

**IPICYT**

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**MODELADO Y ANÁLISIS  
DE SISTEMAS  
MECÁNICOS SUBACTUADOS**

Tesis que presenta

**César Ramírez Conejo**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias Aplicadas**

En la opción de

**Control y Sistemas Dinámicos**

**Director de la Tesis:**

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro

San Luis Potosí, S.L.P., Febrero de 2012



## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Modelado y Análisis de Sistemas Mecánicos Subactuados** presentada para obtener el Grado de de Maestro(a) en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **César Ramírez Conejo** y aprobada el 8 **de febrero de** 2012 por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

---

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro  
(Director de la tesis)

---

Dr. Arturo Zavala Río  
(Sinodal)

---

Dr. Hugo Cabrera Ibarra  
(Sinodal)

---

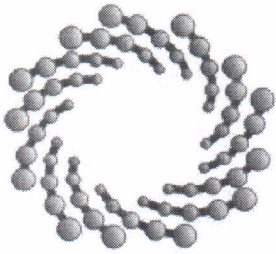
Dr. Mauro E. Maya Méndez  
(Sinodal)

# Resumen

En el área de control, los sistemas mecánicos subactuados y sujetos a restricciones no holonómicas conforman un tipo interesante de sistemas. Ejemplos que tipifican estos sistemas son el robot balanceador no holonómico y un engrane no holonómico, propuesto por Nakamura *et al.* en [16], para los cuales la solución de algunos problemas de control requiere considerable esfuerzo. Con el fin de obtener la solución de tales problemas resulta útil conocer las propiedades estructurales del sistema, y para ello, la geometría diferencial provee las herramientas que permiten el análisis de estas propiedades, como accesibilidad local y accesibilidad local en configuraciones, entre otras. Una característica que pueden presentar los sistemas mecánicos son las simetrías, esta propiedad es importante porque permite eliminar variables que no afectan la dinámica del sistema y entonces, obtener un modelo reducido.

En esta disertación se obtiene el modelo matemático para el robot balanceador no holonómico así como para un engrane no holonómico usado para la construcción de un manipulador no holonómico reportado en [16]. Estos modelos se derivan usando mecánica Lagrangiana. Existen modelos matemáticos para el primero reportados en [7], [9] y [18], estos modelos son comparados con el obtenido en este trabajo. Representaciones equivalentes del modelo matemático para el robot balanceador no holonómico son obtenidos usando retroalimentación de estados estática, representación de sistemas mecánicos como sistemas de segundo orden en la variedad de configuraciones en términos de una conexión afín y reducción por eliminación de simetrías. Algunas de las propiedades estructurales del robot balanceador no holonómico son estudiadas, entre las que se encuentran accesibilidad local, accesibilidad local fuerte, accesibilidad local en configuraciones, controlabilidad local en configuraciones en tiempo pequeño (*STLCC*) y para el modelo reducido se explora accesibilidad local. Se realiza el diseño de una ley de control para estabilizar asintóticamente una subvariedad del espacio de estados.

Palabras clave: Mecánica Lagrangiana, Modelado de sistemas mecánicos, Restricciones no Holonómicas, Sistemas mecánicos con simetrías.



**IPICYT**

# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 029 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 8 días del mes de febrero del año 2012, se reunió a las 18:30 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Arturo Zavala Ríos</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. David Antonio Lizárraga Navarro</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Hugo Cabrera Ibarra</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Mauro Eduardo Maya Méndez</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>UASLP</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS  
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**César Ramírez Conejo**

sobre la Tesis intitulada:

*Modelado y análisis de sistemas mecánicos subactuados*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. David Antonio Lizárraga Navarro**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 20:23 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 8 días del mes de febrero de 2012.

  
**Dr. Marcial Bonilla Marín**  
Secretario Académico

  
**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

# Abstract

Underactuated mechanical systems with nonholonomic constraints form an interesting class of systems from a control-theoretical point of view. Examples of these systems are the nonholonomic balancing robot and an nonholonomic gear proposed by Nakamura *et al.* in [16], for these kind of systems the solution of some control problems requires considerable effort. With the aim of solving such control problems, it is often useful to know the structural properties of the system. In order to analyze some of structural properties of mechanical systems, like local accessibility and local configuration accessibility, amongst others, differential geometry provides the required tools to perform the respective analysis.

Some mechanical systems exhibit symmetries, which allow the reduction of their dynamical models with the ensuing simplification of the corresponding analysis and control properties.

In this work is reported mathematical models for the nonholonomic balancing robot as well as a nonholonomic gear. The latter is used to construct a nonholonomic manipulator reported in [16]. These models are derived using the Lagrangian Mechanics framework. There exist other mathematical models reported in the literature like [7], [9] and [18]. Those models are compared with the model derived in this work. Alternative representations of the mathematical model of the nonholonomic balancing robot are derived using static state space feedback, representation of mechanical systems as systems of second order on the configuration manifold in term of the formalism provided by affine connections and reductions due to symmetries.

Some of the structural properties of the nonholonomic balancing robot are studied, like local accessibility, strong local accessibility, local configuration accessibility, small time local configuration controllability (*STLCC*) in the sense describe in [12] and for the reduced model local accessibility is evaluated. A control law is designed in order to stabilize asymptotically a subvariety of the state space

Key words: Lagrangian Mechanics, Mechanical Systems Models, Nonholonomic Constraints, Mechanical Systems with Symmetries.

# Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud al Dr. David Antonio Lizárraga Navarro por la invaluable enseñanza que me ha dejado durante el desarrollo de este trabajo y por el apoyo brindado para su realización.

Agradezco a cada uno de mis sinodales por los comentarios realizados para obtener un mejor resultado. A cada uno de los Doctores que me impartieron clases durante mi formación como maestro en ciencias aplicadas.

Agradezco a la División de Matemáticas Aplicadas (DMAp), al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICyT) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el espacio y apoyo económico brindado para que el presente trabajo fuera desarrollado.

Gracias a mi familia, que aun en la distancia, supieron apoyarme. Especial mención para Ana Paulina Castañeda Álvarez, gracias por tu comprensión y apoyo. A cada uno de mis amigos y compañeros de maestría agradezco su compañía y el que hayamos compartido momentos donde aprendíamos unos de otros.

3.1.2.	La Variedad de Configuraciones y las Coordenadas Generalizadas	39
3.1.3.	La Función Lagrangiana . . . . .	40
3.1.4.	Las Restricciones . . . . .	42
3.1.5.	Fuerzas Generalizadas Externas . . . . .	44
3.2.	El Modelo Matemático . . . . .	44
3.3.	El Modelo Transformado . . . . .	48
3.4.	Modelo con Conexión Afín . . . . .	51
3.5.	El Modelo Reducido . . . . .	53
3.6.	Modelos matemáticos en la literatura para el robot balanceador no holonómico . . . . .	58
<b>4.</b>	<b>Algunas Propiedades Estructurales del Robot Balanceador no Holonómico</b>	<b>63</b>
4.1.	Propiedades Estructurales de los Sistemas no Lineales . . . . .	63
4.2.	Algunas Propiedades Estructurales del Robot Balanceador no Holonómico	67
4.2.1.	Accesibilidad Local . . . . .	67
4.2.2.	Accesibilidad Local en Configuraciones . . . . .	69
4.2.3.	Controlabilidad Local en Configuraciones en Tiempo Pequeño (STLCC) . . . . .	70
4.2.4.	El Modelo Reducido . . . . .	70
4.3.	Ley de Control para el Robot Balanceador no Holonómico . . . . .	73
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>75</b>
5.1.	Trabajo Futuro . . . . .	76
<b>A.</b>	<b>Posición y Orientación de los Sistemas Mecánicos</b>	<b>77</b>
A.1.	Posición y Desplazamiento . . . . .	78
A.2.	Orientación y Rotación . . . . .	78
A.3.	Matrices Homogéneas de Transformación . . . . .	80
	<b>Bibliografía</b>	<b>82</b>

# Índice de figuras

1.1. Ejemplo de un robot balanceador no holonómico . . . . .	3
1.2. Ejemplo de un robot balanceador no holonómico . . . . .	5
2.1. El disco rodante vertical . . . . .	14
2.2. Parametrización de puntos en el disco en el marco $\Sigma_2$ . . . . .	16
2.3. Ángulo del punto de contacto entre el disco y el suelo . . . . .	17
2.4. Elemento diferencial de volumen . . . . .	18
2.5. Cuerpo Rígido Plano Forzado . . . . .	20
2.6. Engrane no Holonómico . . . . .	22
2.7. Engrane no Holonómico . . . . .	23
2.8. Cuerpo Rígido Plano Forzado . . . . .	23
2.9. Engrane no Holonómico . . . . .	24
2.10. Robot tipo unicycle . . . . .	28
2.11. Robot tipo unicycle con marcos coordenados . . . . .	28
2.12. Rueda $W_1$ (Cálculo de restricciones) . . . . .	29
3.1. El Robot Balanceador no Holonómico . . . . .	38
3.2. Posición y Orientación del Robot Balanceador no Holonómico . . . . .	39
3.3. Rueda $W_1$ (Cálculo de restricciones) . . . . .	42
3.4. Robot balanceador no holonómico . . . . .	59
3.5. Robot balanceador no holonómico . . . . .	59





# Capítulo 1

## Introducción

La Mecánica Analítica o Dinámica es un vasto campo que incluye el movimiento de los cuerpos rígidos. Un cuerpo rígido es una colección de partículas, y una partícula es un objeto idealizado cuya masa se concentra en un punto. La Dinámica se enfoca en predecir y explicar el movimiento de los cuerpos rígidos bajo la acción de fuerzas. La Mecánica Analítica está dividida en dos ramas: Cinemática y Cinética. La Cinemática estudia el movimiento de los cuerpos rígidos sin considerar las fuerzas que lo causan, mientras que el interés de la Cinética se centra en comprender la interacción entre las fuerzas y el movimiento.

A lo largo de los años, la Mecánica Analítica se ha desarrollado con al menos dos enfoques distintos, pero relacionados: el enfoque Lagrangiano basado en el principio variacional de mínima acción, y el enfoque Hamiltoniano basado en el concepto de energía. A pesar de que la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana no están basadas en el mismo concepto, en muchos casos son equivalentes, además de compartir el mismo propósito: generar modelos matemáticos que describan el movimiento de los cuerpos rígidos. Una colección de cuerpos rígidos interconectados se dicen conformar un sistema mecánico simple si la función llamada Lagrangiana para el sistema es igual a la diferencia entre la energía cinética y potencial.

Por otro lado, existe una teoría relacionada con la prescripción del movimiento de cuerpos rígidos en lugar de solo describir su comportamiento: Teoría de Control. De forma paralela a la dinámica y otros campos del conocimiento, la Teoría de Control ha evolucionado por sí misma desarrollando herramientas tanto para el análisis de sistemas dinámicos como para el diseño de leyes de control. En esencia, controlar un sistema dinámico significa modificar su comportamiento natural para lograr una meta deseada en términos de estabilidad, desempeño u otros criterios de interés.

La teoría de control estudia sistemas lineales y no lineales. Los sistemas lineales

satisfacen el principio de superposición y para las propiedades de controlabilidad y observabilidad se conocen condiciones necesarias y suficientes. Para los sistemas no lineales, la situación es distinta, el principio de superposición no es válido para estos sistemas, podrían presentar múltiples puntos de equilibrio y el análisis de sus propiedades estructurales requieren del uso de herramientas matemáticas sofisticadas, entre otras características.

Los sistemas subactuados son sistemas que tienen menor número de actuadores efectivos que grados de libertad. Un sistema mecánico de control subactuado con restricciones es una subclase de sistemas no lineales. Este tipo de sistemas son el tema de estudio del presente trabajo. Los problemas de control en aplicaciones de ingeniería como: robótica, biomecánica y movimiento bajo el agua, por citar algunos, requieren de un considerable esfuerzo para ser resueltos. Esos problemas involucran, por lo general, una colección de sistemas mecánicos interconectados sujetos a restricciones de distintos tipos. Las restricciones son condiciones que limitan la dinámica del sistema y usualmente son de dos tipos: *holonómicas* y *no holonómicas*. Las restricciones se expresan como funciones lineales con respecto a las velocidades del sistema, esto es

$$A(q)\dot{q} = 0. \tag{1.1}$$

Si la expresión (1.1) se puede expresar en términos de las configuraciones únicamente, y del tiempo posiblemente, de tal forma que su derivada con respecto al tiempo es igual a (1.1), entonces las restricciones se dicen ser holonómicas. Por el contrario, si no hay manera de expresar (1.1) en términos de las configuraciones únicamente, entonces las restricciones se dicen ser no holonómicas. Un ejemplo que ilustra las restricciones holonómicas es una partícula que se mueve en un órbita circular en el plano. Para el caso en donde el centro de la órbita es el origen y su radio es 1 las posiciones del sistema están dadas por

$$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\},$$

Entonces, de todos los posibles puntos  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  la posición de partícula está restringida a los puntos  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  que satisfacen la condición  $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ . Un ejemplo típico de un sistema mecánico sujeto a restricciones no holonómicas es el rodamiento de las ruedas de un automóvil. Otro ejemplo de un sistema no holonómico es una moneda que gira sobre su canto en un plano, asumiendo que idealmente se mantiene girando en forma vertical. Este sistema también es conocido como el disco que gira en forma vertical y es usado frecuentemente para ilustrar como se derivan los modelos matemáticos de este tipo de sistemas aplicando los conceptos de la Mecánica Analítica.

Bajo el enfoque Lagrangiano, para derivar el modelo matemático se hace uso de la función Lagrangiana la cual está definida como:  $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$ , donde  $K(q, \dot{q})$  es la energía cinética del sistema y  $V(q)$  es una función de energía potencial. Una vez calculada la función Lagrangiana, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange que describen la dinámica del sistema mecánico. Para sistemas mecánicos no holonómicos los efectos de las restricciones se deben agregar a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por otro lado, para el análisis de las propiedades estructurales de estos sistemas se requiere de un gran esfuerzo y la teoría de control provee algunas de las herramientas requeridas para su análisis. Algunas de las propiedades estructurales que podrían presentar los sistemas mecánicos son accesibilidad local, controlabilidad local en tiempo pequeño y accesibilidad local en configuraciones, entre otras.

Si bien, los sistemas mecánicos con restricciones son interesantes por sus aplicaciones, entender su naturaleza es un reto que los hace interesantes como tema de estudio independientemente de aplicaciones específicas. En la literatura se pueden encontrar un gran número de referencias con respecto a sistemas mecánicos sujetos a restricciones no holonómicas, entre las que se encuentran [2], [3], [4], [5], [12] y [14].

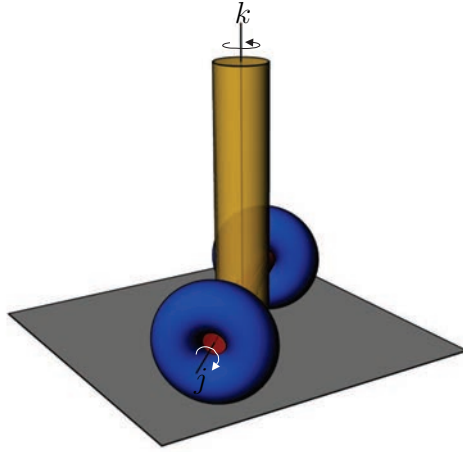


Figura 1.1: Ejemplo de un robot balanceador no holonómico

Una clase particular de sistemas no holonómicos es la de los robots “balanceadores” sobre ruedas, (Figura 1.1). Típicamente, un *robot balanceador no holonómico* está compuesto de dos partes principales: el cuerpo y el chasis. El chasis se compone de dos ruedas unidas por una varilla desde sus centros de masa. Algunos grupos de investigadores consideran a motores, sensores y actuadores que están montados sobre el chasis. El cuerpo está montado sobre el chasis y puede girar con respecto a la varilla o eje que une a las ruedas (eje denotado por  $j$  en la Figura 1.1), esta característica dota

al sistema de la habilidad de balancearse sobre sus dos ruedas. La forma geométrica del cuerpo puede ser variada, en el caso de la Figura 1.1 el cuerpo tiene la forma de una barra. Otra característica de este tipo de sistemas es que pueden girar con respecto a un eje vertical que pasa por el centro de masa del cuerpo, en la Figura 1.1 este eje se denota por  $k$ , lo cual les permite que el robot balanceador pueda moverse en distintas direcciones. Algunas de las aplicaciones en la industria y sociedad mencionadas por Kim et al. en [9] son: una silla motorizada capaz de dar al operador una mayor maniobrabilidad y acceder a lugares de difícil acceso; diseño de dispositivos móviles capaces de transportar personas en distancias cortas, en áreas pequeñas o en fábricas, etc.

El robot balanceador no holonómico puede ser dividido en dos subsistemas: un péndulo invertido y un sistema móvil. El movimiento del cuerpo es análogo a la dinámica del péndulo invertido mientras que la dinámica del chasis es análoga a la del móvil. Por separado, ambos sistemas han sido profusamente estudiados, pero se ha investigado menos sobre las propiedades estructurales del robot balanceador no holonómico completo. Por otro lado, en la literatura se cuneta con modelos ya sea simplificados (en el sentido de describir el funcionamiento con el menor número de variables de estado) o bien, linealizados al rededor de un punto de equilibrio (por ejemplo, uno con posición vertical para el cuerpo) o bien, parcialmente detallados (en cuanto a los parámetros o la forma en que se consideran las fuerzas externas).

Existen varios estudios relacionados con el robot balanceador no holonómico tales como F. Grasser *et al.* en [7], A Mazur y J. Kedzierski como capítulo en [18] y Y. Kim *et al.* en [9]. Aunque cada estudio se centra en su propia adaptación del sistema, éste se compone, en cada caso, de dos partes, el cuerpo y el chasis. F Grasser *et al.* y J. Kim *et al.* usan un enfoque Newtoniano y el método de Kane para derivar el modelo matemático respectivamente. A. Mazur and J. Kedzierski usa el enfoque Lagrangiano.

F. Grasser et al. and J. Kim et al. diseñan una ley de control lineal mientras que A. Mazur and J. Kedzierski utilizan una ley de control no lineal.

El presente trabajo se enfoca en derivar un modelo matemático detallado de un robot balanceador no holonómico (Figura 1.2), además de hacer un análisis de algunas de sus propiedades estructurales. En este trabajo se hace uso del enfoque Lagrangiano donde el modelo matemático es derivado a partir de la llamada función Lagrangiana que depende únicamente de variables con un significado físico. Por otro lado, bajo el esquema de la mecánica Newtoniana se tiene que las fuerzas del sistema se calculan de forma independiente para después sumarse en diagramas vectoriales de fuerzas.

El presente trabajo se organiza como sigue: el Capítulo 1 presenta una introducción al presente trabajo, mientras que el Capítulo 2 cubre los conceptos básicos de la metodo-

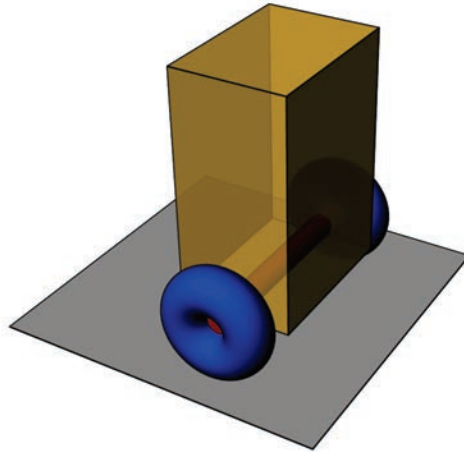


Figura 1.2: Ejemplo de un robot balanceador no holonómico

logía usada para derivar modelos matemáticos de sistemas mecánicos no holonómicos. El disco rodante vertical es estudiado para ilustrar el procedimiento así como un engrane no holonómico, un cuerpo rígido plano y un robot del tipo unicycle. Al final de este capítulo, conceptos básicos relacionados con las simetrías de sistemas mecánicos simples serán abordados. En el Capítulo 3 se dan los detalles de cómo se derivó el modelo matemático para el robot balanceador no holonómico, varias transformaciones del modelo se aplicarán para ser usadas en el Capítulo 4, donde algunas de las propiedades estructurales de este sistema serán evaluadas. Finalmente, el Capítulo 5 presenta las conclusiones alcanzadas en este trabajo además de establecer algunas de las posibles direcciones para este trabajo a futuro.

# Capítulo 2

## Sistemas Mecánicos

La Mecánica es una disciplina que incluye el estudio de la dinámica de partículas y cuerpos rígidos. El interés de este trabajo se centra en el movimiento de cuerpos rígidos interconectados, uno de los temas de estudio de la Mecánica Analítica. Existen varios procedimientos para derivar modelos matemáticos en Mecánica Analítica, uno de los cuales se basa en la Mecánica Lagrangiana y es el método que será usado en este trabajo.

Una colección de cuerpos rígidos interconectados se dicen conformar un sistema mecánico simple si la función llamada Lagrangiana para el sistema es igual a la diferencia entre la energía cinética y potencial. Cuando el sistema está sujeto a fuerzas que pueden variarse de forma externa, llamadas entradas, se dice entonces que es un sistema mecánico simple controlado. Por simplicidad, en adelante, para hacer referencia a *sistemas mecánicos simples controlados* se usará el término *sistemas mecánicos*.

Otra característica que podrían presentar los sistemas mecánicos son las simetrías. Las simetrías representan una parte esencial en la teoría de reducción de sistemas mecánicos. Uno de los objetivos de la teoría de reducciones es reducir la dimensión de la variedad de estados de los sistemas mecánicos aprovechando la propiedad de invariancia ligadas a las simetrías. De hecho, los sistemas reducidos son representaciones de sistemas cuyas simetrías han sido “eliminadas”. Una de las ventajas de trabajar con sistemas reducidos es que se suele simplificar el análisis de sus propiedades estructurales.

Este capítulo se divide en cuatro secciones. En la Sección 2.1 se describe uno de los métodos utilizados para derivar modelos matemáticos de sistemas mecánicos; este método, llamado de “Euler-Lagrange”, se basa en la mecánica Lagrangiana. En la Sección 2.2 se estudian los sistemas mecánicos sujetos a restricciones no holonómicas. La Sección 2.3 presenta cuatro ejemplos de sistemas mecánicos no holonómicos que ilustran los conceptos revisados en las secciones precedentes. Finalmente, en la Sección 2.4 se

describe parte de la teoría de sistemas mecánicos no holonómicos con simetrías.

## 2.1. Modelado de sistemas mecánicos

La meta de esta sección es recordar los pasos básicos para obtener modelos matemáticos de sistemas mecánicos.

### 2.1.1. Variedad de configuraciones y coordenadas generalizadas

Un sistema mecánico es un objeto físico y, por lo tanto, se requiere asociarlo con una colección de objetos matemáticos con el objetivo de obtener el modelo matemático que describe su dinámica. El primer paso es seleccionar una variedad diferenciable que represente al conjunto de posibles configuraciones, es decir, posiciones y orientaciones del sistema; esa variedad es conocida como *variedad de configuraciones* y usualmente se denota como  $Q$ . El término configuraciones se refiere al conjunto de posibles posiciones y orientaciones que el sistema puede tomar. Para describir la posición y orientación de un cuerpo rígido se hace uso de un marco coordenado ortonormal que no está sujeto a aceleraciones y que se toma como referencia para medir distancias y ángulos. Dado que este marco, el cual se denota  $\Sigma_0$ , no está acelerado, se le llama marco de referencia inercial. Con el objetivo de parametrizar los desplazamientos y rotaciones de los cuerpos rígidos con respecto a un marco inercial, a cada cuerpo se le asigna otro marco coordenado ortonormal y, de este modo, las mediciones de distancias y ángulos son realizadas entre los marcos coordenados. Estos marcos se denotan como  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ , donde el marco  $\Sigma_i$  está asignado al  $i$ -ésimo cuerpo y  $N$  es el número total de cuerpos rígidos que componen el sistema a modelar.

Una vez definida la variedad de configuraciones, el siguiente paso es la elección de “coordenadas generalizadas”, usualmente denotadas como  $q_1, \dots, q_n$ . Las coordenadas generalizadas parametrizan la posición y orientación de los sistemas mecánicos. Las coordenadas generalizadas  $(q_1, \dots, q_n)$ , o  $(q_i)$  por brevedad, que parametrizan localmente a la variedad  $Q$ , inducen las coordenadas  $(q_i, \dot{q}_i)$  sobre  $TQ$ , el haz tangente a  $Q$ , conocido en este caso como espacio de estados. Existe una relación entre las coordenadas expresadas en cada marco coordenado  $\Sigma_i$  y el marco inercial  $\Sigma_0$  que puede describirse mediante matrices homogéneas de transformación. El tema de matrices homogéneas de transformación es tratado en el Apéndice A con profundidad.

El número de componentes en un conjunto de coordenadas generalizadas para un



sistema mecánico, que coincide con la dimensión de la variedad de configuraciones  $Q$ , se conoce como el número de grados de libertad del sistema.

### 2.1.2. Principio de Hamilton

Sea  $Q$  una variedad de configuraciones de un sistema mecánico con coordenadas  $(q_i)$ ,  $(i = 1, \dots, n)$ , y  $TQ$  el espacio de estados con coordenadas  $(q_i, \dot{q}_i)$ . Una función Lagrangiana es definida como una función de clase  $C^2$  valuada en los reales  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ . Para un número considerable de sistemas mecánicos de interés,  $L$  suele definirse como  $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$ , donde  $K$  y  $V$  representan respectivamente las energías cinética y potencial del sistema. En este caso se habla de acuerdo a Lewis y Murray en [12], de un sistema mecánico simple.

Sea  $F$  una función de  $n$  variables, de acuerdo al cálculo de variaciones y siguiendo las reglas básicas del cálculo, la expresión

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial r_1} \delta r_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial r_n} \delta r_n,$$

es llamada la primera variación de  $F$ . En el cálculo de variaciones, dada una función  $y = f(x)$ , la variación  $\delta y$  se refiere a un cambio infinitesimal virtual de  $y$ , en el punto  $x$ . El término virtual se refiere a que el cambio se ha realizado en una forma arbitraria tal que se produce una nueva función  $y + \delta y$ .

Dado lo anterior, se tiene la siguiente definición:

**Definición 1.** *El principio de Hamilton establece que la dinámica de los sistemas mecánicos es tal que la primera variación de la integral de la función Lagrangiana con punto inicial  $a$  y punto final  $b$ , ambos fijos, es cero.*

$$\delta \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t)) dt = 0. \quad (2.1)$$

En otras palabras, como se establece en [2], el principio de Hamilton singulariza curvas particulares  $q(t)$  por la condición (2.1). Un resultado interesante es la Proposición 1 reportada en [2].

**Proposición 1. (Bloch [2]).** *El principio de Hamilton para una curva  $q(t)$  es equivalente a la condición de que  $q(t)$  satisfaga las ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange exhiben una importante característica, a saber, satisfacen el principio de invariancia, que significa que la forma de (2.2) no cambia independientemente de qué conjunto de coordenadas generalizadas se elija para representar a la función Lagrangiana  $L$ .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2) describen la dinámica de un sistema mecánico sin fuerzas externas. Cuando las fuerzas externas están presentes, las ecuaciones de Euler-Lagrange se convierten en

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

donde  $F_i$  representa la componente, “en la dirección de la coordenada  $q_i$ ”, de la fuerza resultante aplicada al sistema. Matemáticamente, las fuerzas se representan por 1-formas diferenciales; si  $F$  es la resultante de las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema, entonces  $F_i$  representa la  $i$ -ésima coordenada, es decir,  $F = \sum_{i=1}^n F_i dq_i$ .

## 2.2. Sistemas mecánicos con restricciones

### 2.2.1. Restricciones holonómicas y no holonómicas

El movimiento de los sistemas mecánicos usualmente está sujeto a restricciones. Dos clases de restricciones son las holonómicas y las no holonómicas. En particular, este tipo de restricciones suelen modelarse como funciones lineales con respecto a las velocidades del sistema, es decir, tienen la forma

$$\sum_{k=1}^n a_k^j(q_i) \dot{q}_k = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

En forma compacta, la expresión (2.4) se reescribe como

$$A(q)\dot{q} = 0,$$

donde

$$A(q) = \begin{bmatrix} a_1^1(q) & \dots & a_n^1(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m(q) & \dots & a_n^m(q) \end{bmatrix},$$

$q = (q_1, \dots, q_n)$  y  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ .

Ahora bien, si es posible encontrar expresiones para las restricciones que dependan

únicamente de las configuraciones, esto es, funciones

$$b^j(q_i) = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \quad (2.5)$$

de forma que sus derivadas con respecto al tiempo,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial b^j}{\partial q_i} \dot{q}_k = 0 \quad (2.6)$$

generan la misma distribución de restricciones (2.6), entonces las restricciones se dicen ser holonómicas. Por el contrario, si no hay manera de encontrar que las restricciones (2.4) se expresen como (2.5), entonces las restricciones se dicen ser no holonómicas. El tipo de restricciones que presentan los sistemas mecánicos estudiados en el presente trabajo, que tienen la forma 2.4, son no holonómicas.

De la geometría diferencial aplicada a sistemas mecánicos se sabe que las restricciones definen una codistribución de fuerzas, que en este caso, está representada por  $A(q)$ . De manera formal, los renglones de  $A(q)$  son covectores que están en el espacio cotangente a  $Q$  en un punto  $q$ , estos covectores engendran la codistribución de fuerzas de restricción. Además, por definición, el kernel de la codistribución de fuerzas de restricción representa el conjunto de velocidades permitidas para el sistema en cuestión, esto es

$$D(q) \triangleq \ker(A(q)).$$

Uno de los ejemplos más simples de restricciones holonómicas son las presentes en un cuerpo rígido, donde la distancia entre cada par de puntos en el cuerpo es constante. En este caso, las restricciones se pueden representar como un caso particular de (2.5), a saber, son expresadas por

$$(r_i - r_j)^2 = c_{ij}^2 \quad (2.7)$$

donde  $r_i, r_j$  denotan las posiciones de las partículas  $P_i$  y  $P_j$  con respecto a un marco de referencia común.

El péndulo restringido por la distancia de su varilla y las esferas de un ábaco restringidas por los alambres que las soportan son otros ejemplos de sistemas holonómicos. Existe una gran variedad de sistemas mecánicos sujetos a restricciones no holonómicas, entre los que se encuentran, el disco rodante vertical, el gas en un contenedor, el robot

tipo uniciclo, engranes no holonómicos utilizados en el diseño de manipuladores [16], y el movimiento de cuerpos rígidos bajo el agua, entre otros. Algunos de ellos serán estudiados en la Sección 2.3.

### 2.2.2. Principio de Lagrange-d'Alembert

Sea  $Q$  una variedad de configuraciones  $n$ -dimensional parametrizada por coordenadas generalizadas  $q = (q_1, \dots, q_n)$  que inducen coordenadas  $(q, \dot{q})$  en el espacio de estados  $TQ$ ,  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ . Una distribución  $\mathcal{D}$  es una colección de subespacios lineales denotada por  $\mathcal{D}_q \subset T_qQ$ , uno para cada  $q \in Q$ , que describe las velocidades permitidas por las restricciones. Una curva  $q(t) \in Q$  se dice satisfacer las restricciones (2.4) si  $\dot{q}(t) \in \mathcal{D}_{q(t)}$  para todo tiempo  $t$ . Dada una función Lagrangiana  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , el principio de Lagrange-d'Alembert establece:

**Definición 2. (Principio de Lagrange-d'Alembert)** *La dinámica de los sistemas mecánicos sujetos a restricciones está determinada por la condición*

$$\delta \int_a^b L(q, \dot{q}) dt = 0$$

donde las variaciones  $\delta q(t)$  de la curva  $q(t)$  satisfacen  $\delta q(t) \in \mathcal{D}_{q(t)}$  para todo tiempo  $t$ ,  $a \leq t \leq b$ , y  $\delta q(a) = \delta q(b) = 0$ .

En términos simples, el principio de Lagrange-d'Alembert establece que el trabajo realizado por las fuerzas de restricción es cero.

### 2.2.3. Ecuaciones del Movimiento para Sistemas Mecánicos con restricciones y bajo la acción de fuerzas externas

En esta sección se describe cómo incorporar los efectos de las fuerzas de restricción a las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2). El punto de partida es considerar un sistema sin restricciones y establecer las fuerzas externas en cero. Existen fuerzas  $F_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) derivadas de las restricciones que satisfacen (2.4). Bajo la acción de estas fuerzas, el sistema realiza un desplazamiento virtual denotado como  $(\delta q_1, \dots, \delta q_n)$  y, por lo tanto, el trabajo hecho por el sistema es  $F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + \dots + F_n \delta q_n$ .

Considerando el principio de Lagrange-d'Alembert se tiene que el trabajo realizado por el desplazamiento virtual causado por las fuerzas de restricción  $F_i$  es cero, esto es, la ecuación

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta q_i = 0 \quad (2.8)$$

es válida para todo desplazamiento virtual  $\delta q_i$  que satisfaga las restricciones (2.4). Entonces, la variación o desplazamiento virtual  $\delta q_i \in \mathcal{D}_q$ , es decir,

$$\mathcal{D}_q = \{\delta q \in T_q Q : \omega_k(q) \delta q_k = A(q) \delta q = 0\}.$$

donde  $A(q) = \text{span}\{\omega_1(q), \dots, \omega_k(q)\}$ . Por lo tanto, las fuerzas de restricción, que son vectores cotangentes al punto  $q \in Q$ , deben pertenecer al anulador del conjunto de velocidades permitidas por las restricciones, es decir

$$A(q) = \text{Ann}(\mathcal{D}_q) = \text{Ann}(\ker(A(q))) = A(q).$$

Se sigue que las fuerzas de restricción son una combinación lineal de  $\omega_1(q), \dots, \omega_k(q)$  y son de la forma

$$F_i = \sum_j^m \lambda_j \omega_j(q) \quad (2.9)$$

donde  $\lambda$  es un vector “renglón” cuyas componentes son llamadas “multiplicadores” de Lagrange. Entonces, la dinámica de sistemas mecánicos sujetos a restricciones obedece al modelo matemático determinado por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \omega_j(q), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Las ecuaciones (2.10) también son conocidas como las ecuaciones de Lagrange-d’Alembert.

Cuando un sistemas está sujeto a restricciones y se encuentra bajo la acción de fuerzas externas cuya resultante es  $F_e$ , ésta última se suma en lado derecho de las ecuaciones (2.10). Por lo tanto, la dinámica del sistema esta descrita por el modelo matemático determinado por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \omega_j(q) + F_i^e, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

#### 2.2.4. Representación de sistemas mecánicos

Las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.11) describen la dinámica de sistemas mecánicos libres, forzados y forzados sujetos a restricciones no holonómicas respectivamente, sin

embargo, no es la única forma de representarlos. Existe varias maneras de representar sistemas mecánicos, en esta sección se presentan aquellas que son usadas en este trabajo, para mayor detalle, consultar [3].

### Sistemas mecánicos afines en el control

Cada una de las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.11) se pueden expresar en forma equivalente como un sistema afín en el control de la forma

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u^i f_i(x), \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \quad (2.12)$$

donde  $x_1, \dots, x_n$  son coordenadas locales para la variedad de estados  $TQ$ ,  $f_0(x)$ ,  $f_i(x)$  son campos vectoriales en  $TQ$ ,  $f_0(x)$  es llamado campo de deriva y los campos  $f_i(x)$  campos de control.

### Sistemas mecánicos en geometría diferencial

Otra alternativa para representar sistemas mecánicos es usando geometría diferencial, donde el sistema mecánico es representado por objetos geométricos. Cada objeto que lo compone se describe a continuación. El primer componente es la variedad de configuraciones  $Q$  descrita en la Sección 2.1.1. Las velocidades del sistema mecánico se representan por vectores tangentes contenidos en el espacio tangente a  $Q$  en el punto  $q$ . Las fuerzas externas, así como las fuerzas de restricción son representadas por 1-formas que evaluadas en un punto particular definen vectores cotangentes o covectores que están contenidos en el espacio cotangente a  $Q$  en el punto  $q$ . Para la mayoría de los sistemas mecánicos se tiene que la variedad de configuraciones satisface ser una variedad Riemanniana, esto quiere decir, que la variedad de configuraciones tiene asociada una métrica Riemanniana que define un producto interno en el espacio tangente a  $Q$  en un punto  $q$ . Para los sistemas mecánicos la métrica Riemanniana está determinada por la energía cinética del sistema, de donde se deriva, que la matriz de inercia representa la métrica Riemanniana.

El párrafo anterior motiva la siguiente definición

**Definición 3.** *Un sistema mecánico con restricciones es una 5-tupla  $(Q, \mathcal{G}, V, \Omega, \mathcal{D})$  donde  $Q$  es la variedad de configuraciones,  $\mathcal{G}$  es una métrica Riemanniana sobre  $Q$ ,  $V \in C^\infty(Q)$  es una función de energía potencial,  $\Omega = \{F^1, \dots, F^m\}$  es una codistribución que físicamente corresponde a las fuerzas y pares aplicados, y  $\mathcal{D}$  es la distribución de velocidades permitidas por las restricciones.*

## Sistemas mecánicos con conexión afín

En Geometría diferencial, los sistemas mecánicos también se pueden modelar usando una conexión afín definida en  $Q$ . Una conexión afín es un campo vectorial denotado  $\nabla_X Y$ , que representa la derivada covariante de  $Y$  respecto a  $X$ , calculado a partir de dos campos vectoriales  $X$  y  $Y$  en  $Q$  y que satisface las siguientes propiedades

- i)  $\nabla$  es bilineal con respecto a  $\mathbb{R}$
- ii)  $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$  para todos  $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$  y  $f \in C^\infty(Q)$
- iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (\mathcal{L}_X f)Y$  para todos  $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$  y  $f \in C^\infty(Q)$ .

Considerando lo anterior se tiene la siguiente definición

**Definición 4.** *Un sistema mecánico con conexión afín es una 4-tupla  $(Q, \nabla, \mathcal{D}, \mathcal{Y})$  donde  $Q$  es la variedad de configuraciones,  $\nabla$  es una conexión afín en  $Q$ ,  $\mathcal{D}$  es una distribución de velocidades permitidas al sistema que tiene la propiedad de que  $\nabla$  está restringida a  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{Y}$  es una colección de campos vectoriales sobre  $Q$  que toman valores en  $\mathcal{D}$ .*

## 2.3. Ejemplos

### 2.3.1. El disco que rueda en posición vertical

El primer sistema con restricciones no holonómicas que será estudiado es el “disco rodante vertical” (Figura 2.1). Este sistema es uno de los ejemplos usados frecuentemente para ilustrar la clase de sistemas que interesan al presente estudio.

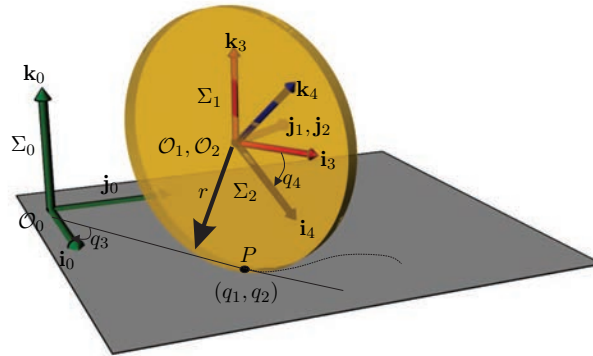


Figura 2.1: El disco rodante vertical

Dos consideraciones importantes para este sistema son que su masa está uniformemente distribuida y que el disco rueda sin deslizarse sobre el plano horizontal. Esta última consideración es fundamental para el modelado de las restricciones. La variedad de configuraciones para el disco rodante vertical es  $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$  y está parametrizada por coordenadas  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$  como se describe a continuación. Las coordenadas  $(q_1, q_2)$  denotan la posición del punto de contacto en el plano, mientras que la coordenada  $q_3$  describe la orientación del disco con respecto al eje vertical, y  $q_4$  el ángulo de rotación del disco alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa a través del centro del disco.

Se observa que las coordenadas  $(q_1, q_2, q_3)$  son coordenadas en el grupo especial euclidiano  $SE(2)$ , de este modo la variedad de configuraciones se puede redefinir como  $Q = SE(2) \times S^1$ . El grupo  $SE(2)$  es el grupo de las traslaciones y rotaciones en el plano, es decir, el grupo de los movimientos rígidos de objetos en el plano.

Para modelar las restricciones y obtener la función Lagrangiana del sistema se requiere determinar las relaciones entre el marco inercial y los marcos asignados al disco. El marco inercial se denota como  $\Sigma_0$  y consiste de la terna  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  cuyo origen se denota como  $\mathcal{O}_0$  (Figura 2.1). En este caso se asignan dos marcos coordenados en el disco, denotados  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . El marco  $\Sigma_1$  esta conformado por la terna  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  y el marco  $\Sigma_2$  por la terna  $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$ . Tanto el origen  $\mathcal{O}_1$  de  $\Sigma_1$  como el origen  $\mathcal{O}_2$  de  $\Sigma_2$  coinciden con el centro geométrico del disco. Para  $\Sigma_1$ , el eje perpendicular al plano del disco es  $\mathbf{i}_1$  mientras que para  $\Sigma_2$  es  $\mathbf{j}_2$ . El marco  $\Sigma_1$  define la traslación y rotación del disco en el plano mientras que el marco  $\Sigma_2$  da la rotación del disco respecto a  $j_2$ . Se hace uso de matrices homogéneas de transformación para describir la relación entre los marcos coordenados. Las siguientes dos matrices homogéneas de transformación son utilizadas para transformar coordenadas de  $\Sigma_1$  a  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_2$  a  $\Sigma_1$ .

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} R(q_3, k_0) & \mathbf{i}^T \mathcal{O}_1 \\ 0 & \mathbf{i}^T \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} R(q_4, j_1) & \mathbf{i}^T \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{i}^T \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

donde  ${}^0\mathcal{O}_1 = [q_1 \ q_2 \ r]^T$ ,  $r$  denota el radio del disco.

Todas las coordenadas deben ser expresadas en el mismo marco coordenado, que en este caso será  $\Sigma_0$ , para realizar los cálculos consistentemente.

Para calcular las restricciones se realizan los siguientes pasos: se inicia identificando cómo se parametrizan los puntos en la circunferencia del disco en el marco coordenado  $\Sigma_2$ . Se denota como  ${}^2\tilde{P}$  la orientación de un punto arbitrario  $\tilde{P}$  en la circunferencia del disco expresada en el marco coordenado  $\Sigma_2$ . Con esta notación y considerando que  $r$  denota el radio del disco, se tiene que la orientación de un punto  ${}^2\tilde{P}$ , como el que se



muestra la Figura 2.2, está dada por

$${}^2\tilde{P} = r \cos \tilde{\theta} \mathbf{i}_2 - r \sin \tilde{\theta} \mathbf{k}_2.$$

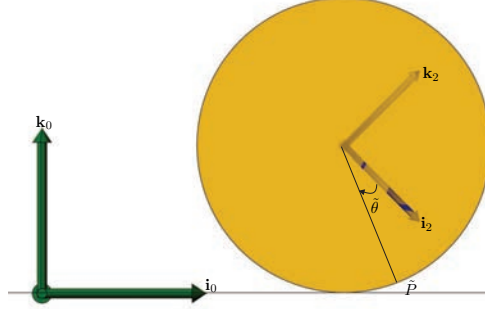


Figura 2.2: Parametrización de puntos en el disco en el marco  $\Sigma_2$

El punto de interés para el modelado de la restricciones es el punto de contacto  $P$  entre el disco y el plano (Figura 2.3). En particular, este punto está localizado en un ángulo  $\theta = \frac{\pi}{2} - q_4$ . La localización de este punto, expresado en el marco  $\Sigma_0$ , es

$${}^0P = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2P,$$

y su derivada con respecto al tiempo es

$${}^0\dot{P} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial {}^0T_2}{\partial q_i}(q) \dot{q}_i {}^2P,$$

por lo tanto

$${}^0\dot{P} = \begin{bmatrix} -s q_3 c q_4 \dot{q}_3 - c q_3 s q_4 \dot{q}_4 & -c q_3 \dot{q}_3 & c q_3 c q_4 \dot{q}_4 - s q_3 s q_4 \dot{q}_3 & \dot{q}_1 \\ c q_3 c q_4 \dot{q}_3 - s q_3 s q_4 \dot{q}_4 & -s q_3 \dot{q}_3 & c q_3 s q_4 \dot{q}_3 + s q_3 c q_4 \dot{q}_4 & \dot{q}_2 \\ -c q_4 \dot{q}_4 & 0 & s q_4 \dot{q}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r c \theta \\ 0 \\ -r s \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

al realizar el producto anterior se obtiene

$${}^0\dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - r c \theta (s q_3 c q_4 \dot{q}_3 + c q_3 s q_4 \dot{q}_4) - r s \theta (c q_3 c q_4 \dot{q}_4 - s q_3 s q_4 \dot{q}_3) \\ \dot{q}_2 + r c \theta (c q_3 c q_4 \dot{q}_3 - s q_3 s q_4 \dot{q}_4) - r s \theta (c q_3 s q_4 \dot{q}_3 + s q_3 c q_4 \dot{q}_4) \\ -r c \theta c q_4 \dot{q}_4 - r s \theta s q_4 \dot{q}_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

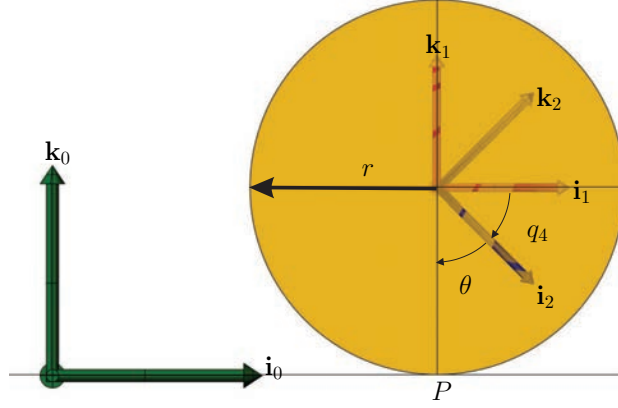


Figura 2.3: Ángulo del punto de contacto entre el disco y el suelo

al sustituir  $\theta = \frac{\pi}{2} - q_4$  y reducir se obtiene

$${}^0\dot{P} = (\dot{q}_1 - r \cos q_3 \dot{q}_4) \mathbf{i}_0 + (\dot{q}_2 + r \sin q_3 \dot{q}_4) \mathbf{j}_0,$$

bajo la suposición de que la velocidad en el punto de contacto es cero, la codistribución de fuerzas de restricción, denotada por  $A_q$ , es

$$A_q = \text{span}\{\omega_1(q), \omega_2(q)\} \quad (2.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_1(q) &= dq_1|_q - r \cos q_3 dq_4|_q \\ \omega_2(q) &= dq_2|_q - r \sin q_3 dq_4|_q. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La distribución  $\mathcal{D}_q$  es igual a  $\ker(A_q)$ , entonces

$$\mathcal{D}_q = \text{span}\{v_1(q), v_2(q)\} \quad (2.17)$$

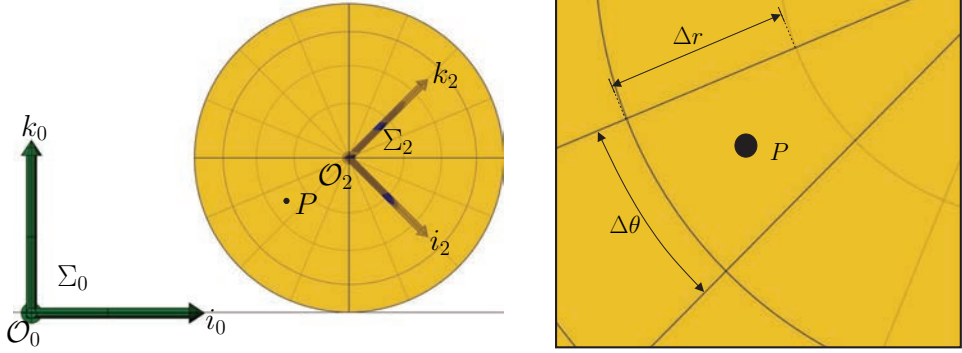
donde

$$\begin{aligned} v_1(q) &= \left. \frac{\partial}{\partial q^3} \right|_q \\ v_2(q) &= r \cos q_3 \left. \frac{\partial}{\partial q^1} \right|_q + r \sin q_3 \left. \frac{\partial}{\partial q^2} \right|_q + \left. \frac{\partial}{\partial q^4} \right|_q. \end{aligned} \quad (2.18)$$

La función Lagrangiana para este sistema es definida como  $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$ , donde  $K(q, \dot{q})$  es la energía cinética del sistema y  $V(q)$  es una función de energía potencial. En este caso se asume que el disco se mantiene en forma vertical y, por lo tanto, se tiene que  $V(q) = 0$ . Para obtener la función Lagrangiana se calcula la energía cinética del sistema. Considerando un elemento diferencial de masa  $\Delta m$  se

puede calcular su energía cinética como

$$\Delta k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \Delta m |{}^0\dot{P}(q)|^2.$$



(a) Elemento diferencial de volumen.

(b) Acercamiento del elemento diferencial de volumen.

Figura 2.4: Elemento diferencial de volumen

La energía cinética de todo el sistema está dada por la suma de la energía cinética de cada uno de los elementos diferenciales  $\Delta m$ , por lo tanto

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \int |{}^0\dot{P}(q)|^2 dm,$$

pero  $dm = \rho(q)dA$  y  $dA = r dr d\theta$ , entonces la energía cinética del sistema es

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho(q) |{}^0\dot{P}(q)|^2 r dr d\theta. \quad (2.19)$$

${}^0\dot{P}$  está dado por (2.14), se sigue que

$$\begin{aligned} |{}^0\dot{P}(q)|^2 &= \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{q}_3^2 + r^2\dot{q}_4^2 + \frac{1}{2}r^2 \cos(2q_4 - 2\theta) \\ &\quad + r \cos(q_3 - q_4 - \theta)\dot{q}_2\dot{q}_3 - r \cos(q_3 - q_4 - \theta)\dot{q}_2\dot{q}_4 \\ &\quad - r \sin(q_3 - q_4 - \theta)\dot{q}_1\dot{q}_3 - r \sin(q_3 - q_4 - \theta)\dot{q}_1\dot{q}_4 \\ &\quad + r \cos(q_3 + q_4 + \theta)\dot{q}_2\dot{q}_3 + r \cos(q_3 + q_4 + \theta)\dot{q}_2\dot{q}_4 \\ &\quad - r \sin(q_3 - q_4 + \theta)\dot{q}_1\dot{q}_3 - r \sin(q_3 + q_4 + \theta)\dot{q}_1\dot{q}_4, \end{aligned}$$

al sustituir este resultado en la integral (2.19) y resolverla considerando que  $\rho(q) = m/\pi r^2$  ya que el disco se considera homogéneo, se tiene que la función Lagrangiana para el disco rodante vertical es

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2}M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}I\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}J\dot{q}_4^2 \quad (2.20)$$

donde  $M$  es la masa del disco,  $I$  es el momento de inercia del disco con respecto al eje perpendicular al plano y  $J$  es el momento de inercia con respecto a un eje en el plano del disco. De la función Lagrangiana se puede observar que la métrica Riemanniana para este sistema es

$$g = M(dq_1 \otimes dq_1 + dq_2 \otimes dq_2) + Idq_3 \otimes dq_3 + Jdq_4 \otimes dq_4. \quad (2.21)$$

Para este sistema se tienen dos entradas de control que consisten en dos pares aplicados al disco. Uno de ellos produce el giro del disco con respecto al eje vertical, mientras que el otro produce que el disco ruede. A partir de la función Lagrangiana (2.20) se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange para este sistema sin considerar las restricciones. Aplicando el principio de Lagrange-d'Álembert se agregan las fuerzas de restricción en el lado derecho de las ecuaciones de Euler-Lagrange y se convierten en

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \lambda_1 \omega_1(q) + \lambda_2 \omega_2(q), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.22)$$

donde

$$F_1 = dq_3, \quad F_2 = dq_4.$$

Considerando las 1-formas (2.16), las ecuaciones de Euler-Lagrange para el disco que rueda de forma vertical son

$$\begin{aligned} M\ddot{q}_1 &= \lambda_1 \\ M\ddot{q}_2 &= \lambda_2 \\ I\ddot{q}_3 &= F_1 \\ J\ddot{q}_4 &= F_2 - \lambda_1 r \cos q_3 - \lambda_2 r \sin q_3, \end{aligned} \quad (2.23)$$

resolviendo (2.23) para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= Mr \cos q_3 \ddot{q}_4 - Mr \sin q_3 \dot{q}_3 \dot{q}_4 \\ \lambda_2 &= Mr \sin q_3 \ddot{q}_4 - Mr \cos q_3 \dot{q}_3 \dot{q}_4. \end{aligned}$$

Finalmente, las ecuaciones que describen la dinámica del disco vertical rodante son

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= \frac{r \cos q_3}{J+mr^2} u_1 - r \sin q_3 \dot{q}_3 \dot{q}_4 \\
\ddot{q}_2 &= \frac{r \sin q_3}{J+mr^2} u_1 + r \cos q_3 \dot{q}_3 \dot{q}_4 \\
\ddot{q}_3 &= \frac{1}{I} u_2 \\
\ddot{q}_4 &= \frac{1}{J+mr^2} u_1
\end{aligned} \tag{2.24}$$

### 2.3.2. El cuerpo rígido en movimiento planar bajo la acción de fuerzas

La variedad de configuraciones para este sistema es  $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1$  que es difeomorfa al grupo Euclidiano especial  $SE(2)$ . Para especificar la posición y orientación del cuerpo se hace uso de marcos coordenados ortonormales. En particular, para este sistema, se hace uso de dos marcos, uno de ellos es  $\Sigma_0$ , el cual denota al marco inercial que está conformado por la terna  $(i_0, j_0, k_0)$  (Figura 2.5). El otro marco, denotado  $\Sigma_1$ , se fija al centro de masa del cuerpo y está conformado por la terna  $(i_1, j_1, k_1)$ . Dado que se trata de un movimiento planar,  $k_0$  y  $k_1$  no se ilustran en la Figura 2.5.

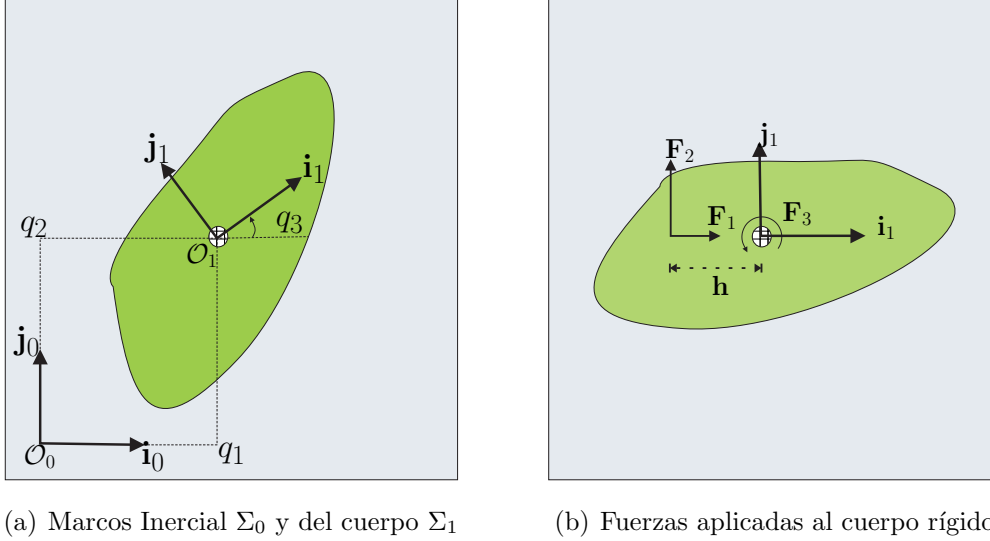


Figura 2.5: Cuerpo Rígido Plano Forzado

Las coordenadas generalizadas que parametrizan este sistema son  $(q_1, q_2, q_3)$ , las coordenadas  $(q_1, q_2)$  identifican la posición del centro de masa en el plano y  $q_3$  describe la orientación del cuerpo con respecto a  $\Sigma_0$ , tomando como referencia el eje  $i_0$ . La relación entre los marcos coordenados  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_0$  esta dada por la matriz homogénea de

transformación  ${}^0T_1$  definida como

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} R(q_3, k_0) & \vdots & {}^0\mathcal{O}_1 \\ \hline 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix},$$

donde  ${}^0\mathcal{O}_1 = (q_1, q_2, 0)^T$ . Así, para cada punto  $P$  en el cuerpo rígido (Figura 2.5), cuyas coordenadas con respecto a  $\Sigma_1$  se denotan como  ${}^1P$ , sus coordenadas en  $\Sigma_0$ , que se denotan  ${}^0P$ , se calculan con la Ecuación (2.25).

$${}^0P = {}^0T_1 {}^1P. \quad (2.25)$$

La función Lagrangiana para este sistema es calculada siguiendo el procedimiento utilizado en la Sección 2.3.1. La función Lagrangiana para el cuerpo rígido plano es

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2, \quad (2.26)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo y  $J$  es el momento de inercia con respecto al centro de masa. La métrica Riemanniana para este sistema es

$$g = mdq_1 \otimes dq_1 + mdq_2 \otimes dq_2 + Jdq_3 \otimes dq_3. \quad (2.27)$$

Las entradas de control para este sistema son dos fuerzas aplicadas en un punto arbitrario pero fijo sobre el cuerpo, y un par aplicado en el centro de masa (Figura 2.5). Sin pérdida de generalidad, se asume que la fuerza se aplica en un punto  $P$  a lo largo del eje  $i_1$  cuya distancia del origen de  $\Sigma_1$  es  $h$ , esto es porque se puede alinear el marco  $\Sigma_1$  con respecto al ángulo en que se aplica la fuerza. El efecto causado por la fuerza  $F^1$  es un movimiento traslacional, por otro lado, el efecto de la fuerza  $F^2$  es un movimiento rotacional y uno traslacional. Al aplicar el par  $F^3$  en el centro de masa provoca que el cuerpo rote. Las fuerzas están modeladas por las siguientes 1-formas

$$F^1 = |F^1|(\cos q_3 dq_1 + \sin q_3 dq_2), \quad (2.28)$$

$$F^2 = |F^2|(-\sin q_3 dq_1 + \cos q_3 dq_2 - hdq_3), \quad F^3 = |F^3|dq_3.$$

Para este ejemplo se usará la representación como sistema afín en control, esto es, su modelo matemático que describe su dinámica es expresado en la forma (2.12). Para ello, se hace uso de un mapeo que permite obtener los campos de control a partir de las 1-formas que definen las fuerzas que se aplican al sistema. Este mapeo es conocido como

“sharp map” ( $B^\#$ ) y está definido como sigue, dado un mapeo bilineal  $B : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ , el mapeo  $B^\# : V^* \rightarrow V$  debe satisfacer que  $\langle B^\#(\omega_1); \omega_2 \rangle = B(\omega_1, \omega_2)$ . En este caso se tiene  $B^\# : T^*Q \rightarrow TQ$ , donde  $T^*Q$  es el haz cotangente de  $Q$ . En representación matricial, los campos de control se calculan con la expresión  $Y = ([F][\mathcal{M}]^{-1})^T$  donde  $[M]$  es la matriz de inercia del sistema y  $[F]$  representa la 1-forma a partir de cual se quiere obtener el campo de control. Así, los campo de control para este sistema son:

$$Y_1 = \frac{\cos q_3}{m} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\sin q_3}{m} \frac{\partial}{\partial q_2}, \quad (2.29)$$

$$Y_2 = -\frac{\sin q_3}{m} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\cos q_3}{m} \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{h}{J} \frac{\partial}{\partial q_3}, \quad Y_3 = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial q_3}$$

Estos campos vectoriales junto con sus productos simétricos iterados, (concepto que será explicado mas adelante), serán utilizados en el Capítulo 4 para evaluar las propiedades estructurales de accesibilidad en configuraciones y controlabilidad local en configuraciones en tiempo pequeño (STLCC).

### 2.3.3. Un Engrane no holonómico

Los componentes de un engrane no holonómico (reportado en [16]), que se muestran en la Figura 2.6, son una esfera sólida o bola, de radio  $r$ , y dos ruedas  $IW$  y  $OW$ , llamadas de entrada y de salida respectivamente.  $r_I$  es el radio de la rueda de entrada y  $r_O$  es el radio de la rueda de salida. La variedad de configuraciones del sistema es  $Q = SO(3) \times \mathbb{T}^3$  parametrizada por coordenadas generalizadas  $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$  como se describe a continuación. Para este sistema se considera que los centros de masa de las esfera y de las ruedas permanecen fijos.

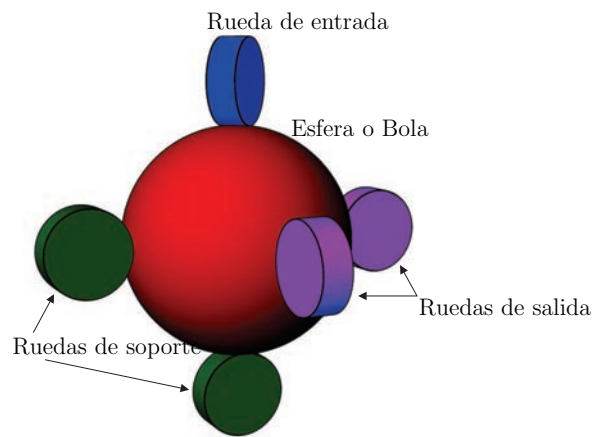


Figura 2.6: Engrane no Holonómico

El marco inercial se asigna al centro geométrico de la bola y cuando ésta gira en cualquier dirección el marco inercial permanece fijo, es decir no gira junto con la bola; a la rueda de salida  $OW$  se le asigna un marco coordenado denotado por  $\Sigma_1$  cuyo origen coincide con el centro geométrico de la rueda y rota con respecto al eje que es perpendicular al plano de la misma. Así, el origen del marco  $\Sigma_1$  se localiza en el punto  $\mathcal{O}_1 = (r + r_O)\mathbf{i}_0$  y su rotación se parametriza por  $q_1$ .

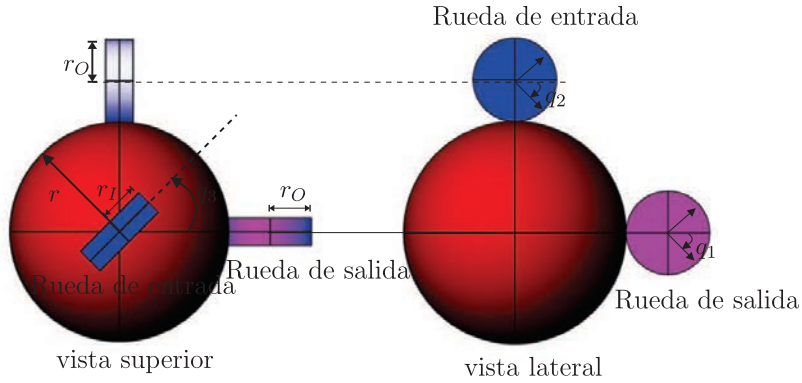
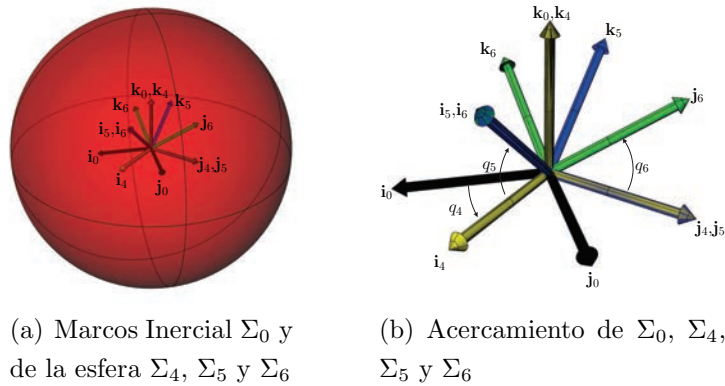


Figura 2.7: Engrane no Holonómico

A la rueda de entrada  $IW$  se le asignan dos marcos coordenados cuyos orígenes coinciden con el centro geométrico de la rueda, denotados como  $\Sigma_2$  y  $\Sigma_3$ . El marco  $\Sigma_2$  rota respecto al eje perpendicular al plano de la rueda y el marco  $\Sigma_3$  rota respecto al eje vertical de la rueda. El origen común de  $\Sigma_2$  y  $\Sigma_3$  está en el punto  $\mathcal{O}_2 = (r + r_I) \mathbf{k}_0$  y sus rotaciones se parametrizan por  $q_2$  y  $q_3$  respectivamente. Las coordenadas  $(q_4, q_5, q_6)$  describen los ángulos que determinan la orientación de la bola alrededor de los ejes  $\mathbf{k}_3$ ,  $\mathbf{j}_5$  e  $\mathbf{i}_6$  respectivamente.



(a) Marcos Inercial  $\Sigma_0$  y de la esfera  $\Sigma_4$ ,  $\Sigma_5$  y  $\Sigma_6$

(b) Acercamiento de  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_4$ ,  $\Sigma_5$  y  $\Sigma_6$

Figura 2.8: Cuerpo Rígido Plano Forzado

La matrices homogéneas de transformación que describen la relación entre los mar-



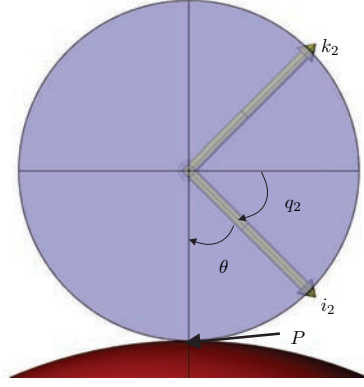


Figura 2.9: Engrane no Holonómico

cos son

$$\begin{aligned}
 {}^0T_2 &= \begin{bmatrix} R(q_1, j_0) & \vdots & {}^0\mathcal{O}_1 \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \\
 {}^0T_3 &= \begin{bmatrix} R(q_3, k_0)R(q_2, j_2) & \vdots & R(q_3, k_0) {}^0\mathcal{O}_2 \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}, \\
 {}^0T_6 &= \begin{bmatrix} R(q_4, k_0)R(q_5, j_4)R(q_6, i_5) & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde  ${}^0\mathcal{O}_1 = [r + r_0, 0, 0]^T$  and  ${}^0\mathcal{O}_2 = [0, 0, r + r_I]^T$ . Las ecuaciones que modelan las restricciones se calculan bajo la suposición de que la velocidad instantánea del punto de contacto  $P$  (Figura 2.9) entre las ruedas y la bola es cero, esto quiere decir que no hay deslizamiento entre las ruedas y la bola. La rueda de entrada  $IW$  está en contacto con la bola en su “polo norte” mientras que la rueda de salida  $OW$  esta en contacto con la bola en su “ecuador”. Los puntos en la circunferencia de la rueda de entrada se expresan en términos coordenadas de  $\Sigma_2$  como

$${}^2P_{IW} = r_I \cos \theta i_2 - r_I \sin \theta j_2$$

este punto expresado en  $\Sigma_0$  es

$${}^0P_{IW} = {}^0T_2 {}^2P_{IW}$$

y su derivada con respecto al tiempo es

$${}^0\dot{P}_{IW} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial {}^0T_2}{\partial q_i}(q) \dot{q}_i {}^2P_{IW},$$

realizando los cálculos se obtiene

$$\dot{P}_{IW} = \begin{bmatrix} r_I \cos q_3 \dot{q}_2 \\ r_I \sin q_3 \dot{q}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, el punto de contacto sobre la superficie de la esfera se expresa en coordenadas en el marco  $\Sigma_6$ , y al ser expresado en  $\Sigma_0$ , su respectiva derivada es

$$\dot{P}_B = \begin{bmatrix} r \cos q_4 \dot{q}_5 - r \cos q_4 \sin q_4 \dot{q}_6 \\ r \sin q_4 \dot{q}_5 + r \cos q_5 \cos q_4 \dot{q}_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como la velocidad relativa entre los puntos de contacto de la rueda de entrada  $IW$  y la bola es cero, esto quiere decir que la velocidad de los puntos en la rueda y en la bola es la misma al momento del contacto. Así, las ecuaciones para las restricciones son

$$\begin{aligned} r \dot{q}_5 + r_I \dot{q}_2 \cos(q_3 - q_4) &= 0, \\ r \cos q_5 \dot{q}_6 - r_I \dot{q}_2 \sin(q_3 - q_4) &= 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Siguiendo un procedimiento análogo para la rueda de salida, se tiene que las ecuaciones que modelan las restricciones son

$$\begin{aligned} r \dot{q}_4 - r \dot{q}_6 \sin q_5 &= 0, \\ r_O \dot{q}_1 + r \dot{q}_5 \cos q_4 + r \dot{q}_6 \cos q_5 \sin q_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Combinando (2.31) y (2.32) se obtiene

$$\dot{q}_1 = \frac{r_I}{r_O} \cos q_3 \dot{q}_2. \quad (2.33)$$

La ecuación (2.33) muestra la relación de velocidad entre las ruedas de entrada y salida. La transferencia de energía es como sigue: La rueda de entrada  $IW$  gira con velocidad angular  $\dot{q}_2$ , la cual hace que la bola gire, entonces la rueda de salida  $OW$  gira con velocidad angular  $\dot{q}_1$ . Las entradas de control para este sistema son dos pares aplicados a la rueda  $IW$ , uno de ellos produce el giro con respecto al eje vertical de la rueda, mientras que el otro produce el rodamiento sobre la superficie de la bola. Este engrane es usado en el diseño de un manipulador no holonómico realizado por Nakamura

et al. en [16] el cual consiste de  $n$  articulaciones revolutas. El primer engrane transmite la energía de los pares de entrada a dos ruedas de salida, a su vez, estas ruedas de salida proporcionan un par de entrada al siguiente engrane, uno para controlar la rueda de entrada para el siguiente engrane, mientras que la otra rueda de salida controla el ángulo de la siguiente articulación.

La función Lagrangiana  $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$  es calculada aplicando el procedimiento de los ejemplos anteriores. Dado que los centros geométricos de la bola y las ruedas se consideran fijos y considerando que el movimiento del sistema en la dirección del campo gravitacional también es cero, se tiene que  $V(q) = 0$ . Por lo tanto, la función Lagrangiana en este caso es directamente la energía cinética del sistema. Así, la función Lagrangiana es

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}_i M_{ij} \dot{q}_j + \frac{1}{2} J_{xxI} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} J_{zzI} \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} J_{xxO} \dot{q}_1^2; \quad i, j \in \{4, 5, 6\} \quad (2.34)$$

donde  $M$  es matriz de inercia de la bola,  $J_{xxI}$  y  $J_{zzI}$  son los momento de inercia de la rueda  $IW$  y  $J_{xxO}$  es el momento de inercia de la rueda  $OW$ . Usando la función Lagrangiana (2.34) se calculan las ecuaciones de Euler-Lagrange dando como resultado

$$\begin{aligned} J_{xxO} \ddot{q}_1 &= 0 \\ J_{xxI} \ddot{q}_2 &= F_1 \\ J_{zzI} \ddot{q}_3 &= F_2 \\ M_{ki} \ddot{q}_i &= 0, \quad i, k \in \{4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Al incorporar las fuerzas de restricción se tiene

$$\begin{aligned} J_{xxO} \ddot{q}_1 &= \lambda_1 \\ J_{xxI} \ddot{q}_2 &= F_1 + \lambda_1 \frac{r_I}{r_O} \cos q_3 + \lambda_3 \frac{r_i}{r} \cos(q_3 - q_4) - \lambda_4 \frac{r_I \sin(q_3 - q_4)}{r \cos q_5} \\ J_{zzI} \ddot{q}_3 &= F_2 \\ J_{zzB} \ddot{q}_4 &= \lambda_2 \\ J_{yyB} \ddot{q}_4 &= \lambda_3 \\ J_{xxB} \ddot{q}_4 &= \lambda_2 \sin q_5 + \lambda_4. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior para los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$ , el modelo matemático que describe la dinámica de este sistema viene dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{r_I}{r_O} (\alpha_1(q, \dot{q}) \cos q_3 - \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin q_3) \\ \ddot{q}_2 &= u_1 + \alpha_2(q, \dot{q}) + \alpha_3(q, \dot{q}) + \alpha_4(q, \dot{q}) \\ \ddot{q}_3 &= u_2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_4 &= \sin q_5 \alpha_5(q, \dot{q}) - \dot{q}_5 \dot{q}_6 \cos q_5 \\
\ddot{q}_5 &= -\frac{r_I}{r} (\alpha_1(q, \dot{q}) \cos(q_3 - q_4) + \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3 - q_4) - \dot{q}_2 \dot{q}_4 \sin(q_3 - q_4)) \\
\ddot{q}_6 &= \frac{1}{r \cos q_5} \alpha_6(q, \dot{q})
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_1(q, \dot{q}) &= \frac{u_1 - (r_I/r_O)(J_{xxO} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin q_3 \cos q_3) - ((r_I^2/r_O^2) J_{yyB} \cos(q_3 - q_4) \sin(q_3 - q_4) \dot{q}_2 (\dot{q}_3 + \dot{q}_3))}{J_{xxI} + (J_{xxI} r_I^2/r^2) - (r_I^2/r_O^2) J_{xxO} \cos^2 q_3} \\
\alpha_2(q, \dot{q}) &= \frac{r_I}{r_O} \cos q_3 \left( \frac{r_I}{r_O} I_O \cos q_3 \alpha_1(q, \dot{q}) - \frac{r_I}{r_O} \sin q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right) \\
\alpha_3(q, \dot{q}) &= \frac{r_I}{r} \cos(q_3 - q_4) \left( \frac{r_I}{r} J_{yy} \cos(q_3 - q_4) \alpha_1(q, \dot{q}) - \frac{r_I}{r} J_{yy} \sin(q_3 - q_4) \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \frac{r_I}{r} \sin(q_3 - q_4) \dot{q}_2 \dot{q}_4 \right) \\
\alpha_4(q, \dot{q}) &= \frac{r_I \sin(q_3 - q_4)}{r \cos q_5} \left( \frac{c(q, \dot{q}) - d(q, \dot{q})}{r \cos q_5 (a(q) - b(q))} \right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
a(q) &= (J_{yy} r_I^2 \cos^2 q_3 \cos^2 q_4 - I_O r_I^2 \cos^2 q_3 + 2J_{yy} r_I^2 \cos q_3 \cos q_4 \sin q_3 \sin q_4 \\
&\quad + J_{yy} r_I^2 \sin^2 q_4 + I_I r_O^2) / (r_O^2 (J_{zz} \sin^2 q_5 + J_{xx})) \\
b(q) &= (r_I^2 r_O^2 \sin^2(q_3 - q_4) \sin^2 q_5 (J_{zz} + J_{xx})) / (r^2 r_O^2 (J_{zz} \sin^2 q_5 + J_{xx})) \\
c(q, \dot{q}) &= -r_I \sin(q_3 - q_4) \left( -u_1 + \frac{I_O r_I^2 \cos q_3 \sin q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3}{r_O^2} + \frac{r_I^2 \sin(2q_3 - 2q_4) (\dot{q}_2 \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \dot{q}_4)}{2r^2} \right) \\
d(q, \dot{q}) &= (r_I \cos(q_3 - q_4) \dot{q}_2 (\dot{q}_4 - \dot{q}_3)) \left( I_I - \frac{I_O r_I^2 \cos^2 q_5}{r_O^2} + \frac{J_{yy} r_I^2 \cos^2(q_3 - q_4)}{r_O^2} \right) \\
\alpha_5(q, \dot{q}) &= -\frac{J_{zz} \cos q_5 \sin q_5 + c(q, \dot{q}) - d(q, \dot{q}) / r \cos q_5 (a(q) - b(q))}{J_{xx} + J_{zz} \sin^2 q_5} \\
\alpha_6(q, \dot{q}) &= r_I \sin(q_3 - q_4) \alpha_1(q, \dot{q}) + r_I \cos(q_3 - q_4) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - r_I \cos(q_3 - q_4) \dot{q}_2 \dot{q}_4
\end{aligned}$$

### 2.3.4. Robot tipo unicycle

Este sistema consiste en un cuerpo principal, o cuerpo del robot, dos ruedas unidas en su centros de masa por un eje, las cuales soportan al cuerpo, y una rueda auxiliar que evita que el cuerpo caiga sobre el piso (Figura 2.10). La variedad de configuraciones para este sistema es  $Q = SE(2) \times \mathbb{T}^2$  parametrizada por coordenadas  $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$  como se describe a continuación. Las coordenadas  $(q_1, q_2, q_3)$  definen la posición y orientación del sistema en el plano. Las coordenadas  $q_4$  y  $q_5$  representan los ángulos de rotación de las ruedas.

Como se hizo en los ejemplos anteriores, se define un marco inercial denotado  $\Sigma_0$

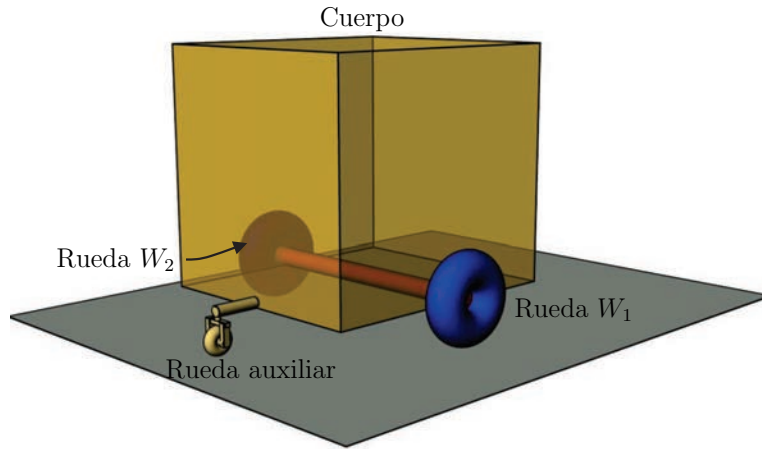
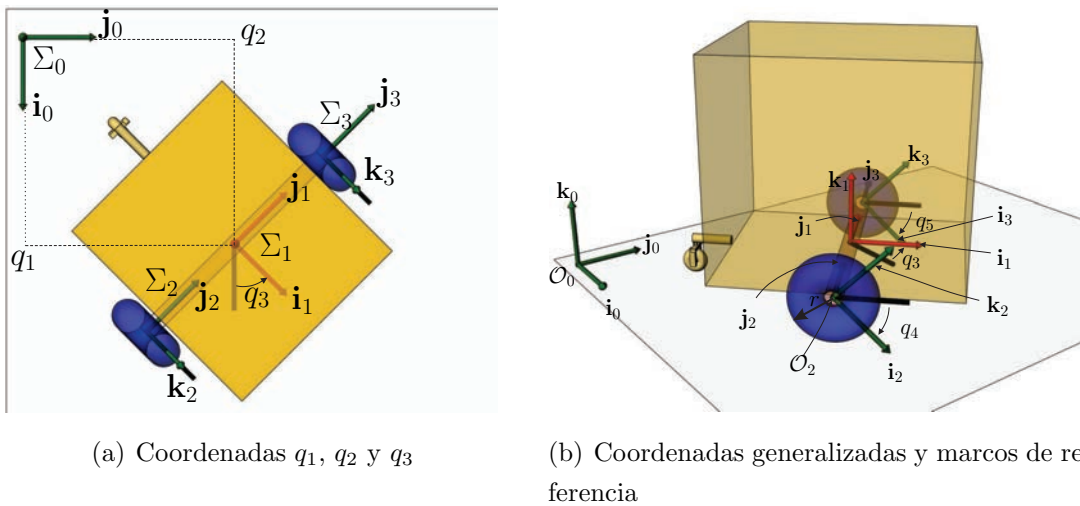


Figura 2.10: Robot tipo unicycle

cuyo origen es  $\mathcal{O}_0$  (Figura 2.11), usado para medir las configuraciones del sistema. El origen del marco  $\Sigma_1$  coincide con el punto intermedio del eje que une a las dos ruedas y se supone fijo al cuerpo del robot, es decir, se mueve y gira junto con él. Los marcos  $\Sigma_2$  y  $\Sigma_3$  se fijan a la rueda  $W_1$  y  $W_2$  respectivamente, y sus orígenes coinciden con los centro geométricos de las ruedas correspondientes.



(a) Coordenadas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$

(b) Coordenadas generalizadas y marcos de referencia

Figura 2.11: Robot tipo unicycle

La matrices homogéneas de transformación que describen la relación entre los marcos coordinados son

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} R(q_3, k_0) & | & {}^0\mathcal{O}_1 \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^0T_2 = {}^0T_1 {}^1T_2 = \begin{bmatrix} R(q_3, k_0)R(q_4, j_1) & | & R(q_3, k_0) {}^1\mathcal{O}_2 + {}^0\mathcal{O}_1 \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^0T_3 = {}^0T_1 {}^1T_3 = \begin{bmatrix} R(q_3, k_0)R(q_5, j_1) & | & R(q_3, k_0) {}^1\mathcal{O}_3 + {}^0\mathcal{O}_1 \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix},$$

donde:  ${}^0\mathcal{O}_1 = [q_1, q_2, r]^T$ ,  ${}^1\mathcal{O}_2 = [0, -l, 0]^T$ , y  ${}^1\mathcal{O}_3 = [0, l, 0]^T$ .

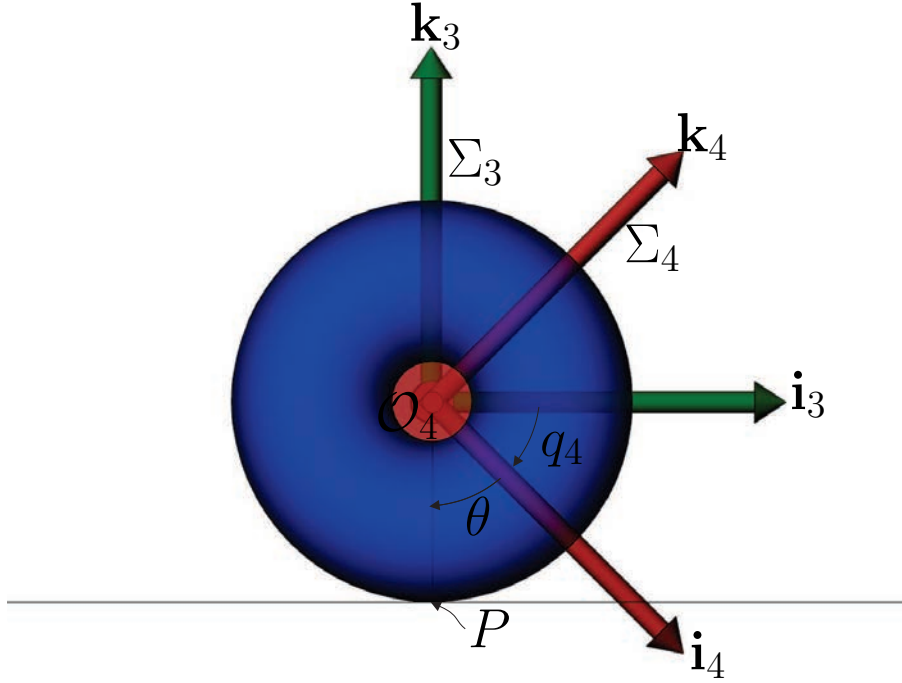


Figura 2.12: Rueda  $W_1$  (Cálculo de restricciones)

Para obtener las ecuaciones de las restricciones se supone que no hay deslizamiento entre las ruedas y el piso, es decir, la velocidad instantánea de los puntos en la circunferencia de las ruedas al hacer contacto con el piso en el punto  $P$  de la Figura 2.12 es cero. Este punto tiene está orientado en un ángulo  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - q_4$  con respecto a  $\Sigma_2$  que corresponde al marco en la rueda  $W_1$ , y un ángulo  $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - q_5$  con respecto a  $\Sigma_3$  que corresponde a la rueda  $W_1$ . El punto de contacto para cada una de las ruedas debe ser expresado en el marco  $\Sigma_0$  para realizar los cálculos consistentemente. Así, cada punto se expresa en  $\Sigma_0$  como

$${}^0P_{W_1} = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2P_{W_1} \text{ y } {}^0P_{W_2} = {}^0T_1 {}^1T_3 {}^3P_{W_2},$$

donde los subíndices  $W_1$  y  $W_2$  hacen referencia al punto de contacto con el piso de la

rueda correspondiente. La derivada con respecto al tiempo de estos puntos es

$${}^0\dot{P}_{w_1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial {}^0T_2}{\partial q_i}(q) \dot{q}_i {}^2P_{W_1} \quad \text{y} \quad {}^0\dot{P}_{w_2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial {}^0T_3}{\partial q_i}(q) \dot{q}_i {}^2P_{W_2}.$$

al realizar los cálculos se obtiene

$${}^0\dot{P}_{w_1} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 + l \cos q_3 \dot{q}_3 - r \cos q_3 \dot{q}_4 \\ \dot{q}_2 + l \sin q_3 \dot{q}_3 - r \cos q_3 \dot{q}_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^0\dot{P}_{w_2} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - l \cos q_3 \dot{q}_3 - r \cos q_3 \dot{q}_5 \\ \dot{q}_2 - l \sin q_3 \dot{q}_3 - r \cos q_3 \dot{q}_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Al suponer que no hay deslizamiento entre las ruedas y el piso se tiene que para la rueda  $W_1$  las ecuaciones de restricción son

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 + l \dot{q}_3 \cos q_3 - r \dot{q}_4 \cos q_3 &= 0 \\ \dot{q}_2 + l \dot{q}_3 \sin q_3 - r \dot{q}_4 \sin q_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

y para la rueda  $W_2$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 - l \dot{q}_3 \cos q_3 - r \dot{q}_5 \cos q_3 &= 0 \\ \dot{q}_2 - l \dot{q}_3 \sin q_3 - r \dot{q}_5 \sin q_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Las jacobianas de (2.36) respecto a  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5)$ , esto es

$$\Omega_1(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l \cos q_3 & -r \cos q_3 & 0 \\ 0 & 1 & l \sin q_3 & -r \sin q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Omega_2(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l \cos q_3 & 0 & -r \cos q_3 \\ 0 & 1 & -l \sin q_3 & 0 & -r \sin q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

definen dos codistribuciones de restricciones de donde las columnas del anulador común entre ellas generan la distribución de velocidades permitidas en el sistema, es decir,

$$\mathcal{D}_q = \text{span}\{v_1(q), v_2(q)\}, \quad (2.39)$$

donde

$$\begin{aligned} v_1(q) &= r \cos q_3 \left. \frac{\partial}{\partial q_1} \right|_q + r \sin q_3 \left. \frac{\partial}{\partial q_2} \right|_q + -\frac{r}{l} \left. \frac{\partial}{\partial q_3} \right|_q + \left. \frac{\partial}{\partial q_4} \right|_q \\ v_2(q) &= r \cos q_3 \left. \frac{\partial}{\partial q_1} \right|_q + r \sin q_3 \left. \frac{\partial}{\partial q_2} \right|_q + \frac{r}{l} \left. \frac{\partial}{\partial q_3} \right|_q + \left. \frac{\partial}{\partial q_5} \right|_q \end{aligned}$$

Los renglones del kernel de la distribución  $\mathcal{D}_q$  generan la codistribución fuerzas de

restricciones  $A_q$  del sistema:

$$A_q = \text{span}\{\omega_1(q), \omega_2(q), \omega_3(q)\} \quad (2.40)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_1(q) &= dq_1|_q - \frac{1}{2} \cos q_3 (dq_4|_q + dq_5|_q), \\ \omega_2(q) &= dq_2|_q - \frac{1}{2} \sin q_3 (dq_4|_q + dq_5|_q), \\ \omega_3(q) &= dq_3|_q - \frac{r}{2l} (dq_4|_q - dq_5|_q). \end{aligned}$$

La energía cinética para cada una de las ruedas está dada por la Ecuación (2.19) y para un elemento diferencial de masa en el cuerpo de carro por

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \int_V \rho(q) |\dot{P}(q)|^2 dx dy dz.$$

Entonces, la función Lagrangiana para este sistema es

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(m_1+m_2+M)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2+M)\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}(J_{W_1}+J_{W_2}+J_B)\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}I_{w_1}\dot{q}_4^2 + \frac{1}{2}I_{W_2}\dot{q}_5^2 \quad (2.41)$$

donde  $M$ ,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas del cuerpo y las ruedas respectivamente.  $I_{W_1}$  e  $I_{W_2}$  son momento de inercia con respecto al eje  $\mathbf{j}_3$  de cada rueda.  $J_B$ ,  $J_{W_1}$  y  $J_{W_2}$  son momentos de inercia de las ruedas y el cuerpo respecto al eje vertical. El modelo matemático para el robot tipo unicycle se deriva usando la función Lagrangiana (2.41), así, se obtienen las ecuaciones de Lagrange-d'Alembert, que tienen la forma de las Ecuaciones (2.11), para este sistema:

$$\begin{aligned} \bar{M}\ddot{q}_1 &= \lambda_1 \\ \bar{M}\ddot{q}_2 &= \lambda_2 \\ \bar{J}\ddot{q}_3 &= \lambda_3 \\ I\ddot{q}_4 &= F_1 - \lambda_1\left(\frac{1}{2}r \cos q_3\right) - \lambda_2\left(\frac{1}{2}r \sin q_3\right) - \lambda_3\left(\frac{r}{2l}\right) \\ I\ddot{q}_5 &= F_2 - \lambda_1\left(\frac{1}{2}r \cos q_3\right) - \lambda_2\left(\frac{1}{2}r \sin q_3\right) + \lambda_3\left(\frac{r}{2l}\right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde  $\bar{M} = M + m_{W_1} + m_{W_2}$ ,  $\bar{J} = J + J_{W_1} + J_{W_2}$  y los  $\lambda_i$ 's,  $i = 1, 2, 3$  son los multiplicadores de Lagrange. Haciendo uso de las ecuaciones de restricción se obtiene una solución para los multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\bar{M}r \cos q_3(\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5) - \frac{1}{2}\bar{M}r \sin q_3\dot{q}_3(\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\bar{M}r \sin q_3(\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5) - \frac{1}{2}\bar{M}r \cos q_3\dot{q}_3(\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\ \lambda_3 &= \frac{\bar{J}r}{2l}(\ddot{q}_4 - \ddot{q}_5) \end{aligned}$$



Finalmente, al sustituir los multiplicadores de Lagrange en (2.42) se tiene que las ecuaciones que describen la dinámica del robot tipo unicycle son

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= \frac{1}{2}r \cos q_3 \left( \frac{F_1+F_2}{I+Mr^2} \right) - \frac{1}{2}r \sin q_3 \dot{q}_3 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\
\ddot{q}_2 &= \frac{1}{2}r \sin q_3 \left( \frac{F_1+F_2}{I+Mr^2} \right) - \frac{1}{2}r \cos q_3 \dot{q}_3 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) \\
\ddot{q}_3 &= -\frac{r(F_1-F_2)}{2I+(Jr^2/l)} \\
\ddot{q}_4 &= F_1 \left( \frac{Ml^2r^2+4Il^2+Jr^2}{(2Il^2+Jr^2)(Mr^2+2I)} \right) + F_2 \left( \frac{r^2(Ml^2+J)}{(2Il^2+Jr^2)(Mr^2+2I)} \right) \\
\ddot{q}_5 &= F_1 \left( \frac{r^2(Ml^2+J)}{(2Il^2+Jr^2)(Mr^2+2I)} \right) + F_2 \left( \frac{Ml^2r^2+4Il^2+Jr^2}{(2Il^2+Jr^2)(Mr^2+2I)} \right)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

## 2.4. Sistemas mecánicos no holonómicos con simetrías

Las simetrías son una propiedad que los sistemas mecánicos no holonómicos podrían exhibir. La representación matemática de las simetrías está dada por mapeos llamados acciones de grupos de Lie sobre variedades diferenciales. El modelo matemático que describe la dinámica de los sistemas no holonómicos derivado de la función Lagrangiana  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  puede ser reducido tomando el cociente de la variedad de estados  $TQ$  por un grupo de Lie  $G$  actuando sobre  $Q$ ; así, la función Lagrangiana reducida es el mapeo  $l : TQ/G \rightarrow \mathbb{R}$ . Además, para un sistema mecánico que exhibe simetrías y que está sujeto a restricciones no holonómicas, la función Lagrangiana restringida está dada por el mapeo  $l_c : \mathcal{D}/G \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, las velocidades que el sistema puede tomar están en el cociente de la distribución  $\mathcal{D}$  por el grupo de Lie  $G$ . Estos temas han sido estudiados por varios investigadores, algunos de ellos son Bloch *et al.* en [2], Bullo *et al.* en [3], Cortes *et al.* en [5] y Marsden *et al.* en [14]. En esta sección se estudian algunos de los conceptos relacionados con las simetrías.

La teoría de grupos de Lie y variedades diferenciales, temas que pueden ser revisados en [2], [3] y [14], conforman la base de la teoría de simetrías. El punto de partida en esta sección es el concepto de acción suave por la izquierda de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable, esto es,

**Definición 5.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $(G, \star)$  un grupo de Lie. Una acción suave por la izquierda de  $G$  sobre  $M$  es un mapeo suave  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  que satisface

$$\Phi(e, m) = m, \quad \Phi(g_1, \Phi(g_2, m)) = \Phi(g_1 \star g_2, m),$$

para toda  $m \in M$  y para todos  $g_1, g_2 \in G$ . Dada una acción suave por la izquierda  $\Phi$  y un elemento  $g \in G$ ,  $\Phi_g : M \rightarrow M$  es el mapeo definido por  $m \mapsto \Phi(g, m)$ .

Como se mencionó en el párrafo introductorio a esta sección, las acciones suaves por la izquierda  $\Phi$  de un grupo de Lie  $G$  sobre una variedad  $M$  representan simetrías,

para tal efecto,  $\Phi$  debe satisfacer ciertas relaciones con los objetos geométricos que conforman un sistema mecánico. Dicha relación está dada por el concepto de invariancia asociado a  $\Phi$ , esto motiva la siguiente definición

**Definición 6.** Sea  $\Phi$  una acción suave por la izquierda de  $G$  sobre  $M$ . Una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\Phi$ -invariante si, para todo  $g \in G$ ,  $f \circ \Phi_g = f$ . Un campo tensorial  $X$  sobre  $M$  es  $\Phi$ -invariante si, para todo  $g \in G$ ,  $\Phi_g^* X = X$ . Una distribución  $\mathcal{D}$  sobre  $M$  es  $\Phi$ -invariante si  $T_q \Phi_g(\mathcal{D}_m) = \mathcal{D}_{\Phi_g(m)}$  para todas  $m \in M$  y  $g \in G$ .

Ahora bien, dada una variedad  $M$ , si existe un campo tensorial suave  $\mathcal{G}$  del tipo  $(0, 2)$  sobre  $M$  entonces la dupla  $(M, \mathcal{G})$  es llamada una variedad Riemanniana.  $\mathcal{G}$  es conocida como una métrica Riemanniana y define un producto interno en el haz tangente a la variedad  $M$ .

**Definición 7.** Sean  $(Q, \mathcal{G})$  y  $(\tilde{Q}, \tilde{\mathcal{G}})$  variedades Riemannianas. Una isometría es un difeomorfismo suave  $\varphi : Q \rightarrow \tilde{Q}$  que satisface  $\varphi^* \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$ . Si  $\varphi : Q \rightarrow \tilde{Q}$  es una isometría, entonces  $Q$  y  $\tilde{Q}$  se dicen ser isométricas y se denota  $Q \simeq \tilde{Q}$ . Una isometría  $\varphi : Q \rightarrow Q$  es una isometría de  $Q$ .

Por lo tanto, el concepto de simetrías de un sistema mecánico es caracterizado por la  $\Phi$ -invariancia de los objetos geométricos que lo definen bajo la acción  $\Phi$  de un grupo de Lie  $G$  sobre la variedad configuraciones  $Q$ .

**Definición 8.** Sea  $\mathfrak{S} = (Q, \mathcal{G}, V, \Omega, \mathcal{D})$  un sistema mecánico no holonómico. Una acción suave por la izquierda de  $G$  sobre  $Q$  es una simetría de  $\mathfrak{S}$  si  $\Phi$  es una isometría de  $(Q, \mathcal{G})$ , y  $V$ ,  $D$  y  $\Omega$  son  $\Phi$ -invariantes.

Si la acción por la izquierda  $\Phi$  satisface las condiciones para ser una simetría de  $\mathfrak{S}$ , entonces la variedad de configuraciones puede ser dividida en dos variedades, una denominada *variedad de posiciones* que es un grupo de Lie y la *variedad de variable internas del sistema*. Las coordenadas de  $G$  representan la posición y orientación del sistema. La variedad de variable internas es obtenida del cociente  $Q/G$ .

La función Lagrangiana es invariante si  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  es invariante bajo la acción inducida de  $G$  sobre  $TQ$ . La acción inducida de  $G$  sobre  $TQ$  es el mapeo  $T\Phi_g : TQ \rightarrow TQ$ . La función Lagrangiana es infinitesimalmente invariante si para cualquier elemento  $\xi \in \mathfrak{g}$  entonces  $dL \circ \dot{\xi}_Q = 0$ . Si la función Lagrangiana satisface tales condiciones el espacio de estados  $TQ$  puede ser reducido a  $TQ/G$  y  $\mathcal{D}/G$ , estos espacios son denominados como el espacio de estados reducido y el espacio de estados restringido respectivamente. La función Lagrangiana reducida es

$$l : TQ/G \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.44}$$

satisfaciendo  $L = l \circ \pi_{TQ}$  donde  $\pi_{TQ} : TQ \rightarrow TQ/G$  es la proyección, y la función lagrangiana reducida restringida es

$$l_c : \mathcal{D}/G \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.45)$$

la cual satisface  $L/\mathcal{D} = l_c \circ \pi_{\mathcal{D}}$  donde  $\pi_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/G$  es la proyección. También, las ecuaciones de Lagrange-d'Alembert inducen ecuaciones reducidas de Lagrange-d'Alembert bien definidas sobre  $\mathcal{D}/G$ . Esto es, el campo vectorial sobre la variedad  $\mathcal{D}$  determinado por las ecuaciones de Lagrange-d'Alembert es  $G$ -invariante, y por lo tanto define un campo vectorial reducido el cociente  $\mathcal{D}/G$ .

Para escribir la Lagrangiana reducida restringida en coordenadas locales se requiere representar a las restricciones en coordenadas, una forma de hacer esto, es expresando a las restricciones en términos de una conexión de Ehresmann. Además se supone que la variedad de configuraciones  $Q$  tiene estructura de haz, es decir, existe  $\pi : Q \rightarrow R$  donde la variedad  $R$  es denominada la base y  $\pi : Q \rightarrow R$  es una sumersión. El kernel del mapeo tangente  $T_q\pi_{Q,R}$  es llamado espacio vertical denotado  $V_q$ . Por lo general, el haz  $\pi : Q \rightarrow R$  no coincide con el haz  $\pi : Q \rightarrow Q/G$ . Para el caso en el que si coinciden, el cual es conocido como el caso cinemático principal, las restricciones se pueden modelar en términos de una conexión de Ehresmann.

**Definición 9.** Una conexión de Ehresmann  $A$  es una 1-forma valuada-vertical en  $Q$  que satisface

$$i) A_q : T_qQ \rightarrow V_q \text{ es un mapeo lineal para toda } q \in Q$$

$$ii) A \text{ es una proyección: } A(v_q) = v_q \text{ para toda } v_q \in V_q$$

La forma en que se expresan las restricciones a través de una conexión de Ehresmann es como sigue, se selecciona una carta coordenada de tal manera que las 1-formas que engendran a la codistribución de fuerzas de restricción se expresen como

$$\omega_j(q) = ds^j + A_\alpha^j(r, s) dr^\alpha \quad j = 1, \dots, m \quad (2.46)$$

donde  $q = (r, s) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ . Ahora bien, la dinámica de los sistemas mecánicos está definida por las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2), pero considerando que las restricciones se expresan como (3.57), al sustituirlas en (2.2) se obtiene

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} \right) = A_\alpha^j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^j} - \frac{\partial L}{\partial s^j} \right) \quad (2.47)$$

que al combinarlas con las ecuaciones de restricción

$$\dot{s}^j = -A_\alpha^j \dot{r}^\alpha \quad (2.48)$$

definen una descripción completa de la dinámica del sistema. La Lagrangiana reducida restringida se define sustituyendo las restricciones (3.59) en la Lagrangiana, de lo que se obtiene

$$l_c(r^\alpha, s^j, \dot{r}^\alpha) = L(r^\alpha, s^j, \dot{r}^\alpha, -A_\alpha^j \dot{r}^\alpha) \quad (2.49)$$

La dinámica de los sistemas mecánicos en términos de la Lagrangiana reducida restringida tiene la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^j \frac{\partial L}{\partial s^j} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^k} B_{\alpha\beta}^k \dot{r}^\beta, \quad (2.50)$$

donde

$$B_{\alpha\beta}^k = \left( \frac{\partial A_\alpha^k}{\partial r^\beta} - \frac{\partial A_\beta^k}{\partial r^\alpha} + A_\alpha^j \frac{\partial A_\beta^k}{\partial s^j} - A_\beta^j \frac{\partial A_\alpha^k}{\partial s^j} \right) \quad (2.51)$$

Para los caso en los que el haz  $\pi_{Q,R} : Q \rightarrow R$  no coincide con el haz  $\pi : Q \rightarrow Q/G$  se requiere usar una conexión principal. Este tema no será tratado en este trabajo.

### 2.4.1. Ejemplo: El disco que rueda en posición vertical

Un ejemplo que ilustra los conceptos estudiados en la sección anterior es el disco que rueda en forma vertical, cuya variedad de configuraciones es  $Q = SE(2) \times S^1$ , estudiado en la Sección 2.3.1. En dicha sección se calculó la función Lagrangiana (2.20) reescrita aquí

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} J \dot{q}_4^2,$$

considerando que las ecuaciones de restricción son

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 - r \cos q_3 \dot{q}_4 &= 0 \\ \dot{q}_2 - r \sin q_3 \dot{q}_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

De la expresión (2.52) se observa que  $A_1^2 = -r \cos q_3$  y  $A_2^2 = -r \sin q_3$  mientras que los demás  $A_\alpha^j$  son cero. Cuando se sustituye las restricciones (2.52) en la función Lagrangiana (2.20) se obtiene la Lagrangiana reducida restringida:

$$l_c(q, \dot{q}_3, \dot{q}_4) = \frac{1}{2} I \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} (Mr^2 + J) \dot{q}_4^2 \quad (2.53)$$

La curvatura de la conexión  $A$  se calcula usando la expresión (3.63) dando como resultado

$$\begin{aligned}
B_{21}^1 &= \frac{\partial A_2^1}{\partial q_3} - \frac{\partial A_1^1}{\partial q_4} = \frac{\partial}{\partial q_3}(-r \cos q_3) = r \sin q_3 \\
B_{12}^1 &= \frac{\partial A_1^1}{\partial q_4} - \frac{\partial A_2^1}{\partial q_3} = -\frac{\partial}{\partial q_3}(-r \cos q_3) = -r \sin q_3 \\
B_{21}^2 &= \frac{\partial A_1^2}{\partial q_4} - \frac{\partial A_2^2}{\partial q_3} = -\frac{\partial}{\partial q_3}(-r \sin q_3) = r \cos q_3 \\
B_{12}^2 &= \frac{\partial A_2^2}{\partial q_3} - \frac{\partial A_1^2}{\partial q_4} = \frac{\partial}{\partial q_3}(-r \sin q_3) = -r \cos q_3
\end{aligned}$$

el resto de los  $B_{\alpha\beta}^k$  tienen valor cero. Las ecuaciones que describen la dinámica del disco rodante vertical están dadas por (3.62) y son

$$\begin{aligned}
J\ddot{q}_3 &= (Mr \cos q_3 \dot{q}_4)(r \sin q_3 \dot{q}_4) + (Mr \sin q_3 \dot{q}_4)(-r \cos q_3 \dot{q}_4) \\
Mr^2\ddot{q}_4 &= (Mr \cos q_3 \dot{q}_4)(-r \sin q_3 \dot{q}_4) + (Mr \sin q_3 \dot{q}_4)(r \cos q_3 \dot{q}_4)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

# Capítulo 3

## Modelo Matemático del Robot Balanceador no Holonómico

### 3.1. Robot Balanceador no Holonómico

El objetivo principal de este capítulo es derivar el modelo matemático que describe la dinámica del *robot balanceador no holonómico*. Se trata de un sistema mecánico sujeto a restricciones no holonómicas. Existen varios métodos para derivar modelos matemáticos de sistemas dinámicos; el punto de partida, en este caso, es identificar los elementos que componen al mecanismo; el siguiente paso es definir la variedad de configuraciones junto con un sistema de coordenadas generalizadas para especificar su posición y orientación con respecto a un marco inercial. Una vez que se tiene lo anterior, se calcula la función Lagrangiana del sistema con el objetivo de derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange que describen la dinámica del sistema. Aplicando el principio de Lagrange-d'Alembert, las restricciones no holonómicas son incorporadas a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Así, las  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE's) de segundo orden son transformadas en  $2n$  ODE's de primer orden. A su vez, esas ecuaciones son transformadas a la descripción equivalente como sistema afín en el control de la forma

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u^i f_i(x(t)). \quad (3.1)$$

Con el modelo expresado en la forma (3.1), se aplicarán transformaciones para simplificar su representación matemática usando conceptos como retroalimentación estados estática y reducción por simetrías.

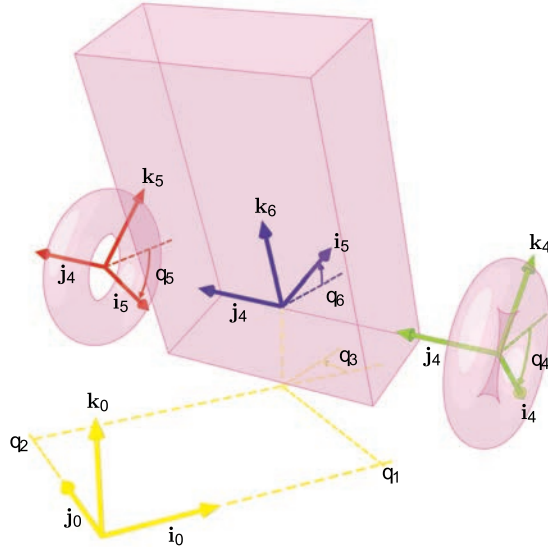


Figura 3.1: El Robot Balanceador no Holonómico

### 3.1.1. Los Componentes Físicos

El robot balanceador no holonómico se muestra en la Figura 3.1; el mecanismo está conformado por dos partes principales, el cuerpo y el chasis. El cuerpo tiene la forma de un paralelepípedo como muestra la Figura 3.1. El chasis esta compuesto de dos ruedas que están unidas por una varilla que cruza sus respectivos centros geométricos. El cuerpo está soportado por el chasis y puede pivotar alrededor de la varilla. En la Tabla 3.1 se reportan la lista de símbolos que representan los parámetros del sistema.

Símbolo	Significado
$r$	Cuerpo del Robot
$w$	Ruedas del Robot
$w_S$	Distancia entre las ruedas
$w_R$	Radio de las Ruedas
$r_M, w_M$	Masa del cuerpo y las ruedas
$r_{J^{**}}, w_{J^{**}}$	Inercia del cuerpo y las ruedas
$r_{zb}$	Altura del centro de masa del cuerpo en el marco $\Sigma_6$

Cuadro 3.1: Lista de símbolos de parámetros físicos

Antes de definir la variedad de configuraciones y las coordenadas generalizadas, es útil definir los marcos coordenados que serán utilizados para establecer la posición y orientación del sistema, y así calcular la función Lagrangiana. El primer marco coordenado que se define es el marco inercial denotado  $\Sigma_0$  y compuesto por la triada

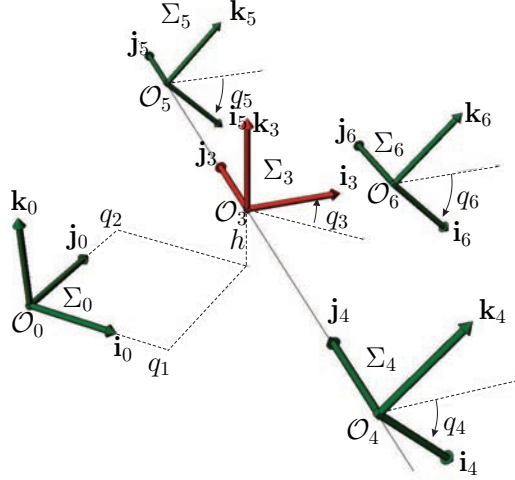


Figura 3.2: Posición y Orientación del Robot Balanceador no Holonómico

$(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  cuyo origen es denotado  $\mathcal{O}_0$  (Figura 3.1). Para describir los desplazamientos y rotaciones que este sistema puede realizar, se hará uso de seis marcos coordenados denotados como  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Cada marco coordenado describe un desplazamiento o una rotación del sistema con respecto al marco anterior. El marco  $\Sigma_1$  parametriza un desplazamiento con respecto a  $\Sigma_0$  en la dirección  $\mathbf{i}_0$ . El marco  $\Sigma_2$  parametriza un desplazamiento con respecto a  $\Sigma_1$  en la dirección  $\mathbf{j}_1$ . El marco  $\Sigma_3$  parametriza la rotación con respecto a eje  $\mathbf{k}_2$ . Los marcos  $\Sigma_4$ ,  $\Sigma_5$  y  $\Sigma_6$  asignados a la rueda  $W1$ , a la rueda  $W2$  y al cuerpo respectivamente, parametrizan rotaciones con respecto al eje  $\mathbf{j}_3$ .

### 3.1.2. La Variedad de Configuraciones y las Coordenadas Generalizadas

La variedad de configuraciones asignada al robot balanceador no holonómico es  $Q = SE(2) \times \mathbb{T}^3$ . Esta variedad está parametrizada por las coordenadas locales generalizadas  $q = (q_1, \dots, q_6)$ , donde las componentes  $q_1, q_2$  son la proyección en el suelo del punto  $P$ ; la componente  $q_3$  denota la rotación alrededor del eje vertical, esto es, parametriza la rotación de  $\Sigma_3$ . La cuarta y quinta componentes,  $q_4$  y  $q_5$ , denotan la rotación de las ruedas respectivamente y su medición es con respecto al eje  $i_3$ . La última componente,  $q_6$ , parametriza la rotación del cuerpo con respecto al eje  $i_3$ . Así, las primeras tres componentes  $q_1, q_2$  y  $q_3$  pueden verse como coordenadas para el grupo especial Euclidiano  $SE(2)$ , mientras que, las últimas tres componentes son coordenadas para el toro  $\mathbb{T}^3$ . La variedad de configuraciones tiene dimensión 6 e induce las coordenadas  $(q, \dot{q})$  en el haz tangente  $TQ$ ;  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_6)$  representan las velocidades generalizadas.



### 3.1.3. La Función Lagrangiana

El método utilizado para calcular la función Lagrangiana es como sigue. El primer paso es definir la función Lagrangiana como  $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$ , donde  $K(q, \dot{q})$  representa la energía cinética y  $V(q)$  es la energía potencial. El siguiente paso es encontrar expresiones explícitas de estas funciones.

Para calcular la energía cinética total del sistema se utiliza la integral de Riemann. Tomando un elemento diferencial de masa del cuerpo localizado en un punto  ${}^0P_6(q)$ , su energía cinética esta dada por

$$\Delta K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \Delta m |{}^0\dot{P}(q)|^2, \quad \Delta m = \rho(q) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Entonces, la energía cinética del cuerpo es la integral de todos los elemento  $\Delta K$ :

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \int_V \rho(q) |{}^0\dot{P}(q)|^2 dx dy dz \quad (3.2)$$

${}^0\dot{P}(q)$  representa la velocidad del punto  $P(q)$  en el marco inercial  $\Sigma_0$ . Por esta razón, las coordenadas de los puntos del cuerpo expresadas en el marco  $\Sigma_6$  deben ser transformadas en coordenadas en  $\Sigma_0$ . Como la energía cinética de la ruedas es calculada con el mismo procedimiento, las coordenadas expresadas en  $\Sigma_4$  y  $\Sigma_5$  deben ser transformadas a coordenadas en  $\Sigma_0$ . Las transformaciones entre los marcos coordenados se pueden expresar mediante matrices homogéneas de transformación. Dado que las coordenadas que se requiere transformar están expresadas en los marcos  $\Sigma_4$ ,  $\Sigma_5$  y  $\Sigma_6$ , las siguientes matrices homogéneas de transformación son definidas

$$\begin{aligned} {}^0T_3(q) &= \left[ \begin{array}{c|c} R(q_3, 3) & {}^0\mathcal{O}_3 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \\ {}^0T_4(q) &= \left[ \begin{array}{c|c} R(q_3, 3)R(q_4, 2) & R(q_3, 3)^3\mathcal{O}_4 + {}^0\mathcal{O}_3 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \\ {}^0T_5(q) &= \left[ \begin{array}{c|c} R(q_3, 3)R(q_5, 2) & R(q_3, 3)^3\mathcal{O}_5 + {}^0\mathcal{O}_3 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \\ {}^0T_6(q) &= \left[ \begin{array}{c|c} R(q_3, 3)R(q_6, 2) & R(q_3, 3)^3\mathcal{O}_6 + {}^0\mathcal{O}_3 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  ${}^0\mathcal{O}_3 = [q_1 \ q_2 \ h]^t$ ,  ${}^3\mathcal{O}_4 = [0 \ -\frac{1}{2}w_S \ 0]^t$ ,  ${}^3\mathcal{O}_5 = [0 \ \frac{1}{2}w_S \ 0]^t$  y  ${}^3\mathcal{O}_6 = [0 \ 0 \ 0]^t$ . La matriz homogénea de transformación  ${}^0T_3$  es un paso intermedio entre  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_4$ ,  $\Sigma_5$  y  $\Sigma_6$ . Entonces, para transformar un punto  ${}^6P$  expresado con coordenadas en  $\Sigma_6$  a un punto  ${}^0P$  expresado con coordenadas en  $\Sigma_0$  se usa

$${}^0P = {}^0T_6(q) {}^6P \quad (3.4)$$

Definiendo el punto  ${}^6P = x \mathbf{i}_6 + y \mathbf{j}_6 + z \mathbf{k}_6$ , la correspondiente velocidad de  ${}^0P$  esta dada por

$${}^0\dot{P} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial {}^0T_6}{\partial q_i}(q) \dot{q}_i {}^6P \quad (3.5)$$

entonces, para un punto  $P$  en el cuerpo, su velocidad expresada en  $\Sigma_0$  es

$$\begin{aligned} {}^0\dot{P}(q) = & (\dot{q}_1 - x (\dot{q}_3 \cos(q_6) \sin(q_3) + \dot{q}_6 \cos(q_3) \sin(q_6)) + z (\dot{q}_3 \cos(q_6) \cos(q_3) \\ & + \dot{q}_6 \cos(q_3) \cos(q_6)) - y \dot{q}_3 \cos(q_3)) \mathbf{i}_0 + (\dot{q}_2 + x (\dot{q}_3 \cos(q_6) \cos(q_3) \\ & - \dot{q}_6 \sin(q_3) \sin(q_6)) + z (\dot{q}_3 \cos(q_3) \sin(q_6) + \dot{q}_6 \sin(q_3) \cos(q_6)) \\ & - y \dot{q}_3 \cos(q_3)) \mathbf{j}_0 - (x \dot{q}_6 \cos(q_6) + z \dot{q}_6 \sin(q_6)) \mathbf{k}_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

El último paso es calcular la integral (3.2) sustituyendo  $|{}^0\dot{P}(q)|^2$  por la expresión dada por (3.6). Entonces, la energía cinética para el robot balanceador no holonómico, incluyendo la energía cinética de las ruedas, es

$$\begin{aligned} K(q, \dot{q}) = & w_M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + (w_{J_{xx}} + \frac{1}{4}w_S^2w_M)\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}w_{J_{yy}}(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2) + \\ & \frac{1}{2}r_M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}r_{J_{yy}}\dot{q}_6^2 - r_Mr_{zb} \sin(q_3) \sin(q_6)\dot{q}_1\dot{q}_3 + \\ & r_Mr_{zb} \cos(q_3) \sin(q_6)\dot{q}_1\dot{q}_3 + r_Mr_{zb} \cos(q_3) \cos(q_6)\dot{q}_1\dot{q}_6 + \\ & r_Mr_{zb} \sin(q_3) \cos(q_3)\dot{q}_2\dot{q}_6 + \frac{1}{2}r_{J_{xx}}\dot{q}_3^2 + \\ & \frac{1}{2}r_{J_{zz}} \cos^2(q_6)\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}r_{J_{xx}} \cos^2(q_6)\dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

La energía potencial es calculada como sigue, considerando el marco  $\Sigma_6$  y dado que el cuerpo puede pivotar con respecto al eje  $j_3$ , el campo gravitacional actúa sobre él causando un efecto neto de energía potencial  $V(q)$ . Entonces, asumiendo que la masa del cuerpo se concentra en su centro de masa, la expresión explícita para la energía potencial es

$$V(q) = -r_Mg(h + r_{zb} \sin q_6) \quad (3.8)$$

donde  $r_M$  es la masa del cuerpo,  $r_{zb}$  es la altura del centro de masa en  $\Sigma_6$ , y  $g$  es la

aceleración de la gravedad y  $h$  es la distancia entre el cuerpo del robot y el piso.

Finalmente, la función Lagrangiana para el robot balanceador no holonómico definida como  $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$  es

$$\begin{aligned}
L(q, \dot{q}) = & w_M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + (w_{J_{xx}} + \frac{1}{4}w_S^2w_M)\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}w_{J_{yy}}(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2) + \frac{1}{2}r_M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\
& + \frac{1}{2}r_{J_{yy}}\dot{q}_6^2 - r_Mr_{zb}\sin(q_3)\sin(q_6)\dot{q}_1\dot{q}_3 + r_Mr_{zb}\cos(q_3)\sin(q_6)\dot{q}_1\dot{q}_3 + \\
& r_Mr_{zb}\cos(q_3)\cos(q_6)\dot{q}_1\dot{q}_6 + r_Mr_{zb}\sin(q_3)\cos(q_6)\dot{q}_2\dot{q}_6 + \frac{1}{2}r_{J_{xx}}\dot{q}_3^2 + \\
& \frac{1}{2}r_{J_{zz}}\cos^2(q_6)\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}r_{J_{xx}}\cos^2(q_6)\dot{q}_3^2 - r_Mr_{zb}g\cos(q_6) - r_Mgh,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde  $r_M$  y  $w_M$  son las masas del cuerpo y las ruedas respectivamente;  $r_{J_{xx}}$ ,  $r_{J_{yy}}$ , y  $r_{J_{zz}}$  son los momentos de inercia del cuerpo;  $w_{J_{xx}}$ ,  $w_{J_{yy}}$ , and  $w_{J_{zz}}$  son los momentos de inercia de las ruedas;  $w_R$  es el radio de las ruedas;  $w_S$  es la longitud de la varilla que une las ruedas; y  $r_{zb}$  es la altura del centro de masa en  $\Sigma_6$ .

### 3.1.4. Las Restricciones

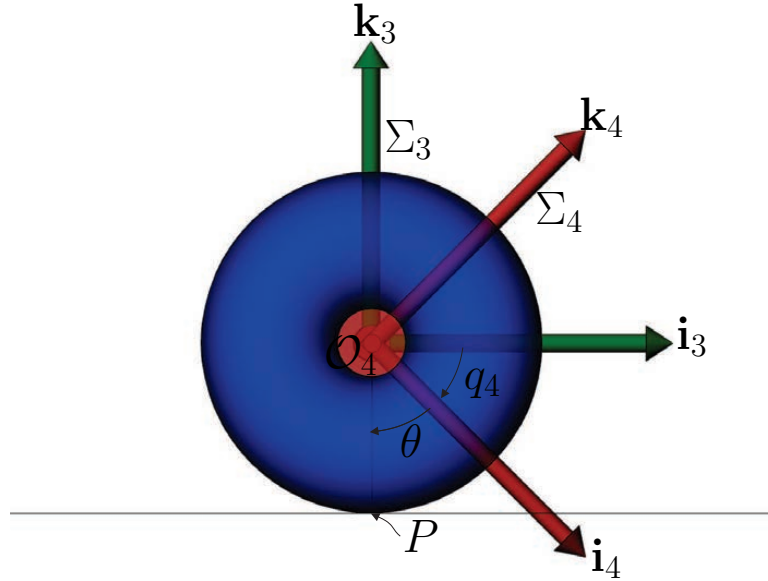


Figura 3.3: Rueda  $W_1$  (Cálculo de restricciones)

Las ecuaciones de las restricciones se obtienen suponiendo que la velocidad del punto de contacto entre las ruedas y el piso es cero. En otras palabras, las ruedas no se deslizan sobre el piso.

Denotando como  $C_{W1}$  y  $C_{W2}$  los puntos de contacto entre las ruedas y el piso y las ruedas  $W1$  y  $W2$  respectivamente, entonces  $\dot{C}_{W1} = 0$  y  $\dot{C}_{W2} = 0$ . Considerando la

rueda  $W1$ ; cualquier punto  $P_4$  en la circunferencia de la rueda  $W1$  tiene coordenadas  $(w_R \cos \theta, 0, -w_R \sin \theta)$ , donde  $w_R$  es el radio de la rueda  $W1$  y  $\theta$  es el ángulo entre el eje  $\mathbf{i}_4$  y la línea que une el punto  $P_4$  y el origen de  $\Sigma_4$ . Para transformar coordenadas de puntos en  $\Sigma_4$  a  $\Sigma_0$  se usa la expresión  ${}^0P_4 = {}^0T_4^4P$  y su derivada con respecto al tiempo es  ${}^0\dot{P}_4 = {}^0T_4'(q)\dot{q}P_4$  la cual es la velocidad del  $P_4$ . El punto de interés es aquél que hace contacto con el suelo, es decir,  $C_{P1}$ , la velocidad de este punto en  $\Sigma_0$  es  $\dot{C}_{W1} = {}^0T_4'(q)\dot{q}P_4$ . Para este caso  $\theta = \frac{\pi}{2} - q_4$ , por lo tanto,  $P_4 = (\sin q_4, 0, -\cos q_4)$ . El mismo procedimiento se aplica a la rueda  $W2$ . Entonces, la velocidad de los puntos de contacto  $C_{W1}$  y  $C_{W2}$ , en  $\Sigma_0$  es

$${}^0\dot{C}_{W1} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 + \cos(q_3)(\frac{1}{2}w_S\dot{q}_3 - w_R\dot{q}_4) \\ \dot{q}_2 + \sin(q_3)(\frac{1}{2}w_S\dot{q}_3 - w_R\dot{q}_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

$${}^0\dot{C}_{W2} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - \cos(q_3)(\frac{1}{2}w_S\dot{q}_3 + w_R\dot{q}_5) \\ \dot{q}_2 - \sin(q_3)(\frac{1}{2}w_S\dot{q}_3 + w_R\dot{q}_5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Las Jacobianas de las funciones en la expresión (3.10) son, respectivamente, igual a las siguientes dos matrices, cuyas filas engendran la codistribución de las restricciones

$$\Omega_1(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}w_S \cos q_3 & -w_R \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}w_S \sin q_3 & -w_R \sin q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_2(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}w_S \cos q_3 & 0 & -w_R \cos q_3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}w_S \sin q_3 & 0 & -w_R \sin q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El anulador de  $\Omega_1(q)$  y  $\Omega_2(q)$  es la distribución de restricciones  $\mathcal{D}_q$  dada por

$$\mathcal{D}_q = \text{span}\{v_1(q), v_2(q), v_3(q)\} \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned}
v_1(q) &= \left. \frac{\partial}{\partial q_6} \right|_q \\
v_2(q) &= \left. \frac{1}{2} w_S \cos(q_3) \frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{w_R}{w_S} \frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{\partial}{\partial q_5} + \frac{1}{2} w_S \sin(q_3) \frac{\partial}{\partial q_6} \right|_q \\
v_3(q) &= \left. \frac{1}{2} w_S \cos(q_3) \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{w_R}{w_S} \frac{\partial}{\partial q_3} + \frac{\partial}{\partial q_4} + \frac{1}{2} w_S \sin(q_3) \frac{\partial}{\partial q_6} \right|_q
\end{aligned}$$

La codistribución de restricciones, dada por el anulador de  $\mathcal{D}_q$ , es

$$\mathcal{A}_q = \text{span}\{\omega_1(q), \omega_2(q), \omega_3(q)\} \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned}
\omega_1(q) &= dq_1|_q + \frac{1}{2} w_S \cos(q_3) dq_3|_q - w_R \cos(q_3) dq_4|_q \\
\omega_2(q) &= dq_2|_q + \frac{1}{2} w_S \sin(q_3) dq_3|_q - w_R \sin(q_3) dq_4|_q \\
\omega_3(q) &= \frac{w_R}{w_S} dq_3|_q - dq_4|_q + dq_5|_q
\end{aligned}$$

### 3.1.5. Fuerzas Generalizadas Externas

Las entradas de control para el robot balanceador no holonómico son dos fuerzas generalizadas, un par  $\tau_1$  que actúa entre el cuerpo y la rueda  $W1$ , y un par  $\tau_2$  que actúa entre el cuerpo y la rueda  $W2$ ; ambos pares están aplicados alrededor del eje que pasa a través de los centros de masa de cada rueda. Entonces, las entradas  $\tau_1$  y  $\tau_2$  generan el movimiento de las ruedas y, dada la forma en que los pares son aplicados, producen una reacción sobre el cuerpo, causando que éste rote alrededor del eje que pasa a través del centro de masa de las ruedas. El par de reacción es  $\tau_1 + \tau_2$ . Así, las fuerzas generalizadas externas, en este caso pares, están representadas por la 1-forma

$$\Omega(q) = \tau_1 dq_4 + \tau_2 dq_5 - (\tau_1 + \tau_2) dq_6 \quad (3.13)$$

## 3.2. El Modelo Matemático

Para derivar el modelo matemático que describe la dinámica del robot balanceador no holonómico se utiliza la función Lagrangiana (3.9). Las ecuaciones de Euler-Lagrange son calculadas a partir de la Lagrangiana (3.9), y las restricciones no holonómicas son incorporadas al modelo aplicando el principio de Lagrange-d'Alembert, resultando la ecuaciones de Lagrange-d'Alembert

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Omega_i(q) + \sum_{j=1}^3 \lambda_j \omega_i^j(q), \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.14)$$

donde  $\Omega_i(q)$  son las componentes de (3.13),  $\omega_i^j(q)$  son componentes de las 1-formas que engendran la codistribución de fuerzas de restricción 3.12, es decir,  $A_q$ , y  $\lambda_j$  son los multiplicadores de Lagrange. De forma explícita, las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.14) son

$$\begin{aligned} 2w_M\ddot{q}_1 + r_M\ddot{q}_1 - r_M r_{zb} \sin(q_3) \sin(q_6)\ddot{q}_3 + r_M r_{zb} \cos(q_3) \cos(q_6)\ddot{q}_6 \\ - r_M r_{zb} \cos(q_3) \sin(q_6)\dot{q}_3^2 - 2r_M r_{zb} \sin(q_3) \cos(q_6)\dot{q}_3\dot{q}_6 \\ - r_M r_{zb} \cos(q_3) \sin(q_6)\dot{q}_6^2 = \lambda_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} 2w_M\ddot{q}_2 + r_M\ddot{q}_2 + r_M r_{zb} \cos(q_3) \sin(q_6)\ddot{q}_3 + r_M r_{zb} \sin(q_3) \cos(q_6)\ddot{q}_6 \\ - r_M r_{zb} \sin(q_3) \sin(q_6)\dot{q}_3^2 + 2r_M r_{zb} \cos(q_3) \cos(q_6)\dot{q}_3\dot{q}_6 \\ - \sin(q_3) \sin(q_6)r_M r_{zb}\dot{q}_6^2 = \lambda_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} -r_M r_{zb} \sin(q_3) \sin(q_6)\ddot{q}_1 + 2r_{J_{xx}} \sin(q_6) \cos(q_6)\dot{q}_3\dot{q}_6 \\ - 2r_{J_{zz}} \sin(q_6) \cos(q_6)\dot{q}_3\dot{q}_6 + r_M r_{zb} \cos(q_3) \sin(q_6)\ddot{q}_2 \\ + r_{J_{xx}} \ddot{q}_3 + w_{J_{xx}} \ddot{q}_3 + \frac{1}{2}w_S^2 w_M \ddot{q}_3 \\ - r_{J_{xx}} \cos(q_6)^2 \ddot{q}_3 + r_{J_{zz}} \cos(q_6)^2 \ddot{q}_3 = \lambda_1 \left( \frac{1}{2}w_S \cos q_3 \right) \\ + \lambda_2 \left( \frac{1}{2}w_S \sin q_3 \right) \\ + \lambda_3 \left( \frac{w_R}{w_S} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$J_{yy}\ddot{q}_4 = \tau_1 - \lambda_1(w_R \cos q_3) - \lambda_2(w_R \cos q_3) - \lambda_3\left(\frac{w_R}{w_S}\right) \quad (3.18)$$

$$J_{yy}\ddot{q}_5 = \tau_2 - \lambda_3 \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} r_{J_{yy}}\ddot{q}_6 + r_M r_{zb} \cos(q_3) \cos(q_6)\ddot{q}_1 + \sin(q_3) \cos(q_6)r_M r_{zb}\ddot{q}_2 \\ - r_{J_{xx}} \sin(q_6) \cos(q_6)\dot{q}_3^2 + r_{J_{zz}} \sin(q_6) \cos(q_6)\dot{q}_3^2 - r_M g \sin(q_6)r_{zb} = -\tau_1 - \tau_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Resolviendo para los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$  usando el sistema de ecuaciones (3.15-3.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -\frac{1}{2w_S} \left( 2w_M w_R w_S \sin(q_3)\dot{q}_3(\dot{q}_4 + \dot{q}_5) - 2w_M w_R w_S \cos(q_3)(\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5) \right. \\ \left. + r_M w_R w_S \sin(q_3)\dot{q}_3(\dot{q}_4 + \dot{q}_5) - r_M w_R w_S \cos(q_3)(\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5) \right) \\ + 2r_M r_{zb} w_R \sin(q_3) \sin(q_6)(\ddot{q}_4 - \ddot{q}_5) - 2r_M r_{zb} w_S \cos(q_3) \cos(q_6)\ddot{q}_6 + \\ 2r_M r_{zb} w_S \cos(q_3) \sin(q_6)(\dot{q}_3^2 + \dot{q}_6^2) + 4r_M r_{zb} w_S \sin(q_3) \cos(q_6)\dot{q}_3\dot{q}_6 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 = & -\frac{1}{2w_S} \left( -2w_M w_R w_S \cos(q_3) \dot{q}_3 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) - 2w_M w_R w_S \sin(q_3) (\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5) \right. \\
& \left. - r_M w_R w_S \cos(q_3) \dot{q}_3 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) - r_M w_R w_S \sin(q_3) (\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5) \right) \\
& - 2r_{Mr_{zb}} w_R \cos(q_3) \sin(q_6) (\ddot{q}_4 - \ddot{q}_5) + 2r_{Mr_{zb}} w_S \sin(q_3) \sin(q_6) (\dot{q}_3^2 + \dot{q}_6^2) \\
& - 2r_{Mr_{zb}} w_S \sin(q_3) \cos(q_6) \ddot{q}_6 - 4r_{Mr_{zb}} w_S \cos(q_3) \cos(q_6) \dot{q}_3 \dot{q}_6
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 = & \frac{1}{4w_S^2} w_R \left( \left( -w_S^2 w_R r_M \sin^2(q_3) - 4w_{Rr_{J_{zz}}} \cos^2(q_6) + 4w_{Rr_{J_{xx}}} \cos^2(q_6) \right. \right. \\
& \left. \left. - 8w_R w_{J_{xx}} - 4w_{Rr_{J_{xx}}} \right) \ddot{q}_5 - w_S^2 w_R r_M \sin^2(q_3) \ddot{q}_4 \right) + (8w_R w_{J_{xx}} + 4w_{Rr_{J_{xx}}} \\
& - 4w_{Rr_{J_{xx}}} \cos^2(q_6) + 4w_{Rr_{J_{zz}}} \cos^2(q_6)) \ddot{q}_4 - 2w_S^2 r_{Mr_{zb}} \cos^2(q_3) \cos(q_6) \ddot{q}_6 \\
& - (8r_{J_{zz}} w_S \sin(q_6) \cos(q_6) + 8r_{J_{xx}} w_S \sin(q_6) \cos(q_6)) \dot{q}_3 \dot{q}_6 + 2w_R w_S^2 w_M (\ddot{q}_4 - \ddot{q}_5) \\
& + 2r_{Mr_{zb}} w_R w_S \sin(q_3)^2 \sin(q_6) \dot{q}_3 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) - 2w_S^2 w_R w_M \cos(q_3)^2 (\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5) \\
& + 2r_{Mr_{zb}} w_R w_S \cos(q_3)^2 \sin(q_6) \dot{q}_3 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) - w_S^2 w_R r_M \cos(q_3)^2 (\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5) \\
& + 2w_S^2 r_{Mr_{zb}} \cos^2(q_3) \sin(q_6) (\dot{q}_3^2 + \dot{q}_6^2) - 2w_S^2 w_R w_M \sin^2(q_3) (\ddot{q}_4 + \ddot{q}_5) \\
& - 2w_S^2 r_{Mr_{zb}} \sin^2(q_3) \cos(q_6) \ddot{q}_6 + 2w_S^2 r_{Mr_{zb}} \sin^2(q_3) \sin(q_6) (\dot{q}_3^2 + \dot{q}_6^2)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Una vez que los multiplicadores de Lagrange han sido calculados el modelo matemático para el robot balanceador no holonómico dado por las ecuaciones de Lagrange-d'Alembert (3.14) es

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 = & \frac{1}{2} w_R \cos q_3 \left( \frac{1}{x \cos^4 q_6 + y \cos^2 q_6 + z} (2\alpha \cos^3 q_6 + (\beta + \varepsilon) \cos^2 q_6 + \delta + \zeta + \right. \\
& \left. 2\gamma \cos q_6) \tau_1 + (2\alpha \cos^3 q_6 + (\beta + \varepsilon) \cos^2 q_6 + 2\gamma \cos q_6 + \delta + \zeta) \tau_2 \right) \\
& - \frac{1}{2} \sin q_3 \dot{q}_3 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) + \left( \frac{2}{w \cos^2 q_6 + r} (\theta + (\kappa - \iota) \cos q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6 \right. \\
& \left. + (\kappa - \iota) \sin q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6) \dot{q}_3^2 \right) + 2\theta \sin q_6 \dot{q}_6^2 + \frac{2}{s \cos^2 q_6 + t} \\
& \left( \lambda \cos q_6 \sin q_6 \right) \dot{q}_3 \dot{q}_6 + \frac{2}{o \cos^2 q_6 + q} \left( -2\mu \cos q_6 \sin q_6 (\cos q_3 + \sin q_3) \right)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_2 = & \frac{1}{2} w_R \sin q_3 \left( \frac{1}{x \cos^4 q_6 + y \cos^2 q_6 + z} (2\alpha \cos^3 q_6 + (\beta + \varepsilon) \cos^2 q_6 + \delta + \zeta \right. \\
& \left. + 2\gamma \cos q_6) \tau_1 + (2\alpha \cos^3 q_6 + (\beta + \varepsilon) \cos^2 q_6 + 2\gamma \cos q_6 + \delta + \zeta) \tau_2 \right) \\
& - \frac{1}{2} \cos q_3 \dot{q}_3 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) + \left( \frac{2}{w \cos^2 q_6 + r} (\theta + (\kappa - \iota) \cos q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6 \right. \\
& \left. + (\kappa - \iota) \sin q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6) \dot{q}_3^2 \right) + 2\theta \sin q_6 \dot{q}_6^2 + \frac{2}{s \cos^2 q_6 + t} \\
& \left( \lambda \cos q_6 \sin q_6 \right) \dot{q}_3 \dot{q}_6 + \frac{2}{o \cos^2 q_6 + q} \left( -2\mu \cos q_6 \sin q_6 (\cos q_3 + \sin q_3) \right)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_3 = & \frac{w_R}{w_S (x \cos^4 q_6 + y \cos^2 q_6 + z)} \left( ((\beta - \varepsilon) \cos^2 q_6 + \delta - \zeta) \tau_1 - ((\beta - \varepsilon) \cos^2 q_6 \right. \\
& \left. + \delta - \zeta) \tau_2 \right) - \frac{2}{u \cos^2 q_6 + v} \left( -\eta \sin q_6 \dot{q}_3 (\dot{q}_4 - \dot{q}_5) \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_4 = & \frac{1}{x \cos^4 q_6 + y \cos^2 q_6 + z} \left( (\alpha \cos^3 q_6 + \beta \cos^2 q_6 + \gamma \cos q_6 + \delta) \tau_1 + (\alpha \cos^3 q_6 \right. \\
& \left. + \varepsilon \cos^2 q_6 + \gamma \cos q_6 + \zeta) \tau_2 \right) - \frac{1}{u \cos^2 q_6 + v} \left( -\eta \sin q_6 \dot{q}_3 (\dot{q}_4 - \dot{q}_5) \right) + \\
& \frac{1}{w \cos^2 q_6 + r} \left( \theta \sin q_6 + (\kappa - \iota) \sin q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6 + \right. \\
& \left. (\kappa - \iota) \cos q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6 \right) \dot{q}_3^2 + \\
& 2\theta \sin q_6 \dot{q}_6^2 + \frac{1}{s \cos^2 q_6 + t} \left( \lambda \cos q_6 \sin q_6 \right) \dot{q}_3 \dot{q}_6 + \\
& \frac{1}{o \cos^2 q_6 + q} \left( -2\mu \cos q_6 \sin q_6 (\cos q_3 + \sin q_3) \right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_5 = & \frac{1}{x \cos^4 q_6 + y \cos^2 q_6 + z} \left( (\alpha \cos^3 q_6 + \varepsilon \cos^2 q_6 + \gamma \cos q_6 + \zeta) \tau_1 + (\alpha \cos^3 q_6 \right. \\
& \left. + \beta \cos^2 q_6 + \gamma \cos q_6 + \delta) \tau_2 \right) + \frac{1}{u \cos^2 q_6 + v} \left( -\eta \sin q_6 \dot{q}_3 (\dot{q}_4 - \dot{q}_5) \right) + \\
& \frac{1}{w \cos^2 q_6 + r} \left( \theta \sin q_6 + (\kappa - \iota) \cos q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6 + \right. \\
& \left. (\kappa - \iota) \sin q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6 \right) \dot{q}_3^2 + \\
& 2\theta \sin q_6 \dot{q}_6^2 + \frac{1}{s \cos^2 q_6 + t} \left( \lambda \cos q_6 \sin q_6 \right) \dot{q}_3 \dot{q}_6 + \\
& \frac{1}{o \cos^2 q_6 + q} \left( -2\mu \cos q_6 \sin q_6 (\cos q_3 + \sin q_3) \right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_6 = & \frac{1}{r_{J_{yy}}} \left( -\tau_1 - \tau_2 - \frac{1}{2} r_M r_{zb} w_R \cos q_6 \left( \frac{1}{x \cos^4 q_6 + y \cos^2 q_6 + z} \left( (2\alpha \cos^3 q_6 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. (\beta + \varepsilon) \cos^2 q_6 + 2\gamma \cos q_6 + \delta + \zeta) \tau_1 + (2\alpha \cos^3 q_6 + (\beta + \varepsilon) \cos^2 q_6 \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\gamma \cos q_6 + \delta + \zeta) \tau_2 \right) + \frac{2}{w \cos^2 q_6 + r} \left( \theta + (\kappa - \iota) \cos q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left( \frac{2}{w \cos^2 q_6 + r} (\theta + (\kappa - \iota) \cos q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + (\kappa - \iota) \sin q_3 \cos^2 q_6 \sin q_6 \right) \dot{q}_3^2 \right) \\
& \left. + 2\theta \sin q_6 \dot{q}_6^2 + \frac{2}{s \cos^2 q_6 + t} (\lambda \cos q_6 \sin q_6) \dot{q}_3 \dot{q}_6 \right. \\
& \left. + \frac{2}{o \cos^2 q_6 + q} \left( -2\mu \cos q_6 \sin q_6 (\cos q_3 + \sin q_3) \right) \right) \\
& - r_M r_{zb} \cos q_3 \sin q_3 \sin q_6 \dot{q}_3 (\dot{q}_4 + \dot{q}_5) + \\
& \left. r_{J_{xx}} \sin q_6 \cos q_6 \dot{q}_3^2 + r_M r_{zb} g \sin q_6 - r_{J_{zz}} \sin q_6 \cos q_6 \dot{q}_3^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\alpha &= -2r_M r_{zb} w_R^3 r_{J_{xx}} + 2r_M r_{zb} w_R^3 r_{J_{zz}}, \\
\beta &= -2r_R^2 r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} + r_R^2 r_{J_{zz}} r_{J_{yy}} - r_M^2 r_{zb}^2 w_S^2 w_R^2, \\
\gamma &= 2r_M r_{zb} w_S^2 w_R w_{J_{yy}} + 2r_M r_{zb} w_R^3 r_{J_{xx}} + r_M w_M r_{zb} w_R^3 r_{J_{xx}} + 4r_M r_{zb} w_R^3 r_{J_{xx}}, \\
\delta &= 2w_R^2 r_{J_{yy}} r_{J_{xx}} + w_R^2 r_{J_{yy}} w_M w_S^2 + 4w_R^2 r_{J_{yy}} w_{J_{xx}} + w_S^2 w_R^2 \\
&\quad r_{J_{yy}} r_M + 2w_S^2 w_R^2 w_M r_{J_{yy}} + 4w_{J_{yy}} r_{J_{yy}} w_S^2, \\
\varepsilon &= 2r_R^2 r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} + r_R^2 r_{J_{zz}} r_{J_{yy}} + r_M^2 r_{zb}^2 w_S^2 w_R^2, \\
\zeta &= 2w_R^2 r_{J_{yy}} r_{J_{xx}} + 4w_R^2 r_{J_{yy}} w_{J_{xx}} - w_M w_S^2 w_R^2 r_{J_{yy}},
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{2}r_M r_{zb} w_S w_R^2, & \theta &= r_M r_{zb} w_R r_{J_{yy}}, & \iota &= r_M r_{zb} w_R r_{J_{xx}}, \\ \kappa &= r_M r_{zb} w_R r_{J_{zz}}, & \lambda &= 4r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} + 4r_{J_{zz}} r_{J_{yy}}, & \mu &= r_M^2 g r_{zb}^2 w_R,\end{aligned}$$

$$x = 2r_M^2 r_{zb}^2 w_R^4 r_{J_{xx}} + 2r_M^2 r_{zb}^2 w_R^4 r_{J_{zz}},$$

$$\begin{aligned}y &= -4w_R^4 w_M r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} + 4w_R^4 w_M r_{J_{zz}} r_{J_{yy}} - 2r_M r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} + 2w_R^4 r_M r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} \\ &\quad - 4w_R^4 w_{J_{yy}} r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} + 4w_R^4 w_{J_{yy}} r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} - 2w_M^2 r_{J_{xx}} \\ &\quad r_{zb}^2 w_R^4 - w_M^2 r_{zb}^2 w_R^4 w_M w_S^2 - 4r_M^2 r_{zb}^2 w_R^4 w_{J_{xx}} - 4r_M^2 r_{zb}^2 w_R^4 w_{J_{yy}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= 4w_R^4 r_M r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} + 8w_R^4 w_M w_{J_{xx}} r_{J_{yy}} + 2w_M^2 w_S^2 w_R^4 r_{J_{yy}} + 2w_R^4 r_M r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} \\ &\quad + w_M^2 w_S^2 w_R^4 r_{J_{yy}} + 4w_R^4 r_M w_{J_{xx}} r_{J_{yy}} + 4w_R^2 w_{J_{yy}} r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} \\ &\quad r_{J_{yy}} + 2w_R^2 w_M w_S^2 w_{J_{yy}} r_{J_{yy}} + 8w_R^2 w_{J_{yy}} w_{J_{xx}} r_{J_{yy}} + 4w_{J_{yy}}^2 r_{J_{yy}} w_S^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v &= 2w_R^2 r_{J_{xx}} + w_R^2 w_M w_S^2 + 4w_R^2 w_{J_{xx}} + 2w_S^2 w_{J_{yy}}, & u &= -2w_R^2 r_{J_{xx}} + 2w_R^2 r_{J_{xx}}, \\ o &= r_M^2 r_{zb}^2 w_R^2, & q &= 4w_R^2 w_M r_{J_{xx}} + 2w_R^2 r_M r_{J_{xx}} + 4w_{J_{yy}} r_{J_{yy}}, \\ r &= 2w_R^2 w_M r_{J_{xx}} + w_R^2 r_M r_{J_{xx}} + 2w_{J_{yy}} r_{J_{yy}}, & s &= \frac{1}{2}r_M^2 r_{zb}^2 w_R^2, \\ t &= 2w_R^2 w_M r_{zb} r_{J_{xx}} + w_R^2 r_{zb} r_M r_{J_{xx}} + 2r_{zb} w_{J_{yy}} r_{J_{yy}}, & w &= \frac{1}{2}r_M^2 r_{zb}^2 w_R^2.\end{aligned}$$

### 3.3. El Modelo Transformado

El modelo matemático (3.24-3.29) involucra un gran número de términos, lo que dificulta el análisis de sus propiedades estructurales. Por lo tanto, es conveniente encontrar otra forma de escribir el modelo matemático para este sistema. Una estrategia es usar una transformación basada en el método de retroalimentación de estados estática, el cual puede ser consultado en [17]. El método consiste en redefinir las entradas de control  $u$  como

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v. \quad (3.30)$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in M$ ,  $M$  es la variedad de estados, que para sistemas mecánicos, es el haz tangente  $TQ$ . Así, para sistemas mecánicos, las variables de estado inducidas en  $TQ$  son  $x_1 = q_1, \dots, x_n = q_n, x_{n+1} = \dot{q}_1, \dots, x_{2n} = \dot{q}_n$ ;  $u = (u_1, \dots, u_m)$ ;  $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; y  $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ . En este caso,  $v = (v_1, \dots, v_m)$  representa el “nuevo” vector de control. Aplicando (3.30) al sistema (3.1) se obtiene

$$\dot{x}_i = f_0(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x) \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n f_i(x) \beta_{ij}(x) \right) v_j, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (3.31)$$

El modelo matemático (3.24-3.29) transformado a la forma (3.1) se puede representar como

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ f_0^7(x) \\ f_0^8(x) \\ f_0^9(x) \\ f_0^{10}(x) \\ f_0^{11}(x) \\ f_0^{12}(x) \end{pmatrix} + \tau_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^7(x) \\ f_1^8(x) \\ f_1^9(x) \\ f_1^{10}(x) \\ f_1^{11}(x) \\ f_1^{12}(x) \end{pmatrix} + \tau_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_2^7(x) \\ f_2^8(x) \\ f_2^9(x) \\ f_2^{10}(x) \\ f_2^{11}(x) \\ f_2^{12}(x) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Aplicando retroalimentación de estados estática se pueden redefinir las entradas de control  $\tau_1$  y  $\tau_2$  de tal manera que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_2. \quad (3.33)$$

Se eligen las variables de estado  $\dot{x}_{10}$  y  $\dot{x}_{11}$  dado que corresponden con  $\ddot{q}_4$  y  $\ddot{q}_5$  que representan la aceleración angular resultado de aplicar las entradas de control, que son  $\tau_1$  y  $\tau_2$ . Así, retroalimentando se pueden redefinir las entradas  $\tau_1$  y  $\tau_2$  como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_0^{10}(x) \\ -f_0^{11}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1^{10}(x) & f_2^{10}(x) \\ f_1^{11}(x) & f_2^{11}(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_0^{10}(x) \\ -f_0^{11}(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde

$$\begin{aligned} -f_0^{10}(x) &= \alpha_1(x)f_0^{10}(x) + \alpha_2(x)f_2^{10}(x) \\ -f_0^{11}(x) &= \alpha_2(x)f_0^{11}(x) + \alpha_2(x)f_2^{11}(x). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Así, sustituyendo (3.34) en el modelo (3.32) y simplificando las expresiones se obtiene

el modelo matemático transformado para el robot balanceador no holonómico

$$f_0(x) = \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ -\frac{1}{2}w_R \sin x_3 x_9 x_{10} - \frac{1}{2}w_R \sin x_3 x_9 x_{11} \\ -\frac{1}{2}w_R \cos x_3 x_9 x_{10} - \frac{1}{2}w_R \cos x_3 x_9 x_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_1(x) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

donde

$$h(x) = \frac{x_9^2 r_{J_{xx}} \sin 2x_6 - r_{J_{zz}} x_9^2 \sin 2x_6 + 2 \sin x_6 r_M w_R r_{zb} x_{12}^2 + 2 \sin x_6 r_M w_R r_{zb} x_9^2 + 2 \sin x_6 r_M g r_{zb}}{2w_R \cos x_6 r_{zb} r_M + 2r_{J_{yy}}}$$

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}w_R \cos x_3 \\ \frac{1}{2}w_R \sin x_3 \\ \frac{w_R}{w_S} \\ 1 \\ 0 \\ h_2(x_6) \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}w_R \cos x_3 \\ \frac{1}{2}w_R \sin x_3 \\ -\frac{w_R}{w_S} \\ 0 \\ 1 \\ h_2(x_6) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

donde

$$h_2(x_6) = \frac{-w_R \cos x_6 r_{zb} r_M - 2w_R^2 w_M - 2w_{J_{yy}} - w_R^2 r_M}{2w_R \cos x_6 r_{zb} r_M + 2r_{J_{yy}}}$$

Las “nuevas” entradas de control  $v_1$  y  $v_2$  son calculadas a partir de componentes del sistema “original”, es decir, dependen de los estados del sistema. De este modo, cuando se requiere modificar las nuevas entradas de control, esta modificación se transforma de manera inversa para obtener los valores requeridos en las entradas originales, esto es, las señales de control para los actuadores que aplican el par sobre cada una de las ruedas del robot.

Como consecuencia de aplicar la retroalimentación de estados estática, en este caso, los campos vectoriales (3.36-3.37) que describen la dinámica del robot balanceador no holonómico pueden escribirse con menos términos que el modelo matemático (3.24-3.29), lo que se estima facilitará las operaciones involucradas en el análisis de las propiedades estructurales del sistema, así como el diseño de leyes de control.

### 3.4. Modelo con Conexión Afín

Esta sección está basada en la teoría desarrollada por Lewis y Murray en [12] y [13]. Esta teoría se enfoca en sistemas mecánicos considerando los estados iniciales con velocidad cero y el conjunto de *configuraciones* alcanzables en lugar del conjunto de *estados* alcanzables. Otra característica, es que los modelos matemáticos de sistemas mecánicos expresados en términos del formalismo de una conexión afín facilitan la interpretación geométrica adecuada de los sistemas mecánicos. Sea  $\mathcal{X}(Q)$  el conjunto de campos vectoriales definidos en la variedad de configuraciones  $Q$ . Una conexión afín definida en  $Q$  es un mapeo  $\nabla : \mathcal{X}(Q) \times \mathcal{X}(Q) \rightarrow \mathcal{X}(Q)$ ,  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  que satisface:

- i)  $\nabla$  es bilineal con respecto a  $\mathbb{R}$
- ii)  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$  para todos  $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$  y  $f \in C^\infty(Q)$
- iii)  $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (\mathcal{L}_X f)Y$  para todos  $X, Y \in \mathcal{X}(Q)$  y  $f \in C^\infty(Q)$ .

Una curva  $c : [a, b] \rightarrow Q$  se dice ser una geodésica de  $\nabla$  si  $\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0$ . En la ecuación anterior se debe considerar que  $\dot{c}(t)$  no es un campo vectorial. La interpretación adecuada de la expresión se puede consultar en [13]. Sea  $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_m\}$  el conjunto de campos vectoriales sobre  $Q$  obtenidos a partir de 1-formas diferenciales que representan las fuerzas externas valuadas en  $\Omega(q)$ , y sea  $\mathcal{G}$  la métrica definida en  $Q$  dada por la energía cinética. Para un sistema mecánico, las ecuaciones que describen su dinámica están dadas por

$$\nabla_{\dot{c}(t)}^{\mathcal{G}} \dot{c}(t) = -\text{grad}(V) + u_i(t)Y_i(c(t)) \quad (3.38)$$

El mapeo  $\mathcal{P} : TQ \rightarrow \mathcal{D}$  es la proyección ortogonal de  $\mathcal{G}$  del haz tangente  $TQ$  hacia la distribución de restricciones  $\mathcal{D}_q$ . Para un sistema mecánico sujeto a restricciones determinadas por  $\mathcal{D}_q$  las ecuaciones que describen su dinámica están dadas por

$$\overline{\nabla}_{\dot{c}(t)}^{\mathcal{G}} \dot{c}(t) = -\mathcal{P}(\text{grad}(V)) + u_i(t)\mathcal{P}(Y_i(c(t))) \quad (3.39)$$

donde  $\dot{c}(t) \in \Delta_{c(t)}$ . La Ecuación (3.39) tiene una representación equivalente a la forma (3.1), esto es

$$\dot{v}(t) = S(v(t)) + u^a(t)Y_a^{lift}(v(t)) \quad (3.40)$$

en  $TQ$ , donde  $S$  es el “spray” geodésico asociado con  $\nabla$ .  $S(v(t))$  es un campo vectorial de segundo orden sobre  $TQ$ ,  $v(t)$  es una curva en  $TQ$  y el levantamiento vertical de un campo vectorial  $X$  sobre  $Q$  está definido como

$$X^{lift}(v_q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v_x + tX(x)). \quad (3.41)$$

Para el robot balanceador no holonómico, la variedad de configuraciones es  $Q = SE(2) \times \mathbb{T}^3$  y la métrica  $\mathcal{G}$  viene determinada por la energía cinética y dada por

$$[\mathcal{G}(q)] = \begin{bmatrix} 2w_M + r_M & 0 & -\mathcal{J}_{13} & 0 & 0 & \mathcal{J}_{16} \\ 0 & 2w_M + r_M & \mathcal{J}_{23} & 0 & 0 & \mathcal{J}_{26} \\ -\mathcal{J}_{31} & \mathcal{J}_{32} & \mathcal{J}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{J_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{J_{yy}} & 0 \\ \mathcal{J}_{61} & \mathcal{J}_{62} & 0 & 0 & 0 & r_{J_{yy}} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

donde

$$\mathcal{J}_{33} = r_{J_{zz}} \cos^2 q_6 + 2w_{J_{xx}} + \frac{1}{2}w_S^2 w_M + r_{J_{xx}} - r_{J_{xx}} \cos^2 q_6$$

$$\mathcal{J}_{13} = \mathcal{J}_{31} = r_M r_{zb} \sin q_3 \sin q_6 \quad \mathcal{J}_{16} = \mathcal{J}_{61} = r_M r_{zb} \cos q_3 \cos q_6$$

$$\mathcal{J}_{23} = \mathcal{J}_{32} = r_M r_{zb} \cos q_3 \sin q_6 \quad \mathcal{J}_{26} = \mathcal{J}_{62} = r_M r_{zb} \sin q_3 \cos q_6$$

La función de energía potencial es  $V(q) = -r_M r_{zb} g \sin q_6$ , las fuerzas generalizadas externas están dadas por la Ecuación (3.13) y la distribución de restricciones está definida por la Ecuación (3.11).

Para el robot balanceador no holonómico el modelo matemático al nivel de configuraciones está dado por la Ecuación (3.39) donde:

$$\mathcal{P}(\text{grad}(V(x))) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2 \sin x_6 r_M g r_{zb}}{2w_R \cos x_6 r_{zb} r_M + 2r_{Jyy}} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathcal{P}(Y_1(x)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}w_R \cos x_3 \\ \frac{1}{2}w_R \sin x_3 \\ \frac{w_R}{w_S} \\ 1 \\ 0 \\ h_2(x_6) \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}(Y_2(x)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}w_R \cos x_3 \\ \frac{1}{2}w_R \sin x_3 \\ -\frac{w_R}{w_S} \\ 0 \\ 1 \\ h_2(x_6) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Los campos vectoriales  $\mathcal{P}(\text{grad}(V(x)))$ ,  $\mathcal{P}(Y_1(x))$ , y  $\mathcal{P}(Y_2(x))$  en  $Q$  fueron obtenidos a partir de los campos vectoriales (3.36) y (3.37) en  $TQ$ .

### 3.5. El Modelo Reducido

Esta sección explora las simetrías que exhibe el robot balanceador no holonómico. Considerando el grupo de Lie  $G = SE(2) \times \mathbb{T}^2$  y la variedad de configuraciones  $Q = SE(2) \times \mathbb{T}^3$ , sea  $\Phi : G \times Q \rightarrow Q$  el mapeo definido por

$$\Phi(g, q) = (q_1 \cos g_3 - q_2 \sin g_3 + g_1, q_1 \sin g_3 + q_2 \cos g_3 + g_2, q_3 + g_3, q_4 + g_4, q_5 + g_5, q_6). \quad (3.45)$$

El mapeo  $\Phi$  es una acción por la izquierda de  $G$  sobre  $Q$  puesto que satisface  $\Phi(e, x) = x$  y  $\Phi(g^2(\Phi(g^1, x))) = \Phi(g^2 \star g^1, x)$  para toda  $g_1, g_2 \in G$  y  $x \in Q$  ( $e$  es la identidad en  $G$ ). En efecto, considerando el elemento identidad en el grupo especial Euclidiano

$SE(2) \times \mathbb{T}^2$  y  $q \in Q$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi(e, q) &= (q_1 \cos 0 - q_2 \sin 0 + 0, q_1 \sin 0 + q_2 \cos 0 + 0, \\ & q_3 + 0, q_4 + 0, q_5 + 0, q_6) = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = q. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Por otro lado, sean  $g^1, g^2 \in Q$ , entonces

$$\begin{aligned} \Phi(g^1, q) &= (q_1 \cos g_3^1 - q_2 \sin g_3^1 + g_1^1, q_1 \sin g_3^1 + q_2 \cos g_3^1 + g_2^1, \\ & q_3 + g_3^1, q_4 + g_4^1, q_5 + g_5^1, q_6). \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \Phi(g^2, (g^1, q)) &= (q_1 \cos(g_3^1 + g_3^2) - q_2 \sin(g_3^1 + g_3^2) + g_1^1 + g_1^2, q_1 \sin(g_3^1 + g_3^2) \\ & + q_2 \cos(g_3^1 + g_3^2) + g_2^1 + g_2^2, q_3 + g_3^1 + g_3^2, q_4 + g_4^1 + g_4^2, \\ & q_5 + g_5^1 + g_5^2, q_6) = \Phi(g^1 + g^2, q) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Por lo tanto,  $\Phi$  es una acción suave por la izquierda. El mapeo tangente de la acción por la izquierda  $\Phi$  es llamada la acción levantada  $\Phi^T : G \times TQ \rightarrow TQ$  definida como

$$\Phi^T(g, v_x) = T_x \Phi_g(v_x).$$

$\Phi^T$  es también una acción por la izquierda dado que satisface las condiciones para ser una acción por la izquierda. La acción por la izquierda de  $\Phi^T$  está dada por

$$\begin{aligned} \Phi^T(g, x) &= (x_1 \cos g_3 - x_2 \sin g_3 + g_1, x_1 \sin g_3 + x_2 \cos g_3 + g_2, \\ & x_3 + g_3, x_4 + g_4, x_5 + g_5, x_6, x_7 \cos g_3 - x_8 \sin g_3, x_7 \cos g_3 + x_8 \sin g_3, \\ & x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Para evaluar si la acción suave por la izquierda (3.45) es una simetría del robot balanceador no holonómico se debe mostrar la invarianza de los objetos geométricos que lo conforman, esto es, la métrica (3.42), la distribución (3.11) y los campos vectoriales (3.36 - 3.37).

$$\Phi_g^* \mathcal{G} = \left[ \frac{\partial \Phi_g(q)}{\partial q^i} \right]^t [\mathcal{G}(\Phi_g(q))] \left[ \frac{\partial \Phi_g(q)}{\partial q^i} \right] = [\mathcal{G}(q)], \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.50)$$

$$\Phi_g^* \mathcal{G} = \begin{bmatrix} \cos g_3 & \sin g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin g_3 & \cos g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & 0 & \mathcal{G}_{13} & 0 & 0 & \mathcal{G}_{16} \\ 0 & \mathcal{G}_{22} & \mathcal{G}_{23} & 0 & 0 & \mathcal{G}_{26} \\ \mathcal{G}_{31} & \mathcal{G}_{32} & \mathcal{G}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{J_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{J_{yy}} & 0 \\ \mathcal{G}_{61} & \mathcal{G}_{62} & 0 & 0 & 0 & r_{J_{yy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos g_3 & -\sin g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin g_3 & \cos g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde las entradas  $\mathcal{G}_{ij} \neq 0$  en la matriz que representa la métrica  $\mathcal{G}$  son

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{11} &= \mathcal{G}_{22} = 2w_M + r_M \\
\mathcal{G}_{11} &= \mathcal{G}_{22} = 2w_M + r_M \\
\mathcal{G}_{13} &= \mathcal{G}_{31} = -r_M r_{zb} \sin(g_3 + q_3) \sin(q_6) \\
\mathcal{G}_{23} &= \mathcal{G}_{32} = r_M r_{zb} \cos(g_3 + q_3) \sin(q_6) \\
\mathcal{G}_{16} &= \mathcal{G}_{61} = r_M r_{zb} \cos(g_3 + q_3) \cos(q_6) \\
\mathcal{G}_{26} &= \mathcal{G}_{62} = r_M r_{zb} \sin(g_3 + q_3) \cos(q_6) \\
\mathcal{G}_{33} &= 2w_{J_{xx}} + \cos^2(q_6) r_{J_{zz}} + \frac{1}{2} w_M w_S^2 - \cos^2(q_6) r_{J_{xx}} + r_{J_{xx}}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\Phi_g^* \mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & 0 & \mathcal{G}_{13} & 0 & 0 & \mathcal{G}_{16} \\ 0 & \mathcal{G}_{22} & \mathcal{G}_{23} & 0 & 0 & \mathcal{G}_{26} \\ \mathcal{G}_{31} & \mathcal{G}_{32} & \mathcal{G}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{J_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{J_{yy}} & 0 \\ \mathcal{G}_{61} & \mathcal{G}_{62} & 0 & 0 & 0 & r_{J_{yy}} \end{bmatrix} = \mathcal{G}$$

donde las entradas  $\mathcal{G}_{ij} \neq 0$  están dadas por 3.51. Se observa que  $\Phi_g^* \mathcal{G} = \mathcal{G}$  y por lo tanto la métrica es invariante bajo la acción suave por la izquierda (3.45). Para el caso de la distribución (3.11) se realizan los siguientes cálculos

$$T_q \Phi_g(\mathcal{D}_q) = \left[ \frac{\partial \Phi_g(q)}{\partial q^i} \right] [\mathcal{D}_q] = [\mathcal{D}_{\Phi_g(q)}] \quad i = 1, \dots, 6 \tag{3.52}$$

considerando que

$$\frac{\partial \Phi_g(q)}{\partial q^i} = \begin{bmatrix} \cos g_3 & -\sin g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin g_3 & \cos g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

el resultado de esta operación es

$$[\mathcal{D}_{\Phi_g(q)}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} w_S \cos q_3 & \frac{1}{2} w_S \cos q_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{w_R}{w_S} & \frac{w_R}{w_S} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} w_S \sin q_3 & \frac{1}{2} w_S \sin q_3 \end{pmatrix} = [\mathcal{D}_q] \tag{3.53}$$



por lo que se concluye que la distribución (3.11) es invariante bajo la acción suave por la izquierda (3.45). La invarianza de los campos de control y de deriva se muestra a través de los siguiente cálculos

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{T*} f_0(x) &= \left[ \frac{\partial \Phi_g^T(x)}{\partial x^j} \right] f_0(x) \quad j = 0, \dots, 12 \\
\Phi_g^{T*} f_1(x) &= \left[ \frac{\partial \Phi_g^T(x)}{\partial x^j} \right] f_1(x) \quad j = 0, \dots, 12 \\
\Phi_g^{T*} f_2(x) &= \left[ \frac{\partial \Phi_g^T(x)}{\partial x^j} \right] f_2(x) \quad j = 0, \dots, 12
\end{aligned} \tag{3.54}$$

y considerando que

$$\frac{\partial \Phi_g^T(x)}{\partial x^j} = \begin{bmatrix} \cos g_3 & -\sin g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin g_3 & \cos g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos g_3 & -\sin g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin g_3 & \cos g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

al realizar esta operación se obtiene

$$\Phi_g^{T*} f_0(x) = \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ -\frac{1}{2}w_R \sin x_3 \ x_9 x_{10} - \frac{1}{2}w_R \sin x_3 \ x_9 x_{11} \\ -\frac{1}{2}w_R \cos x_3 \ x_9 x_{10} - \frac{1}{2}w_R \cos x_3 \ x_9 x_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_1(x) \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

donde

$$h(x) = \frac{x_9^2 r_{J_{xx}} \sin 2x_6 - r_{J_{zz}} x_9^2 \sin 2x_6 + 2 \sin x_6 r_M w_R r_{zb} x_{12}^2 + 2 \sin x_6 r_M w_R r_{zb} x_9^2 + 2 \sin x_6 r_M g r_{zb}}{2w_R \cos x_6 r_{zb} r_M + 2r_{J_{yy}}}$$

$$\Phi_g^{T*} f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} w_R \cos x_3 \\ \frac{1}{2} w_R \sin x_3 \\ \frac{w_R}{w_S} \\ 1 \\ 0 \\ h_2(x_6) \end{pmatrix}, \quad \Phi_g^{T*} f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} w_R \cos x_3 \\ \frac{1}{2} w_R \sin x_3 \\ -\frac{w_R}{w_S} \\ 0 \\ 1 \\ h_2(x_6) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

donde

$$h_2(x_6) = \frac{-w_R \cos x_6 r_{zb} r_M - 2w_R^2 w_M - 2w_{J_{yy}} - w_R^2 r_M}{2w_R \cos x_6 r_{zb} r_M + 2r_{J_{yy}}}$$

donde se puede observa que  $\Phi_g^{T*} f_0(x) = f_0(x)$ ,  $\Phi_g^{T*} f_1(x) = f_1(x)$  y  $\Phi_g^{T*} f_2(x) = f_2(x)$  y por lo tanto se concluye que los campos de control y de deriva son invariantes bajo la acción suave por la izquierda (3.45).

Una vez que se ha mostrado que los objetos geométrico que conforman al sistema son invariantes bajo la acción suave por la izquierda 3.45 se tiene que ésta es una simetría para el robot balanceador no holonómico.

Considerando los campos vectoriales (3.13-3.14), en la Sección 3.3 fueron definidas 12 variables de estado para esos campos vectoriales. Sin embargo, las variables de estado  $x_4 = q_4$  y  $x_5 = q_5$  no aparecen en campo vectorial alguno aunque sus derivadas sí aparecen. Así, estas dos variables son eliminadas de este modelo matemático. Por otro lado, considerando la dinámica del chasis únicamente, ésta se puede reducir a su modelo cinemático y por lo tanto las variables de estado  $x_7$ ,  $x_8$ , y  $x_9$  son eliminadas.

Entonces, redefiniendo las variables de estado como

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1, & x_2 &= q_2, & x_3 &= q_3, & x_4 &= q_6, \\ x_5 &= \dot{q}_4, & x_6 &= \dot{q}_5, & x_7 &= \dot{q}_6. \end{aligned}$$

el modelo reducido para el robot balanceador no holonómico es

$$f_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}w_R \cos x_3(x_5 + x_6) \\ \frac{1}{2}w_R \sin x_3(x_5 + x_6) \\ \frac{w_R}{w_S}(x_5 - x_6) \\ x_7 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_1(x) \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \alpha_2(x) \end{pmatrix} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha_2(x) \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= \frac{w_R^2}{w_S^2(2r_M w_R r_{zb} \cos x_4 + 2r_{J_{yy}})} \left( r_{J_{zz}} \sin(2x_4)(x_5 - x_6)^2 + 2r_M g r_{zb} \sin x_4 \right. \\ &\quad \left. + r_{J_{xx}} \sin(2x_4)(x_5 - x_6)^2 - r_M r_{zb} \sin x_4 (x_5 - x_6)^2 + r_M w_R r_{zb} x_7^2 \sin x_4 \right) \\ \alpha_2(x) &= \frac{r_M w_R r_{zb} \cos x_4 - w_R^2 r_M - 2w_{J_{yy}} - 2w_R^2 w_M}{2r_M w_R r_{zb} \cos x_4 + 2r_{J_{yy}}} \end{aligned}$$

### 3.6. Modelos matemáticos en la literatura para el robot balanceador no holonómico

En esta sección se describen los modelos matemáticos reportados por Grasser *et al.* en [7], Kim *et al.* en [9] y Mazur *et al.* en [18]. Cada uno de los mecanismos modelados por estos investigadores están conformados por dos ruedas unidas por una varilla desde

sus centros geométricos, la cual soporta un cuerpo que puede pivotar con respecto a ella. Los tres mecanismo, aunque diferentes en su construcción, tienen la similitud de que su modelo fue derivado considerando que idealmente tienen la forma mostrada en la Figura 3.4. Sin embargo, cada uno de los autores sigue una metodología distinta para obtener el modelo matemático que representa su dinámica.

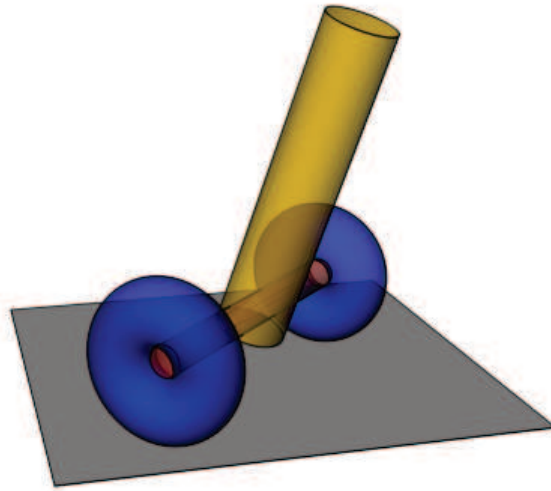


Figura 3.4: Robot balanceador no holonómico

### Modelo matemático de Grasser

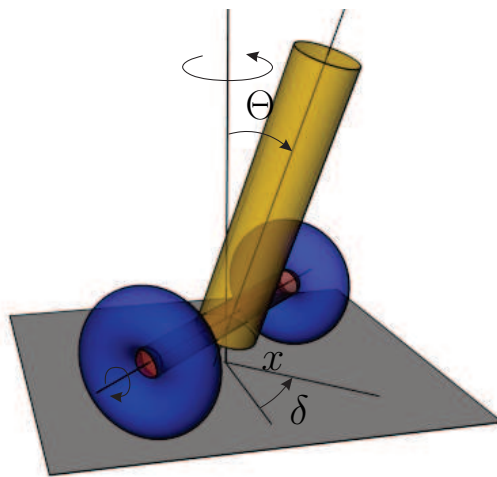


Figura 3.5: Robot balanceador no holonómico

El modelo desarrollado por Grasser *et al.* en [7] tiene seis variables de estado y es un mecanismo con tres grados de libertad. Los variables de configuración son  $x_{RM}$  que representa la posición,  $\Theta_p$  que parametriza el giro del cuerpo del robot alrededor de la varilla que une las ruedas, y  $\delta$  que caracteriza el ángulo de giro alrededor del eje vertical. Las variables de estado se completan con las velocidades respectivas de cada una de las variables de configuración, es decir, por  $v_{RM}$  que denota la velocidad de  $x_{RM}$ ,  $\omega_p$  es la velocidad de  $\Theta_p$  y  $\dot{\delta}$ . Las entradas de control son dos pares  $C_L$  y  $C_R$  aplicado de manera independiente a cada una de las ruedas. El modelo se deriva calculando las fuerzas y pares que actúan en el sistema de forma independiente para ser sumadas en diagrama de cuerpo libre. El modelo derivado por Grasser *et al.* en [7] para la rueda es

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{RL}M_{RL} &= f_{dRL} - H_L + H_{TL} \\ \ddot{y}_{RL}M_{RL} &= V_{TL} - M_{RL}g - V_L \\ \ddot{\Theta}_{RL}J_{RL} &= C_L - H_{TL}R.\end{aligned}\tag{3.59}$$

y para el chasis

$$\begin{aligned}\ddot{x}_P M_P &= f_{dP} + H_R + H_L \\ \ddot{y}_P M_P &= V_R + V_L - M_P g + F_{C\Theta} \\ \ddot{\Theta}_P J_{P\Theta} &= (V_R + V_L)L \sin \Theta_P - (H_L + H_R)L \cos \Theta_P - C_L + C_R \\ \ddot{\delta} &= \frac{D}{2}(H_L - H_R)\end{aligned}\tag{3.60}$$

cada uno de los parámetros  $H_L$ ,  $H_R$ ,  $H_{TL}$ ,  $H_{TR}$ ,  $V_L$ ,  $V_R$ ,  $V_{TL}$  y  $V_{TR}$  representan fuerzas de reacción entre cada cuerpo. El modelo linealizado en el punto de operación ( $x_{RM} = 0, \Theta_P = 0, \delta = 0$ ) es

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{RM} \\ \dot{v}_{RM} \\ \dot{\Theta}_P \\ \dot{\omega}_P \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{RM} \\ v_{RM} \\ \Theta_P \\ \omega_P \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L \\ C_R \end{pmatrix}\tag{3.61}$$

### Modelo matemático de Kim

Para este mecanismo se tienen tres grados de libertad y seis variables de estado. Las variables de estado son  $(x, \psi, \phi, \dot{x}, \dot{\psi}, \dot{\phi})$ , las primeras tres variables representan coordenadas locales para la variedad de configuraciones y caracterizan la posición, orientación con respecto al eje vertical y la orientación del cuerpo con respecto al eje

que une a las ruedas respectivamente. Las otras tres variables de estado representan las velocidades de las variables de configuración. Para derivar el modelo matemático, Kim *et al.* en [9], utilizan el método de Kane. En resumen, con el método de Kane se calcula la cinemática del sistema, y así derivar el modelo que representa la dinámica del sistema. El modelo derivado por Kim *et al.* es

$$\begin{aligned}
3(m_c + m_s)\ddot{x} - m_s d \cos \phi \ddot{\phi} + m_s d \sin \phi (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) &= -\frac{f}{R} \alpha_3 + \beta_3 R \\
((3L^2 + \frac{1}{2}R^2)m_c + m_s d^2 \sin^2 \phi + I_2)\ddot{\psi} + m_s d^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \dot{\phi} \dot{\psi} &= \frac{L}{R}(\alpha_3 - \beta_3) \\
m_s d \cos \phi \ddot{x} + (-m_s d^2 - I_3)\ddot{\phi} + m_s d^2 \sin \phi \cos \phi \dot{\phi}^2 + m_s g d \sin \phi &= \alpha_3 + \beta_3
\end{aligned} \tag{3.62}$$

A partir de este modelo, se obtiene el modelo linealizado

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.63}$$

donde

$$\begin{aligned}
x &= (x \quad \dot{x} \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad \phi \quad \dot{\phi})^t & u &= (\alpha_3 \quad \beta_3)^t, \\
A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{m_s^2 d^2 g}{3m_c I_3 + 3m_c m_s d^2 + m_s I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_s d g (3m_c + m_s)}{3m_c I_3 + 3m_c m_s d^2 + m_s I_3} & 0 \end{pmatrix} \\
B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-(m_s d^2 + I_3)/R - m_s d}{3m_c I_3 + 3m_c m_s d^2 + m_s I_3} & \frac{-(m_s d^2 + I_3)/R - m_s d}{3m_c I_3 + 3m_c m_s d^2 + m_s I_3} \\ 0 & 0 \\ \frac{2L/R}{3m_c I_3 + 3m_c m_s d^2 + m_s I_3} & \frac{-2L/R}{3m_c I_3 + 3m_c m_s d^2 + m_s I_3} \\ 0 & 0 \\ \frac{-m_s d/R - 3m_c m_s}{3m_c I_3 + 3m_c m_s d^2 + m_s I_3} & \frac{-m_s d/R - 3m_c m_s}{3m_c I_3 + 3m_c m_s d^2 + m_s I_3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## Modelo matemático de Mazur

Mazur *et al.* proponen descomponer al mecanismo en dos subsistemas, uno que considera la dinámica de las ruedas junto con la “plataforma” que sostiene al cuerpo del mecanismo y otro que es considerado como un péndulo invertido. Para cada uno de ellos se proponen coordenadas generalizadas, cinco para el primer subsistema y una para el segundo, dando un total de seis coordenadas generalizadas, estas coordenadas

son

$$q_m = (x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2 \ \alpha) \quad (3.64)$$

La dupla  $(x, y)$  caracteriza la posición en el plano del mecanismo,  $(\phi_1, \phi_2)$  caracterizan la orientación de cada una de las ruedas,  $\theta$  parametriza el ángulo del mecanismo con respecto al eje vertical y  $\alpha$  es el ángulo del cuerpo con respecto al eje que une a las ruedas. En total se tienen 12 variables de estado. Las restricciones se modelan en la forma Pfaff

$$A(q_m)\dot{q}_m$$

y el modelo derivado usando el principio de Lagrange-d'Alembert tiene la forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = A(q_m)\lambda + B(q)\tau \quad (3.65)$$

# Capítulo 4

## Algunas Propiedades Estructurales del Robot Balanceador no Holonómico

En este capítulo se analizan algunas de las propiedades estructurales del robot balanceador no holonómico. Los modelos obtenidos para este sistema en el Capítulo 3 serán usados para este propósito. Así, el modelo transformado (3.36-3.37) es usado para evaluar controlabilidad, accesibilidad local, y accesibilidad local fuerte; el modelo expresado en términos de una conexión afín (3.43-3.44) es usado para evaluar accesibilidad local en configuraciones y controlabilidad local en tiempo pequeño (*STLCC*), y en el modelo reducido (3.57-3.58) se evalúa accesibilidad local. La primera sección de este capítulo resume las propiedades estructurales para un sistema no lineal; para mayores detalles el lector puede consultar [1], [3], [11] y [17]. En la Sección 4.2 serán reportados los resultados obtenidos de la evaluación de algunas de las propiedades estructurales del robot balanceador no holonómico. En la Sección 4.3 se presenta la solución a un problema de control muy simple, consistente en la estabilización local de una subvariedad del espacio de estados del sistema.

### 4.1. Propiedades Estructurales de los Sistemas no Lineales

En esta sección se revisan algunos de los conceptos de la teoría de control que serán aplicados en el robot balanceador no holonómico. Un sistema mecánico no holonómico puede ser expresado como  $(Q, \mathcal{G}, V, \Omega, \Delta)$ , el cual tiene una representación equivalente



como un sistema suave de la forma

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u^i f_i(x(t)). \quad (4.1)$$

Uno de los problemas básicos estudiados en teoría de control concierne a la controlabilidad del sistema bajo estudio. Solucionar este problema significa encontrar las condiciones bajo las cuales el sistema es controlable. Específicamente, el sistema (4.1) es llamado controlable si, para cualesquiera dos puntos  $x_0, x_1 \in M$ , existe un tiempo  $T$ ,  $0 < T < \infty$ , y una función de control admisible  $u : [0, T] \rightarrow U$  tal que sistema (4.1) alcanza el punto  $x_1$  desde el punto inicial  $x_0$  en tiempo  $T$ . Dado un conjunto  $U \in \mathbb{R}^m$ , una función continua por pedazos  $u(t)$  definida en un intervalo  $[t_0, t_1]$  se dice ser una función admisible de control si  $u(t) \in U$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Para los sistemas mecánicos  $M = TQ$ .

Un primer paso para evaluar la controlabilidad del sistema (4.1), que en general puede ser no lineal, es considerar su aproximación lineal en un punto dado. De hecho, el resultado reportado en [17] en el Capítulo 3, Proposición 3.3, establece que si la linealización del sistema (4.1) en el punto  $x_0$  en  $M$  es un sistema lineal controlable, entonces una vecindad de  $x_0$  está contenida en el conjunto de puntos alcanzables desde  $x_0$  para el sistema (4.1).

Algunas veces el método de linealización no es concluyente, esto es, a pesar de que la aproximación lineal del sistema (4.1) resultara ser no controlable, esto no implica que el sistema (4.1) no lo sea. Para casos como este se requiere el uso de otras herramientas que permitan conocer las propiedades estructurales del sistema (4.1). Algunas de las propiedades estructurales del sistema (4.1), relevantes para este trabajo, son: Accesibilidad local, accesibilidad local fuerte, accesibilidad local en configuraciones y controlabilidad local en configuraciones en tiempo pequeño (*STLCC*). En los párrafos siguientes las definiciones concernientes a estos conceptos serán revisadas.

Sea  $M$  una variedad diferenciable representando el espacio de estados del sistema (4.1). La curva  $c : (0, T] \rightarrow M$  que satisface al sistema (4.1) junto con una función admisible de control  $u$  es llamada una trayectoria controlada del sistema (4.1). Sea  $R^V(x_0, T)$  el conjunto de puntos alcanzables  $x_1 \in M$  tal que la trayectoria controlada  $x(t)$  permanece en una vecindad  $V$  de  $x_0$  para toda  $t \in [0, T]$  y  $x(T) = x_1$ . El conjunto alcanzable que contiene los puntos  $x_1$  para  $t \leq T$  es denotado como  $R_T^V(x_0) = \bigcup_{\tau \leq T} R^V(x_0, \tau)$ . El sistema (4.1) se dice ser *localmente accesible* desde  $x_0 \in M$  si un conjunto abierto no vacío de  $M$  está en la intersección del conjunto alcanzable  $R_T^V(x_0)$  y  $M$  para todas las vecindades  $V$  de  $x_0$  y todo tiempo  $T > 0$ . Entonces, si para todo punto  $x_0 \in M$  se

satisface lo anterior, entonces el sistema es llamado *localmente accesible*.

Una forma de evaluar si el sistema (4.1) es localmente accesible es calculando la distribución de accesibilidad  $C(x)$  y verificar si tiene rango máximo en el punto  $x$ , esto es, si  $\dim C(x) = n$  para toda  $x \in M$ , entonces el sistema es localmente accesible.

En el caso de que  $\dim C(x) < n$ , por el Teorema de Frobenius una vecindad  $W$  de  $x_0$  puede ser encontrada de forma que el sistema restringido a una distribución de grado  $m < n$  es localmente accesible. Esto es importante porque algunos sistemas no lineales tienen la característica de no ser localmente accesible para todos los estados que lo componen.

Si el sistema (4.1) es localmente accesible y, además, existe un tiempo  $T > 0$  tal que el punto  $x_0$  está en el interior del conjunto alcanzable  $R_T^V(x_0)$  para cada  $t \in (0, T]$  y para toda vecindad  $V$  de  $x_0$ , entonces el Sistema (4.1) es llamado *localmente controlable en tiempo pequeño (STLC)*. Desafortunadamente, no existen resultados en la literatura que den las condiciones necesarias y suficientes para demostrar que un sistema es *STLC*. No obstante, Sussman provee una condición suficiente que es usada por Lewis and Murray [13] para establecer un resultado más simple. Sea  $\mathfrak{F} = \{f_0, \dots, f_m\}$  el conjunto de campos vectoriales de control y de deriva en  $M$ . Un campo vectorial  $\hat{f}$  obtenido a partir de la operación del corchete de Lie combinando campos vectoriales de  $\mathfrak{F}$  es *malo* si  $\hat{f}$  es el resultado de iterar un número par de campos vectoriales  $\{f_1, \dots, f_m\}$  y un número impar de  $f_0$ 's. Si el corchete de Lie no es malo, entonces es *bueno*. El número de campos vectoriales en una operación del corchete de Lie es llamado el *grado* del corchete. Una explicación de la operación del corchete de Lie se encuentra en el Capítulo 2 de [17].

**Teorema 1. (Lewis and Murray [13])** *Suponiendo que un sistema de control analítico de la forma (4.1) es tal que cada corchete malo  $B$  tiene la propiedad de que  $\beta(B)(x)$  es una  $\mathbb{R}$ -combinación lineal de buenos corchetes, evaluados en  $x$ , de grado menor que  $B$ . Además, supóngase que (4.1) satisface la condición de rango de accesibilidad local LARC en  $x$ . Entonces el Sistema (4.1) es STLC en  $x$ .*

Conceptos como accesibilidad local y *STLC* aplican a sistemas dinámicos en general, pero los sistemas mecánicos tienen la ventaja de poseer una variedad de configuraciones y por lo tanto, considerar el conjunto de estados alcanzables, con velocidad cero, en lugar del conjunto de estados alcanzables. De esta consideración se derivan propiedades estructurales como accesibilidad local en configuraciones, controlabilidad local en configuraciones y controlabilidad equilibrio. Estas propiedades, que fueron desarrolladas por Lewis y Murray [11], aprovechan la estructura provista por la mecánica Lagrangiana.

Sea  $R_Q^V(q_0, T)$  el conjunto de configuraciones alcanzables, es decir, puntos  $q_1 \in Q$  tal que existe una trayectoria controlable que satisface al Sistema (4.1),  $\dot{c}(0) = 0$ ,  $c(t) \in V$  para  $t \in [0, T]$ , y  $\dot{c}(T) \in T_q Q$ . La unión de todos los conjuntos de configuraciones alcanzables para  $t \leq T$  se denota como  $R_Q^V(q_0, \leq T)$ , es decir,  $R_Q^V(q_0, \leq T) = \bigcup_{t \leq T} R_Q^V(q_0, T)$ . El sistema (4.1) se dice ser localmente accesible en configuraciones desde  $q_0 \in Q$  si un conjunto abierto no vacío de  $Q$  está contenido en la intersección de  $R_Q^V(q_0, T)$  y  $Q$  para toda vecindad  $V$  de  $q_0$  y  $t \in [0, T]$ .

Si el sistema (4.1) satisface ser localmente accesible en configuraciones y el punto inicial  $q_0$  está en el interior del conjunto alcanzable  $R_T^V(q_0)$ , para toda vecindad  $V$  de  $q_0$  y tiempo  $T$  suficientemente pequeño, entonces es llamado *localmente controlable en configuraciones en tiempo pequeño (STLCC)*.

Resultados de Lewis y Murray en [12] muestran las condiciones necesarias y suficientes para accesibilidad local en configuraciones, y condiciones suficientes para *STLCC*. Sea  $C_{hor}(\mathcal{Y}, V)(q)$  la distribución definida por los campos vectoriales  $\mathcal{Y}$  y  $\text{grad}(V)$ , donde  $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_m\}$  son el conjunto de campos vectoriales de entrada en  $Q$ .

**Teorema 2. (Lewis and Murray [12]).** *El Sistema (4.1) es localmente accesible en configuraciones en el punto  $q \in Q$  si  $C_{hor}(\mathcal{Y}, V)(q) = T_q Q$ .*

Para establecer condiciones suficientes para *STLCC* se definen los siguientes conceptos. Sea  $S(X)$  el algebra simétrica libre sobre  $X$ ,  $X$  un conjunto dado.  $Pr(X)$  es un subconjunto de  $S(X)$  que contiene los productos simétricos de los elementos de  $S(X)$ . El producto simétrico de dos elementos  $X_1$  y  $X_2$  de  $S(X)$  está definido como

$$\langle X_1 : X_2 \rangle = \nabla_X Y + \nabla_Y X.$$

Considérese que el conjunto  $\mathcal{X}(Q)$  consistente de campos vectoriales en  $Q$ . Para el conjunto  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}(Q)$ , la cerradura involutiva se denota por  $\text{Lie}(\mathcal{V})$  y el conjunto de productos simétricos cuyos elementos están en  $\mathcal{V}$  se denota por  $\text{Sym}(\mathcal{V})$ . Un producto simétrico de  $\text{Sym}(\mathcal{V})$  es malo si fue resultado de iterar un número par de campos vectoriales en  $\mathcal{V}$ . Si el producto simétrico no es malo, entonces es bueno. Sea  $\psi : X \rightarrow \nu$  un mapeo biyectivo donde  $\nu$  es una familia de campos vectoriales en  $Q$ . El homomorfismo del algebra simétrica de  $S(X)$  a  $\mathcal{X}(Q)$  se denota por  $\text{Ev}(\psi)$ . Sea  $P$  un producto simétrico contenido en  $Pr(X)$ , entonces el siguiente resultado establece condiciones suficientes para *STLCC*

**Teorema 3. (Lewis and Murray [12]).** *Supóngase que  $\mathcal{Y} \cup \{\text{grad } V\}$  es tal que cada*

producto simétrico malo en  $\Pr(\mathbf{Y})$  tiene la propiedad

$$\text{Ev}_{0_q}(\psi)(\rho(P)) = \sum_{a=1}^m \xi_a \text{Ev}_{0_q}(\psi)(C_a),$$

donde  $C_a$  son productos simétrico buenos en  $\Pr(\mathbf{Y})$  de grado menor que  $P$  y  $\xi_a \in \mathbb{R}$  para  $a = 1, \dots, m$ . Además, supóngase que (4.1) es localmente accesible en configuraciones en el punto  $q$ . Entonces (4.1) es STLCC en el punto  $q$ .

## 4.2. Algunas Propiedades Estructurales del Robot Balanceador no Holonómico

El modelo del robot balanceador no holonómico descrito por las ecuaciones (3.24-3.29) expresado en la forma (4.1) contiene demasiados términos. Esta característica podría dificultar los cálculos al analizar algunas de las propiedades estructurales del robot balanceador no holonómico. Por esta razón, se prefiere usar el modelo transformado descrito por las ecuaciones (3.36) y (3.37) para el análisis de sus propiedades estructurales. Esto puede ser realizado dado que el robot presenta la propiedad de invariancia, esto significa que la dinámica de este sistema no se ve afectada por la elección arbitraria de coordenadas generalizadas.

### 4.2.1. Accesibilidad Local

La primer propiedad a ser evaluada es la accesibilidad local. Considérese el espacio de estados representado por  $TQ$ . Por simple inspección, se observa que el sistema no es localmente accesible debido a las fuerzas de restricción, esto es, las velocidades del sistema dependen unas de otras y la distribución de accesibilidad no tiene rango pleno. Dado que existen tres 1-formas diferenciales (3.4) describiendo las fuerzas de restricción, se espera que el rango de la distribución de accesibilidad sea de 9. Esta distribución es una subvariedad  $S$  de  $TQ$ , y si el rango máximo para toda  $x \in TQ$  es de 9, entonces el sistema es localmente accesible restringido a  $S$ . Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de campos vectoriales de entrada, en este caso los campos vectoriales (3.37) y sea  $\mathbb{F}$  la unión entre  $\mathcal{F}$  y el campo vectorial de deriva  $f_0$  (3.36). Para evaluar si el robot balanceador no holonómico es localmente accesible restringido a  $S$ , se debe calcular la cerradura involutiva de  $\mathbb{F}$

(Lie( $\mathbb{F}$ )) en el punto  $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,

$$\text{Lie}(\mathbb{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}w_R & -\frac{1}{2}w_R & 0 & 0 & 0 & 2\frac{w_R^3}{w_S^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{w_R^2}{w_S} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{w_R}{w_S} & \frac{w_R}{w_S} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 \\ \frac{1}{2}w_R & \frac{1}{2}w_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{w_R}{w_S} & \frac{w_R}{w_S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\psi_1 & -\psi_1 & 0 & 0 & -\psi_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2} \frac{r_M w_R r_{zb} + 2w_R^2 w_M + 2w_{J_{yy}} + w_R^2 r_M}{r_M w_R r_{zb} + r_{J_{yy}}} \\ \psi_2 &= \frac{1}{2} \frac{r_M g r_{zb} (r_M w_R r_{zb} + 2w_R^2 w_M + 2w_{J_{yy}} + w_R^2 r_M)}{w_R^2 r_{zb}^2 r_M^2 + 2r_M r_{zb} w_R r_{J_{yy}} + r_{J_{yy}}^2} \\ \psi_3 &= \frac{1}{4} (40w_R w_{J_{yy}} r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} - 12r_M w_R^4 r_{zb} w_S^2 w_M^2 + 40r_M^2 w_M r_{zb}^2 w_R^5 \\ &- 12r_M^2 r_{zb}^2 w_{J_{yy}} w_S^2 w_R - 20r_M w_R^2 r_{zb} r_{J_{zz}} r_{J_{yy}} - 6r_M^3 w_S^2 r_z b^2 w_R^3 - 3r_M^3 w_S^2 r_{zb}^3 w_R^2 \\ &- 24r_M w_R^2 r_{zb} w_S^2 w_M w_{J_{yy}} + 20r_M^2 w_R^3 r_{zb}^2 r_{J_{xx}} - 20r_M^2 w_R^3 r_{zb}^2 r_{J_{zz}} \\ &- 3r_M^3 w_R^4 w_S^2 r_{zb} + 20r_M^2 w_R^4 r_{zb} r_{J_{yy}} - 40r_M w_R^2 r_{zb} w_{J_{yy}} r_{J_{zz}} - 20r_M w_R^3 r_{J_{zz}} r_{J_{yy}} \\ &+ 20r_M w_R^3 r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} - 12r_M^2 r_{zb} w_{J_{yy}} w_S^2 w_R^2 - 12r_M w_S^2 w_{J_{yy}}^2 r_{zb} \\ &+ 40w_R^3 r_{J_{xx}} w_M r_{J_{yy}} - 20r_M^2 w_R^4 r_{zb} r_{J_{zz}} + 20r_M^2 w_R^3 r_{zb}^2 r_{J_{yy}} - 40w_R w_{J_{yy}} r_{J_{zz}} r_{J_{yy}} \\ &- 12r_M^2 w_R^3 r_z b^2 w_S^2 w_M + 40r_M w_R^2 r_{zb} w_{J_{yy}} r_{J_{xx}} + 40r_M^2 w_R^3 r_{zb}^2 w_{J_{yy}} \\ &- 40r_M w_R^4 r_{zb} r_{J_{zz}} w_M - 40w_R^3 r_{J_{zz}} w_M r_{J_{yy}} + 20r_M^3 r_{zb}^2 w_R^5 + 20r_M^3 r_{zb}^3 w_R^4 \\ &+ 20r_M^2 w_R^4 r_{zb} r_{J_{xx}} - 12r_M^2 w_R^4 r_{zb} w_S^2 w_M + 20r_M w_R^2 r_{zb} r_{J_{xx}} r_{J_{yy}} \\ &+ 40r_M w_R^4 r_{zb} r_{J_{xx}} w_M + 40r_M w_R^4 r_{zb} r_{J_{yy}} w_M + 40r_M w_R^2 r_{zb} w_{J_{yy}} r_{J_{yy}}) \\ &w_R / ((r_M^3 w_R^3 r_z b^3 + 3r_M^2 w_R^2 r_{zb}^2 r_{J_{yy}} + 3r_{J_{yy}}^2 r_M w_R r_{zb} + r_{J_{yy}}^3) w_S^2) \end{aligned}$$

$$\dim(\text{Lie}(\mathbb{F})) = 8$$

La distribución engendrada por los campos vectoriales calculados a través del corchete de Lie tiene rango 8. Sin embargo no se tiene una conclusión dado que el número de iteraciones que se realizó es solo de seis.

Dado que la accesibilidad local del sistema es una condición para que el sistema sea *STLC*, tampoco hay conclusión en este sentido.

#### 4.2.2. Accesibilidad Local en Configuraciones

Los campos vectoriales (3.43) y (3.44) son usados para evaluar la propiedad estructural accesibilidad local en configuraciones. Sea  $\mathcal{F}_Q = \{f_{Q1}, f_{Q2}\}$  el conjunto de vectores de entrada en  $Q$ .  $\text{Sym}(\mathcal{F}_Q)$  denota el conjunto de productos simétricos derivados de  $\mathcal{F}_Q$ . Entonces, la cerradura involutiva de productos simétricos  $\text{Lie}(\text{Sym}(\mathcal{F}_Q))$  derivados del los campos vectoriales (3.43) y (3.44) es calculado obteniéndose los siguientes resultados: para el caso general no se tiene conclusión debido a la complejidad de los cálculos, para un caso particular, con parámetros específicos, el resultado muestra que el robot balanceador no holonómico es localmente accesible en configuraciones dado que la distribución  $\text{Lie}(\text{Sym}(\mathcal{F}_Q))$  tiene rango pleno en  $q = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Los parámetros usados para este propósito se muestran en la Tabla 4.1 La cerradura involutiva de

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	$r_M = 10 \text{ kg}$	$r_{zb} = \frac{4}{10} \text{ m}$	$r_{J_{xx}} = \frac{41}{15} \frac{\text{Kgm}^2}{\text{s}}$
$r_{J_{yy}} = \frac{37}{15} \frac{\text{Kgm}^2}{\text{s}}$	$r_{J_{zz}} = \frac{1}{3} \frac{\text{Kgm}^2}{\text{s}}$	$w_M = 0 \text{ kg}$	$w_R = \frac{3}{10} \text{ m}$
$w_S = 2 \text{ m}$	$w_{J_{xx}} = \frac{7}{300} \frac{\text{Kgm}^2}{\text{s}}$	$w_{J_{yy}} = \frac{9}{200} \frac{\text{Kgm}^2}{\text{s}}$	

Cuadro 4.1: Lista de parámetros usados para evaluar accesibilidad local en configuraciones

los productos simétricos es

$$\begin{aligned}
 & f_{Q1} \\
 & f_{Q2} \\
 & \langle f_{Q1} : f_{Q1} \rangle \\
 & \langle f_{Q2} : \langle f_{Q2} : f_{Q2} \rangle \rangle \\
 & \langle f_{Q1} : \langle f_{Q1} : f_{Q1} \rangle \rangle \\
 & \langle f_{Q1} : \langle : f_{Q1} \langle : f_{Q1} \langle f_{Q1} : f_{Q1} \rangle \rangle \rangle \rangle
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\text{Lie}(\text{Sym}(\mathcal{F}_Q)) = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.15 & 0 & -0.00675 & -0.00675 & 0.01749 \\ 0 & 0 & 0.045 & 0 & 0 & 0 \\ 3/20 & -3/20 & 0 & 0.2647 & -0.2546 & 0.5662 \\ 1 & 0 & 0 & 0.0015 & 0.0015 & 0.0040 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -73/77 & -73/77 & 0 & -0.2790 & -0.2790 & -5.0805 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$\dim \text{Lie}(\text{Sym}(\mathcal{F}_Q)) = 6$$

### 4.2.3. Controlabilidad Local en Configuraciones en Tiempo Pequeño (STLCC)

Para evaluar si el robot balanceador no holonómico presenta la propiedad de *STLCC* el resultado reportado en la sección anterior será usado ya que la accesibilidad local en configuraciones es una condición para que el sistema sea *STLCC*. El Teorema 3 establece que la condición adicional para que el sistema sea *STLCC* es probar que todos los productos simétricos malos derivados de los campos vectoriales (3.43) y (3.44) pueden ser expresados como una combinación lineal de productos simétricos buenos de menor grado. Sin embargo, existen ejemplos de productos simétricos malos que no pueden ser expresados como una combinación lineal de productos simétricos buenos de menor grado. Esos productos simétricos son

$$\begin{aligned} &\langle f_{Q1} : \langle f_{Q1} : \langle f_{Q1} : f_{Q1} \rangle \rangle \rangle \\ &\langle f_{Q2} : \langle f_{Q2} : \langle f_{Q2} : f_{Q2} \rangle \rangle \rangle \\ &\langle f_{Q2} : \langle f_{Q2} : \langle f_{Q1} : f_{Q1} \rangle \rangle \rangle \\ &\langle f_{Q1} : \langle f_{Q1} : \langle f_{Q2} : f_{Q2} \rangle \rangle \rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

Los productos simétricos (4.5) tienen la siguiente forma

$$\langle f_{Qi} : \langle f_{Qi} : \langle f_{Qi} : f_{Qi} \rangle \rangle \rangle = v^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \Big|_{\tilde{x}=0} \quad (4.6)$$

pero todos los productos simétricos buenos de menor grado son de la forma

$$\langle f_{Qi} : \langle f_{Qi} : f_{Qi} \rangle \rangle = v^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \Big|_{\tilde{x}=0} + v^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \Big|_{\tilde{x}=0} + v^4 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_4} \Big|_{\tilde{x}=0} + v^6 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_6} \Big|_{\tilde{x}=0} \quad (4.7)$$

Entonces, no existe forma alguna de representar productos simétricos malos (4.5) como una combinación lineal de productos simétricos buenos de orden menor. Por lo tanto el robot balanceador no holonómico no es *STLCC*

### 4.2.4. El Modelo Reducido

El modelo matemático reducido (3.57) y (3.58) es usado para evaluar la propiedad estructural de accesibilidad local. Sea  $\tilde{f}_0$  el campo vectorial de deriva y  $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\}$  el conjunto de campos vectoriales de entrada. Sea  $\tilde{\mathbb{F}} = \tilde{f}_0 \cup \tilde{\mathcal{F}}$  la unión del campo vectorial

de deriva y los campos vectoriales de entrada. Entonces, la cerradura involutiva de  $\tilde{\mathbb{F}}$  se calcula dando como resultado

$$\text{Lie}(\tilde{\mathbb{F}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}w_R & -\frac{1}{2}w_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{w_R}{w_S} \\ 0 & 0 & -\frac{w_R}{w_S} & \frac{w_R}{w_S} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\psi_1 & -\psi_1 & 0 & 0 & -\psi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

donde

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \frac{r_M w_R r_{zb} + 2w_R^2 w_M + 2w_{J_{yy}} + w_R^2 r_M}{r_M w_R r_{zb} + r_{J_{yy}}}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \frac{r_M g r_{zb} (r_M w_R r_{zb} + 2w_R^2 w_M + 2w_{J_{yy}} + w_R^2 r_M)}{w_R^2 r_{zb}^2 r_M^2 + 2r_M r_{zb} w_R r_{J_{yy}} + r_{J_{yy}}^2}$$

$$\dim \text{Lie}(\tilde{\mathbb{F}}) = 7$$

Se puede observar que la distribución engendrada por los campos vectoriales derivados de la operación del corchete de Lie tiene rango pleno en el punto  $\tilde{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Entonces, el modelo reducido del robot balanceador no holonómico es localmente accesible.

El modelo reducido es linealizado en el punto  $\tilde{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Así, el modelo linealizado es

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}w_R & \frac{1}{2}w_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{w_R}{w_S} & -\frac{w_R}{w_S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2r_M g r_{zb}}{2r_M w_R r_{zb} + 2r_{J_{yy}}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \tilde{\psi}_1 & \tilde{\psi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

donde



$$\tilde{\psi}_1 = \frac{-r_M w_R r_{zb} - 2w_R^2 w_M - w_R^2 r_M - 2w_{J_{yy}}}{2r_M w_R r_{zb} + 2r_{J_{yy}}}$$

La matriz de controlabilidad  $C$  para el sistema linealizado (4.9) es

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}w_R & \frac{1}{2}w_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{w_R}{w_S} & -\frac{w_R}{w_S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & \zeta_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & \zeta_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\text{rank}(C) = 6$$

Dado que la matriz de controlabilidad no tiene rango pleno entonces el sistema linealizado (4.9) no es controlable.

Sea  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapeo continuo. Considérese el mapeo  $g(\tilde{x}, u)$  definido por los campos vectoriales (3.57) and (3.58), es decir,  $g(\tilde{x}, u) = \tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ . Con el objetivo de explorar si el sistema (4.9) es estabilizable en el punto de equilibrio  $(\tilde{x}_0, 0)$  se requiere probar que  $g(\tilde{x}, u)$  es un mapeo abierto en el punto de equilibrio  $(\tilde{x}_0, 0)$ .

**Lema 1.** *El mapeo continuo  $g(\tilde{x}, u)$  es un mapeo abierto en  $(\tilde{x}_0, 0)$  si para toda  $u \in \mathcal{U}(x, u)$  existe  $v \in \mathcal{V}(f(x, u))$  tal que  $V \subseteq f(\mathcal{U})$ .*

Prueba.

Sea  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^7 \times \mathbb{T}^2$  un conjunto abierto. Dado que  $\mathcal{U}$  es un conjunto abierto y  $(x_0, 0)$  esta en  $\mathcal{U}$  entonces,  $U$  esta en  $\mathcal{V}(x_0, 0)$ . Sea  $V$  un elemento de una vecindad  $\mathcal{V}(f(x_0, 0))$ . Por definición de vecindad existe un conjunto  $W$  que es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{T}^2$  tal que  $W$  es un subconjunto de  $V$ . Por la característica de bolas abiertas, existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(0) \subseteq W$ . Sea  $\delta$  un elemento del intervalo abierto  $(0, \varepsilon)$ . Entonces  $(0, 0, \delta, 0, 0, 0, 0) \in B_\varepsilon(0)$  y por lo tanto  $(0, 0, \delta, 0, 0, 0, 0)$  esta en  $V$ . Pero,  $f(x, u) \neq (0, 0, \delta, 0, 0, 0, 0)$ . Por lo tanto  $V \not\subseteq f(\mathcal{U})$ .

**QED**

En conclusión, el sistema linealizado (4.9) no es estabilizable. Sin embargo, si la segunda variable,  $\tilde{x}_2$  no se considera en el modelo y se reescribe como muestra la Ecuación (4.10), entonces el sistema es controlable dado que la matriz de controlabilidad tiene rango pleno.

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}w_R & \frac{1}{2}w_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{w_R}{w_S} & -\frac{w_R}{w_S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2r_M g r_{zb}}{2r_M w_R r_{zb} + 2r_{J_{yy}}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \tilde{\psi}_1 & \tilde{\psi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

donde

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{-r_M w_R r_{zb} - 2w_R^2 w_M - w_R^2 r_M - 2w_{J_{yy}}}{2r_M w_R r_{zb} + 2r_{J_{yy}}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}w_R & \frac{1}{2}w_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{w_R}{w_S} & \frac{w_R}{w_S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & \zeta_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & \zeta_3 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\text{rank}(C) = 6$$

### 4.3. Ley de Control para el Robot Balanceador no Holonómico

En esta sección se diseña una ley de control para estabilizar el sistema linealizado (4.10) en el punto  $\tilde{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$  para el robot balanceador no holonómico. Para obtener la ley de control que estabiliza al sistema se usa retroalimentación de estados. Esto es, dado un sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde la matriz  $A$  de  $n \times n$  matrix no es Hurwitz, se está buscando una entrada  $u = -kx$  tal que la matriz  $A$  se convierta en Hurwitz. Entonces el sistema retroalimentado tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + Bk)x = \bar{A}x \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde  $k$  es una matriz de constantes reales  $p \times n$ . Entonces, el problema es encontrar una matriz  $k$  que estabilice al sistema linealizado (4.11). El método es como sigue, se establece la matriz  $\bar{A}$  con los polos deseado en el semiplano izquierdo, entonces la ecuación  $\bar{A} = A - Bk$  se resuelve para  $k$ . Una solución de  $k$  que estabiliza al sistema es

$$k = \begin{pmatrix} -12.1138 & 26.3599 & -88.5569 & -0.9934 & -4.7851 & -25.8188 \\ -10.7346 & -26.0172 & -70.1375 & -3.7535 & 0.4549 & -17.4174 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

# Capítulo 5

## Conclusiones

Una de las principales contribuciones de este trabajo es el modelo matemático que describe la dinámica del robot balanceador no holonómico. Este mecanismo es sistema mecánico no holonómico y su modelo matemático es reportado en varias formas que son equivalentes tales como (3.24-3.29), (3.36-3.37), (3.43-3.44), y (3.57-3.58). Además, se derivó el modelo (2.35) de un engrane no holonómico. El marco Lagrangiano se utilizó para derivar los modelos (3.24-3.29) y (2.35). Esos modelos fueron derivados a través de la función Lagrangiana (3.9) y (2.34) respectivamente junto con el principio de Lagrange-d'Alembert que captura la esencia de las restricciones no holonómicas.

El robot balanceador no holonómico fue elegido para realizar un análisis respectivo a las propiedades estructurales de los sistemas no lineales. Dado que el modelo (3.24-3.29) es complicado de analizar, se requiere encontrar formas alternativas de representar el modelo matemático del robot balanceador no holonómico que facilite el análisis de algunas de las propiedades estructurales del robot balanceador no holonómico. Se aplicó el método de retroalimentación de estados estática y el modelo matemático resultante fue (3.36-3.37), este modelo tiene menos términos y por lo tanto facilita los cálculos para evaluar accesibilidad local y *STLC*. La Sección 4.2.1 reporta que el robot balanceador no holonómico no es localmente accesible ni *STLC*.

El modelo (3.36-3.37) tiene la forma (3.1) que es equivalente a la forma (3.39). Al aplicar esta transformación al modelo (3.36-3.37) se obtienen los campos vectoriales (3.43-3.44) que representan al sistema al nivel variedad de configuraciones. Con este modelo se evaluó accesibilidad local en configuraciones y *STLCC*. En la Sección 4.2.2 se reporta que dado la complejidad de los cálculos no se tiene conclusión al respecto, sin embargo, para un caso particular donde se eligieron parámetros específicos el resultado muestra que el sistema es localmente accesible en configuraciones pero no hay conclusión con respecto a la propiedad de *STLCC* ya que no se cumple la condición

suficiente del Teorema (3) como fue reportado en la Sección 4.2.3.

Usando la teoría de reducciones y simetrías se derivó el modelo (3.36-3.37). El robot balanceador no holonómico presenta simetrías con respecto al grupo de Lie  $G = SE(2) \times \mathbb{T}^2$ . El modelo (3.36-3.37) con doce variables de estado fue transformado al modelo (3.57-3.58) con siete variables de estado. Con este modelo se evaluó accesibilidad local y los resultados muestran que el robot balanceador es localmente accesible, esto fue reportado en la Sección (4.2.2). El sistema fue linealizado en el punto  $\tilde{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  y se evaluó la propiedad de controlabilidad. Los resultados de la Sección 4.2.4 indican que el sistema con siete variables de estado no es un sistema controlable dado que no satisface las condiciones de Brockett. No obstante si la variable de estados  $\tilde{x}_2$  no es considerada en el sistema, la condición de Brockett se satisface y por lo tanto el sistema es controlable.

En la Sección 4.3 se reportó una ley de control que estabiliza al sistema linealizado (4.10). Para el diseño de esta ley se usó retroalimentación de estado. Así la matriz  $A$  se convierte en la matriz  $\bar{A}$  después de aplicar la retroalimentación de estados, y  $\bar{A}$  es Hurwitz.

## 5.1. Trabajo Futuro

A pesar de que algunos conceptos de la teoría de simetrías se aplicaron al robot balanceador no holonómico para derivar un modelo reducido, existe un hueco y se requiere un estudio más profundo con el objetivo de obtener un mejor entendimiento con respecto a las simetrías que presenta el sistema.

Los resultados muestran que para estabilizar el sistema linealizado es necesario prescindir de uno de los estados, en este caso se decidió omitir el estado  $\tilde{x}_2$ . Si se desea tener control sobre todos los estados se requiere el uso de herramientas de control no lineal. A primera vista, una sola técnica no es suficiente, es decir, se requiere de una combinación de varias para tener control sobre todos los estados.

# Apéndice A

## Posición y Orientación de los Sistemas Mecánicos

Existen varias formas de definir la posición y orientación de los cuerpos rígidos en el espacio. Una de ellas se describe en este Apéndice.

La palabra *pose* es usada para hacer referencia a la posición y orientación de un cuerpo rígido. Para localizar la pose de un cuerpo rígido se requieren al menos seis coordenadas. Por lo general, se utilizan marcos coordenados o simplemente marcos para establecer la posición y orientación de los cuerpos rígidos. Un marco coordenado  $l$  está compuesto de un origen  $\mathcal{O}_l$  y una triada vectores mutuamente ortogonales que forman una base en el espacio Euclidiano, denotada  $(\mathbf{i}_l \mathbf{j}_l \mathbf{k}_l)$ , lo marcos coordenados son usualmente fijados a los cuerpos rígidos. En general, el sitio de un cuerpo siempre es expresado con respecto a otros cuerpos, es decir, pueden ser expresados como el sitio de un marco relativo a otro. De la misma manera, un desplazamiento de un cuerpo puede ser visto como la pose del marco en el cuerpo relativo a otro marco que es considerado como un marco fijo. El término *fijo* es indicativo de que el observador esta estacionario en una posición dentro del marco fijo, no que existe uno y solo un marco coordenado fijo.

## A.1. Posición y Desplazamiento

Considérense dos marcos coordenados  $l$  y  $m$ . Para expresar la posición del origen del marco  $l$  relativo al marco  $m$  se usa el vector de  $3 \times 1$  (A.1).

$${}^m\mathbf{p}_l = \begin{pmatrix} {}^m p_l^i \\ {}^m p_l^j \\ {}^m p_l^k \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Las componentes de este vector son coordenadas cartesianas de  $\mathcal{O}_m$  en el marco  $l$ , las cuales son las proyecciones del vector  ${}^m\mathbf{p}_l$  sobre los correspondientes ejes. Las componentes del vector podrían ser expresadas en coordenadas esféricas o cilíndricas de  $\mathcal{O}_m$  en el marco  $l$ . Una traslación es un desplazamiento en el que ningún punto en el cuerpo rígido permanece en su posición inicial y toda línea recta del cuerpo rígido permanece paralela a su orientación inicial. (Los puntos y líneas no están necesariamente contenidas dentro de la frontera de un cuerpo rígido finito, si no más bien, cualquier punto o línea en el espacio puede ser tomada como que está rígidamente fija al cuerpo). La traslación de un cuerpo en el espacio puede ser representada por la combinación de su posición antes y después de la traslación. Por el contrario, la posición de un cuerpo está representada como una traslación que toma a un cuerpo de una posición en la cual el marco coordenado fijo al cuerpo coincide con el marco coordenado inercial a la posición actual en la cual los dos marcos ya no coinciden. Entonces, cualquier representación de la posición puede ser usada para crear una representación del desplazamiento y viceversa.

## A.2. Orientación y Rotación

Para representar la orientación de un cuerpo rígido existen más formas que para expresar su posición. Una rotación es un desplazamiento donde por lo menos uno de los puntos del cuerpo rígido permanece en la posición inicial y no todas las líneas en el cuerpo permanecen paralelas a sus orientación inicial. Por ejemplo, un cuerpo en una órbita circular rota alrededor de un eje que pasa por el centro de la trayectoria circular, y cada punto en el eje de rotación es un punto en el cuerpo que permanece en su posición inicial. Como en el caso de las posiciones y traslaciones, cualquier representación de orientación puede ser usada para crear una representación de orientación y viceversa.

La orientación de un marco coordenado  $m$  relativo al marco coordenado  $l$  puede ser denotado expresando los vectores base  $(\hat{i}_m \hat{j}_m \hat{k}_m)$  en términos de los vectores base

$(\hat{i}_l \hat{j}_l \hat{k}_l)$ . Esto produce  $({}^m\hat{i}_l {}^m\hat{j}_l {}^m\hat{k}_l)$ , que pueden ser escritos como una matriz de  $3 \times 3$  conocida como la matriz de rotación. Las componentes de  ${}^jR_i$  son productos punto de los vectores base de los dos marcos coordenados.

$${}^mR_l = \begin{pmatrix} \hat{i}_l \cdot \hat{i}_m & \hat{j}_l \cdot \hat{i}_m & \hat{k}_l \cdot \hat{i}_m \\ \hat{i}_l \cdot \hat{j}_m & \hat{j}_l \cdot \hat{j}_m & \hat{k}_l \cdot \hat{j}_m \\ \hat{i}_l \cdot \hat{k}_m & \hat{j}_l \cdot \hat{k}_m & \hat{k}_l \cdot \hat{k}_m \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Dado que los vectores base son vectores unitarios el producto punto de dos vectores unitarios es el coseno del ángulo entre ellos, las componentes son comúnmente referidas como dirección de cosenos.

Una rotación elemental del marco  $l$  respecto al eje  $\hat{k}_m$  en un ángulo  $\theta$  es

$$R(\theta, \hat{k}_l) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

mientras que la rotación alrededor del eje  $\hat{j}_m$  es

$$R(\theta, \hat{j}_l) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

y con respecto al eje  $\hat{i}_m$  es

$$R(\theta, \hat{i}_l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

La rotación de la matriz  ${}^mR_l$  contiene nueve elementos, mientras que solo tres parámetros son requeridos para definir la orientación de un cuerpo en el espacio. Por lo tanto, existen seis relaciones auxiliares entre los elementos de la matriz. Dado que los vectores base del marco coordenado  $l$  son mutuamente ortonormales, así como lo son los vectores base del marco coordenado  $m$ , las columnas de  ${}^mR_l$  formadas de productos punto de esos vectores también son mutuamente ortonormales. Una matriz compuesta de vectores mutuamente ortonormales es conocida como matriz ortonormal y tiene la característica de que su inversa es su transpuesta. Esta propiedad provee las seis relaciones auxiliares. Tres requiere los vectores columna para tener longitud unitaria y tres requieren los vectores columna para ser mutuamente ortogonales. Alternativamente, la



ortogonalidad de la matriz de rotación puede verse de forma inversa. La orientación del marco coordenado  $m$  relativa a al marco coordenado  $l$  es la matriz de rotación  ${}^mR_l$  cuyas columnas son claramente las columnas de la matriz  ${}^mR_l$ . Las matrices de rotación son combinadas a través de su multiplicación de tal forma que la orientación del marco  $l$  relativa al marco  $n$  es expresada como

$${}^nR_l = {}^nR_m {}^mR_l.$$

En resumen,  ${}^mR_l$  es la matriz de rotación que transforma vectores expresados en el marco coordenado  $m$  a vectores expresados en el marco coordenado  $l$ . Ésta provee una representación de la orientación del marco  $l$  relativo a  $m$  y entonces, puede ser una representación de la rotación del marco  $l$  relativo al marco  $m$ .

### A.3. Matrices Homogéneas de Transformación

En las secciones previas se direccionaron las formas de representar la posición y orientación del los cuerpos rígidos pos separados. Con las transformaciones homogéneas, los vectores de posición y las matrices de rotación se combinan en una notación compacta. Cualquier vector  ${}^l r$  expresado relativo al marco coordenado  $l$  puede ser expresado relativo al marco coordenado  $m$  si la posición y orientación del marco  $m$  son conocidas relativas al marco  $l$ . La posición del origen del marco coordenado  $l$  relativo al marco coordenado  $m$  de denota por el vector  ${}^m p_l = ({}^m p_l^i \ {}^m p_l^j \ {}^m p_l^k)^T$ . La orientación del marco  $m$  relativo al marco  $l$  de denota por la matriz de rotación  ${}^mR_l$ . Entonces,

$${}^m r = {}^mR_l {}^l r + {}^m p_l. \quad (\text{A.6})$$

Esta ecuación puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} {}^m r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^mR_l & {}^m p_l \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^l r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

donde

$${}^mT_l = \begin{pmatrix} {}^mR_l & {}^m p_l \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

es la matriz homogénea de transformación de  $4 \times 4$  y  $({}^m r \ 1)^T$  y  $({}^l r \ 1)^T$  son representaciones homogéneas de vectores de posición  ${}^m r$  y  ${}^l r$ . La matriz  ${}^mT_l$  transforma vectores del marco coordenado  $l$  al marco coordenado  $m$ . Su inversa  ${}^mT_l^{-1}$  transforma vectores

del marco coordenado  $m$  al marco coordenado  $l$ .

$${}^mT_l^{-1} = {}^lT_m = \begin{pmatrix} {}^mR_l^T & - {}^mR_l^T {}^m p_l \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Composiciones de matrices homogéneas de transformación de  $4 \times 4$  son derivadas de la simple multiplicación, como en el caso de las matrices de rotación de  $3 \times 3$ . Por lo tanto,  ${}^kT_l = {}^nT_m {}^mT_l$ . Dado que la multiplicación entre matrices no es conmutativa el orden o secuencia es muy importante.

# Bibliografía

- [1] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundation of Mechanics*. Perseus Publishing, 1978.
- [2] A. M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer-Verlag, 2003.
- [3] F. Bullo and A. D.Lewis. *Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems*. Springer, 2005.
- [4] H. Cendra, J. E. Marsden, and T.S. Ratiu. Geometric mechanics, lagrangian reduction and nonholonomic systems. *Mathematics Unlimited-2001 and Beyond*, (B. Engquist and W. Schmid, eds.), Springer-Verlag, New York, pages 221–273, 2001.
- [5] J. Cortez, S. Martínez, J.P. Ostrowsky, and H. Zhang. Simple mechanical control systems with constraints and symmetry. *SIAM J. Control Optim.*, 41(3):851–874, 2002.
- [6] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson Eduaction, Inc., 2002.
- [7] F. Grasser, A. D’Arrigo, S. Colomby, and A. C. Rufer. Joe: A mobile, inverted pendulum. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49(1):107–114, 2002.
- [8] D. T. Greenwood. *Classical Dynamics*. Prentice-Hall, 1977.
- [9] Y. Kim, S. H. Kim, and Y. K. Kwak. Dynamic analisys of nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 44:25–46, 2005.
- [10] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry, Vol 1*. John Wiley & Sons, 1963.

- [11] A. D. Lewis. Simple mechanical control systems with constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1420–1426, 2000.
- [12] A. D. Lewis and R. M. Murray. Configuration controllability of simple mechanical control systems. *SIAM J Control Optim.*, 35(3):766–790, 1997.
- [13] A. D. Lewis and R. M. Murray. Configuration controllability of simple mechanical control systems. *SIAM J Control Optim.*, 41(3):555–574, 1999.
- [14] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer-Verlag, 1999.
- [15] P. Morin and C. Samson. Control of nonholonomic mobile robots based on the transverse function approach. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(5):1058–1073, 2009.
- [16] Y. Nakamura, W. Chung, and O. J. Sørđalen. Design and control of the nonholonomic manipulator. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17(1):48–59, 2001.
- [17] H. Nijmeijer and A. J. Van der Schaft A. J. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, 1990.
- [18] J. M. Ramos. *Automation and Robotics*. I-Tech Education and Publishing, 2008.
- [19] B. Siciliano and O. Kathib (Eds). *Springer Handbook of Robotics*. Springer-Verlag, 2008.
- [20] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, 1983.