339 \times 10^{14}, & E &= 6.01017307 \times 10^{18}, \end{aligned}$$

y se obtiene  $\varepsilon < 1.295466771416$ . El  $\bar{\varepsilon}$  obtenido en este caso no varía mucho del obtenido en el caso en que  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Obtengamos el intervalo dentro del cual varía  $R$ . Los intervalos de variación para los coeficientes  $q_1$  y  $q_3$  son, respectivamente,

$$\begin{aligned} q_1 &\in (24525358293.69634, 24525358296.28727), \\ q_3 &\in (98.704533744743017, 101.2954662552570). \end{aligned}$$

De las expresiones (4.28) y las cotas de los intervalos para  $q_1$  y  $q_3$ , se obtienen los intervalos de variación para  $R$

$$\begin{aligned} R(q_1) &\in (99.999999994717868, 100.0000000052822), \\ R(q_3) &\in (98.721101443975286, 101.3124688462712), \end{aligned}$$

donde  $R(q_i)$ ,  $i = 1, 3$ , denota la variación de  $R$  asociada al coeficiente  $q_i$ . El intervalo de variación de  $R$  buscado es

$$R \in (99.999999994717868, 100.0000000052822).$$

Note que hemos aproximado a 16 decimales para evidenciar la diferencia entre las cotas de los intervalos debido a que su distancia es casi cero. El intervalo obtenido anteriormente permite variaciones de  $R$  muy limitadas. Esto se explica por que los intervalos obtenidos para la variación de los coeficientes contienen puntos tanto asociados como no asociados a los cambios de  $R$ . Esto nos motiva a estudiar el problema desde otra óptica.

Con el fin estudiar la estabilidad del polinomio (4.30) ante cambios en sus parámetros utilizaremos el Corolario 3 que proporciona condiciones de estabilidad para un sólo polinomio. Definamos las siguientes expresiones:

$$a = \frac{1}{C_2}, \quad c = \left[ \frac{1}{L_2 C_2 C_1} + \frac{(1-D)^2}{L_1 C_2 C_1} \right], \quad (4.33)$$

por lo que los coeficientes  $b_1$  y  $b_3$  quedan de la forma

$$b_1 = \frac{c}{R}, \quad b_3 = \frac{a}{R}. \quad (4.34)$$

Del Corolario 3 se tiene que (4.30) es Hurwitz si, y sólo si,

$$b_1 b_2 b_3 > b_1^2 + b_0 b_3^2.$$

Sustituyendo (4.34) se obtiene

$$\frac{1}{R^2} (acb_2 - c^2 - b_0 a^2) > 0.$$

Debido a que  $\frac{1}{R^2} > 0$ , de la desigualdad anterior se sigue que (4.30) es Hurwitz si, y sólo si

$$m > 0,$$

donde  $m = acb_2 - c^2 - b_0a^2$ .

Sustituyendo las expresiones para  $a$ ,  $c$ ,  $b_2$  y  $b_0$  en  $m$  tenemos que

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{C_2} \left[ \frac{1}{L_2C_2C_1} + \frac{(1-D)^2}{L_1C_2C_1} \right] \left[ \frac{1}{L_2C_1} + \frac{(1-D)^2}{L_2C_2} + \frac{(1-D)^2}{L_1C_1} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{1}{L_2C_2C_1} + \frac{(1-D)^2}{L_1C_2C_1} \right]^2 - \frac{(1-D)^4}{L_1C_1L_2C_2} \frac{1}{C_2^2}. \\ &= \left[ \frac{1}{L_2C_2C_1} + \frac{(1-D)^2}{L_1C_2C_1} \right] \left[ \frac{1}{L_2C_1C_2} + \frac{(1-D)^2}{L_2C_2^2} + \frac{(1-D)^2}{L_1C_1C_2} - \frac{1}{L_2C_2C_1} - \frac{(1-D)^2}{L_1C_2C_1} \right] \\ &\quad - \frac{(1-D)^4}{L_1C_1L_2C_2^3}. \end{aligned}$$

Eliminando términos iguales se obtiene

$$\begin{aligned} m &= \left[ \frac{1}{L_2C_2C_1} + \frac{(1-D)^2}{L_1C_2C_1} \right] \left[ \frac{(1-D)^2}{L_2C_2^2} \right] - \frac{(1-D)^4}{L_1C_1L_2C_2^3}, \\ &= \frac{(1-D)^2}{L_2^2C_2^3C_1} + \frac{(1-D)^4}{L_1C_1L_2C_2^3} - \frac{(1-D)^4}{L_1C_1L_2C_2^3}. \end{aligned}$$

Con lo que finalmente llegamos a

$$m = \frac{(1-D)^2}{L_2^2C_2^3C_1}.$$

Dado que  $D \in (0, 1)$ ,  $m > 0$  para cualquier conjunto de parámetros, con cual llegamos al siguiente resultado

**Proposición 6** *El polinomio (4.30) es Hurwitz para cualquier selección de parámetros  $R$ ,  $L_i$ ,  $C_i$ , donde  $i = 1, 2$ .*

La Proposición 6 es una demostración de que el convertidor elevador CD-CD es estable en lazo abierto para cualesquiera valores de los parámetros, lo cual es un resultado esperado en la línea de investigación de electrónica de potencia, y hasta donde se conoce, no se tenía una demostración al respecto.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajo a Futuro

### 5.1. Conclusiones

Dada la familia de polinomios

$$Q(s) = q_0 + q_1s + \dots + q_ns^n,$$

donde

$$q_i \in [p_i - \lambda_i\varepsilon, p_i + \lambda_i\varepsilon], \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

con  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  conocidas

- Se obtuvieron fórmulas explícitas en el caso cuando  $n = 3$  para encontrar el máximo  $\varepsilon$  tal que la familia resultante es estable en el caso general.
- Se proporcionaron fórmulas explícitas en el caso cuando  $n = 3$  para encontrar el máximo  $\varepsilon$  tal que la familia resultante es estable en el caso mónico.
- Se proporciona un método para calcular el máximo  $\varepsilon$  que mantiene la estabilidad de la familia para el caso general de familias de cuarto grado.
- Se obtienen fórmulas explícitas para obtener el máximo  $\varepsilon$  en el caso mónico de cuarto grado cuando  $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0\lambda_3$  tal que la familia es estable.
- Se estudió la estabilidad robusta del polinomio asociado al convertidor elevador de CD-CD reportado en [15] mediante el resultado obtenido para polinomios mónicos de cuarto grado, con el que se obtuvieron cotas restringidas ya que este resultado implica un sobredimensionamiento en la variación permitida sobre la dirección de cada uno de los coeficientes.
- Las cotas restringidas obtenidas mediante la aplicación del resultado para polinomios mónicos de cuarto grado nos motivaron a realizar un análisis mediante un enfoque dentro del cual se contemple la estructura de los coeficientes del polinomio. Por medio de este nuevo enfoque se concluye la estabilidad del convertidor elevador CD-CD reportado en [15] para cualquier selección de parámetros  $L_i$ ,  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $R$  y  $D \in (0, 1)$ , un resultado esperado en la línea de investigación de la electrónica de potencia.



## 5.2. Trabajo a Futuro

- Estudiar del caso mónico de cuarto grado cuando la condición  $\lambda_0\lambda_1 \neq \lambda_2\lambda_3$  no se satisface.
- Extender los resultados para la familia

$$Q(s) = q_0 + q_1s + \dots + q_5s^5,$$

donde

$$q_i \in [p_i - \lambda_i\varepsilon, p_i + \lambda_i\varepsilon], \quad i = 0, 1, \dots, 5,$$

con  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$  conocidas y  $\varepsilon > 0$ .

- Extender el análisis del convertidor CD-CD estudiado en [15] en lazo cerrado, representada por la parte no resaltada de la Figura 4.6. Para esto se iniciará con el análisis cuando existe el lazo de corriente, y posteriormente realizar el análisis cuando se agrega un controlador PI.

# Bibliografía

- [1] Ackerman, J.E., Parameter Space Design of Robust Control Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, pp. 1058-1072, 1980.
- [2] Argound, Mohammad B. Frequency Domain Conditions for the Stability of Perturbed Polynomials, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, pp. 913-916, 1987.
- [3] Argoun, Mohammad B. On the Stability of Low-Order Perturbed Polynomials, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, pp.180-182, 1990.
- [4] Barmish B. Ross. New Tools for Robustness of Linear Systems, *Macmillian Publishing Company*, 1994.
- [5] Bhattacharyya, H. Chapellat y L.H. Keel Robust Control, The parametric Approach, *Prentice-Hall Information & System Science Series*, 1995.
- [6] Frazer, R.A. y W.J. Duncan, On the Criteria for the Stability of Small Motion, *Proceedings of the Royal Society*, vol. 124, pp. 642-654, 1929.
- [7] Gantmacher, F.R. The Theory of Matrices, vol. 1,2 *Chelsea, New York*, 1959.
- [8] Jack, Hale. Ordinary Differential Equations, 2nd. ed. *Krieger Pu. Co.*, 1980.
- [9] Horowitz, I.M., Synthesis of Feedback Systems, *Academic Press*, 1963.
- [10] Hote, Y., D.R. Choudhury y J.R.P Gupta, Robust Stability Analysis of the PWM Push-Pull DC-DC Converter, *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 24, pp.2353-2356, 2009.
- [11] J.F. Marsden, Elementary Classical Analysis, *W.H. Freeman Company*, 1974.
- [12] Kharitonov, V.L. Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations, *Differential Uravnen*, vol. 14, pp. 2086-2088. *Translations in Differential Equations*, pp. 1483-1485, 1979.
- [13] Lúo, F.L. y Ye,H., Advanced DC/DC Converters, *CRC Press*, 2004.
- [14] Marden, M. Geometry of Polynomials, *American Mathematical Society, Providence,R.I.*, 1966.

- [15] Morales Saldaña, J.A., R. Galarza, J. Leyva Ramos, E.E. Carbajal y M.G. Ortiz Lopez Multiloop Controller Design for Quadratic Boost Converter, *IET Electronic Power Applications*, vol.1, pp. 362-367, 2007.
- [16] Neimark, Y.I. On the Problem of the Distribution of the Roots of Polynomials *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 58, 1947.
- [17] Siljak, D.D., Non Linear Systems, *Wiley, New York*, 1969.
- [18] Soh, C.B., Berger, C. S., and Dabke, K. P. On the Stability Properties of Polynomials with Perturbed Coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, pp. 1033-1036, 1985.
- [19] Soh y Y.C., and Y.K. Foo, Generalized Edge Theorem, *Systems and Control Letters*, vol. 12, pp. 219-224, 1989.
- [20] Soh y Y.C., and Y.K. Foo, A Note on the Edge Theorem, *Systems and Control Letters*, vol. 15, pp. 41-43, 1990.
- [21] Tsytkin, T. Z. y Polyak, B. T. Frecuency Domain Criteria for  $\ell_p$ -Robust Stability of Continuous Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, pp. 1464-1469, 1991.
- [22] Yan Zhu, J., y Lehman, B. Control Loop Design for Two-Stage DC-DC Converters with Low Voltage/High Current Output, *IEEE Transctions on Power Electronics*, vol. 20, pp 44-45, 2005.
- [23] Zadeh, L. A. y C. A. Desoer Linear System Theory- A State Space Approach, *McGraw-Hill*, 1963.