



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**Hacia la Clasificación de Sistemas Mecánicos  
Mediante el Método de Equivalencia**

Tesis que presenta

**Esperanza Cuellar Castañeda**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias Aplicadas**

En la opción de

**Control y Sistemas Dinámicos**

**Director de la Tesis:**

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro

San Luis Potosí, S.L.P., Agosto de 2012



## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Hacia la Clasificación de Sistemas Mecánicos Mediante el Método de Equivalencia** presentada para obtener el Grado de Maestra en Ciencias Aplicadas en la opción Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Esperanza Cuellar Castañeda** y aprobada el **07 de Agosto de 2012** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

---

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro  
(Director de la tesis)

---

Dr. Arturo Zavala Río  
(Presidente)

---

Dr. Hugo Cabrera Ibarra  
(Sinodal)

---

Dr. Mauro Eduardo Maya Méndez  
(Sinodal)



## Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. David Antonio Lizárraga Navarro.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con número de registro 224197 durante el periodo Agosto 2009-Julio 2011.



# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 030 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Ciencias Aplicadas en la opción de Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 7 días del mes de agosto del año 2012, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

<b>Dr. Arturo Zavala Río</b>	<b>Presidente</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. David Antonio Lizárraga Navarro</b>	<b>Secretario</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Hugo Cabrera Ibarra</b>	<b>Sinodal</b>	<b>IPICYT</b>
<b>Dr. Mauro Eduardo Maya Méndez</b>	<b>Sinodal externo</b>	<b>UASLP</b>

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS  
EN LA OPCIÓN DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó la C.

**Esperanza Cuellar Castañeda**

sobre la Tesis intitulada:

*Hacia la clasificación de sistemas mecánicos mediante el método de equivalencia*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. David Antonio Lizárraga Navarro**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLA**

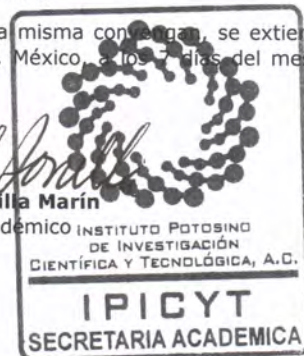
Dándose por terminado el acto a las 13:40 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma conllevan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 7 días del mes de agosto de 2012.

**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

**Dr. Marcial Bonilla Marín**

Secretario Académico INSTITUTO POTOSINO  
DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.



*A mis Papás*  
*y*  
*Hermanos*

# Agradecimientos

Mi especial agradecimiento a mi asesor el *Dr. David Antonio Lizárraga Navarro* por su gran ejemplo, de que el conocimiento se adquiere con dedicación y trabajo constante, sobre todo por su paciencia, esfuerzo y tiempo invertidos en mi formación académica, así como también por su constante motivación, para la conclusión de mi tesis.

A mis sinodales, los doctores *Arturo Zavala Río*, *Mauro Eduardo Maya Méndez*, *Hugo Cabrera Ibarra* por sus comentarios y aportaciones hechos a mi tesis.

A todos los investigadores que formaron parte de mi formación académica, por sus consejos y enseñanzas durante las clases impartidas.

A mi familia y amigos por su gran apoyo moral, sus valiosos consejos y por compartir su tiempo en todo momento.

Finalmente, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada durante el periodo Agosto 2009 - Julio 2011 y al IPICYT por el apoyo especial para la inscripción al XLIV Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana.

# Contenido

Constancia de aprobación de la tesis	IV
Créditos institucionales	VI
Acta de examen	VIII
Dedicatorias	IX
Agradecimientos	XI
Lista de figuras	XV
Notaciones y convenciones	XVII
Resumen	XIV
Abstract	XXI
Índice general	XXIII

# Lista de figuras

Fig.	Nombre	
1.1.1	Figuras en el plano	2
1.1.2	Péndulo	4
3.1.1	Representación de un haz fibrado	21
3.1.2	Trivializaciones locales	23
4.3.1	Marcos móviles	53



# Notaciones y convenciones

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales
$\wedge$	Producto exterior de formas diferenciales
$\times$	Producto cruz de vectores en $\mathbb{R}^3$
$\otimes$	Producto tensorial
$\oplus$	Suma directa de espacios vectoriales
$\circ$	Composición de funciones
$A^t$	Transpuesta de una matriz de una matriz $A$
$d$	Diferenciación exterior
$\iota_X$	Producto interior con respecto a $X$
$L_X$	Derivada de Lie en la dirección de $X$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	producto interno en un espacio vectorial
$GL(n)$	Grupo de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$
$\mathfrak{gl}(n)$	Álgebra de Lie del grupo $GL(n)$
$\Gamma(TM)$	Conjunto de campos vectoriales sobre la variedad $M$
$TM$	Haz tangente de la variedad $M$
$T^*M$	Haz cotangente de la variedad $M$
$\coprod_{q \in M} T_q M$	Union disjunta de espacios tangentes a $M$ en un punto $q$
$FM$	Haz de marcos sobre la variedad $M$
$F^*M$	Haz de comarcos sobre la variedad $M$
$\Gamma_{LI}(TG)$	Conjunto de campos vectoriales sobre $G$ invariantes a la izquierda

# Resumen

**Palabras clave:** Invariantes diferenciales, estructuras geométricas, grupo de Lie  $G$ ,  $G$ -estructura, método de equivalencia.

El matemático Élie Joseph Cartan formuló un método llamado “de equivalencia” para identificar y calcular invariantes diferenciales de estructuras geométricas bajo la acción de un grupo de transformaciones  $G$ . Una versión de la aplicación del método comienza codificando la estructura geométrica bajo estudio mediante una  $G$ -estructura y posteriormente calcula los invariantes diferenciales de la  $G$ -estructura aplicando procesos de reducciones y/o prolongaciones. Los invariantes diferenciales proporcionan condiciones necesarias y en ocasiones también suficientes para determinar cuando dos  $G$ -estructuras son equivalentes. Por lo tanto el método de equivalencia es una herramienta útil para la clasificación de objetos geométricos, es por eso que surge de manera natural en la clasificación de sistemas mecánicos simples con fuerzas externas. En este trabajo se proporcionan los detalles de caracterización mediante una  $G$ -estructura de estructuras geométricas tales como variedades Riemannianas, Sub-Riemannianas y un sistema mecánico simple. Nos interesamos en particular en la usualmente llamada Forma Encadenada Extendida (FEE), que representa una clase específica de sistemas mecánicos subactuados en una variedad de configuraciones de dimensión 3. Como ejemplo adicional se calcularon invariantes diferenciales de curvas en el plano  $\mathbb{R}^2 \simeq SE(2)/SO(2)$  tomando derivadas de Darboux de levantamientos de tales curvas a  $SE(2)$ . Finalmente se presenta una lectura detallada del artículo de K. Ehlers [15], donde se derivan invariantes diferenciales de variedades no holonómicas de dimensión 3.

# Abstract

**Key words:** differential invariants, geometric structures, Lie group  $G$ ,  $G$ -structure, method of equivalence.

The French mathematician Elie Joseph Cartan formulated a method, now called “the method of equivalence,” to identify and calculate differential invariants of geometric structures under the action of a transformation group  $G$ . A version of the method begins by encoding the geometric structure under study by a  $G$ -structure and then identifies differential invariants of the  $G$ -structure by a process that involves reductions or prolongations. The differential invariants provide necessary (and sometimes sufficient) conditions in order to determine when two  $G$ -structures are equivalent. The method of equivalence is a useful tool for classifying geometric objects, hence it arises naturally in the classification of mechanical systems formulated in geometric terms. In this work, the basic objects involved in the method of equivalence are studied along with examples of representations of geometric structures, including Riemannian and subriemannian manifolds, via  $G$ -structures. Our interest is particularly focused on the so-called Extended Chained Form (ECF), which represents a special class of underactuated simple mechanical systems defined on a 3-dimensional configuration manifold. As an additional example, differential invariants for curves in  $\mathbb{R}^2 \simeq SE(2)/SO(2)$  are computed by taking the Darboux derivatives of lifts of those curves to  $SE(2)$ . Finally, a detailed reading is made of K. Ehlers’ published article [15], where a derivation of differential invariants of three-dimensional nonholonomic manifolds is presented.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Preliminares de geometría diferencial . . . . .	7
2.2. Teoría básica de Lie . . . . .	16
<b>3. Haces Fibrados Principales y <math>G</math>-estructuras</b>	<b>19</b>
3.1. Haces Fibrados Principales . . . . .	20
3.1.1. Funciones de Transición . . . . .	22
3.1.2. Haces fibrados principales asociados y reducidos . . . . .	25
3.2. $G$ -estructuras . . . . .	33
3.2.1. Codificación de objetos mediante una $G$ -estructura . . . . .	33
<b>4. Invariantes diferenciales de <math>G</math>-estructuras</b>	<b>47</b>
4.1. Forma de Maurer-Cartan . . . . .	47
4.2. Teorema fundamental del cálculo versión geometría de Cartan . . . . .	49
4.3. Ecuación estructural . . . . .	50
4.4. Ejemplo de aplicación del método de equivalencia de Cartan . . . . .	53
<b>5. Sobre invariantes diferenciales de 3-variedades de contacto</b>	<b>63</b>
<b>6. Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Capítulo 1

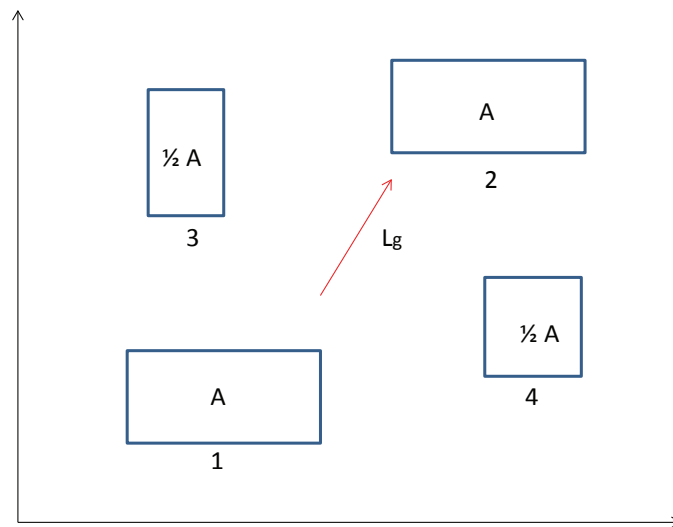
## Introducción

El matemático francés Élie Joseph Cartan formuló un procedimiento para identificar y calcular propiedades invariantes de estructuras geométricas bajo la acción de un grupo de transformaciones  $G$ . Por estructuras geométricas se entiende una gran variedad de objetos geométricos tales como métricas (Riemannianas, sub-Riemannianas, pseudo-Riemannianas), distribuciones, codistribuciones, sistemas mecánicos, etc. Las propiedades invariantes permiten identificar y caracterizar a un objeto; su importancia radica en que a través de éstas podemos comparar estructuras geométricas entre sí y, más aún, llegar a hacer una clasificación de las mismas.

La dificultad de comparar una estructura geométrica con otra es que en general no tienen mucho en común y que en esencia pueden ser muy distintas, aunque también cabe la posibilidad de que una estructura geométrica tenga representaciones que a simple vista parezcan muy distintas y aún así no podamos compararlas aunque en realidad representen lo mismo. Sumado a esto es que en general también es difícil identificar y/o calcular las propiedades invariantes que sean representativos de los objetos geométricos.

Existen propiedades que son fáciles de identificar tales como la dimensión de un espacio vectorial, la curvatura de una curva, la curvatura y torsión de una superficie son invariantes bajo transformaciones de movimientos de cuerpo rígido. Existen otras que requieren de más trabajo para identificarse y/o calcularse tales como la curvatura y torsión de un sistema mecánico simple sujeto a restricciones no holonómicas y fuerzas externas. Debido a la complejidad de algunos objetos, la identificación de las propiedades que los caracterizan también se complica.

Por otro lado cabe mencionar que algunas propiedades invariantes son parcialmente representativas debido a que en el proceso de su cálculo puede perderse información importante; en tal caso los invariantes diferenciales son de utilidad sobre todo para *distinguir objetos esencialmente distintos*. El hecho de que dos objetos tengan el mismo invariante no implica que sean equivalentes entre sí, pero si sus invariantes difieren, entonces también los objetos son esencialmente distintos entre sí, por lo tanto, no son equivalentes. Un ejemplo sencillo para ilustrar esto es el siguiente, consideremos las siguientes figuras en el plano(Ver Figura.1.1.1).



**Figura 1.1.1.** Los rectángulos 1 y 2 tienen área A y uno es el trasladado del otro, son equivalentes. Los rectángulos 1 y 3, y 1 y 4 tienen distinta área, por lo que no son equivalentes. Aunque los rectángulos 3 y 4 tienen área  $\frac{1}{2} A$ , no es posible transformar uno en el otro y coincidan exactamente, no son equivalentes.

Podemos observar que bajo la transformación de cuerpos rígidos lo único que se preserva de los rectángulos es su área; entonces el área representa un invariante. Observemos que los rectángulos 1 y 2 tienen el mismo valor de área, pero desde el punto de vista de su posición en el plano, como conjuntos no son equivalentes, sin embargo, sí existe una traslación o transformación de cuerpos rígidos que permita poner un rectángulo en la misma posición que el otro y coincidan exactamente. Por ello podemos decir que son equivalentes. El rectángulo 2 es el traslado del rectángulo 1, es decir, existe  $g \in G$  tal que al aplicar  $L_g$  al rectángulo 1 hace corresponder exactamente con el rectángulo 2 por lo tanto son equivalentes.

Para el caso de los rectángulos 3 y 4, aunque tienen el mismo valor del área no existe una traslación o transformación de cuerpos rígidos que permita sobreponer el rectángulo 3 sobre el rectángulo 4 de tal manera que coincidan exactamente como conjuntos por lo tanto no son equivalentes. Por otra parte como sabemos que el área de los rectángulos 1 y 3, al igual que los rectángulos 1 y 4 son distintas, inmediatamente podemos concluir que no son equivalentes. En conclusión el área es un invariante bajo movimientos de cuerpo rígido, pero ésta representa solo parcialmente a un objeto, en el sentido de que no caracteriza completamente al objeto.

De lo anterior podemos decir entonces que no existe forma universal de comparar estructuras geométricas especialmente cuando son distintas entre sí. El procedimiento de Cartan, actualmente conocido como *el método de equivalencia*, para calcular invariantes, comienza primero por codificar la estructura geométrica bajo estudio en términos de marcos (ó comarcos) móviles los cuales forman una  $G$ -estructura. Esto conduce a un formalismo común en el que ahora sí podremos comparar tales estructuras, pero esto, a través de sus respectivas  $G$ -estructuras. Una  $G$ -estructura caracteriza completamente a un objeto geométrico en el sentido de que dada la  $G$ -estructura podemos obtener la estructura geométrica nuevamente.

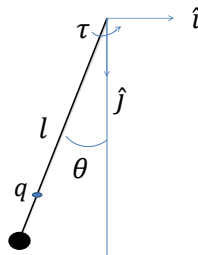
Una vez que los objetos geométricos son codificados mediante una  $G$ -estructura, es posible determinar bajo qué condiciones son equivalentes entre sí y las condiciones se suelen deducir de los invariantes diferenciales de las  $G$ -estructuras, obtenidos mediante la aplicación del método de equivalencia. La forma de proceder del método para calcular invariantes diferenciales es hasta cierto punto sistemática, su aplicación consiste en hacer reducciones y/o prolongaciones hasta obtener un marco (o comarco) canónico con la finalidad de obtener el grupo de transformaciones  $G$  tan simple como sea posible. Si el grupo es trivial  $\{e\}$ , entonces la determinación de la equivalencia es trivial. Otra forma de determinar la equivalencia de  $G$ -estructuras es a través del pull back de la forma de Maurer-Cartan también conocida como la derivada de Darboux.

Los invariantes diferenciales son llamados invariantes porque permanecen sin cambio bajo la acción de un grupo de transformaciones  $G$  y diferenciales porque típicamente se deducen por un proceso de diferenciación, quedando expresadas en términos de derivadas.

En conclusión, el método de equivalencia de Cartan resulta ser una herramienta útil para determinar la equivalencia de estructuras geométricas. El método proporciona condiciones necesarias y en ocasiones también suficientes para determinar la equivalencia a través de los invariantes diferenciales de las  $G$ -estructuras de los objetos geométricos.

Una de las razones que nos motiva estudiar el método de equivalencia es que podemos aplicarlo en el problema de clasificación de sistemas mecánicos, la importancia de los sistemas mecánicos está en la gran variedad de sus aplicaciones en robótica y automatización, vehículos marinos, aeroespaciales, etc. Aunque en teoría de control se han obtenido importantes resultados, se han empleado herramientas de geometría diferencial con el objetivo de estudiarlos desde otra perspectiva. En geometría diferencial un sistema mecánico no holonómico  $(Q, L, \mathcal{H})$ , consiste de una variedad de configuraciones  $Q$ , una lagrangiana  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $L = T - V$ , donde  $T$  es la energía cinética asociada a una métrica Riemanniana  $\mathcal{G}$ ,  $V$  es la energía potencial, y  $\mathcal{H}$  una distribución de restricciones no holonómicas la cual representa las velocidades permitidas por las restricciones.

Un ejemplo de representación geométrica de un sistema mecánico simple es el péndulo.



**Figura 1.1.2** Péndulo

El péndulo tiene como variedad de configuraciones  $S^1$  el círculo de radio  $l$  que son todas las posibles posiciones que puede tener. Con lagrangiano  $L(q, \dot{q}) = k(q, \dot{q}) - V(q)$  donde

- Energía cinética  $k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2$
- Energía potencial  $V(q) = mgl(l - \cos q)$



La ecuación dinámica que lo rige es

$$I\ddot{q} + mgl \sin q = \tau \quad \text{donde} \quad I = ml^2$$

Entonces el péndulo tiene una representación geométrica  $(S^1, \mathcal{G}_x = I, TS^1)$ , con variedad de configuraciones  $S^1$ , métrica  $\mathcal{G}_x = I$  y distribución  $\mathcal{H} = TS^1$ .

Particularmente es interesante estudiar los sistemas mecánicos simples con restricciones no holonómicas. Se puede hacer una caracterización, en el sentido de obtener propiedades intrínsecas que los describan y en base a estas propiedades hacer comparaciones entre ellos y más aún, llegar a hacer una clasificación. Es por eso que el método de equivalencia de Cartan resulta ser una herramienta muy útil dentro de la clasificación de sistemas mecánicos simples con restricciones no holonómicas.

**El objetivo principal** de esta tesis es estudiar el método de equivalencia de Cartan. Para ello se estudiaron algunos conceptos y ejemplos de haces fibrados principales y con la finalidad de tener familiaridad con los cálculos involucrados dentro de los haces fibrados principales, codificación de objetos geométricos mediante una  $G$ -estructura y el cálculo de invariantes diferenciales de las  $G$ -estructuras a través de la derivada de Darboux.

**Organización de la tesis.** En el capítulo 1 se da una breve introducción y motivación de esta tesis así como también el objetivo principal y objetivos particulares. En el capítulo 2 se describen algunos conceptos preliminares que son útiles para continuar con los siguientes capítulos, además se pretende establecer algunas convenciones y notaciones. En el capítulo 3 se describen algunos conceptos relacionadas con haces fibrados principales y  $G$ -estructuras para codificar estructuras geométricas, también se dan algunos ejemplos de estructuras geométricas y las respectivas  $G$ -estructuras que las caracterizan. En el capítulo 4 se muestra el procedimiento para obtener invariantes diferenciales de  $G$ -estructuras usando distintos métodos, entre ellos el de los marcos móviles de Cartan y, la derivada de Darboux. Se da un ejemplo detallado de la aplicación del método de equivalencia, para el caso de una curva en  $\mathbb{R}^2$ . En el capítulo 5 se revisan algunos resultados del artículo de Kurt Ehlers titulado “Geometric equivalence on nonholonomic three-manifolds”, donde se aplica el método de equivalencia sobre variedades de contacto de dimensión 3. Finalmente en el capítulo 6 se dan a conocer las conclusiones y trabajo a futuro.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se describen algunos conceptos básicos como requisito previo para los siguientes capítulos. También se establecerán algunas convenciones y notaciones. Se asume que el lector está familiarizado con conceptos básicos de topología, álgebra lineal y geometría diferencial. Para más detalles se recomienda consultar [1], [2], [9], [10].

### 2.1. Preliminares de geometría diferencial

En esta sección se establecen algunas notaciones y convenciones que serán útiles en la lectura de esta tesis. Empezamos con algunas convenciones de notación. Denotamos  $\{x\}$  como el conjunto que contiene un solo elemento  $x$ ; un listado de elementos denotará un conjunto mediante  $\{x_1, \dots, x_n\}$  y denotaremos una familia de conjuntos como  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  donde  $A$  es un conjunto de índices. Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, la expresión  $f : A \rightarrow B$  significa que  $f$  mapea el conjunto  $A$  en el conjunto  $B$ , si  $D \subset A$  entonces  $f|_D$  denota la restricción de  $f$  a  $D$ .

Sea un  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , si  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto tal que  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $g$  es de clase  $C^k$  (ó  $g$  es  $C^k$ ), si  $g$  es  $k$  veces continuamente diferenciable ([2], [10]). En particular  $g$  es  $C^0$  si  $g$  es continua, y si  $g$  es  $C^k$  para todo  $k \geq 0$ , entonces decimos que  $g$  es de clase  $C^\infty$  (ó  $g$  es lisa).

Sea  $W$  un conjunto. Una **carta coordenada** para  $W$  es un par  $(U, \varphi)$  tal que  $U$  es un subconjunto de  $W$ , y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\varphi$  inyectivo y  $\varphi(U)$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Denotamos una colección de cartas mediante  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ . Si  $W = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ , y siempre que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  entonces

1.  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  y  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  son subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , y
2.  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  es un  $C^\infty$ -difeomorfismo.

Al mapeo  $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$  se le llama cambio de coordenadas. Se dice que dos cartas son compatibles si satisfacen las propiedades 1 y 2. A la colección de cartas compatibles se le llama  $C^\infty$ -**atlas** para  $W$ . Dos  $C^\infty$ -atlas  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  son equivalentes si  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  es también un  $C^\infty$ -atlas. A la clase de equivalencia de atlas bajo esta relación de equivalencia se le llama  $C^\infty$ -**estructura diferenciable** sobre  $W$ . Una  $C^\infty$ -variedad  $M$  es un conjunto  $W$  con una  $C^\infty$ -estructura diferenciable. Si todas las cartas toman valores en  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n$  fijo, entonces  $n$  es la **dimensión** de  $M$ . Con el término variedad lisa  $M$ , nos referiremos a una variedad diferenciable de clase  $C^\infty$ .

Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables de clase  $C^k$  de dimensión  $n$ . Un **mapeo**  $f : M \rightarrow N$  es de clase  $C^r$ ,  $r \leq k$ , si para cada carta  $(U_i, \varphi_i)$  de  $M$  y cada carta  $(V_j, \psi_j)$  de  $N$ , tal que  $f(U_i) \subset V_j$ , el mapeo  $\hat{f} = \psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \psi_j(V_j)$  es diferenciable de clase  $C^r$ . Al mapeo  $\hat{f}$  se le llama el representante de  $f$ , esto es,

$$\begin{array}{ccc} U_i \subset M & \xrightarrow{f} & V_j \subset N \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \psi_j \\ \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\hat{f}} & \psi_j(V_j) \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Una **función diferenciable** de clase  $C^k$  sobre  $M$  es un mapeo de clase  $C^k$  de  $M$  en  $\mathbb{R}$ . El conjunto de funciones diferenciables sobre  $M$  de clase  $C^\infty$  forma un álgebra y la denotaremos por  $\mathfrak{F}(M)$ . Sea  $\mathfrak{F}(q)$  el álgebra de funciones diferenciales de clase  $C^1$  definidas en un abierto  $U$  de  $M$  tal que  $q \in U$ . Un **vector tangente**  $X_q$  a  $M$  en un punto  $q \in M$  es un mapeo lineal  $X_q : \mathfrak{F}(q) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $f$  y  $g \in \mathfrak{F}(q)$ ,  $X_q$  es una derivación, esto es,  $X_q(f \cdot g) = f(q)X_q(g) + g(q)X_q(f)$ . Al conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $q$  lo denotamos por  $T_qM$ , el cual está dotado de una estructura de espacio vectorial.

La unión disjunta de todos los espacios tangentes a  $M$ , denotada por  $TM = \coprod_{q \in M} T_q M$ , se le llama **haz tangente** de  $M$ . A  $TM$  se le dota de manera natural de una estructura de variedad diferenciable y admite una proyección natural dada por

$$\pi_M : TM \rightarrow M, \quad (2.1)$$

tal que para cada  $v \in T_q M$   $\pi_M(v) = q$ .

Dado un mapeo  $f : M \rightarrow N$  de clase  $C^1$ , donde  $M$  y  $N$  son variedades, se le llama **el mapeo tangente de  $f$  en  $p$**  al mapeo lineal  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , donde  $p \in M$ , tal que para cualquier función diferenciable  $g$  de clase  $C^\infty$  definida en una vecindad  $V \subseteq N$  de  $f(p)$  se tiene:

$$T_q f(X_q(g)) = X_q(g \circ f) \quad (2.2)$$

Si  $f$  es un difeomorfismo, entonces  $T_q f$  es un mapeo lineal no singular para cualquier  $q \in M$ , es decir  $\ker(T_q f) = \{0\}$ . Se llama **rango** de una función diferenciable  $f$  en un punto  $p \in M$  a la dimensión del espacio vectorial de  $T_p f(T_p M) \subset T_{f(p)} N$ .

El mapeo  $Tf$  es un mapeo de haces  $Tf : TM \rightarrow TN$ , el cual mapea el espacio tangente a  $M$  en cualquier punto  $p \in M$  al espacio tangente a  $N$  en el punto  $f(p)$  y hace que el siguiente diagrama conmute, esto es,  $f \circ \pi_M = \pi_N \circ Tf$ .

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Sea  $M$  una variedad, se le llama **campo vectorial** sobre  $M$  a un mapeo  $X : M \rightarrow TM$  que asigna a cada punto  $q \in M$  un vector tangente  $X_q \in T_q M$ . Si  $f \in \mathfrak{F}(M)$ , entonces  $Xf \in \mathfrak{F}(M)$  denota la función tal que  $(Xf)(p) = X_p(f) \in \mathbb{R}$ . Un campo vectorial se dice ser diferenciable si  $Xf$  es diferenciable para cada  $f \in \mathfrak{F}(M)$ ; el conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre  $M$  lo denotaremos por  $\Gamma(TM)$ . Por otro lado si  $f$  es una función sobre  $M$  y  $X$  es un campo vectorial sobre  $M$ , entonces  $fX$  es un campo vectorial sobre  $M$  definido por  $(fX)_p = f(p)X_p$  para  $p \in M$  y, si además definimos la suma de dos campos vectoriales por  $(X + Y)_p = X_p + Y_p$ ,  $\Gamma(TM)$  es un módulo sobre el álgebra  $\mathfrak{F}(M)$ , con la suma y producto por escalar definidas.

De manera adicional, se define un mapeo

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \quad (2.3)$$

tal que a cada  $X$  y  $Y \in \Gamma(TM)$  le asigna un campo vectorial  $[X, Y]$  llamado corchete de Lie de  $X$  y  $Y$  que en cada punto  $p \in M$  y para cada  $f \in \mathfrak{F}(M)$  satisface  $[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$ . El mapeo  $[\cdot, \cdot]$  tiene las siguientes propiedades para todo  $X, Y$  y  $Z \in \Gamma(TM)$ :

- Si  $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ , entonces  $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ ,
- $[X, Y] = -[Y, X]$ , es antisimétrico y satisface
- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ , la identidad de Jacobi

Un espacio vectorial junto con una operación bilineal definida como en (2.3), satisfaciendo las propiedades anteriores se le llama **álgebra de Lie**.

Un **marco lineal**  $u = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  sobre una  $n$ -variedad  $M$  es un conjunto de  $n$  campos vectoriales tales que en cada punto  $p \in M$  forman una base ordenada  $\{X_{1p}, X_{2p}, \dots, X_{np}\}$  de  $T_pM$ . Al conjunto de todos los marcos lineales en el punto  $p \in M$  lo denotamos por  $F_pM$  y el conjunto de todos los marcos lineales en todos los puntos de  $M$  es llamado **haz de marcos lineales** y lo denotamos por  $FM = \coprod_{p \in M} F_pM$ .

Al igual que en el haz tangente existe una proyección natural dada por

$$\pi_M : FM \rightarrow M \quad (2.4)$$

tal que  $\pi_M(u_p) = p$  para todo  $u_p \in F_pM$ .

Una **distribución**  $\mathcal{H}$  de rango  $r$ , sobre una  $n$ -variedad  $M$  es un mapeo tal que a cada  $p \in M$  asigna un subespacio vectorial  $\mathcal{H}_p$  de dimensión  $r \leq n$  del espacio tangente  $T_pM$  para cada  $p \in M$ .  $\mathcal{H}$  se dice ser  $C^\infty$  si para cada  $p \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  y existen  $r$  campos vectoriales  $X_1, \dots, X_r$  de clase  $C^\infty$  sobre  $U$  los cuales generan a  $\mathcal{H}$  en cada punto de  $U$ . Se dice que un campo vectorial  $X$  toma valores en  $\mathcal{H}$ , lo que se denota  $X \in \Gamma(\mathcal{H})$ , si  $X_p \in \mathcal{H}_p$ . Si para cualesquiera  $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ , el campo vectorial  $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{H})$ , entonces a  $\mathcal{H}$  se le llama **distribución involutiva**.

En geometría diferencial también se estudian los llamados objetos duales, por ejemplo el espacio tangente dual de  $T_xM$ , también conocido como **espacio cotangente**,

denotado por  $T_x^*M$ , es el conjunto de covectores en  $x \in M$ . Un **covector** sobre  $M$  en un punto  $x \in M$  es un mapeo lineal  $\sigma_x : T_xM \rightarrow \mathbb{R}$ .

De maneja similar que al haz tangente, el **haz cotangente** de una variedad  $M$  es la union disjunta de todos los espacios cotangentes  $T_x^*M$  en todos los puntos  $x \in M$  y lo denotamos mediante  $T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$ . A  $T^*M$  también se le dota de una estructura de variedad diferenciable de manera natural y existe una proyección natural dada por:

$$\pi_M^* : T^*M \rightarrow M \quad (2.5)$$

tal que  $\pi_M^*(\sigma) = x$  para todo  $\sigma \in T_x^*M$ .

Sea  $M$  una variedad. Una **forma diferencial** (o también llamada **1-forma**)  $\sigma$  sobre  $M$  es un mapeo  $\sigma : M \rightarrow T^*M$  tal que a cada punto  $x \in M$  le asigna un covector  $\sigma_x \in T_x^*M$ . Ahora si  $f : M \rightarrow N$  es un mapeo de clase  $C^1$ , se le llama **mapeo adjunto** al mapeo  $T_x^*f : T_{f(x)}^*N \rightarrow T_x^*M$  tal que para cada  $x \in M$ ,  $v \in T_xM$  y  $\omega \in T_{f(x)}^*M$ ,  $T_x^*f(\omega) = \omega_{f(p)}(T_p f(v))$ .

Un **comarco lineal**  $p = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  sobre una  $n$ -variedad  $M$ , es un conjunto de  $n$  1-formas tales que en cada punto  $x \in M$  forman una base ordenada  $\{\sigma_{1x}, \sigma_{2x}, \dots, \sigma_{nx}\}$  de  $T_x^*M$ . También será conveniente considerar un comarco como un mapeo lineal  $p : M \rightarrow F^*M$  tal que a cada punto  $x \in M$  le asigna un isomorfismo lineal  $p_x : T_xM \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido por  $v = v^i X_i(x) \mapsto (v^1, \dots, v^n)$ , donde  $v \in T_xM$  y  $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ , representaremos a los comarcos como vectores columna cuyas componentes son 1-formas; tienen asociada una matriz la cual le llamamos representante. Al conjunto de todos los comarcos lineales en  $x \in M$  lo denotamos por  $F_x^*M$  y al conjunto de todos los comarcos en todos los puntos de  $M$  se le llama **haz de comarcos lineales** sobre  $M$  y lo denotamos mediante  $F^*M = \coprod_{p \in M} F_p^*M$ , aquí también se define una proyección natural

$$\pi^* : F^*M \rightarrow M$$

Sea  $\mathcal{H}$  una distribución de rango  $r$  sobre una variedad  $M$ . Un comarco  $p = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  se dice ser **geométricamente admisible** para (ó **adaptado** a)  $\mathcal{H}$  si los  $\{\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n\}$  aniquilan a  $\mathcal{H}$ , esto es, para todo  $X_q \in \mathcal{H}_q$ ,  $\sigma_{r+i}(X_q) = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Una **2-forma**  $\alpha$  sobre una variedad  $M$  es un mapeo  $\alpha : M \rightarrow T^*M \times T^*M$  tal que a cada punto  $x \in M$  le asigna una forma bilineal antisimétrica sobre el espacio tangente  $T_xM$  a  $M$  en  $x$  de la forma  $\alpha_x : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$ . En general se llama una  **$k$ -forma**  $\sigma$  (también llamada forma diferencial de grado  $k$ ) sobre una variedad  $M$  en  $x$  al mapeo  $k$ -multilineal antisimétrico  $\sigma_x : T_xM \times \dots \times T_xM (k - \text{veces}) \rightarrow \mathbb{R}$  sobre  $T_xM$ . Sin la suposición de antisimetría,  $\sigma$  debería ser llamado un  $(0, k)$ -tensor. ([5], p. 129)

Si  $\sigma$  y  $\beta$  son 1-formas sobre  $M$ , entonces su producto exterior es

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1) \text{ para } v_1, v_2 \in T_xM$$

**El producto exterior**  $(\wedge)$  satisface las siguientes propiedades: (Ver [5], p.131 )

1. **Asociatividad:**  $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ ,

2. **Bilinealidad:** para toda  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$(a\alpha_1 + b\alpha_2) \wedge \beta = a(\alpha_1 \wedge \beta) + b(\alpha_2 \wedge \beta)$$

$$\alpha \wedge (c\beta_1 + d\beta_2) = c(\alpha \wedge \beta_1) + d(\alpha \wedge \beta_2)$$

3. **Anticonmutatividad:**  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl}\beta \wedge \alpha$ , donde  $\alpha$  es una  $k$ -forma y  $\beta$  es una  $l$ -forma.

En términos de las bases duales  $dx^i$ , cualquier  $k$ -forma puede ser escrita localmente como  $\alpha = \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  donde  $i_1 < \dots < i_k$ .

En particular sean  $\omega$  y  $\sigma$  1-formas y  $X, Y \in \Gamma(TM)$ . En este caso tenemos

$$\omega \wedge \sigma(X, Y) = \omega(X)\sigma(Y) - \omega(Y)\sigma(X)$$

Sea  $\bigwedge T_x^*M$  el álgebra exterior sobre  $T_x^*M$ . Una  $k$ -forma  $\sigma$  también puede ser definida como un mapeo que a cada  $x \in M$  le asigna un elemento de grado  $k$  en  $\bigwedge T_x^*M$ .

Denotamos por  $\mathfrak{D}^k M$  el conjunto de todas las  $r$ -formas diferenciales sobre  $M$  para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ . Particularmente  $\mathfrak{D}^0 M = \mathfrak{F}(M)$ .

Existe un único mapeo llamado **diferenciación exterior**  $d$  de  $k$ -formas sobre  $M$  a  $(k + 1)$ -formas sobre  $M$  tal que: (Ver [10], p. 7 )

- Para  $f \in \mathfrak{D}^0 M$ ,  $df$  es la diferencial total;



- Si  $\beta \in \mathfrak{D}^r M$  y  $\sigma \in \mathfrak{D}^s M$ , entonces  $d(\beta \wedge \sigma) = d\beta \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge d\sigma$
- $d^2 = 0$

Si  $\sigma$  es de la forma  $\sigma = fdu$  para  $f \in \mathfrak{F}M$ , entonces  $d\sigma = df \wedge du$ .

Para cada campo vectorial  $X$ , se define una derivación antisimétrica llamada **producto interior** con respecto a  $X$  y se denota por  $\iota_X$ , de grado  $-1$  de  $\mathfrak{D}(M)$  tal que, (Ver [10], p. 35)

- $\iota_X f = 0$  para cada  $f \in \mathfrak{D}^0(M)$
- $\iota_X \omega = \omega(X)$  para cada  $\omega \in \mathfrak{D}^1(M)$
- Si  $\omega \in \mathfrak{D}^r$  y  $\sigma \in \mathfrak{D}^s$ , entonces  $\iota_X(\omega \wedge \sigma) = \iota_X \omega \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge \iota_X \sigma$
- $\iota_X^2 = 0$

Ahora veamos como la **diferenciación de Lie** de campos vectoriales, campos tensoriales y funciones diferenciables difiere de acuerdo a éstos. La diferenciación de Lie para  $X, Y$  campos vectoriales sobre  $M$  se define por  $L_X Y = [X, Y]$  y  $L_X f = X(f)$  siempre que  $f \in \mathfrak{F}(M)$ . Mientras que para elementos de  $\mathfrak{D}^k(M)$ ,  $L_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X$ , para  $\iota$  y  $d$  definidos como antes. ([2], p. 70)

Sea  $V$  un espacio vectorial y se  $V^*$  su dual, entonces para  $k$  y  $s$  enteros positivos  $\mathbf{T}^k(V)$  es un espacio tensorial del tipo  $(k, 0)$  definido por  $\mathbf{T}^k(V) = V \otimes \cdots \otimes V$  ( $k$ -veces el producto tensorial) y es llamado espacio tensorial contravariante de grado  $k$ , un elemento de  $\mathbf{T}^k(V)$  es llamado tensor contravariante del tipo  $(k, 0)$ . De manera similar  $\mathbf{T}_s(V) = V^* \otimes \cdots \otimes V^*$  ( $s$  veces el producto tensorial) es el espacio tensorial covariante de grado  $s$  y cada elemento es llamado tensor covariante del tipo  $(0, s)$ . Para más detalles consultar ([10], p. 17)

Consecuentemente podemos definir un espacio tensorial del tipo  $(k, s)$ ,  $k$  veces contravariante y  $s$  veces covariante como el producto tensorial

$$\mathbf{T}_s^k(V) = \mathbf{T}^k(V) \otimes \mathbf{T}_s(V) = V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$$

Particularmente,  $\mathbf{T}_0^k = \mathbf{T}^k$ ,  $\mathbf{T}_s^0 = \mathbf{T}_s$  y  $\mathbf{T}_0^0 = \mathbb{R}$ .

Ahora consideremos  $T_x M$ , el espacio tangente a  $M$  en un punto  $x$ , el cual es un espacio vectorial al igual que su dual  $T_x^* M$ , entonces

$$\mathbf{T}_s^k(T_x M) = \mathbf{T}^k(T_x M) \otimes \mathbf{T}_s(T_x M) = T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M \otimes T_x^* M \otimes \cdots \otimes T_x^* M$$

Un elemento en  $\mathbf{T}_s^k(T_x M)$  se llama **tensor del tipo**  $(k, s)$  (también llamado tensor  $k$ -veces contravariante y  $s$ -veces covariante). Al conjunto de secciones sobre  $M$  de ese espacio tensorial lo denotamos por  $\Gamma(T_s^k(TM))$ ; si  $T \in \Gamma(T_s^k(TM))$  entonces a  $T$  se le llama **campo tensorial del tipo**  $(k, s)$ . Por consiguiente, un campo vectorial sobre  $M$  es un campo tensorial del tipo  $(1, 0)$  y una 1-forma sobre  $M$  es un campo tensorial del tipo  $(0, 1)$ . Un mapeo  $g : M \rightarrow T^* M \times T^* M$  que a cada punto  $x \in M$  le asigna un tensor del tipo  $(0, 2)$ , esto es,  $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  induce un producto interior en cada espacio tangente  $T_x M$ ,  $x \in M$ , es decir,  $\langle v, w \rangle \triangleq g_x(v, w)$  para todo  $v$  y  $w \in T_x M$ .

Una **métrica Riemanniana** definida positiva sobre  $M$  es un campo tensorial  $g$  del tipo  $(0, 2)$  no degenerado que satisface las siguientes propiedades:

- $g$  es definido positivo: para todo  $x \in M$  y para todo  $v \in T_x M$ ,  $g_x(v, v) \geq 0$  y  $g_x(v, v) = 0$  si y solo si  $v = 0$  y
- $g$  es simétrico: para todo  $x \in M$  y para todo  $v, w \in T_x M$ ,  $g_x(v, w) = g_x(w, v)$ .

Sean  $U, V$  y  $W$  espacios vectoriales de dimensión finita, el espacio de todas las funciones bilineales de  $U \times V$  a  $\mathbb{R}$  es isomorfo al espacio de todas las funciones lineales  $U \otimes V$  a  $\mathbb{R}$ , de esto se deduce lo siguiente.

- **Propiedad del mapeo universal.** ([2], p. 55) Sea  $\varphi : U \times V \rightarrow U \otimes V$  un mapeo bilineal definido por  $(u, v) \mapsto u \otimes v$ , si  $\tau : U \times V \rightarrow W$  es un mapeo bilineal y  $W$  es un espacio vectorial, entonces existe un único mapeo lineal  $\bar{\tau} : U \otimes V \rightarrow W$  tal que el siguiente diagrama conmuta, es decir,  $\bar{\tau} \circ \varphi = \tau$

$$\begin{array}{ccc} U \otimes V & & (2.6) \\ \uparrow \varphi & \searrow \bar{\tau} & \\ U \times V & \xrightarrow{\tau} & W \end{array}$$

Sean  $M$  y  $N$  variedades sobre las cuales se definen campos vectoriales, uno formas, campos tensoriales entre otros objetos geométricos. Existe una forma de definir estos objetos sobre otra variedad que tenga características similares a partir del que ya se

conoce, esto se hace a través de pull back o push forward y se dan ejemplos de cómo proceder. Sea  $\varphi : M \rightarrow N$  un mapeo  $C^\infty$  de la variedad  $M$  a la variedad  $N$  y sea  $\sigma$  una 1-forma sobre  $N$ . El **pull back** de  $\sigma$  por  $\varphi$  denotada por  $\varphi^*\sigma$ , es una 1-forma sobre  $M$  dada por:

$$(\varphi^*\sigma)_x(v) = \sigma_{\varphi(x)}(T_x\varphi(v)), \quad v \in T_xM \quad (2.7)$$

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \xrightarrow{T_x\varphi} & T_{\varphi(x)}N \\ (\varphi^*\sigma)_x \downarrow & & \swarrow \sigma_{\varphi(x)} \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

Si  $\varphi$  es un difeomorfismo, el push forward de  $\sigma$  por  $\varphi$  denotado por  $\varphi_*\sigma$  se define por

$$\begin{aligned} \varphi_* &= (\varphi^{-1})^* \\ (\varphi_*\sigma)_{\varphi(x)} &= (\varphi^{-1*}\sigma)_{\varphi(x)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \xrightarrow{T_x\varphi} & T_{\varphi(x)}N \\ \sigma_x \downarrow & & \swarrow (\varphi_*\sigma)_{\varphi(x)} \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T_{\varphi(x)}N & \xrightarrow{T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}} & T_xM \\ (\varphi^{-1*}\sigma)_{\varphi(x)} \downarrow & & \swarrow \sigma_x \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

## 2.2. Teoría básica de Lie

Los trabajos de Felix Klein y Sophus Lie, sobre la teoría de grupos de Lie, se añadieron al estudio de la geometría diferencial en el siglo XIX. Klein se dio cuenta que el estudiar un tipo específico de geometría, se traducía en estudiar las relaciones que permanecían invariantes ante las transformaciones de un grupo específico, en particular alguno de los grupos estudiados por Lie [14].

Un **grupo de Lie**  $G$  es una variedad diferenciable la cual también es dotada con una estructura de grupo tal que el mapeo  $G \times G \rightarrow G$  definido por  $(g, h) \mapsto g \cdot h^{-1}$  es  $C^\infty$  para todo  $(g, h) \in G \times G$ . ([2], p. 82)

Se definen acciones de un grupo de Lie  $G$  en él mismo llamadas traslación a la izquierda y derecha la cuales se definen mediante lo siguiente. Sea  $g \in G$ , la **traslación a la izquierda y a la derecha** por  $g$  son respectivamente los difeomorfismos  $L_g$  y  $R_g$  de  $G$  dados por:

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G, & L_g(a) &= g \cdot a & \text{para todo } a \in G \\ R_g : G &\rightarrow G, & R_g(a) &= a \cdot g & \text{para todo } a \in G \end{aligned}$$

De esta definición se deducen las siguientes propiedades. Sean  $g, h \in G$  entonces

- $L_g \circ L_h = L_{gh}$
- $R_g \circ R_h = R_{hg}$
- $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$
- En general  $L_g \circ L_h \neq L_h \circ L_g$  y  $R_g \circ R_h \neq R_h \circ R_g$

Un **campo vectorial**  $C^\infty X$  sobre  $G$  es **invariante a la izquierda** si para todo  $g \in G$ ,  $L_g^* X = X$ , es decir,

$$\begin{aligned} TL_g \circ X &= X \circ L_g \\ T_h L_g(X(h)) &= T_h L_g(X_h) = X_{gh} \end{aligned} \quad \begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{TL_g} & TG \\ X \uparrow & & \uparrow X \\ G & \xrightarrow{L_g} & G \end{array}$$

Un **álgebra de Lie**  $\mathfrak{g}$  sobre  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial real  $\mathfrak{g}$  junto con un operador bilineal  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  (llamado corchete) tal que para todo  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ , satisface las siguientes propiedades:

- a) Anti-conmutatividad:  $[x, y] = -[y, x]$
- b) Identidad de Jacobi:  $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

El conjunto de todos los campos vectoriales invariantes a la izquierda junto con la operación corchete de Lie forman un álgebra de Lie.

Sea  $G$  un grupo de Lie, existe un **álgebra de Lie asociada a  $G$**  definida como el conjunto  $T_e G$  (espacio tangente a  $G$  en la identidad  $e$ ), la cual denotaremos por  $\mathfrak{g} \triangleq T_e G$ . Junto con la operación corchete de Lie, esta álgebra es isomorfa a  $T_g G$  para cualquier  $g \in G$ .

### Acciones de Grupos sobre variedades

Se pueden definir acciones de un grupo de Lie  $G$  sobre una variedad  $M$ , estas acciones son conocidas como acción derecha e izquierda y satisfacen las siguientes propiedades.

Dado un grupo de Lie  $G$  y  $M$  una  $n$ -variedad, se dice que  $G$  actúa sobre  $M$  por la izquierda si existe un mapeo  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  tal que a cada  $(g, x) \in G \times M$  le asigna  $g \cdot x \triangleq \Phi(g, x) \in M$  y satisface las siguientes condiciones:

1. Si  $e$  es el elemento identidad de  $G$ , entonces  $\Phi(e, x) = x$  para todo  $x \in M$
2. Si  $g_1$  y  $g_2 \in G$ , entonces  $\Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1 g_2, x)$  para todo  $x \in M$

Si  $\Phi$  es  $C^\infty$ , se dice que la acción de  $G$  sobre  $M$  es  $C^\infty$ .

Si fijamos un  $g \in G$  entonces se define el mapeo  $\Phi_g : M \rightarrow M$  dado por  $\Phi_g(x) = \Phi(g, x)$ , de lo que se puede deducir

$$\Phi_{g_1 g_2}(x) = \Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2}(x) \quad \text{para todo } x \in M \tag{2.9}$$

De manera análoga,  $G$  actúa sobre  $M$  por la derecha si existe  $\Phi : M \times G \rightarrow M$  tal que a cada  $(x, g) \in M \times G$  le asigna  $x \cdot g \triangleq \Phi(x, g) \in M$  y satisface las siguientes propiedades:

1.  $\Phi(x, e) = x$  donde  $e$  es el elemento identidad de  $G$  y  $x \in M$

$$2. \Phi(\Phi(x, g_1), g_2) = \Phi(x, g_1 g_2) \text{ para todo } x \in M$$

Si  $\Phi$  es  $C^\infty$ , se dice que la acción de  $G$  sobre  $M$  es  $C^\infty$ .

De manera análoga que en la acción izquierda si fijamos un  $g \in G$  se define un mapeo  $\bar{\Phi}_g : M \rightarrow M$  dado por  $\bar{\Phi}_g(x) = \Phi(x, g)$  de lo que se puede deducir

$$\bar{\Phi}_{g_1 g_2}(x) = \bar{\Phi}_{g_2} \circ \bar{\Phi}_{g_1}(x) \text{ para todo } x \in M \quad (2.10)$$

Por ejemplo el grupo de Lie  $GL(n, \mathbb{R})$  actúa sobre  $F^*(M)$  por la derecha por la regla  $u \cdot a = a^{-1} \circ u$  para  $u \in F^*(M)$  y  $a \in GL(n, \mathbb{R})$  donde  $\circ$  es considerada como la composición de mapeos pero también para el caso de matrices se considerará como producto usual de matrices.

Un grupo de Lie actúa sobre sí mismo a la izquierda por un mapeo llamado conjugación definido por

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto I_g h \end{aligned}$$

Este mapeo induce un homomorfismo de grupos de Lie para cada  $g \in G$  llamado el automorfismo interior inducido por  $g$ , definido por:

$$I_g : G \rightarrow G, \quad (2.11)$$

$$h = ghg^{-1} \quad (2.12)$$

La **acción adjunta**  $Ad : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  es la tangente de  $I_g$  en la identidad  $e$ . Fijando  $g \in G$ ,  $Ad_g = T_e I_g$  así

$$Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad (2.13)$$

$$v \mapsto gvg^{-1} \text{ para todo } v \in \mathfrak{g} \quad (2.14)$$

# Capítulo 3

## Haces Fibrados Principales y G-estructuras

En geometría diferencial se suele estudiar las propiedades intrínsecas de estructuras geométricas bajo la acción de un grupo de transformaciones  $G$ . Una estructura geométrica se entiende como una colección de objetos, tales como métricas Riemannianas, sub Riemannianas, pseudo Riemannianas, distribuciones, codistribuciones, sistemas mecánicos entre otros. Las propiedades intrínsecas identifican y caracterizan a una estructura geométrica, permitiendo de esta manera, poder comparar una estructura geométrica con otra.

En general no existe una forma “universal” que provea parámetros o condiciones bajo las cuales podamos comparar estructuras que a simple vista pueden parecer muy distintas o que no tengan nada en común; en estos casos lo único que podemos decir es que parecen distintas. Sin embargo, dichas estructuras pueden tener representaciones distintas aunque representen lo mismo y aún así no podremos compararlas. Uno de los obstáculos que nos impide hacer dicha comparación es que conforme el objeto geométrico sea más complejo, la identificación y cálculo de las propiedades intrínsecas se dificulta.

El estudio de las propiedades intrínsecas se facilita con el estudio de invariantes diferenciales bajo la acción de un grupo de transformaciones  $G$ . *El método de equivalencia* identifica y calcula invariantes diferenciales, y una versión de su aplicación comienza por codificar la estructura geométrica bajo estudio mediante una  $G$ -estructura. En esencia, una  $G$ -estructura es un subhaz o una reducción de un haz fibrado principal.

Este capítulo está dedicado a entender los conceptos de haz fibrado principal,  $G$ -estructuras y conceptos relacionados. En la primera sección (3.1) se explica brevemente la teoría de haces fibrados principales, que son un tipo especial de  $G$ -haz donde  $G$  es un grupo de Lie. Así como también la importancia de las trivializaciones y funciones de transición en la construcción de haces fibrados principales. También se dan algunas nociones sobre haces fibrados principales asociados y reducidos. En la segunda sección (3.2) se da una definición de  $G$ -estructura y posteriormente se dan algunos ejemplos de estructuras geométricas codificadas mediante una  $G$ -estructura.

### 3.1. Haces Fibrados Principales

Antes de abordar el concepto de haz fibrado principal comenzaremos con algo más simple llamado **haz**  $(P, M, \pi)$ , el cual consiste de un espacio total  $P$ , un espacio base  $M$  y una proyección  $\pi: P \rightarrow M$ . Algunos ejemplos de haces más comunes y conocidos son el haz tangente y el haz cotangente, con espacios totales  $P = TM$  y  $P = T^*M$ , respectivamente, espacio base una variedad  $M$  y proyecciones naturales dadas por  $\pi_M: TM \rightarrow M$  y  $\pi_M^*: T^*M \rightarrow M$  respectivamente. En estos casos a las preimágenes  $\pi_M^{-1}(\{x\})$ ,  $\pi_M^{*-1}(\{x\})$  para cada  $x \in M$ , se les llama “fibra” sobre ó arriba de  $x$ .

Si cada fibra es un espacio vectorial, al haz se le llama **haz vectorial** y se define como una cuádrupla  $(P, M, \pi, F)$ , donde  $F$  es un espacio vectorial llamado la *fibra típica* y se tiene además que cada fibra de  $P$  es difeomorfa a  $F$ . Ahora si,  $F$  es una variedad, el haz que se obtiene se le llama haz fibrado.

**Definición 1** ([1], p.130) *Un haz fibrado es una cuádrupla  $(P, M, \pi, F)$ , que satisface lo siguiente:*

- $P, M$  y  $F$  son variedades lisas,
- $\pi: P \rightarrow M$  es una submersión suprayectiva de clase  $C^\infty$ , y
- Existe un atlas  $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_a, \psi_a) : a \in A\}$  para  $M$  tal que, para cada  $a \in A$ , existe un difeomorfismo  $\psi_a: \pi^{-1}(\mathcal{U}_a) \rightarrow \mathcal{U}_a \times F$ , tal que  $Pr_1 \circ \psi_a = \pi$ , es decir, el siguiente diagrama conmuta.



$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(\mathcal{U}_a) & \xrightarrow{\psi_a} & \mathcal{U}_a \times F \\
 \pi \downarrow & \swarrow \text{Pr}_1 & \\
 \mathcal{U}_a & & 
 \end{array}$$

La fibra sobre  $x \in M$  es  $\pi^{-1}(\{x\})$  y la denotamos por  $F_x$ . El mapeo  $\psi_a$  en la definición es llamado trivialización local y  $\text{Pr}_1$  es la proyección sobre el primer factor.

Una representación de haz fibrado es el siguiente (Ver Figura 3.1.1). En la figura se muestra que cada fibra de  $P$  es un círculo, el cual es una variedad, el espacio base es  $M$  y la proyección  $\pi$  mapea cada fibra a un punto de  $M$ .

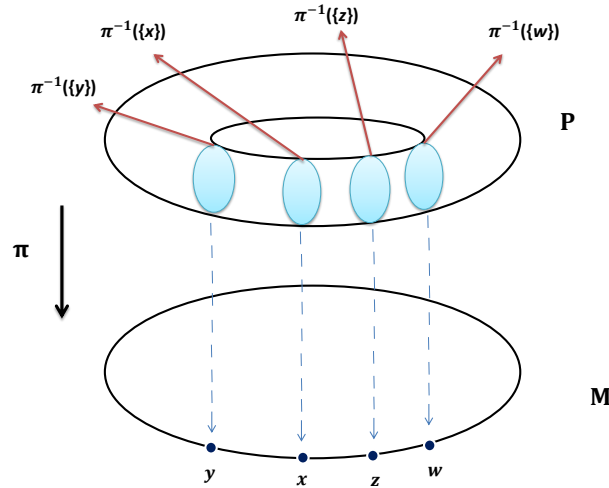


Figura 3.1.1. Representación de un haz fibrado

Ahora si un grupo de Lie de simetrías actúa suavemente sobre la fibra típica  $F$ , el haz fibrado se llama ahora  $G$  haz, el cual será dotado de un atlas con las siguientes propiedades.

**Definición 2** ([9], p. 31) Sea  $\Pi = (P, M, \pi, F)$  un haz fibrado  $C^\infty$ , y supongase que  $G$  es un grupo de Lie que actúa suavemente sobre  $F$  como un grupo de difeomorfismos. Un  $G$  atlas para  $\Pi$  es una colección  $\mathcal{A} = (U_a, \phi_a)_{a \in A}$  de cartas tal que:

1. Los  $U_a$  cubren  $M$ ,
2. para cada par de cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  en  $\mathcal{A}$  el mapeo  $\Phi$

$$\Phi = \psi \circ \varphi^{-1} : (U \cap V) \times F \rightarrow (U \cap V) \times F$$

llamado cambio de coordenadas, está definido por  $\Phi(x, f) = (x, \tau(x)f)$ , donde  $\tau(x) \in G$ , luego  $\tau : U \cap V \rightarrow G$  es un mapeo  $C^\infty$  llamado una función de transición y se obtiene en base a las trivializaciones locales que veremos a continuación.

### 3.1.1. Funciones de Transición

De la definición anterior de  $G$ -atlas, si tenemos que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces se tiene que  $U_\alpha \cap U_\beta \subset U_\alpha$  y  $U_\alpha \cap U_\beta \subset U_\beta$ , por consiguiente  $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$  y  $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \pi^{-1}(U_\beta)$  entonces las trivializaciones  $\alpha$  y  $\beta$  satisfacen  $Pr_1 \circ \alpha = \pi_\alpha$  y  $Pr_1 \circ \beta = \pi_\beta$  respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\alpha} & U_\alpha \times F \\ \pi_\alpha \downarrow & \swarrow Pr_1 & \\ U_\alpha & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_\beta^{-1}(U_\beta) & \xrightarrow{\beta} & U_\beta \times F \\ \pi_\beta \downarrow & \swarrow Pr_1 & \\ U_\beta & & \end{array}$$

$\alpha, \beta$  trivializaciones locales

Al hacer cambios de coordenadas como en la definición (2) se pueden encontrar las respectivas funciones de transiciones y algunas de sus propiedades.

$$\alpha \circ (\beta)^{-1} : \beta(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)) \rightarrow \alpha(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta))$$

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \cap U_\beta \times F & \xrightarrow{\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}} & U_\alpha \cap U_\beta \times F \\ Pr_1 \downarrow & & \downarrow Pr_1 \\ U_\alpha \cap U_\beta & \xrightarrow{Id} & U_\alpha \cap U_\beta \end{array}$$

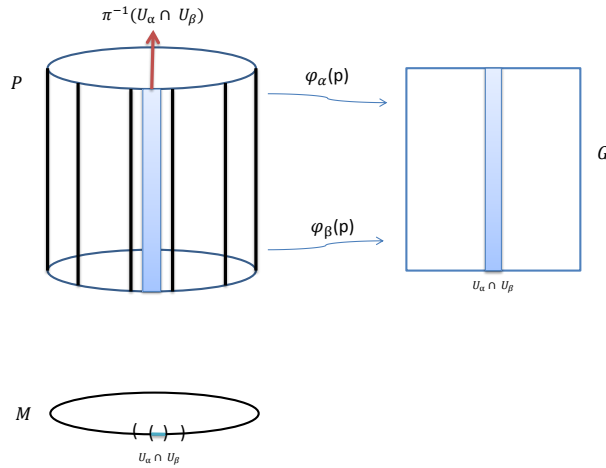
Sea  $(x, f) \in U_\alpha \cap U_\beta \times F$  entonces  $(\alpha \circ \beta^{-1})(x, f) = (x, \tau_{\alpha\beta}(x)f)$ , donde  $\tau_{\alpha\beta}(x) \in G$ , de esta manera  $G$  actúa sobre  $F$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son difeomorfismos. Entonces existen mapeos  $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow G$  y  $\varphi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow G$  tales que

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(p \cdot a)(\varphi_\beta(p \cdot a))^{-1} &= \varphi_\alpha(p)a \cdot (\varphi_\beta(p)a)^{-1} \\ &= \varphi_\alpha(p)a \cdot a^{-1}(\varphi_\beta(p))^{-1} \\ &= \varphi_\alpha(p) \cdot e \cdot (\varphi_\beta(p))^{-1} \\ &= \varphi_\alpha(p)(\varphi_\beta(p))^{-1} \end{aligned}$$

Observamos que  $\varphi_\alpha(p \cdot a)(\varphi_\beta(p \cdot a))^{-1} = \varphi_\alpha(p)(\varphi_\beta(p))^{-1}$  no depende de  $p$  sino de  $\pi(p)$ , es decir  $\pi(p \cdot a) = \pi(p) = x$ . Entonces podemos definir para  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  el mapeo

$$\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$$

tal que  $\tau_{\alpha\beta}(\pi(p)) = \varphi_\alpha(p)(\varphi_\beta(p))^{-1}$ , para  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Los mapeo  $\tau_{\alpha\beta}$  deben ser lisos e indicar como los espacios  $U_\alpha \times F$  y  $U_\beta \times F$ , cada cual se puede identificar con una parte del haz, es decir es la forma en que se pueden pegar, como se puede observa en la figura.



**Figura 3.1.2.** Trivializaciones locales

Ahora si  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ , se obtiene las siguientes propiedades:

$$\gamma\beta^{-1}\beta\alpha^{-1} = \gamma\alpha^{-1} \quad \tau_{\gamma\alpha} : U_\gamma \cap U_\beta \cap U_\alpha \rightarrow G$$

donde  $\tau_{\gamma\alpha} = \tau_{\gamma\beta}\tau_{\beta\alpha}$ , a esta propiedad se le llama *del cociclo* y se satisface, en particular,  $\tau_{\alpha\alpha} = I$ . Con esta información se pueden identificar los elementos que conforman o caracterizan a un haz fibrado, es decir, se puede reconstruir un haz fibrado si se cuenta con la siguiente información: un grupo que actúa sobre la variedad  $F$ , una cubierta  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  de la variedad  $M$  y las funciones de transición que se obtienen al hacer cambios de coordenadas, como se hizo anteriormente.

Un caso especial de  $G$  haz es uno donde  $F$  y  $G$  son difeomorfos, es decir, para cualquier  $f_0 \in F$  el mapeo  $G \rightarrow F$ , definido por  $f_0 \mapsto gf_0$  es un difeomorfismo, este difeomorfismo no proporciona una identificación canónica pues la biyección variará con

la elección de  $f_0 \in F$ . No obstante, una vez que se elige una identificación se puede tomar a  $G$  como  $F$  junto con una acción derecha (o izquierda) de  $G$  en él mismo, la acción conmuta con el cambio de coordenadas ([9], p. 36). Con estos elementos se puede llegar a la siguiente definición.

**Definición 3** ([11], p. 294) *Un  $G$ -haz principal (haz fibrado principal) es un haz fibrado  $(P, M, \pi, G)$  junto con una acción  $\rho : G \times P \rightarrow P$  sobre  $P$  que preserva la fibra, y satisface las siguientes propiedades:*

**1.  $G$  actúa libre y transitivamente sobre  $P$**

- (Libre). Para todo  $p \in P$  si  $p \cdot a = p$  entonces  $a = e$ .
- (Transitivamente). Dados  $p_1$  y  $p_2 \in P$ , entonces existe  $a \in G$  tal que  $p_1 = p_2 \cdot a \in P$ .

**2. La acción de  $G$  preserva las fibras**

- Sean  $p_1$  y  $p_2$  cualesquiera dos puntos de  $P$ . Entonces  $\pi(p_1) = \pi(p_2)$  si y solo si existe  $a \in G$  tal que  $p_1 \cdot a = p_2$ .

**3.  $P$  es localmente trivial sobre  $M$**

- Para cualquier  $x \in M$  existe una vecindad  $U$  que contiene a  $x$  y un difeomorfismo  $\psi$  de  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  tal que  $\psi(p) = (\pi(p), \tau(p))$  donde  $\tau(p) \in G$  también satisface  $\psi(p \cdot a) = (\pi(p), \tau(p) \cdot a)$ , para toda  $p \in \pi^{-1}(U)$  y  $a \in G$ . En otras palabras,  $\pi^{-1}(U)$  es difeomorfo a  $U \times G$ .

Para cualquier  $x \in M$ ,  $F_x$  se llama la fibra arriba de  $x$ . Si  $p$  es un punto en  $F_x$ , entonces  $F_x$  es el conjunto de puntos de la forma  $p \cdot a$ , para cada  $a \in G$ , cada fibra es difeomorfa a  $G$ . Si  $M$  es solo un punto entonces  $P$  se puede ver como  $G$ , luego para cualquier variedad  $M$ , si  $x \in M$  la preimagen  $\pi^{-1}(\{x\})$  es una copia de  $G$ , por consiguiente  $P$  se puede ver como una colección de copias de  $G$ . Es por eso que el haz fibrado principal se considera como una generalización de la noción de grupo de Lie ([11], p. 294).

### 3.1.2. Haces fibrados principales asociados y reducidos

Dentro de la teoría de haces fibrados principales se estudia también a los haces fibrados asociados y reducidos. Los haces fibrados asociados se construyen en base a lo siguiente. Dado un haz fibrado principal  $\Pi = (P, M, \pi, G)$  y una variedad  $F$  sobre la cual el grupo estructural  $G$  actúa por la izquierda (o por la derecha), esto es,  $(a, f) \in G \times F \mapsto a \cdot f \in F$  (o  $(f, a) \in F \times G \mapsto f \cdot a \in F$ ) respectivamente.

Podemos construir un haz fibrado asociado con  $\Pi$  cuya fibra típica será  $F$  (Ver [10], p. 54). Consideremos la variedad producto  $P \times F$ , sobre la cual  $G$  actúa por la derecha mediante lo siguiente, un  $a \in G$  mapea  $(u, f) \in P \times F \mapsto (u \cdot a, a^{-1} \cdot f) \in P \times F$ . El espacio cociente de  $P \times F$  por esta acción de  $G$  lo denotamos por  $E$ . Observamos que  $E$  es un conjunto y carece de una estructura diferenciable, entonces el siguiente paso es introducir una estructura diferenciable, en base a la información que se tiene, esto es equivalente a decir que  $E$  es localmente trivial.

Recordemos que  $\Pi$  es un haz fibrado principal por lo que  $P$  es localmente trivial, esto es, para cada  $x \in M$  existe un abierto  $U$  de  $M$  tal que  $\pi^{-1}(U)$  es isomorfa a  $U \times G$ . Entonces si  $G$  actúa sobre  $\pi^{-1}(U) \times F$  y dado que  $\pi^{-1}(U) \simeq U \times G$ , entonces  $G$  actúa sobre  $U \times G \times F$  por la derecha mediante  $(x, a, f) \mapsto (x, ac, c^{-1}f)$  donde  $c \in G$ . De la proyección  $\pi : P \rightarrow M$ , podemos definir un mapeo de  $P \times F \rightarrow M$ , el cual mapea  $(u, f) \mapsto \pi(u)$ , este mapeo induce un mapeo  $\pi_E$ , llamado la proyección, de  $E$  sobre  $M$ , tal que para cada  $x \in M$   $\pi_E^{-1}(x)$  es llamada la fibra de  $E$  sobre  $x$ . Así el isomorfismo  $\pi^{-1}(U) \simeq U \times G$  induce un isomorfismo  $\pi_E^{-1}(U) \simeq U \times F$ . Si  $\pi_E^{-1}(U)$  es una subvariedad de  $E$ ; entonces la  $\pi_E$  es un mapeo diferenciable de  $E$  en  $M$ , con estas dos propiedades introducimos en  $E$  una estructura diferenciable. Por lo tanto el haz fibrado  $(E, M, F, G, P)$ , con espacio base  $M$ , fibra estándar  $F$  y grupo de estructura  $G$  es asociado con  $\Pi$ .

El caso contrario a lo anterior es que dado un haz fibrado principal un haz fibrado principal reducido consiste en reducir el grupo de estructura  $G$ . Según ([10], p. 53) dados dos haces fibrados principales  $\Pi = (P, M, \pi, G)$  y  $\Pi' = (P', M', \pi', G')$ , un homomorfismo  $f$  de  $\Pi$  en  $\Pi'$  consiste de un mapeo  $f : \Pi' \rightarrow \Pi$  y un homomorfismo  $\rho : G' \rightarrow G$  tal que  $f(u', g') = f(u')\rho(g')$  para todo  $u' \in P'$  y  $g' \in G'$ . El homomorfismo  $f$  mapea cada fibra de  $P'$  en una fibra de  $P$  y entonces induce un mapeo de  $M'$  en  $M$ .

Un homomorfismo  $\bar{f} : \Pi' \rightarrow \Pi$  es llamado *embebimiento* o inyectivo si  $f : P' \rightarrow P$  es un embebimiento y si  $\rho : G' \rightarrow G$  es un monomorfismo. Si  $f : P' \rightarrow P$  es un embebimiento, entonces el mapeo inducido de  $M'$  en  $M$  es también un embebimiento. Al identificar  $P'$  con  $\bar{f}(P')$ ,  $G'$  con  $\bar{f}(G')$  y  $M'$  con  $\bar{f}(M')$ , decimos que  $(P', M', \pi', G')$  es un subhaz de  $(P, M, \pi, G)$ . Si  $M' = M$  y el mapeo inducido  $\bar{f} : M' \rightarrow M$  es la transformación identidad de  $M$ ,  $\bar{f} : \Pi' \rightarrow \Pi$  es llamado una reducción del grupo de estructura  $G$  de  $\Pi$  a  $G'$ . El subhaz  $\Pi'$  es llamado haz reducido.

## Ejemplos de Haces Fibrados Principales

A continuación se dan algunos ejemplos de haces fibrados principales, algunos de estos ejemplos serán útiles en los siguientes capítulos.

**Ejemplo 1** Dado un  $G$ -haz principal  $(P, M, \pi, G)$ . Un ejemplo simple de haz fibrado principal es  $\pi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ , donde  $\pi^{-1}(U)$  es un subconjunto de  $P$ ,  $U$  es un subconjunto abierto de  $M$ , y  $\pi_U$  es la proyección canónica, entonces  $(\pi^{-1}(U), U, \pi_U, G)$  es un  $G$  haz sobre  $U$ , por la condición 3, lo que quiere decir que para cualquier  $x \in M$  existe una vecindad  $U$  que lo contiene y  $\pi^{-1}(U)$  es localmente trivial.

**Ejemplo 2** Considérese el haz de comarcos  $F^*(M)$ , con  $M$  es una  $n$ -variedad,  $\pi$  la proyección natural  $\pi : F^*M \rightarrow M$  y  $G = GL(n, \mathbb{R})$ , el grupo de transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  o también conocido como el grupo lineal general de matrices de  $n \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , que actúa sobre  $F^*M$  por la derecha mediante la acción definida por:  $\rho_a(p_x) = p_x \cdot a = a^{-1} \circ p_x$ . Entonces  $(F^*(M), M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$  es un haz fibrado principal. En efecto,  $F^*(M)$ ,  $M$  y  $GL(n, \mathbb{R})$  son variedades lisas, además la proyección natural  $\pi : P \rightarrow M$  es un mapeo suprayectivo y diferenciable tal que si  $\pi(p_x) = x$ , para  $x \in M$  entonces la órbita de  $p$  se define como:

$$\text{orb}(p_x) = \{u_x \in F^*M \mid \exists a \in G, u_x = p_x \cdot a, \pi(u_x) = x\}$$

A continuación demostraremos que  $(F^*(M), M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$  es un haz fibrado principal, es decir, satisface las condiciones de la definición 3:

1.  $G$  actúa libremente y transitivamente sobre  $P$ . Esto es,

- (Libre). Para todo  $p \in P$  si  $p \cdot a = p$  entonces  $a = e$ .
- (Transitivamente). Dados  $p_1$  y  $p_2 \in P$ , entonces existe  $a \in G$  tal que  $p_1 = p_2 \cdot a \in P$ .

**Demostración.** (*Libre*) Sean  $p \in P$ ,  $a \in G$  y supongamos que  $p \cdot a = a^{-1} \circ p = p$ , donde  $p$  es un isomorfismo lineal  $p : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces existe  $p^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ , tal que,  $p \circ p^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$ , así  $a^{-1} \circ p \circ p^{-1} = p \circ p^{-1}$ , entonces  $a^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$ , consecuentemente  $a = Id_{\mathbb{R}^n}$ . Por lo tanto  $G$  actúa libremente sobre  $P$ .

(*Transitividad*) Dados  $p_1$  y  $p_2 \in P$ , existe  $a = p_2 \circ p_1^{-1} \in G$  tal que  $p_2 \cdot a = a^{-1} \circ p_2 = p_1 \circ p_2^{-1} \circ p_2 = p_1 \in P$

2. *La acción de  $G$  preserva las fibras.* Es decir, dados  $p_1$  y  $p_2$  cualesquiera dos puntos de  $P$ . Entonces  $\pi(p_1) = \pi(p_2)$  si y solo si existe  $a \in G$  tal que  $p_1 \cdot a = p_2$ .

**Demostración.** ( $\implies$ )(Necesidad). Sean  $p_1, p_2 \in P$  y supongamos que  $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ , y recordemos que  $p_1$  y  $p_2$  son isomorfismos lineales entonces  $p_1 \circ p_2^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es una transformación de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Luego si llamamos  $a = p_1 \circ p_2^{-1}$  es tal que  $p_1 \cdot a = a^{-1} \circ p_1 = (p_1 \circ p_2^{-1})^{-1} \circ p_1 = p_2 \circ p_1^{-1} \circ p_1 = p_2$ , entonces tenemos  $p_1 \cdot a = p_2$  y  $a \in G$ .

( $\impliedby$ )(Suficiencia). Ahora supongamos que existe  $a \in G$  tal que  $p_1 \cdot a = p_2$ , esto quiere decir que  $p_2$  pertenece a  $\text{orb}(p_1)$  y por definición de orbita, tenemos que  $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ .

3.  *$P$  es localmente trivial.* Esto es, para cualquier  $x \in M$  existe una vecindad  $U$  que contiene a  $x$  y existe un difeomorfismo  $\psi$  de  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  tal que  $\psi(p) = (\pi(p), \tau(p))$  donde  $\tau(p) \in G$  y también satisface  $\psi(p \cdot a) = (\pi(p), \tau(p) \cdot a)$ , para toda  $p \in \pi^{-1}(U)$  y  $a \in G$ . En otras palabras,  $\pi^{-1}(U)$  es difeomorfo a  $U \times G$ . Esto se resume a definir una estructura diferenciable sobre  $F^*M$  como sigue

**Demostración.** Sea  $x \in M$  y supongamos que existe un abierto  $U$  de  $M$  tal que  $x \in U$ . Dado que  $M$  es una variedad diferenciable  $(U, \varphi) = (U, \varphi^1, \dots, \varphi^n)$  es una carta coordenada sobre  $M$ , con  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un isomorfismo lineal. Si  $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$  es un sistema coordenado alrededor de  $x$ , entonces  $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}|_x\}$  es una base para  $T_x M$ , con correspondiente base dual  $\{d\varphi^1|_x, \dots, d\varphi^n|_x\}$  la cual es una base para  $T_x^* M$ . Entonces cualquier comarco  $p$  en  $x \in U$  puede ser expresado

de manera única en la forma

$$p_x = \sum_{i,j=1}^n p_i^j d\varphi^j|_x$$

donde  $p_i^j$  es una matriz invertible y se llama matriz de transformación.

Sea ahora  $v \in T_x M$ , entonces  $v$  se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de la base  $\{\frac{\partial}{\partial\varphi^1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi^n}|_x\}$ , esto es,  $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_x$ , luego

$$p_x(v) = p_x(v^i \frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_x) = v^i p_x(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_x) = v^i p_i^j d\varphi^j|_x(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_x) = v^i p_i^j e_j \quad (3.1)$$

donde  $i, j = \{1, \dots, n\}$  y  $\{e_j : j = 1, \dots, n\}$ , es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y sabemos además que  $v^i = d\varphi^i|_x(v)$  entonces (3.1) se puede escribir en la forma

$$p_x(v) = d\varphi^i|_x(v) p_i^j e_j$$

Entonces a  $p_x$  lo podemos escribir como  $p_x = p_i^j d\varphi^i|_x \otimes e_j \in \Gamma(F^*M \otimes \mathbb{R}^n)$

por consiguiente  $[p_x]_i^j = p_i^j$  es una matriz única de  $n \times n$  con coeficientes reales. De esta forma identificamos  $\pi^{-1}(U)$  con  $U \times G$  tomando  $((\varphi^1, \dots, \varphi^n), [p_x]_i^j)$  como un sistema coordenado de  $\pi^{-1}(U)$ . Luego una matriz  $A_i^j \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  se puede definir como:

$$A_i^j = [p_x]_i^j r^j (d\varphi^j|_x(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_x)) = r^j \otimes (p_x(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_x)) \quad (3.2)$$

Si  $\eta$  es un mapeo  $\eta : \pi^{-1}(\{U\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido por  $\eta(p_x) = r^j \otimes (p_x(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_x))$

con el requerimiento de que, para  $p_x \cdot a = a^{-1} \circ p \in P$ ,  $\eta$  debe satisfacer:

$$\eta(p \cdot a) = a^{-1} \circ \eta(p_x) = \eta(p) \cdot a, \quad \text{para toda } a \in G.$$

Por lo que debemos verificar que  $\eta$  satisface lo anterior. Sea  $a \in G$  entonces:

$$\eta(p_x \cdot a) = \eta(a^{-1} \circ p_x) = r^j \otimes (a^{-1} \circ p_x(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}|_x)) = [A^{-1}]_k^j [p]_i^k = a^{-1} \circ \eta(p) \in G$$

Así, definimos entonces el mapeo  $\psi : \pi^{-1}(\{U\}) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  tal que

$$\psi(p_x) = (\pi(p_x), \eta(p_x))$$

para  $p_x \in \pi^{-1}(U)$  y  $\pi(p_x) = x$  la proyección canónica.



Solo falta mostrar que  $\psi$  es biyectiva

- Inyectividad. para cada  $p_1, p_2 \in \pi^{-1}(U)$ , si  $\psi(p_1) = \psi(p_2)$ , entonces  $p_1 = p_2$

**Demostración.** Sean  $p_1(x)$  y  $p_2(x) \in \pi^{-1}(U)$  y supongamos que

$$\psi(p_1(x)) = \psi(p_2(x)),$$

esto es

$$\begin{aligned}\psi(p_1(x)) &= (\pi(p_1(x)), \eta(p_1(x))) = (x, r^j \otimes (p_1(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_x))) \\ \psi(p_2(x)) &= (\pi(p_2(x)), \eta(p_2(x))) = (x, r^j \otimes (p_2(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_x)))\end{aligned}$$

entonces  $r^j \otimes (p_1(x)(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_x)) = r^j \otimes (p_2(x)(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_x))$ , entonces  $[p_1]_i^j = [p_2]_i^j$  y dado que  $p_1(x)$  y  $p_2(x)$  son isomorfismos lineales entonces  $p_1 = p_2$  entonces  $\psi$  es inyectiva.

- Suprayectividad. Para todo  $(x, a) \in U \times \mathbb{R}^n$ , existe un  $p_x \in \pi^{-1}(U)$ , tal que  $\psi(p_x) = (x, a)$

**Demostración.**

Sea  $(x, a) \in U \times G$ , existe  $p_x \in \pi^{-1}(\{x\}) \subset \pi^{-1}(U)$  con  $x \in U$  tal que  $\pi(p_x) = x$  y por (3.2) existe  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $A_i^j = r^j \otimes (p(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_x)) = \eta(p)$  es un representante de  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $\psi(p) = (\pi(p), \eta(p)) = (x, a)$  por lo tanto  $\psi$  es suprayectiva. Luego  $\psi$  es inyectiva y suprayectiva por lo tanto es biyectiva.

**Ejemplo 3** Otro ejemplo de haz fibrado principal es  $(P, M, \pi, G)$ , donde

$P = SE(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in SO(2), b \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ,  $M = SE(2)/SO(2)$  y grupo de estructura  $G = SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(2) : b = 0 \right\}$  con la acción definida como en el ejemplo anterior  $p \cdot a = a^{-1} \circ p$ , para todo  $a \in SO(2)$  y  $p \in SE(2)$ , en este caso “ $\circ$ ” denota la multiplicación de matrices y  $\pi : SE(2) \rightarrow SE(2)/SO(2)$  la proyección canónica.

1.  $G$  actúa libremente sobre  $P$ , esto es,

- (Libre). Para todo  $p \in P$  si  $p \cdot a = p$  entonces  $a = e$ .

- (Transitivamente). Dados  $p_1$  y  $p_2 \in P$ , entonces existe  $a \in G$  tal que  $p_1 = p_2 \cdot a \in P$ .

**Demostración.** (*libre*) Sean  $p = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P$ ,  $a = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$  y supongamos que  $p \cdot a = p$ , esto es

$$p \cdot a = a^{-1}p = \begin{pmatrix} B^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^t A & B^t b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces  $B^t A = A$ ,  $B^t b = b$ , lo cual se satisface solo si  $B^t = I$ , así  $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  por lo tanto  $G$  actúa libremente sobre  $P$ .

(*transitividad*) Dados  $p_1 = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $p_2 = \begin{pmatrix} B & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P$ , existe  $a = p_1 \cdot p_2^{-1}$ , donde  $p_1 \cdot p_2^{-1} = \begin{pmatrix} AB^t & -AB^t c + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2)$  si y solo si  $AB^t \in SO(2)$  y  $-AB^t c + b = 0$ . Entonces  $a$  es tal que  $p_1 \cdot a = p_1 \cdot (p_1 \cdot p_2^{-1}) = p_2 \circ p_1^{-1} \circ p_1 = p_2$ . por lo tanto  $G$  actúa transitivamente sobre  $P$

2. *La acción de  $G$  preserva las fibras.* Es decir, dados  $p_1$  y  $p_2$  cualesquiera dos puntos de  $P$ . Entonces  $\pi(p_1) = \pi(p_2)$  si y solo si existe  $a \in G$  tal que  $p_1 \cdot a = p_2$ .

**Demostración.** ( $\implies$ ) Sean  $p_1 = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $p_2 = \begin{pmatrix} C & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P$  y supongamos que  $\pi(p_1) = x = \pi(p_2)$ , esto quiere decir que  $p_1$  y  $p_2$  pertenecen a la misma clase de equivalencia, esto es si  $p_1 \in \left[ \begin{pmatrix} BA & Bb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$  y  $p_2 \in \left[ \begin{pmatrix} \bar{B}C & \bar{B}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$ , donde  $\left[ \begin{pmatrix} BA & Bb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} \bar{B}C & \bar{B}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$  entonces

$$BA = \bar{B}C \iff C = \bar{B}^{-1}BA$$

$$Bb = \bar{B}d \iff d = \bar{B}^{-1}b$$

entonces existe  $a = \begin{pmatrix} B^{-1}\bar{B} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$  tal que  $p_1 \cdot a = p_2$

( $\impliedby$ ) Ahora supongamos que  $p_1 \cdot a = p_2$ , entonces  $p_2 \in \text{orb}(p_1)$  así  $\pi(p_1) = \pi(p_2)$

3.  *$P$  es localmente trivial.* Esto es, para cualquier  $x \in M$  existe una vecindad  $U$  que contiene a  $x$  y  $\psi$  de  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  tal que  $\psi(p) = (\pi(p), \tau(p))$  donde  $\tau(p) \in G$  y también satisface  $\psi(p \cdot a) = (\pi(p), \tau(p) \cdot a)$ , para toda  $p \in \pi^{-1}(U)$  y  $a \in G$ . En otras palabras,  $\pi^{-1}(U)$  es difeomorfo a  $U \times G$ .

$$\psi(p) = \left( \left[ \begin{pmatrix} BA & Bb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{donde } \left[ \begin{pmatrix} BA & Bb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} BA & Bb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : B \in SO(2) \right\} \mid A \in SO(2), b \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Donde el espacio cociente de  $G = SE(2)$  sobre  $H = SO(2)$  denotado por  $SE(2)/SO(2)$  o simplemente por  $G/H$  se determina bajo la relación de equivalencia que se describe a continuación.

Sean  $a, b \in G$ ,  $a \sim b$  si y solo si existe  $h \in H$  tal que  $a \cdot b^{-1} = h$ . La relación  $\sim$ , es una relación de equivalencia, es decir satisface las siguientes propiedades;

$$\text{Sean } a = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} B & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } c = \begin{pmatrix} C & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

- **Reflexividad** “ $a \sim a$ ”.

$$a \cdot a^{-1} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^t & -A^t b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^t & -AA^t b + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2)$$

- **Antisimétrica** “Si  $a \sim b$  entonces  $b \sim a$ ”.

$a \sim b$  si y solo si

$$a \cdot b^{-1} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^t & -B^t c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB^t & -AB^t c + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2)$$

esto es verdad si y solo si  $AB^t \in SO(2)$  y  $-AB^t c + b = 0$  podemos deducir  $(AB^t)^{-1} \in SO(2)$  y  $b = AB^t c$ , si y solo si,  $BA^t \in SO(2)$  y  $c = BA^t b$ , esto es,

$$\begin{pmatrix} BA^t & c - BA^t b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^t & -A^t b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b \cdot a^{-1}$$

entonces  $b \sim a$

- **Transitividad** “Si  $a \sim b$  y  $b \sim c$  entonces  $a \sim c$ ”.

$$a \cdot b^{-1} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^t & -B^t c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB^t & -AB^t c + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(1)$$

$$b \cdot c^{-1} = \begin{pmatrix} B & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^t & -C^t d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BC^t & -BC^t d + c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2)$$

esto es si y solo si

$$AB^t, BC^t \in SO(2) \quad (3.3)$$

$$-AB^t c + b = 0 \quad (3.4)$$

$$-BC^t d + c = 0 \quad (3.5)$$

entonces  $AB^t BC^t \in SO(2)$ , luego de (3.4), y (3.5)  $c = BA^t b$  y  $c = BC^t d$ , en efecto

$$\begin{aligned} AB^t BC^t &= AC^t \in SO(2) \\ -AC^t d + b &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} AC^t & b - AC^t d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^t & -C^t d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot c^{-1}$$

por lo tanto  $a \sim c$ .

Así  $\sim$  es una relación de equivalencia.

Ahora dado que  $\sim$  es una relación de equivalencia, podemos definir entonces el espacio cociente  $G/H = \{H \cdot g : g \in G\}$  donde  $H \cdot g = \{f \in G : f \sim g\}$  es la clase de equivalencia de  $g$ .

Por otro lado el espacio cociente  $SE(2)/SO(2)$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , para demostrar esto debemos encontrar un isomorfismo  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow SE(2)/SO(2)$ .

Proponemos  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow SE(2)/SO(2)$  tal que a cada  $b \in \mathbb{R}^2$  le asigna  $[g] = \left[ \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$  donde  $[g] = H \cdot g$  es la clase de equivalencia de  $g = \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Demostraremos que  $\varphi$  es biyectiva.

b)  $\varphi$  es inyectiva. Sean  $b, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$  y supongamos que  $\varphi(\bar{b}) = \varphi(b)$ , esto es

$$\varphi(\bar{b}) = \left[ \begin{pmatrix} I & \bar{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \varphi(b), \text{ entonces } \bar{b} = b.$$

c)  $\varphi$  es suprayectiva. Sea  $c = \left[ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \in SE(2)/SO(2)$ , entonces existe  $b \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\varphi(b) = c$ .

Entonces, dado que  $\varphi$  es inyectiva y suprayectiva entonces  $\varphi$  es biyectiva y por lo tanto  $SE(2)/SO(2) \simeq \mathbb{R}^2$ .

## 3.2. G-estructuras

Un caso especial de subhaz fibrado principal, es uno llamado  $G$ -estructura, el cual es una reducción de un haz fibrado principal. En esta sección se da una definición de  $G$ -estructura en términos de un espacio vectorial y posteriormente se darán algunos ejemplos de estructuras geométricas que serán codificadas mediante una  $G$ -estructura.

**Definición 4** ([11] p. 310) Sea  $G$  un subgrupo Lie de  $GL(V)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial. Una  $G$ -estructura también denotada por  $B_G$  sobre una  $n$ -variedad  $M$ , es una reducción de  $F^*(M)$  al grupo  $G$ . Equivalentemente,  $B_G$  es una subvariedad de  $F^*M$  tal que dados  $p \in B_G$  y  $a \in GL(V)$ ,  $p \cdot a \in B_G$  si y solo si  $a \in G$ .

Existe una forma de encontrar la  $G$ -estructura de un objeto en base a la definición del mapeo  $\psi$  de la definición de haz fibrado principal (3), a través de las funciones de transición  $\tau$  ([10], p. 52), esto es importante en la construcción de  $G$ -estructuras, sin embargo procederemos un poco diferente. Enseguida se dan algunos ejemplos para ilustrar el proceso de codificación de estructuras geométricas mediante una  $G$ -estructura.

### 3.2.1. Codificación de objetos mediante una $G$ -estructura

Al principio de este capítulo se mencionó que la aplicación del método de equivalencia comienza codificando la estructura geométrica bajo estudio mediante una  $G$ -estructura. Esto con la finalidad de establecer un formalismo común en el que podamos comparar estructuras geométricas que a simple vista parezcan no tener nada en común. Una  $G$ -estructura de una estructura geométrica caracteriza completamente una estructura geométrica en el sentido de que si solo se especifica la  $G$ -estructura, se puede determinar la estructura geométrica de que se trata. A continuación se dan algunos ejemplos de estructuras geométricas y sus respectivas  $G$ -estructuras.

#### Ejemplo 4 Caracterización de una estructura Riemanniana

**Paso de una métrica Riemanniana a la  $G$ -estructura.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad dotada de una métrica Riemanniana  $\tilde{g}$  y  $p_x \in F_x^*M$  y sea  $\{u_1, \dots, u_n\}$  una base ortormal de  $T_xM$  en la métrica  $\tilde{g}_x$  tal que  $\{p_x(u_1) = e_1, \dots, p_x(u_n) = e_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , es decir, si  $p_x$ . Dado que  $M$  está dotada de una métrica riemanniana entonces se tiene lo siguiente

$$\delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \tilde{g}_x(u_i, u_j) = \langle A_i^k u_k, A_j^l u_l \rangle = A_i^k \langle u_k, u_l \rangle A_j^l = A_i^k \delta_{kl} A_j^l$$

se tiene,  $\delta_{ij} = A_i^k \delta_{kl} A_j^l = A_i^l A_j^l = [A^t]_i^l A_j^l$ , por lo tanto  $A^t = A^{-1}$  y  $A \in O(n)$ . Esto quiere decir que el isomorfismo  $p_x$  queda determinado con solo conocer las imágenes de los de los vectores base de  $T_x M$  y dado que  $M$  es dotada de una métrica Riemanniana, entonces a  $p_x$  lo podemos considerar como una transformación ortogonal. Esto es,  $p_x$  mapea bases ortonormales de  $T_x M$  en base ortonormales de  $\mathbb{R}^n$ , por lo que la matriz de transformación será ortogonal. Esto es equivalente a decir  $p_x$  es una isometría de  $T_x M$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Luego si tomamos el conjunto de todos los comarcos de  $F^* M$  que son isometrías y al grupo de estructura  $O(n)$  subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$  con acción derecha definida como en los ejemplos 2 y 3, obtenemos la  $O(n)$ -estructura dada por  $(B_{O(n)}, M, \pi, O(n))$ , donde

- $B_{O(n)} = \coprod_{x \in M} (B_{O(n)})_x$ ,
- $(B_{O(n)})_x = \{a^{-1} \circ p_x : a \in O(n)\}$  con
  - $p_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una isometría.
  - Y grupo de estructura  $O(n)$ , el grupo ortogonal de dimensión  $n$ , con acción derecha definida mediante  $p \cdot a = a^{-1} \circ p$ , donde  $p \in F^* M$  y  $a \in O(n)$ .

De esta forma una métrica Riemanniana sobre una variedad  $M$  es caracterizada por la  $O(n)$ -estructura, esto es equivalente a decir, que una métrica Riemanniana es determinada por un conjunto de comarcos  $p \in F^* M$  que a cada punto  $x \in M$  le asigna una isometría  $p_x$  de  $T_x M$  en  $\mathbb{R}^n$  y dado que el grupo de estructura es  $O(n)$ , entonces  $p_x$  es una transformación ortogonal. En el siguiente caso solo se especificará una  $O(n)$ -estructura y determinaremos a que estructura geométrica describe.

**Paso de una  $O(n)$ -estructura a la métrica.** Sea la  $O(n)$ -estructura dada por

- $B_{O(n)} = \coprod_{x \in M} (B_{O(n)})_x$ , con
- $(B_{O(n)})_x = \{a^{-1} \circ p_x : a \in O(n)\}$  donde
  - $p_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una isometría.
  - $O(n)$  grupo ortogonal de dimensión  $n$ , con acción derecha definida mediante  $p \cdot a = a^{-1} \circ p$ , donde  $p \in F^* M$  y  $a \in O(n)$ .

Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces  $(f^*g)_x(v, w) = g_{f(x)}(T_x f(v), T_x f(w))$  (por definición de pull back), donde  $T_x f = p_x$ . Dado que  $B_g$  es el conjunto de isometrías de  $T_x M$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces se tiene que  $\tilde{g}_x(v, w) = g_{f(x)}(p_x(v), p_x(w))$ , para todo  $v, w \in T_x M$ , es decir  $p_x$  preserva el producto interior, donde  $g_{f(x)}$  es la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ , por otro lado debemos verificar que  $\tilde{g}_x$  es una métrica.

i.  $\tilde{g}_x$  es bilineal.

Sean  $v_1, v_2, w_1$  y  $w_2 \in T_x M$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$\tilde{g}_x(\alpha v_1 + v_2, \beta w_1 + w_2) = g(p(\alpha v_1 + v_2), p(\beta w_1 + w_2))$ ,  $p$  es un isomorfismo lineal y se tiene que  $g$  es bilineal, por lo tanto  $\tilde{g}_x(\alpha v_1 + v_2, \beta w_1 + w_2) = \alpha \tilde{g}_x(v_1, w_1) + \beta \tilde{g}_x(v_2, w_2)$ .

ii.  $\tilde{g}_x$  es simétrica.

Dado que  $g_x$  es simétrica, entonces lo es  $g_x$  por definición.

iii.  $\tilde{g}_x$  es no degenerada.

Sea  $x \in M$  y sean  $v, w \in T_x M \setminus \{0\}$ .

$\tilde{g}_x(v, w) = g_x(p(v), p(w)) \neq 0$  pues  $p$  es un isomorfismo, es decir,  $\ker(p) = \{0\}$ .

Así  $\tilde{g}_x$  es no degenerada.

iii.  $\tilde{g}_x$  es única. Dado que  $p_x$  es un isomorfismo lineal y  $g_{f(x)}$  es la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$(f^*g)_x = g_{f(x)} \circ p_x = \tilde{g}_x$$

$g_{f(x)}$  es un tensor del tipo  $(0, 2)$  es diferenciable y  $p_x$  también es diferenciable entonces  $g_{f(x)} \circ p_x$  también es diferenciable. Así  $\tilde{g}_x$  es diferenciable.

### Ejemplo 5 Caracterización de una estructura Sub-Riemanniana.

Una métrica es por definición un producto interior sobre vectores tangentes (Ver [6], p.29). Dada una variedad  $M$ , una métrica induce un producto interior en cada espacio tangente a  $M$ . Si  $(P, M, \pi, F)$  es un haz vectorial, entonces una fibra métrica sobre  $P$  es un producto interior sobre cada fibra  $F_x$ . Una métrica sub-Riemanniana sobre una variedad  $M$  es una fibra métrica (un producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ ) sobre una distribución lisa  $\mathcal{H} \subset TM$ . Es decir, la longitud solo tiene sentido para vectores en  $\mathcal{H}$ , llamamos una estructura sub-Riemanniana a la tripla  $(M, \mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ .

Un caso particular de estructura Sub-Riemanniana es aquel en el que dada una variedad  $M$  dotada de una métrica Riemanniana  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_M$  y  $\mathcal{H}$  una distribución sobre  $M$ , la métrica restringida a la distribución  $\mathcal{H}$   $g|_{\mathcal{H}}$ , es una métrica sub-Riemanniana.

**Paso de una estructura Sub-Riemanniana a la  $G$ -estructura.** Sea una variedad  $M = \{X \in \mathbb{R}^3 : |x_2| < 1\}$  de dimensión 3 dotada de una métrica  $g$  definida por  $g_x = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3 + x_2 dx_1 \otimes dx_3 + x_2 dx_3 \otimes dx_1$  cuya representación matricial es

$$[g_x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y una distribución  $\mathcal{H}$  sobre  $M$  dada por  $\mathcal{H}_x = \text{span}\{X_1(x), X_2(x)\}$ , con  $X_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}|_x + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}|_x$  y  $X_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}|_x$ . Usando representación matricial, se tiene

$$\mathcal{H}_x = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Para representar la estructura Sub-Riemanniana  $(M, \mathcal{H}, g|_{\mathcal{H}})$  mediante una  $G$ -estructura en términos de comarcos elegimos un comarco adaptado a  $\mathcal{H}$ ;  $p = (\eta_1 \ \eta_2 \ \theta)^t$  se dice ser adaptado a  $\mathcal{H}$  si  $\theta$  aniquila a  $\mathcal{H}$ , equivalentemente,  $\mathcal{H}_x = \ker(\theta(x))$ . Determinar tal  $\theta$  equivale a resolver la siguiente ecuación:

$$\theta_x(X_1(x), X_2(x)) = (\theta_{31} \ \theta_{32} \ \theta_{33}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0) \quad (3.6)$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} \theta_{31} + x_2 \theta_{33} &= 0 \quad \implies \quad \theta_{31} = -x_2 \theta_{33} \\ \theta_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Tomando  $\theta_{33} = 1$ , se tiene  $\theta(x) = -x_2 dx_1 + 0 dx_2 + dx_3$  o, escrito como vector renglón  $\theta(x) = (-x_2 \ 0 \ 1)$ , determina de manera única a  $\mathcal{H}_x$ . Esto quiere decir, que  $\theta$  codifica de manera única a la distribución  $\mathcal{H}$ .

Ahora solo falta determinar que información podrá caracterizar de manera única a la métrica sub-Riemanniana. Una forma de proceder es restringir la métrica  $g$  a  $\mathcal{H}$ . Al restringir la métrica se pierde información de  $g$ , es decir, la métrica restringida a  $\mathcal{H}$



solo será definida sobre los vectores de  $\mathcal{H}$  y fuera de  $\mathcal{H}$  no sabremos nada. Por lo tanto una vez que restrinjamos la métrica  $g$  no podremos obtenerla nuevamente.

Para encontrar una representación de la métrica sub-Riemanniana debemos calcular  $g_x(X_i(x), X_j(x)) = X_{i(x)}^t [g_x] X_j(x)$ , donde  $[g_x]$  es el representante de  $g_x$  en la base  $\{X_i(x) : i = 1, 2\}$  de  $\mathcal{H}_x$ , esto es:

$$\begin{aligned} g_x^{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 + 3x_2^2 \\ g_x^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ g_x^{21} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ g_x^{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Denotamos la métrica sub-Riemanniana por  $g_x|_{\mathcal{H}_x}$  la cual tiene una representación matricial dada por

$$[g_x]|_{\mathcal{H}_x} = \begin{pmatrix} 1+3x_2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{en la base} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.7)$$

Esto muestra que al restringir  $g_x$  a la distribución  $\mathcal{H}_x$  se pierde información y no podremos recobrar a  $g_x$  nuevamente. Entonces podemos decir que la estructura Sub-Riemanniana contiene menos información.

Ahora debemos relacionar la información que obtuvimos con el comarco  $p_x$  adaptado a  $\mathcal{H}_x$ , dado que  $p_x$  puede verse como un isomorfismo lineal  $p_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces tiene una matriz asociada invertible de  $3 \times 3$  esto es

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= \eta_{11}dx_1 + \eta_{12}dx_2 + \eta_{13}dx_3 \\ \eta_2(x) &= \eta_{21}dx_1 + \eta_{22}dx_2 + \eta_{23}dx_3 \\ \theta(x) &= \theta_{31}dx_1 + \theta_{32}dx_2 + \theta_{33}dx_3 \end{aligned}$$

esto es equivalente a

$$p_x = \begin{pmatrix} \eta_1(x) \\ \eta_2(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

donde la matriz asociada a  $p_x$  (o el representante de  $p_x$ ) esta dada por

$$[p_x] = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{pmatrix}$$

El siguiente paso será hallar de manera explícita una expresión de  $p_x$ . Ya sabemos que es  $\theta_x$  solo falta determinar  $\eta_1(x)$  y  $\eta_2(x)$ , para esto procedemos de manera análoga que en el ejemplo anterior, es decir, debemos encontrar una base ortonormal de  $\mathcal{H}_x$  en la métrica  $g_x$ , mediante el proceso de ortonormalización de Gramm-Schmidt.

Los vectores  $X_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$  y  $X_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  son linealmente independientes y ortogonales. Luego para obtener una base ortonormal debemos calcular la norma de los vectores usando la métrica  $g_x$  como sigue.

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 + 3x_2^2 \\ \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

y dividimos  $X_1(x)$  y  $X_2(x)$  por sus respectivas normas, para obtener los vectores unitarios  $u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+3x_2^2} \\ 0 \\ x_2/\sqrt{1+3x_2^2} \end{pmatrix}$  y  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Una vez obtenidos estos vectores unitarios, se determinarán sus duales, es decir los  $\eta_i$  para  $i = 1, 2$ , tales que  $\eta_i(u_j) = \delta_{ij}$ , donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Para esto se debe resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+3x_2^2} & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2/\sqrt{1+3x_2^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se deduce fácilmente que  $\eta_{12} = 0$ ,  $\eta_{22} = 1$  y

$$\begin{aligned}
\eta_{11} \frac{1}{\sqrt{1+3x_2^2}} + \eta_{13} \frac{x_2}{\sqrt{1+3x_2^2}} &= 1 \\
\eta_{21} \frac{1}{\sqrt{1+3x_2^2}} + \eta_{23} \frac{x_2}{\sqrt{1+3x_2^2}} &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

si  $\eta_{13} = \eta_{23} = 0$  entonces  $\eta_{11} = \sqrt{1+3x_2^2}$  y  $\eta_{21} = 0$ . Así

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+3x_2^2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es lo mismo que escribir  $\eta(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+3x_2^2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y por construcción se satisface  $\eta(x)(X_i(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  es una transformación ortogonal, entonces  $\eta(x)|_{\mathcal{H}_x}$  es una isometría de  $\mathcal{H}_x$  en  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto una estructura sub-Riemanniana se puede describir en términos de comarcos. Particularmente uno de estos comarcos tiene representación explícita

$$[p_x] = \begin{pmatrix} \sqrt{1+3x_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en general se tiene de (3.6) y (3.8) que  $p_x$  es de la forma:

$$[p_x] = \begin{pmatrix} -x_2\eta_{13} + \sqrt{1+3x_2^2} & 0 & \eta_{13} \\ -x_2\eta_{23} & 1 & \eta_{23} \\ -x_2\theta_{33} & 0 & \theta_{33} \end{pmatrix}$$

Ahora para encontrar el grupo de estructura consideramos otro comarco

$$[\bar{p}_x] = \begin{pmatrix} -x_2\bar{\eta}_{13} + \sqrt{1+3x_2^2} & 0 & \bar{\eta}_{13} \\ -x_2\bar{\eta}_{23} & 1 & \bar{\eta}_{23} \\ -x_2\bar{\theta}_{33} & 0 & \bar{\theta}_{33} \end{pmatrix}$$

tal que  $[p_x] = A[\bar{p}_x]$ , debemos calcular la matriz de transformación  $A$ , esto es equivalente a calcular  $A = [p_x][\bar{p}_x]^{-1}$ . Primero debemos obtener  $[\bar{p}_x]^{-1}$ , por simples cálculos obtenemos que  $\det([\bar{p}_x]^{-1}) = \bar{\theta}_{33}\sqrt{1+3x_2^2}$  y matriz adjunta

$$\text{Ad}([\bar{P}_x]) = \begin{pmatrix} \bar{\theta}_{33} & 0 & -\bar{\eta}_{13} \\ 0 & \bar{\theta}_{33}\sqrt{1+3x_2^2} & -\bar{\eta}_{23}\sqrt{1+3x_2^2} \\ x_2\bar{\theta}_{33} & 0 & -x_2\bar{\eta}_{13} + \sqrt{1+3x_2^2} \end{pmatrix}$$

entonces

$$[\bar{P}_x]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+3x_2^2}} & 0 & -\frac{\bar{\eta}_{13}}{\bar{\theta}_{33}\sqrt{1+3x_2^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-\bar{\eta}_{23}}{\bar{\theta}_{33}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+3x_2^2}} & 0 & \frac{-x_2\bar{\eta}_{13} + \sqrt{1+3x_2^2}}{\bar{\theta}_{33}\sqrt{1+3x_2^2}} \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} A = [P_x][\bar{P}_x]^{-1} &= \begin{pmatrix} -x_2\eta_{13} + \sqrt{1+3x_2^2} & 0 & \eta_{13} \\ -x_2\eta_{23} & 1 & \eta_{23} \\ -x_2\theta_{33} & 0 & \theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+3x_2^2}} & 0 & -\frac{\bar{\eta}_{13}}{\bar{\theta}_{33}\sqrt{1+3x_2^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-\bar{\eta}_{23}}{\bar{\theta}_{33}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+3x_2^2}} & 0 & \frac{-x_2\bar{\eta}_{13} + \sqrt{1+3x_2^2}}{\bar{\theta}_{33}\sqrt{1+3x_2^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\eta_{13} - \bar{\eta}_{13}}{\theta_{33}} \\ 0 & 1 & \frac{\eta_{23} - \bar{\eta}_{23}}{\theta_{33}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta_{33}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así, podemos observar que el grupo de estructura está dado por el conjunto de matrices en bloques de la forma:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid A \in O(2), B \in M_{2 \times 1}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

finalmente la  $G$ -estructura que obtenemos es  $(B_G, M, \pi, G)$  donde:

- $B_G = \coprod_{x \in M} (B_G)_x$ ,
- $(B_G)_x = \{a^{-1} \circ p_x : a \in G\}$  con
  - $p_x = \begin{pmatrix} \eta(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+3x_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $\ker(\theta_x) = \mathcal{H}_x$
  - Y grupo de estructura  $G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid A \in O(2), B \in M_{2 \times 1}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$   
con acción derecha definida mediante  $p \cdot a = a^{-1} \circ p$ , donde  $p \in F^*M$  y  $a \in G$ .

### Paso de la $G$ -estructura a la estructura Sub-Riemanniana.

Considérese la  $G$ -estructura descrita mediante  $(B_G, M, \pi, G)$  donde  $G$  es el conjunto de matrices en bloques de la forma:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid A \in O(2), B \in M_{2 \times 1}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

Con acción por la derecha sobre  $B_G$  dada por  $p \cdot a = a^{-1} \circ p$ . Donde  $B_G$  se describe como sigue

- $B_G = \coprod_{x \in M} (B_G)_x$ ,
- $(B_G)_x = \{a^{-1} \circ p_x : a \in G\}$  con
  - $p_x = \begin{pmatrix} \eta(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+3x_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $\ker(\theta_x) = \mathcal{H}_x$

De la  $B_G$ -estructura se puede obtener la siguiente información. De la definición de  $\ker(\theta(x)) = \mathcal{H}_x$ , podemos deducir

$$\mathcal{H}_x = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ x_2 a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Claramente, una base para  $\mathcal{H}_x$  es  $X_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$  y  $X_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

También tenemos que  $\eta(x) : \mathcal{H}_x \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una isometría, lo cual quiere decir que preserva el producto interior y existe una métrica definida sobre  $\mathcal{H}$  tomamos un comarco de la  $B_G$ -estructura, el cual es de la forma  $p_x = \begin{pmatrix} A\eta(x) + B\theta(x) \\ c\theta(x) \end{pmatrix}$  y elegimos la base  $\{X_1(x), X_2(x)\}$  de  $\mathcal{H}_x$ . Dados  $v, w \in \mathcal{H}_x$ , existen  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$  y  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$  tales que

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ x_2 v_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ x_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Dado que  $\bar{\eta}(x) = A\eta(x) + B\theta(x)$  debe ser una isometría y se tiene además  $A \in O(2)$ ,  $B \in M_{2 \times 1}$  y  $\theta(x)$  aniquila a  $\mathcal{H}_x$  tenemos que  $\bar{\eta}(x)$  preserva el producto interior esto es para la base canónica  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2 \rangle &= e_1^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e_2 = \langle \bar{\eta}(x)(v), \bar{\eta}(x)(w) \rangle_{H_x} = \langle A\eta(x) + B\theta(x)(v), A\eta(x) + B\theta(x)(w) \rangle \\ &= \langle A\eta(x)(v), A\eta(x)(w) \rangle. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\eta}(x)(v), \bar{\eta}(x)(w) \rangle_{\mathcal{H}_x} &= \langle A\eta(x)(v), A\eta(x)(w) \rangle \\
&= \left\langle A \begin{pmatrix} -x_2\eta_{13} + \sqrt{1+3x_2^2} & 0 & \eta_{13} \\ -x_2\eta_{23} & 1 & \eta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ x_2v_1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -x_2\eta_{13} + \sqrt{1+3x_2^2} & 0 & \eta_{13} \\ -x_2\eta_{23} & 1 & \eta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ x_2w_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle A \begin{pmatrix} v_1\sqrt{1+3x_2^2} \\ v_2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} w_1\sqrt{1+3x_2^2} \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \begin{pmatrix} v_1\sqrt{1+3x_2^2} & v_2 \end{pmatrix} A^t A \begin{pmatrix} w_1\sqrt{1+3x_2^2} \\ w_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

pero  $A \in O(2)$  entonces  $A^t A = I$ . Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\eta}(x)(v), \bar{\eta}(x)(w) \rangle_{\mathcal{H}_x} &= v_1w_1(1+3x_2^2) + v_2w_2 \\
&= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1+3x_2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la métrica sobre  $\mathcal{H}_x$  es  $[g_x|_{\mathcal{H}_x}] = \begin{pmatrix} 1+3x_2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  en la base  $\{X_1(x), X_2(x)\}$ , la cual coincide con la métrica dada en (3.7).

### Ejemplo 6 Caracterización de una métrica Riemanniana $g$ y una distribución $\mathcal{H}$ sobre una 3-variedad $M$ , mediante una $G$ -estructura.

Un sistema no holonómico puede ser representado como una tripla  $(M, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ , donde a  $M$  se le llama variedad de configuraciones que representa todas las posibles posiciones del sistema,  $\mathcal{G}$  es la métrica asociada a la energía cinética y  $\mathcal{H}$  una distribución no holonómica que representa las velocidades permitidas por las restricciones. Un sistema mecánico simple, llamado por algunos autores, forma encadenada extendida (FEE) (Ver [17]), es representado como  $(\mathbb{R}^3, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ , donde  $\mathcal{G} = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3$  es la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^3$  y una distribución no holonómica

$$\mathcal{H}_x = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Las ecuaciones dinámicas que lo rigen son:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= u_1 \\
\ddot{x}_2 &= u_2 \\
\ddot{x}_3 &= x_2 u_1
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Como podemos observar esta estructura geométrica incluye los dos casos anteriores, es decir, para caracterizar esta estructura geométrica mediante una  $G$ -estructura debemos codificar la métrica Riemanniana  $\mathcal{G}$  la cual está definida sobre todo  $M$  y no solo sobre  $\mathcal{H}$ , y también debemos codificar la distribución  $\mathcal{H}$ . para obtener la  $G$ -estructura que lo codifica procedemos de manera análoga a los ejemplos anteriores.

En este caso primero definimos una base para  $T_x M = \mathbb{R}^3$ , para esto consideramos los primeros dos vectores que generan a la distribución  $\mathcal{H}_x$ , es decir,  $v_1$  y  $v_2$  son linealmente independientes luego tomamos un tercer vector que sea linealmente independiente a estos dos vectores para esto proponemos el vector

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo siguiente es obtener una base ortonormal usando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt calculamos entonces lo siguiente:

$\tilde{u}_1 = v_1$ , luego  $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$  donde

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = (1 \ 0 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 + x_2^2. \text{ Así } u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix}$$

Luego

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Así } u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por último calculamos  $\tilde{u}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \tilde{u}_1 \rangle}{\langle u_1, \tilde{u}_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, \tilde{u}_2 \rangle}{\langle u_2, \tilde{u}_2 \rangle} u_2$ , esto es,

$$\tilde{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix} - 0 = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{1+x_2^2} \\ 0 \\ 1 - \frac{x_2^2}{1+x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{1+x_2^2} \\ 0 \\ \frac{1}{1+x_2^2} \end{pmatrix}$$

El vector obtenido  $\tilde{u}_3$  ahora sí es ortogonal a  $u_1$  y  $u_2$ , solo falta normalizarlo para completar la base ortonormal de  $T_x M$ .

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{1+x_2^2} \\ 0 \\ \frac{1}{1+x_2^2} \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{1+x_2^2},$$

por lo que el vector ortonormal que genera el complemento ortogonal engendrado por  $u_1$  y  $u_2$  es:

$$u_3 = \sqrt{1+x_2^2} \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{1+x_2^2} \\ 0 \\ \frac{1}{1+x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto  $\{u_1, u_2, u_3\}$  forma una base ortonormal para  $T_x M$ . Lo que sigue es representar toda esta información en términos de comarcos, entonces debemos encontrar un comarco  $p_x = \begin{pmatrix} \eta_1(x) \\ \eta_2(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} \in F_x^* \mathbb{R}^3$  tal que  $\{\eta_1(x), \eta_2(x), \theta(x)\}$  sea una base adaptada a  $\mathcal{H}_x$ , es decir,  $\ker(\theta(x)) = \mathcal{H}_x$  y  $p_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^3$  sea una isometría. Una forma simple de lograr que  $p_x$  sea una isometría, consiste en requerir que:

$$p_x(u_i) = e_i \text{ para } i = 1, 2, 3$$

Para obtener  $[p_x]$  de manera explícita, basta con obtener la inversa de la matriz con entradas dadas por las componentes de los  $u_i$ ;

$$(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & -\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix}. \text{ Así } [p_x] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix}.$$

En este caso  $\theta(x) = -\frac{x_2}{\sqrt{1+3x_2^2}} dx_1 + 0 dx_2 + \frac{1}{\sqrt{1+3x_2^2}} dx_3$ , verificaremos que  $\theta$  aniquila a la distribución  $\mathcal{H}_x$ , para esto debemos resolver la siguiente ecuación:

$$\theta_x(X_1(x), X_2(x)) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{\sqrt{1+3x_2^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+3x_2^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 0) \quad (3.10)$$

Es evidente que se satisface la ecuación entonces  $\text{Ker}(\theta(x)) = \mathcal{H}_x$ . Por lo tanto  $p_x$  es un comarco adaptado a la distribución  $\mathcal{H}_x$  y a su vez es una isometría de  $T_x M$  en  $\mathbb{R}^3$ .



Falta determinar el grupo de estructura, para esto, suponemos que  $\bar{p}_x$  es otro comarco que satisface las mismas condiciones que  $p_x$ , es decir,  $\bar{p}_x$  también es una isometría. Se puede deducir fácilmente que el grupo de transformaciones es  $G = O(3)$ , dado que es una transformación ortogonal.

Por lo tanto la  $O(3)$ -estructura que representa a la FEE se describe mediante la cuádrupla  $(B_{O(3)}, \mathbb{R}^3, \pi, O(3))$  donde

- $B_{O(3)} = \coprod_{x \in M} (B_{O(3)})_x$ ,
- $(B_G)_x = \{a^{-1} \circ p_x : a \in G\}$  con
  - $p_x = \begin{pmatrix} \eta(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix}$  es una isometría
  - $\ker(\theta_x) = \mathcal{H}_x$ , donde  $\theta_x = -\frac{x_2}{\sqrt{1+3x_2^2}}dx_1 + 0dx_2 + \frac{1}{\sqrt{1+3x_2^2}}dx_3$ .
  - Y grupo de estructura  $O(3)$ , el grupo ortogonal de dimensión 3, con acción derecha definida por  $p \cdot a = a^{-1} \circ p$ .

### Paso de la $O(3)$ -estructura a la estructura geométrica.

El paso de la  $O(3)$ -estructura a la estructura geométrica se hace de manera análoga que en los ejemplos anteriores. Esto es, Sea la  $O(3)$ -estructura  $(B_{O(3)}, \mathbb{R}^3, \pi, O(3))$  donde

- $B_{O(3)} = \coprod_{x \in M} (B_{O(3)})_x$ ,
- $(B_G)_x = \{a^{-1} \circ p_x : a \in G\}$  con
  - $p_x = \begin{pmatrix} \eta(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix}$  es una isometría.
  - $\ker(\theta_x) = \mathcal{H}_x$ , donde  $\theta_x = -\frac{x_2}{\sqrt{1+3x_2^2}}dx_1 + 0dx_2 + \frac{1}{\sqrt{1+3x_2^2}}dx_3$ .
  - Y grupo de estructura  $O(3)$ , el grupo ortogonal de dimensión 3, con acción derecha definida por  $p \cdot a = a^{-1} \circ p$ .

De la definición de  $\ker(\theta_x) = \mathcal{H}_x$  podemos deducir que

$$\mathcal{H}_x = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ x_2 v_1 \end{pmatrix} \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ahora para obtener la métrica consideramos el dual de  $[p_x]$  para encontrar una base de  $T_x M$ , para lo cual obtenemos la base dada por

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix} \right\}$$

Luego cualquier vector  $v$  y  $w \in T_x M$  se pueden escribir como una combinación lineal de los vectores de la base, esto es,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}}v_1 - \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}v_3 \\ v_2 \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}v_1 + \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}}v_3 \end{pmatrix}$$

de manera análoga

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}}w_1 - \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}w_3 \\ w_2 \\ \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}w_1 + \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}}w_3 \end{pmatrix}$$

Sea  $\bar{p}_x$  y  $p_x$  comarcos que son a su vez isometrías se tiene

$$\langle \bar{p}_x(v), \bar{p}_x(w) \rangle = \langle Ap_x(v), Ap_x(w) \rangle = \langle Ap_x(v), Ap_x(w) \rangle$$

Podemos deducir fácilmente mediante algunos cálculos

$$\left\langle A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix} v, A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{pmatrix} w \right\rangle = v^t A^t A w$$

con  $v$  y  $w$  definidos como antes y  $A \in O(3)$ . Luego obtenemos

$$\langle Ap_x(v), Ap_x(w) \rangle = v^t w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \mathcal{G}_x(v, w)$$

con  $\mathcal{G}$  la métrica euclidiana, esto es,  $\mathcal{G} = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3$ .

Una vez que las estructuras geométricas son descritas por alguna  $G$ -estructura, el siguiente paso es obtener los invariantes diferenciales de tales  $G$ -estructuras. Para esto debemos tener conocimiento de las herramientas necesarias para el cálculo de invariantes diferenciales, que se estudiarán en el siguiente capítulo.

# Capítulo 4

## Invariantes diferenciales de $G$ -estructuras

Dentro de la aplicación del método de equivalencia es importante abordar algunos conceptos importantes para la identificación y cálculo de invariantes diferenciales de  $G$ -estructuras. Los invariantes diferenciales son los que proporcionan condiciones necesarias, y en ocasiones también suficientes, para determinar si dos  $G$ -estructuras son o no equivalentes entre sí. Una forma para determinar la equivalencia de  $G$ -estructuras se hace a través de a través del pullback de la forma de Maurer-Cartan. también conocida como la derivada de Darbox.

La sección 3.1 esta dedicada a analizar la ecuación estructural que involucra a la forma de Maurer-Cartan y su importancia dentro de la identificación y cálculo de invariantes diferenciales. La sección 3.2 trata acerca de la derivada de Darboux y una pequeña introducción al teorema fundamental del cálculo en la versión de la geometría de Cartan. La sección 3.3 tiene como objetivo principal mostrar un ejemplo sencillo de aplicación del método de Cartan para determinar la equivalencia de curvas en el plano.

### 4.1. Forma de Maurer-Cartan

En el espacio euclidiano, la traslación paralela de vectores nos permite encontrar una trivialización canónica sobre el haz tangente. Esta noción es tan fundamental que algunos autores definen dos vectores definidos en distintos puntos de  $\mathbb{R}^n$  como el mismo, si existe una traslación que lleve uno en la misma posición que el otro. La posibilidad

de hacer esto depende sobre la existencia de un grupo; en este caso, el grupo de traslaciones actúa libre y transitivamente sobre  $\mathbb{R}^n$  ([9], p. 96).

Según Sharpe ([9], p. 96) lo anterior aplica a cualquier grupo de Lie  $G$ , porque para cualquier elemento  $g \in G$  la traslación a la izquierda por  $g$  es un difeomorfismo  $L_g : G \rightarrow G$  definido por  $L_g(a) = g \cdot a$ , con inversa  $L_{g^{-1}}$ . Esta última induce un mapeo de haces tangentes  $TL_{g^{-1}} : TG \rightarrow TG$  el cual, evaluado en el punto  $g$ , le asigna un isomorfismo  $T_gL_{g^{-1}} : T_gG \rightarrow T_eG$  de espacios vectoriales. En particular, recordemos que  $\mathfrak{g} = T_eG$ , tenemos que  $T_gG$  es isomorfo a  $\mathfrak{g}$  para cualquier  $g \in G$ . Esto determina una trivialización canónica del haz tangente  $TG$ .

El mapeo  $\omega_g = T_gL_{g^{-1}}$  es llamado “forma de Maurer-Cartan”, el cual es una 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada definida sobre  $G$ .

$$\begin{aligned} T_gL_{g^{-1}} : T_g(G) &\rightarrow T_e(G) \\ \omega_g : T_g(G) &\rightarrow \mathfrak{g} \end{aligned} \tag{4.1}$$

La forma de Maurer-Cartan es invariante bajo traslación izquierda. En efecto, supongamos que  $v \in T_gG$ . Entonces  $T_gL_h(v) \in T_{hg}G$ , para  $h, g \in G$  y:

$$\begin{aligned} L_h^*\omega_g(v) &= \omega_{hg}(T_gL_h(v)) = (T_{hg}L_{(hg)^{-1}} \circ T_gL_h)(v) \\ &= (T_eL_{g^{-1}} \circ T_gL_{h^{-1}} \circ T_gL_h)(v) \\ &= T_eL_{g^{-1}} \circ T_g(L_{h^{-1}} \circ L_h)(v) \\ &= T_g(L_{g^{-1}} \circ L_e)(v) \\ &= T_gL_{g^{-1}}(v) = \omega_g(v) \end{aligned}$$

Así  $L_h^*\omega_g(v) = \omega_g(v)$ , es decir,  $L_h^*\omega = \omega$ , se sigue que  $\omega$  es invariante bajo la traslación izquierda. Sin embargo, si el grupo de Lie  $G$  no es abeliano,  $\omega$  no es invariante bajo la traslación derecha. Para demostrarlo, calculamos  $R_h^*\omega$ :

$$\begin{aligned} R_h^*\omega_g(v) &= \omega_{gh}(T_gR_h(v)) = (T_{gh}L_{(gh)^{-1}} \circ T_gR_h)(v) \\ &= (T_eL_{h^{-1}} \circ T_gL_{g^{-1}} \circ T_gR_h)(v) \\ &= (T_eL_{h^{-1}} \circ T_gR_h \circ T_gL_{g^{-1}})(v) \\ &= (T_e(L_{h^{-1}} \circ R_h) \circ T_gL_{g^{-1}})(v) \\ &= T_e(L_{h^{-1}} \circ R_{(h^{-1})^{-1}}) \circ T_gL_{g^{-1}}(v) \\ &= \text{Ad}(h^{-1}) \circ T_gL_{g^{-1}}(v) = \text{Ad}(h^{-1}) \circ \omega_g(v) \end{aligned}$$

Así  $R_h^* \omega = \text{ad}(h^{-1}) \circ \omega$ , por lo que en general la forma de Maurer-Cartan no es invariante bajo la traslación derecha. La 1-forma  $\omega$  juega un papel fundamental dentro de la aplicación del método de equivalencia y es en base a esta que el teorema fundamental del cálculo puede ser adaptado a la geometría de Cartan, lo cual veremos en la siguiente sección.

## 4.2. Teorema fundamental del cálculo versión geometría de Cartan

El término “geometría diferencial” se refiere al estudio de la geometría usando herramientas del cálculo diferencial tales como límites, derivadas integrales etc. En cálculo, cuando se habla de integración de una función  $f(x)$  se considera rigurosamente que  $f(x)dx$  es una 1-forma, es decir  $\int f(x)dx$ , donde  $dx$  es una 1-forma sobre  $\mathbb{R}$ . El teorema fundamental del Cálculo se puede extender a la versión de la geometría de Cartan (Ver [9]). Esto es,

**Definición 5** ([9], p. 115) *Sea  $G$  un grupo de Lie,  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie de  $G$ ,  $\omega_G$  la forma de Maurer-Cartan sobre  $G$ ,  $M$  una variedad y  $f : M \rightarrow G$  un mapeo  $C^\infty$ . La derivada izquierda de Darboux de  $f$  es la 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada  $\omega = f^*(\omega_G)$  sobre  $M$ .*

Al mapeo  $f$  se le llama integral o primitiva de  $\omega$ . Un problema típico en este contexto es el inverso, es decir dada una 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada  $\omega$ , hallar, si existe un mapeo  $f : M \rightarrow G$  tal que  $\omega = f^*(\omega_G)$ . En otras palabras, el problema está en caracterizar el mapeo  $f$ . El siguiente teorema es la versión de la primera parte del teorema fundamental del cálculo en términos de la forma de Maurer-Cartan.

**Teorema 1** (Unicidad de la primitiva) ([9], p. 115). *Sea  $M$  una variedad conexa y  $f_1, f_2 : M \rightarrow G$  mapeos  $C^\infty$  tales  $\omega_{f_1} = \omega_{f_2}$ . Entonces existe un único elemento  $a \in G$  (constante de integración) tal que  $f_2(x) = a \cdot f_1(x)$  para toda  $x \in M$ .*

Sin embargo como se mencionó anteriormente en general el mapeo  $f$  no es determinado; pero el pullback de la forma de Maurer-Cartan sobre un grupo  $G$  si lo conocemos de esta manera podemos definir una forma de 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada sobre  $M$  y para que sea la derivada de Darboux del mapeo  $f$ ;  $\omega_G$  debe satisfacer la ecuación estructural. En la siguiente sección se define la ecuación estructural en términos de campos

vectoriales invariantes a la izquierda sobre un grupo de Lie  $G$ .

### 4.3. Ecuación estructural

Considérese un grupo de Lie con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . La ecuación estructural para la 1-forma  $\omega_G$  representa una condición de las dos condiciones necesarias de que una 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada sobre una variedad  $M$  sea la derivada de Darboux de un mapeo  $f: M \rightarrow G$  ([9], p. 108).

La ecuación estructural puede ser derivada para campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre un grupo de  $G$ . Esto es, considérese el conjunto de campos vectoriales invariantes a la izquierda sobre un grupo de Lie  $G$  denotado por  $\Gamma_{LI}(TG)$ . Si  $X \in \Gamma_{LI}(TG)$ , entonces  $\omega(X)$  es constante e igual a  $X_e$ .

Sean  $X, Y \in \Gamma_{LI}(TG)$ . Por definición y propiedades de la derivada de Lie de un campo tensorial, se tiene:

$$\begin{aligned} L_X(\omega(Y)) &= (L_X\omega)(Y) + \omega(L_X(Y)) \\ &= (L_X\omega)(Y) + \omega[X, Y] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por otro lado, haciendo uso de la llamada “fórmula mágica de Cartan”  $L_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X$  se tiene:

$$\begin{aligned} (L_X\omega)(Y) &= (\iota_X(d\omega) + d(\iota_X\omega))(Y) \\ &= d\omega(X, Y) + d(\omega(X))(Y) \\ &= d\omega(X, Y) + d(\omega(X))(Y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pero  $\omega(X) = \text{cte}$ , por lo que  $d(\omega(X)) = 0$ . Así de (4.2) y de (4.3) se tiene:

$$d\omega(X, Y) = L_X(\omega(Y)) - \omega[X, Y]$$

Como  $\omega(Y) = \text{cte}$ , entonces  $L_X(\omega(Y)) = 0$ , así tenemos:

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) \quad (4.4)$$

Ahora para definir  $[\omega, \omega]$ , considérese el mapeo bilineal definido por  $[\cdot, \cdot]_g : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  y por la propiedad del mapeo universal ([2], p. 55), existe un mapeo  $[\cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  el cual estamos por definir, esto es,

$$\begin{aligned}
[\omega, \omega]_{\mathfrak{g}}(X, Y) &= [\omega \wedge \omega]\varphi(X, Y) \\
&= [\omega \wedge \omega](X \otimes Y) \\
&\triangleq [\omega(X) \otimes \omega(Y) - \omega(Y) \otimes \omega(X)] \\
&= [\omega(X), \omega(Y)]_{\mathfrak{g}} - [\omega(Y), \omega(X)]_{\mathfrak{g}} \\
&= 2[\omega(X), \omega(Y)]_{\mathfrak{g}}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} & & \\
\uparrow \varphi & \searrow [\cdot] & \\
\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} & \mathfrak{g}
\end{array}$$

Por consiguiente  $\frac{1}{2}[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)]$ , que al sustituirla en (4.8) produce la llamada **ecuación estructural**.

$$d\omega(X, Y) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](X, Y) = 0. \quad (4.5)$$

La ecuación estructural determina localmente la estructura algebraica del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , pues define las constantes estructurales de  $\mathfrak{g}$ . A continuación varemos por qué se le llama ecuación estructural, y como es que determina las constantes de estructura.

Sea  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  una base de  $\mathfrak{g}$  y sea  $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$  su respectiva base dual, tal que  $\alpha^i(\xi_j) = \delta_j^i$ ,  $\alpha^i \in \mathfrak{g}^*$ . Definamos 1-formas  $\omega^i, \dots, \omega^n \in \Gamma(T^*G)$  a partir de  $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$  por medio del mapeo dual de  $T_g L_{g^{-1}}$ , es decir,  $\omega^i(g) = (L_{g^{-1}})^* \alpha^i = \alpha^i \circ T_g L_{g^{-1}} \in T_g^* G$ . Entonces,

- a)  $\omega^i$  es invariante a la izquierda para  $i = 1, \dots, n$
- b)  $\omega^i(X)$  es constante para cualquier  $X \in \Gamma_{LI}(TG)$

En efecto, para  $i \in \{1, \dots, n\}$

a) Por definición de pullback

$$(L_{g^{-1}}^* \omega^i)_{gh}(v) = \omega_{L_{g^{-1}}(gh)}^i \circ T_{gh} L_{g^{-1}}(v) = \omega_{g^{-1}gh}^i \circ T_{gh} L_{g^{-1}}(v) = \omega_h^i \circ T_{gh} L_{g^{-1}}(v), \text{ para } v \in T_{gh} G$$

Pero  $\omega_h^i = \alpha^i \circ T_h L_{h^{-1}}$ , entonces

$$\begin{aligned}
(L_{g^{-1}}^* \omega^i)_{gh}(v) &= \alpha^i \circ T_h L_{h^{-1}} \circ T_{gh} L_{g^{-1}}(v) \\
&= \alpha^i \circ T_{gh}(L_{h^{-1}} \circ L_{g^{-1}})(v) \\
&= \alpha^i \circ T_{gh} L_{h^{-1}g^{-1}} \\
&= \alpha^i \circ T_{gh} L_{(gh)^{-1}} \\
&= \omega_{gh}^i(v)
\end{aligned}$$

Así  $L_{g^{-1}}^* \omega^i = \omega^i$ , por lo tanto  $\omega^i$  es invariante por la izquierda.

b) Sea  $X \in \Gamma_{LI}(TG)$ , entonces se tiene que  $T_g L_{g^{-1}}(X_g) = X_e$ , así  $X_g = T_e L_g(\xi)$  para algún  $\xi \in \mathfrak{g}$ , entonces

$$\omega_g^i(X_g) = \alpha^i \circ T_g L_{g^{-1}}(T_e L_g(\xi_i)) = \alpha^i \circ T_{ge}(L_{g^{-1}} \circ L_g)(\xi_i) = \alpha^i(\xi_i)$$

Podemos concluir que  $\alpha^i(\xi_i)$  es constante, esto es,  $\omega^i(X)$  depende solo del valor que toma  $X$  en la identidad  $e$ .

Dado que  $\omega$  es también un campo tensorial podemos escribir  $\omega = \omega^i \otimes \xi_i$ , tal que al diferenciar obtenemos la 2-forma  $d\omega = d\omega^i \otimes \xi_i$ , si

$$C_{jk}^i = -\alpha^i(d\omega^i(X_{\xi_j}, X_{\xi_k}))$$

entonces  $d\omega^i(X_{\xi_j}, X_{\xi_k}) = -C_{jk}^i \xi_i$ . Luego de la definición de ecuación estructural tenemos:

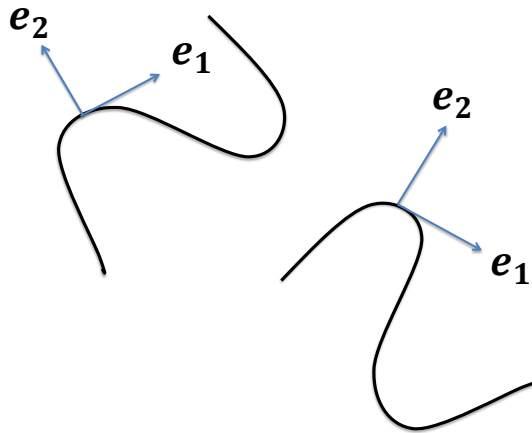
$$\begin{aligned} d\omega(X_{\xi_l}, X_{\xi_m}) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](X_{\xi_l}, X_{\xi_m}) &= 0 \\ -C_{lm}^i \xi_i + \frac{1}{2}2[\omega(X_{\xi_l}), \omega(X_{\xi_m})] &= 0 \\ -C_{lm}^i \xi_i + [\xi_l, \xi_m] &= 0 \end{aligned}$$

Así  $[\xi_l, \xi_m] = C_{lm}^i \xi_i$ , por consiguiente las constantes estructurales  $C_{jk}^i$  están definidas en términos de la ecuación estructural, y por lo tanto determinan las constantes de estructura del álgebra de Lie  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ .



## 4.4. Ejemplo de aplicación del método de equivalencia de Cartan

Un ejemplo sencillo de aplicación del método de equivalencia consiste en obtener los invariantes diferenciales de una curva regular. Este ejemplo se trabaja a partir de ([12], p. 12). En este caso la aplicación del método de equivalencia consiste en aplicar el método de marcos móviles de Cartan y es a través de un levantamiento de la curva que se obtienen los invariantes diferenciales. Un marco móvil sobre una curva, proporciona información del comportamiento de la curva, es decir, como va cambiando de dirección.



**Figura 4.3.1.** Un marco móvil describe el comportamiento de una curva en el plano.

En el proceso del cálculo de invariantes diferenciales de una curva se recomienda hacer una distinción entre la curva como mapeo y la curva como imagen (que en este caso es una subvariedad inmersa sobre  $\mathbb{R}^2$ ). La razón por la que se hace esta distinción es que algunos invariantes diferenciales son propios de la curva como mapeo, mientras que otros los son de su imagen como variedad.

Supongamos que  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva regular, es decir, una curva diferenciable tal que  $\dot{c}(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . La rapidez de la curva  $v(t) = \|\dot{c}(t)\|$ , es un invariante bajo movimientos de cuerpos rígidos; pero solo es un invariante del mapeo de la curva no de su imagen. La aplicación del método de marcos móviles consiste, precisamente en encontrar un marco móvil que describa el comportamiento de la curva

sobre  $T_{c(t)}\mathbb{R}^2$ . En efecto dado que  $\dot{c}(t) \neq 0$ , se elige un vector unitario definido por  $e_1(t) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|}\dot{c}(t)$ . Se define  $\{e_2(t)\}$  como el vector que engendra el complemento ortogonal del  $\text{span}\{e_1(t)\}$  y tal que  $\{e_1(t), e_2(t)\}$  tiene la misma orientación que la base canónica de  $T_{c(t)}\mathbb{R}^2$ .

Verificando que  $\{e_1(t), e_2(t)\}$  son ortogonales y preservan la orientación inducida por la orientación de  $T_{c(t)}\mathbb{R}^2$  resolveremos el ejercicio (1.4.2) de [12]. esto es,

- (i) Supongamos que  $V$  es un espacio vectorial con producto interior no degenerado  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  y  $v : [a, b] \rightarrow V$  satisface  $\langle v(t), v(t) \rangle = F(t)$ , donde  $F(t)$  es constante. Entonces  $\frac{d}{dt}\langle v(t), v(t) \rangle = 0$ . Esto equivalente a

$$\langle \dot{v}(t), v(t) \rangle + \langle v(t), \dot{v}(t) \rangle = 0, \quad (4.6)$$

de donde se deduce que  $\dot{v}(t)$  es ortogonal a  $v(t)$ .

- (ii) Ahora supóngase que  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es regular y defínase la función  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\alpha(t) = \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau \quad (4.7)$$

esta función es diferenciable, con derivada  $\dot{\alpha} = \|\dot{c}(\tau)\|$ , luego  $\alpha$  es  $C^\infty$ , y dado que  $c$  es regular  $\alpha$  es inyectiva. Por tanto, si  $\alpha([a, b]) = [0, \bar{b}]$  donde  $\bar{b} = \int_a^b \|\dot{c}(\tau)\| d\tau$ , de esta forma  $\alpha$  es restringida y con esta restricción  $\alpha$  es una biyección con inversa  $\gamma : [0, \bar{b}] \rightarrow [a, b]$ , con  $\bar{c} = c \circ \gamma$  una reparametrización de  $c$ , donde  $\bar{c}(s) = c(\gamma(s))$ , y  $s \in [0, \bar{b}]$ , a  $s$  se le llama parámetro de longitud de arco.

En esta reparametrización también se puede definir una base para  $T_{c(t)}\mathbb{R}^2$  definida por  $\bar{e}_1(s) = \frac{1}{\|\dot{\bar{c}}(s)\|}\dot{\bar{c}}(s)$ , y se define  $\bar{e}_2(s)$  con los requerimientos anteriores, además  $\dot{\bar{c}}(s)$  tiene las siguientes características:

$$\dot{\bar{c}}(s) = \dot{c}(\gamma(s)) \cdot \frac{d}{ds}(\gamma(s))$$

pero  $\alpha \circ \gamma(s) = s$ , entonces  $\frac{d}{ds}(\alpha \circ \gamma(s)) = \dot{\alpha}(\gamma(s)) \cdot \frac{d}{ds}(\gamma(s)) = 1$ , consecuentemente

$$\frac{d}{ds}(\gamma(s)) = \frac{1}{\dot{\alpha}(\gamma(s))}$$

por otro lado

$$\dot{\alpha}(\gamma(s)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=\gamma(s)} \left( \int_0^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau \right) = \|\dot{c}(\gamma(s))\|$$

así  $\dot{\bar{c}}(s) = \frac{1}{\|\dot{c}(s)\|} \dot{c}(s) = \bar{e}_1(s)$ , entonces  $\bar{v}(s) = \|\dot{\bar{c}}(s)\| = 1$ ,  $s \in [0, \bar{b}]$ . Esto quiere decir que si  $c$  es parametrizada por longitud de arco, su rapidez  $\dot{v}(s) = 1$  y es constante luego por (i), se tiene  $\langle \dot{\bar{c}}(s), \bar{c}(s) \rangle = 1$ , entonces  $\dot{\bar{c}}(s) \perp \bar{c}(s)$ .

Consecuentemente, existe  $\bar{\lambda} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\dot{\bar{e}}_1(s) = \bar{\lambda}(s)\bar{e}_2(s)$ , esto significa de la definición de  $\bar{e}_1(s)$ ,

$$\frac{d\bar{e}_1}{ds}(s) = \bar{\lambda}(s)\bar{e}_2(s) \quad (4.8)$$

y si definimos

$$\bar{\kappa}(s) = \frac{\bar{\lambda}(s)}{\bar{v}(s)} = \bar{\lambda}(s),$$

por consiguiente  $\frac{d\bar{e}_1}{ds}(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{e}_2$ , es decir,  $\langle \dot{\bar{e}}_1(s), \bar{e}_2(s) \rangle = \bar{\kappa}(s)$ . Intuitivamente sabemos que la curvatura es un invariante bajo movimientos de cuerpo rígido. Las preguntas que surgen son ¿porqué es un invariante?, ¿es  $\kappa$  un invariante de la curva como mapeo, o de la imagen? y si es un invariante ¿depende de la parametrización?, para responder a esta preguntas procedemos como sigue:

- $\kappa$  es un invariante diferencial de la imagen de la curva bajo la acción del grupo de movimientos de cuerpo rígido  $SE(2)$ .

Supongamos que  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva regular y para

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(2)$$

sea  $\bar{c}$  la curva  $\bar{c} = A \cdot c$ . Entonces

$$\bar{c}(t) = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

esto es  $\bar{c}(t) = a \cdot c(t) + b$  donde  $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SO(2)$  y  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

Al derivar se obtiene  $\dot{\bar{c}}(t) = a \cdot \dot{c}(t)$ , luego

$$\bar{v}(t) = \|\dot{\bar{c}}(t)\| = \|a \cdot \dot{c}(t)\| = \|\dot{c}(t)\| = v(t) \quad (4.9)$$

de la definición de  $e_1 = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|}\dot{c}(t)$ , si  $v(t) = \|\dot{c}(t)\|$ , entonces  $e_1 = \frac{1}{v(t)}\dot{c}(t)$  así

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\|\dot{\bar{c}}(t)\|}\dot{\bar{c}}(t) = \frac{1}{v(t)}\dot{\bar{c}}(t) = \frac{1}{v(t)}a \cdot \dot{c}(t) = a \cdot e_1(t) \quad (4.10)$$

Análogamente de  $e_2(t)$  se define

$$\bar{e}_2 = a \cdot e_2 \quad (4.11)$$

Luego de (4.8) y (4.9)  $\dot{\bar{e}}_1(t) = a \cdot \dot{e}_1(t) = a \cdot \lambda(t)e_2(t)$ , pero  $\|e_1(t)\| = 1 \forall t$ , por (i)  $\dot{\bar{e}}_1(t) = \bar{\lambda}(t)\bar{e}_2(t) = \bar{\lambda}(t)ae_2(t)$  entonces  $a\lambda(t) = a\bar{\lambda}(t)$ , así

$$\lambda(t) = \bar{\lambda}(t) \quad (4.12)$$

Por consiguiente

$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{\bar{\lambda}(t)}{\bar{v}(t)} = \frac{\lambda(t)}{v(t)} = \kappa(t) \quad (4.13)$$

De esto podemos concluir que  $\kappa$  es un invariante bajo movimientos transformaciones de cuerpo rígido, es decir, bajo transformaciones en  $SE(2)$ .

- Ahora veamos si  $\kappa$  depende de la parametrización.

Supongamos que  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo que preserve la orientación de la curva  $c$ , es decir,  $\dot{\varphi}(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , una reparametrización es  $\bar{c} = c \circ \varphi$ .

De igual forma que anteriormente obtenemos  $e_1(t) = \frac{1}{v(t)}\dot{c}(t)$ , donde  $v(t) = \|\dot{c}(t)\|$ . Entonces

$$\dot{e}_1(t) = \lambda(t)e_2(t) \quad (4.14)$$

así  $\kappa(t) = \frac{\lambda(t)}{v(t)}$ .

Para la reparametrización se tiene  $\dot{\bar{c}}(t) = \dot{c}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)$ , entonces

$$\bar{v}(t) = \|\dot{\bar{c}}(t)\| = \|\dot{c}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\| = v(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \quad (4.15)$$

así

$$\bar{e}_1(t) = \frac{1}{\bar{v}(t)} \dot{c}(t) = \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(t))\| \dot{\varphi}(t)} \dot{c}(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{c}(\varphi(t))}{v(\varphi(t))} = e_1(t) \quad (4.16)$$

y dado que  $\|\bar{e}_1(t)\| = 1$  para todo  $t$ , entonces podemos definir  $\dot{\bar{e}}_1(t) = \bar{\lambda}(t) \bar{e}_1(t)$ , para alguna función  $\bar{\lambda}$ . Como  $\bar{e}_2(t) = e_2(\varphi(t))$ , y substituyendo (4.20) se obtiene:

$$\dot{\bar{e}}_1(t) = \dot{e}_1(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = \lambda(\varphi(t)) e_2(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = \bar{\lambda}(t) \bar{e}_2(t) \quad (4.17)$$

Así  $\bar{\lambda}(t) = \lambda(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)$ , y de (4.21)

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{\bar{\lambda}(t)}{\bar{v}(t)} = \frac{\lambda(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)}{v(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)} = \kappa(\varphi(t)). \quad (4.18)$$

Entonces  $\bar{\kappa} = \kappa \circ \varphi$ , es decir  $\varphi^* \kappa = \bar{\kappa}$ , el pull back de  $\kappa$  por  $\varphi$  es igual a  $\bar{\kappa}$ . Se concluye que  $\kappa$  es independiente de la parametrización por lo que es un invariante de la imagen de la curva.

Ahora procederemos a trabajar el ejemplo pero usando el método de equivalencia. Comenzaremos por definir un comarco móvil a lo largo de la curva.

Suponiendo que  $\{e_1(t), e_2(t)\}$  es un marco para  $T_{c(t)}\mathbb{R}^2$ ,  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  se pueden expresar en términos de la base de  $T_{c(t)}\mathbb{R}^2$  inducida por las coordenadas canónicas  $r^1, r^2$ :

$$e_i(t) = M_{ij} \frac{\partial}{\partial r^j} |_{c(t)}, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.19)$$

Dado que es una base con igual orientación que la de  $\{\frac{\partial}{\partial r^1} |_{c(t)}, \frac{\partial}{\partial r^2} |_{c(t)}\}$ , se sigue que la matriz con componentes  $M_{ij}$  tiene determinante positivo. Una vez que tenemos una base del espacio tangente, podemos encontrar su base dual correspondiente, esto es  $e_1^*(t), e_2^*(t)$ , tal que  $e_i^*(t)(e_j) = \delta_{ij}$   $i, j = 1, 2$ , para todo  $t \in [a, b]$ .

Y recordemos que  $\mathbb{R}^2 \simeq SE(2)/SO(2)$  entonces el levantamiento de la curva  $c$  está dado por  $\tilde{c} : [a, b] \rightarrow SE(2)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & & SE(2) \\ & \nearrow \tilde{c} & \downarrow \pi \\ [a, b] & \xrightarrow{c} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

donde  $\tilde{c}(s) = \left( \begin{array}{cc|c} e_1(s) & e_2(s) & c(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in SE(2)$  y  $(e_1(s), e_2(s))$  es la matriz con columnas dadas por las componentes de  $e_1(s), e_2(s)$  en la base  $\{\frac{\partial}{\partial r_i} |_{c(s), i=1,2}\}$  de  $T_{c(s)}\mathbb{R}^2$ .

La forma de Maurer-Cartan sobre  $SE(2)$  se define por  $\omega_g(v) = g^{-1}v$ , donde  $v \in T_g SE(2)$ ,  $g \in SE(2)$ . Para definir una forma sobre  $\mathbb{R}^2$  calculamos el pull back de  $\omega$  por  $\tilde{c}$ , esto es,  $\tilde{c}^*\omega = \omega \circ T\tilde{c}$ . Dado  $s \in [a, b]$  se define  $(\tilde{c}^*\omega)_s(v) = \omega_{\tilde{c}(s)}(T_s\tilde{c}(v))$ , donde  $T_s\tilde{c}$  se representa la “ la matriz de 1-formas diferenciales”:

$$[T_s\tilde{c}] = \left( \begin{array}{cc|c} (\dot{e}_1(s)ds & \dot{e}_2(s)ds & \dot{c}(s)ds \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Por definición,  $e_1(s) = \frac{1}{v(s)}\dot{c}(s)$ , por lo que  $\dot{c}(s) = e_1(s)v(s)$ . Al derivar  $e_1(s)$  obtenemos  $\dot{e}_1(s) = \lambda(s)e_2(s) = \kappa(s)e_2(s)$  además  $\|e_2(s)\| = 1 \forall s$ , entonces podemos deducir  $\dot{e}_2(s) = \chi(s)e_1(s)$  para alguna función  $\chi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se tiene además  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , así que en virtud de (i)(4.6), se sigue que  $\langle \dot{e}_i(s), e_j(s) \rangle + \langle e_i(s), \dot{e}_j(s) \rangle = 0$ . Entonces

$$\chi(s) = \langle \dot{e}_2(s), e_1(s) \rangle = -\langle e_2(s), \dot{e}_1(s) \rangle = -\kappa(s).$$

De esto se sigue

$$[T_s\tilde{c}] = \left( \begin{array}{cc|c} \kappa(s)(e_2(s)ds & -e_1(s)ds & e_1(s)ds \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

por otro lado

$$\tilde{c}(s) = \left( \begin{array}{cc|c} (e_1(s) & e_2(s)) & c(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Por lo que su inversa viene dada por la inversa de una matriz en bloques como sigue

$$\omega_{\tilde{c}(s)} = \tilde{c}(s)^{-1} = \left( \begin{array}{cc|c} \left( \begin{array}{c} e_1^T(s) \\ e_2^T(s) \end{array} \right) & - \left( \begin{array}{c} e_1^T(s) \\ e_2^T(s) \end{array} \right) & c(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

entonces  $(\tilde{c}^*\omega)_s = \omega_{\tilde{c}(s)} \circ T_s\tilde{c} = \tilde{c}(s)^{-1} \cdot T_s\tilde{c}$

$$\begin{aligned} (\tilde{c}^*\omega)_s &= \left( \begin{array}{cc|c} \left( \begin{array}{c} e_1^T(s) \\ e_2^T(s) \end{array} \right) & - \left( \begin{array}{c} e_1^T(s) \\ e_2^T(s) \end{array} \right) & c(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|c} \kappa(s)e_2(s)ds & -\kappa(s)e_1(s)ds & e_1(s)ds \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc|c} \left( \begin{array}{c} e_1^T(s)e_2(s) \\ e_2^T(s)e_2(s) \end{array} \right) \kappa(s)ds & - \left( \begin{array}{c} e_1^T(s)e_1(s) \\ e_2^T(s)e_1(s) \end{array} \right) \kappa(s)ds & \left( \begin{array}{c} e_1^T(s)e_1(s) \\ e_2^T(s)e_1(s) \end{array} \right) ds \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -\kappa(s)ds & ds \\ \kappa(s)ds & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

obteniendo así un invariante diferencial de  $\tilde{c}(s)$ , que es  $\kappa(s)$ .

La forma de Maurer-Cartan satisface la ecuación estructural, pero ¿qué sucede con el pullback de la forma de Maurer-Cartan, la cual también es una 1-forma pero ahora definida sobre  $\mathbb{R}^2$ ? Para verificar si también se preserva por pullback se tiene el siguiente lemma.

**Lema 1** Sea  $f : M \rightarrow N$  y  $\omega$  una 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada sobre  $N$ , esto es  $\omega \in \Gamma(T^*N \otimes \mathfrak{g})$ , donde  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de Lie de un grupo de Lie  $G$ . Si  $\omega$  satisface la ecuación estructural,  $f^*\omega$  también la satisface, es decir, la ecuación estructural se preserva por pullback.

**Demostración** Por definición de pullback  $(f^*\omega)_p(v) = \omega_{f(p)} \circ T_p f(v)$ , para todo  $p \in M$  y  $v \in T_p M$ , por lo tanto  $f^*\omega \in \Gamma(T^*M \otimes \mathfrak{g})$ . Supongamos que  $\omega$  satisface la ecuación estructural

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0 \quad (4.20)$$

donde  $d$  es la derivada exterior y satisface  $d\varphi^*\omega = \varphi^*d\omega$ . Ahora si  $p \in M$  y  $v, w \in T_p M$  tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (f^*[\omega, \omega])_p(v, w) &= [\omega, \omega]_{f(p)} \circ (T_p \varphi(v), T_p \varphi(w)) \\ &= [(\omega \wedge \omega)_p(T_p \varphi(v) \otimes T_p \varphi(w))] \\ &= 2[\omega_{f(p)}(T_p \varphi(v)), \omega_{f(p)}(T_p \varphi(w))] \\ &= 2[\omega_{f(p)} \circ (T_p \varphi(v)), \omega_{f(p)} \circ (T_p \varphi(w))] \\ &= 2[(f^*\omega)_p(v), (f^*\omega)_p(w)] \\ &= [f^*\omega, f^*\omega]_p(v, w) \end{aligned}$$

entonces  $(f^*[\omega, \omega]) = [f^*\omega, f^*\omega]$ . De esto podemos deducir lo siguiente

$$d(f^*\omega) + \frac{1}{2}[f^*\omega, f^*\omega] = f^*d\omega + \frac{1}{2}f^*[\omega, \omega] \quad (4.21)$$

$$= f^*(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = 0 \quad (4.22)$$

Por lo tanto la ecuación estructural se preserva por pull back.

Por consiguiente se tiene que  $\tilde{c}^*\omega$  satisface la ecuación estructural, esto es,

$$d(\tilde{c}^*\omega) + \frac{1}{2}[\tilde{c}^*\omega, \tilde{c}^*\omega] = 0$$

Anteriormente se calcularon los invariantes diferenciales de la curva  $\tilde{c}$ , ahora calcularemos los invariantes de la curva  $c$ . Para esto debemos mostrar que  $\tilde{c}$  y  $c$  son congruentes, para ello haremos uso del siguiente corolario.

**Corolario 1** *Para imágenes de curvas  $c, \tilde{c} \subset \mathbb{R}^2$ , si  $\kappa(t) = \tilde{\kappa}(t + a)$  para todo  $t \in I$  y algún  $a \in \mathbb{R}$ , entonces  $c$  y  $\tilde{c}$  son congruentes*

**Demostración** Sean  $\ell : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\tilde{\ell} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  curvas regulares parametrizadas por longitud de arco de  $c$  y  $\tilde{c}$  respectivamente y sus correspondientes levantamientos  $\Upsilon$  y  $\tilde{\Upsilon}$  de tal manera que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{array}{ccc} & SE(2) & \\ \Upsilon \nearrow & \downarrow \pi & \\ I & \xrightarrow{\ell} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & SE(2) & \\ \tilde{\Upsilon} \nearrow & \downarrow \pi & \\ \tilde{I} & \xrightarrow{\tilde{\ell}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Las imágenes de las curvas  $c$  y  $\tilde{c}$  son respectivamente  $\ell(I), \tilde{\ell}(\tilde{I}) \subset \mathbb{R}^2$ , por definición de levantamiento  $\ell = \pi \circ \Upsilon$  y  $\tilde{\ell} = \pi \circ \tilde{\Upsilon}$ . Existe  $\sigma : \tilde{I} \rightarrow I$ , dada por  $\sigma(s) = s + a$ , tal que  $c \circ \sigma = \ell$  y  $\tilde{c} \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\ell}$ .

Por otro lado el pull back de la forma  $\omega \in \Gamma(T^*SE(2) \otimes \mathfrak{g})$  está dado por

$$(\Upsilon^*\omega) = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -\kappa(s)ds & ds \\ \kappa(s)ds & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (4.23)$$

Si la consideramos como una función de  $\kappa(s)$ , llamamos  $(\Upsilon^*\omega)_s = f(\kappa(s))ds|_s$ , de igual forma  $(\tilde{\Upsilon}^*\omega)_{(s+a)} = f(\tilde{\kappa}(s+a))ds|_{s+a}$ , pero supusimos que  $\kappa(s) = \tilde{\kappa}(s+a)$  entonces  $\kappa = \tilde{\kappa} \circ \sigma$ , donde  $\sigma$  es biyectiva y es bicontinua por lo tanto es un isomorfismo. En conclusión  $c$  y  $\tilde{c}$  son congruentes.

De lo anterior deducimos que  $\Upsilon^*\omega = (\tilde{\Upsilon} \circ \sigma)^*\omega$ , entonces por la versión local del teorema fundamental del cálculo ([9], p. 115),  $\Upsilon$  y  $(\Upsilon^* \circ \sigma)$  tienen igual derivada de Darboux, entonces sus primitivas son iguales salvo por una constante en  $SE(2)$ ; esto es, existe  $A \in SE(2)$  tal que  $\Upsilon = L_A \circ (\tilde{\Upsilon} \circ \sigma)$ . Por la proyección  $\pi$  tenemos lo siguiente.

$$\pi \circ \Upsilon = \pi \circ L_A \circ \tilde{\Upsilon} \circ \sigma \quad (4.24)$$



Pero por la acción de  $SE(2)$  sobre  $G/H \simeq \mathbb{R}^2$  está dado por  $g \cdot [c] = [g \cdot c]$ , tenemos

$$L_g(\pi(h)) = g \cdot \pi(h) = \pi(g \cdot h) = \pi(L_g h)$$

entonces  $L_g \circ \pi = \pi \circ L_g$  y podemos escribir (4.34) como sigue

$$\pi \circ \Upsilon = L_A \circ \pi \circ \tilde{\Upsilon} \circ \sigma$$

Pero  $\ell = \pi \circ \Upsilon$  y  $\tilde{\ell} = \pi \circ \tilde{\Upsilon}$  y  $c = \ell(I)$ ,  $\tilde{c} = \tilde{\ell}(\tilde{I}) \subset \mathbb{R}^2$  entonces  $\text{im}(c) = L_A(\text{im}(\tilde{c}))$ , por lo que las dos imágenes de las curvas son congruentes modulo una transformación de cuerpo rígido.

### Invariantes de una curva con parametrización arbitraria

Ahora veamos que sucede cuando se tiene una parametrización arbitraria de la curva  $c$ . Consideramos la misma curva regular y encontramos una base ortonormal definida por

$e_1(t) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \dot{c}(t)$  y  $e_2(t)$  de tal forma que forma una base ortonormal, entonces el levantamiento de  $c(t)$  esta dado por

$$\tilde{c}(t) = \left( \begin{array}{cc|c} e_1(t) & e_2(t) & c(t) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

con inversa

$$\tilde{c}(t)^{-1} = \left( \begin{array}{cc|c} \left( \begin{array}{c} e_1^T(t) \\ e_2^T(t) \end{array} \right) & - \left( \begin{array}{c} e_1^T(t) \\ e_2^T(t) \end{array} \right) & c(t) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

También se tiene que

$$T_t \tilde{c}(t) = \left( \begin{array}{cc|c} \dot{e}_1(t) & \dot{e}_2(t) & \dot{c}(t) \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Pero  $e_1(t)$  y  $e_2(t)$  son una base ortonormal y al igual que en el caso anterior tenemos  $\|e_1(t)\| = \|e_2(t)\| = 1 \forall t \in [a, b]$  y  $\dot{e}_1(t) = \lambda(t)e_2(t)$  y  $\dot{e}_2(t) = \chi(t)e_1(t)$  tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \dot{e}_1(t), e_2(t) \rangle + \langle e_1(t), \dot{e}_2(t) \rangle \\ &= \langle \lambda(t)e_2(t), e_2(t) \rangle + \langle e_1(t), \chi(t)e_1(t) \rangle \\ &= \lambda(t) + \chi(t) \end{aligned}$$

se deduce entonces que  $\chi(t) = -\lambda(t) \forall t \in [a, b]$ , así

$$T_t \tilde{c}(t) = \left( \begin{array}{c|c|c} \lambda(t)e_2(t) & -\lambda(t)e_1(t) & \|\dot{c}(t)\|e_1(t)dt \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Por otro lado de (4.13)  $\kappa(t) = \frac{\lambda(t)}{v(t)}$  entonces  $\lambda(t) = \kappa(t)v(t) = \kappa(t)\|\dot{c}(t)\|$  así

$$T_t \tilde{c}(t) = \left( \begin{array}{c|c|c} e_2(t)\kappa(t)\|\dot{c}(t)\|dt & -e_1(t)\kappa(t)\|\dot{c}(t)\| & \|\dot{c}(t)\|e_1(t)dt \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ahora calculando el pull back de  $\omega$  por  $\tilde{c}$  :

$$\begin{aligned} (\tilde{c}^* \omega)_t &= \left( \begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} e_1^T(t) \\ e_2^T(t) \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} e_1^T(t) \\ e_2^T(t) \end{pmatrix} & c(t) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c|c} e_2(t)\kappa(t)\|\dot{c}(t)\|dt & -e_1(t)\kappa(t)\|\dot{c}(t)\|dt & e_1(t)\|\dot{c}(t)\|dt \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -\kappa(t)\|\dot{c}(t)\|dt & \|\dot{c}(t)\|dt \\ \hline \kappa(t)\|\dot{c}(t)\|dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

observamos que en esta parametrización se obtienen los invariantes diferenciales y aparece la rapidez de la curva dada por  $v(t) = \|\dot{c}(t)\|$  y la curvatura  $\kappa(t)$ , en este caso  $\|\dot{c}(t)\|$  no necesariamente es 1.

Observemos que nuevamente obtenemos que el invariante diferencial es la curvatura  $\kappa(t)$ . Esto quiere decir que la curvatura describe completamente a una curva, en otras palabras, si conocemos la curvatura de una curva sabemos de que curva se trata.

Cabe mencionar que para el caso de las curvas en el plano es fácil determinar la curvatura, se infiere entonces que la curvatura es un invariante fácil de identificar y calcular, pero esto es solo en el caso de curvas en el plano. En el caso de estructuras más complejas es difícil identificar y calcular sus invariantes diferenciales tal es el caso de variedades de contacto de dimensión 3; las cuales se analizan en el siguiente capítulo.

# Capítulo 5

## Sobre invariantes diferenciales de 3-variedades de contacto

En este capítulo se hace una lectura del artículo de K. Ehlers [15] acerca de la aplicación del método de equivalencia de Cartan sobre variedades de contacto de dimensión 3. Una variedad de contacto de dimensión 3, denotada  $(M, g, \mathcal{E})$ , es una variedad Riemanniana  $(M, g)$  dotada de una distribución  $\mathcal{E} \subset TM$  completamente no integrable y de rango constante igual a 2. La distribución  $\mathcal{E}$  está definida localmente por el anulador de una 1-forma  $\eta \in \Gamma(T^*M)$ , i.e.,  $\mathcal{E}_x = \ker \eta_x$  y la condición de no integrabilidad se traduce, por la versión dada en formas diferenciales del Teorema de Frobenius ([2], [9]), en la condición equivalente  $d\eta \wedge \eta \neq 0$ . En su versión general, se define una variedad de contacto como aquella dotada de una 2-forma  $\omega$  cerrada (i.e., tal que  $d\omega = 0$ ) y no degenerada, es decir, tal que para cada  $x \in M$  y  $v \in T_xM$ , el mapeo  $\omega_x(v, \cdot) : T_xM \rightarrow T_xM$  sea un isomorfismo. Las distribuciones de contacto se encuentran entre las más estudiadas de las distribuciones no integrables ([7], p. 19).

La motivación para el estudio de este tipo de estructuras es una masa puntual que se mueve en  $M$ , restringida noholonómicamente a  $\mathcal{E}$ , con energía cinética  $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}g_q(\dot{q}, \dot{q})$ . Existen dos geometrías diferentes comúnmente definidas sobre estructuras noholonómicas: geometría sub-Riemanniana y geometría noholonomica.

En la geometría sub-Riemanniana el interés se centra en los caminos más cortos, siendo la longitud de una curva  $c: [a, b] \rightarrow M$  que une dos puntos  $x$  y  $y$  dada por  $\ell(c) = \int \sqrt{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle} dt$ . La distancia entre  $x$  y  $y$  viene entonces dada por  $d(x, y) = \inf(\ell(c))$ , donde el ínf se toma entre todas las *curvas horizontales* que unen a  $x$  con  $y$ , es decir, todas

las curvas  $c : [a, b] \rightarrow M$  tales que  $c(a) = x$ ,  $c(b) = y$  y cuyo vector tangente  $\dot{c}(t)$  para cada  $t \in [a, b]$  pertenece a  $\mathcal{E}_{c(t)}$ . En la geometría no holonómica se estudia las curvas más rectas que son compatibles con la restricciones determinadas por la distribución  $\mathcal{E}$ , es decir, las soluciones de las geodésicas noholonómicas. Las ecuaciones geodésicas se obtienen al calcular la aceleración de una curva horizontal  $c : [a, b] \rightarrow M$  usando la conexión de Levi-Civita asociada con  $ds^2$  y proyectando ortogonalmente el resultado sobre  $\mathcal{E}$ .

Lo anterior motiva la siguiente pregunta, estudiada en el artículo. Dadas dos estructuras de contacto  $\{M, ds_M^2, \mathcal{H}_M\}$  y  $\{N, ds_N^2, \mathcal{H}_N\}$  ¿existe un difeomorfismo (local)  $f: M \rightarrow N$  que preserve la geometría no holonómica en el sentido de que mapee geodésicas no holonómicas de  $M$  en geodésicas no holonómicas de  $N$ ?. La respuesta se obtiene mediante la aplicación el método de equivalencia a través de los invariantes diferenciales de tales estructuras.

En la primera sección del artículo se aplica el método de equivalencia obteniendo una  $G$ -estructura inicial para la geometría no holonómica sobre una  $n$ -variedad Riemanniana  $M$  dotada con una distribución completamente no integrable  $\mathcal{H}$  de rango constante  $m < n$ , con  $m$  par. Para esto se considera un marco  $\{X_1, \dots, X_n\}$  para  $TM$  del cual podemos definir un marco adaptado a la distribución  $\mathcal{H}$  dado por  $\{X_1, \dots, X_m\}$ , es decir,  $\mathcal{H}_x = \text{span}\{X_1(x), \dots, X_m(x)\}$ , para  $x \in M$ .  $\mathcal{H}$  es totalmente no holonómica si y solo si  $\text{span}\{X_i, [X_i, X_j], [X_k, [X_i, X_j]], \dots\} = TM$  para cualquier marco adaptado.

El teorema de Chow ([7], p. 24) asegura que cualesquiera dos puntos de una variedad conexa  $M$  dotada de una distribución completamente no holonómica pueden ser unidos por una curva horizontal. En sistemas mecánicos, el teorema de Chow garantiza que el conjunto de todas las posibles posiciones del sistema mecánico es igual a toda la variedad de configuraciones  $M$ .

Por otra parte se puede definir un comarco adaptado a la distribución  $\mathcal{H}$ . Recordemos del capítulo 3 de esta tesis que el haz de comarcos  $F^*M$  es un  $GL(n)$ -haz principal, con proyección  $\pi: F^*M \rightarrow M$  y acción por la derecha definida por  $R_g(\eta) = g^{-1} \circ \eta$ , donde  $\eta$  es una sección de  $F^*M$  y  $g \in GL(n)$ . Conviene considerar una sección de  $F^*M$  como un mapeo que a cada punto  $x \in M$  asigna un isomorfismo  $\eta_x: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Un comarco  $(\eta^1, \dots, \eta^n)^{tr}$  de  $F^*M$  es adaptado a la distribución  $\mathcal{H}$  y métrica  $\mathcal{G}$  si los  $\eta^\alpha$ ,

donde  $\alpha = n - m, \dots, n$ , aniquilan a  $\mathcal{H}$ , esto es, para cada punto  $x \in M$ ,  $\eta_x^\alpha(v_1, \dots, v_q) = 0$  para todo  $v_1, \dots, v_q \in \mathcal{H}_x$  y la métrica restringida a la distribución es denotada por  $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ . Sea  $\mathcal{I}$  el ideal en  $\Lambda^*M$  (haz álgebra exterior sobre  $M$ ) generado por los  $\eta^\alpha$ , es decir, (Ver [2], p. 73)

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{H}) = \{ \eta^\alpha \in T^*M \mid \text{ann}(\mathcal{H}) = \text{span}\{\eta^\alpha\} \}.$$

$I$  es llamado ideal diferencial si es cerrado bajo la diferenciación exterior  $d$ , esto es,  $d(I) \subset I$ , entonces la derivada ideal de  $I$  denotado por  $I'$  es generada por los  $\eta^\alpha$  para los cuales  $d\eta^\alpha \in I$ . Si el conjunto  $I^{(0)} = I$  y  $I^{(k+1)} = (I^{(k)})'$  entonces tenemos  $I = I^{(0)} \supset I^{(1)} \supset \dots \supset 0$  la cual es una filtración decreciente y es el análogo a una distribución que es completamente no integrable. Si  $I^{(1)}$  aniquila a una distribución de rango  $r \geq m$  entonces las 1-formas  $\{\eta^{r+1}, \dots, \eta^n\}$  generan  $I^{(1)}$ .

Sea ahora  $(P, M, G)$  un haz fibrado principal sobre una variedad  $M$  con grupo de estructura  $G$ , tal que para cada  $u \in P$ , el espacio tangente de  $P$  en  $u$ , denotado por  $T_uP$  y sea  $G_u$  el subespacio de  $T_uP$  el cual consiste de vectores tangentes a la fibra a través de  $u$ . Una **conexión**  $\Gamma$  en  $P$  es una asignación de un subespacio  $Q_u$  de  $T_uP$  a cada  $u \in P$  tal que

- $T_uP = G_u \oplus Q_u$  (suma directa);
- $Q_{ug} = (R_g)_*Q_u$  para cada  $u \in P$  y  $g \in G$ , donde  $R_g$  es la transformación de  $P$  inducida por  $g \in G$ ,  $R_g u = ua$ , esta condición significa que la distribución  $u \rightarrow Q_u$  es  $G$ -invariante
- $Q_u$  depende diferenciablemente sobre  $u$

A  $G_u$  se le llama subespacio vertical y  $Q_u$  subespacio horizontal de  $T_uP$ . Por la primera condición cada vector  $X_u \in T_uP$  puede ser escrito como

$$X = Y + Z \tag{5.1}$$

donde  $Y \in G_u$  y  $Z \in Q_u$ , a  $Y$  se le llama componente vertical y  $Z$  componente horizontal. La tercera condición significa que si  $X$  es un campo vectorial diferenciable sobre  $P$  entonces lo son  $Y$  y  $Z$ .

De lo anterior podemos deducir para una  $G$ -estructura  $B \subset P$  el espacio tangente a  $B$  en un punto  $u \in B$  denotado por  $T_u B = T_e \Phi_u(g) \oplus Y_u$ , donde  $\Phi_u : G \rightarrow B$  es un difeomorfismo, tal que  $\Phi_u(g) = R_g(u)$ , e induce un isomorfismo  $T_e \Phi_u : T_e G \rightarrow T_u B$ .

Para cualquier  $G$ -estructura  $B \subset F^*M$  se define una 1-forma llamada **tautológica**  $\Omega$  mediante

$$\Omega_u(v) = u(T_u \pi(v)) \quad \text{para todo } v \in T_u B$$

donde  $u \in B$  y  $T\pi$  es la diferencial de  $\pi$ , el mapeo  $\Omega_u$  está definido por la composición  $u \circ T_u \pi$

$$\begin{array}{ccc} B & & T_u B \\ \downarrow \pi & & \downarrow T_u \pi \\ M & & T_{\pi(u)} M \xrightarrow{u} \mathbb{R}^n \end{array}$$

Si  $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una sección sobre  $M$  entonces por la acción de  $G$ ,  $g^{-1} \circ \eta_x = u$  para algún  $g \in G$  y se tiene  $\pi(u) = x$ , por lo que podemos escribir  $u = g^{-1} \circ \eta_{\pi(u)}$ , esta es una 1-forma sobre  $M$ , entonces el pull back de  $\eta$  por  $\pi$  es una 1-forma  $\pi^* \eta$  sobre  $B$ , y la relación entre  $\Omega$  y  $\pi^* \eta$  se describe como sigue.

Por definición de pull back  $(\pi^* \eta)_u = \eta_{\pi(u)} \circ T_u \pi$  y sabemos que  $\Omega_u : T_u B \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\begin{aligned} \Omega_u(v) &= (u \circ T_u \pi)(v) \\ &= (g^{-1} \circ \eta_{\pi(u)} \circ T_u \pi)(v) \\ &= g^{-1} \circ (\eta_{\pi(u)} \circ T_u \pi)(v) \\ &= (g^{-1} \circ \pi^* \eta_{\pi(u)})(v) \quad \text{para todo } g \in G \text{ y } v \in T_u B \\ \therefore \Omega_u &= g^{-1} \circ \pi^* \eta_{\pi(u)} \end{aligned}$$

Así  $\Omega_u = g^{-1} \circ \pi^* \eta_{\pi(u)}$  es la 1-forma tautológica  $\mathbb{R}^n$ -valuada sobre  $B$ . De esta manera  $\Omega$  codifica las posibles elecciones de comarcos adaptados sobre  $M$  en base a un comarco parcial sobre la  $G$ -estructura  $B$  ([7], p. 100).

La 1-forma tautológica satisface las siguientes propiedades:

- **Definición intrínseca:** Para todo  $u \in B$ ,  $v \in T_u B$ , tenemos  $\Omega_u(v) = u(T_u \pi(v))$  donde  $u$  es un mapeo  $\mathbb{R}^n$ -valuado  $u : T_{\pi(u)} M \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $T_u \pi$  denota la diferencial de la proyección  $\pi : B \rightarrow M$ .

- Equivarianza:  $R_g^* \Omega = g^{-1} \circ \Omega$  para todo  $g \in G$ .
- Propiedad de Reproducidad: Si  $\eta : U \subset M \rightarrow B$  es una sección local, entonces  $\eta^* \Omega = \eta$ .
- Semi-básica:  $\Omega(X) = 0$  para cualquier vector  $X \in \ker(T\pi)$ , es decir, si  $X$  es vertical. Esto quiere decir que las  $\Omega^i$  aniquilan el espacio vertical =  $\ker(T\pi)$ .

Por otro lado la acción del grupo nos permite identificar el espacio vertical  $G_u$  canónicamente con el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Esta identificación envía  $\xi \in \mathfrak{g}$  a  $X_\xi(b) = \frac{d}{dt}|_{t=0} b \circ \exp(t\xi)$ , el cual es un isomorfismo de  $\mathfrak{g}$  en  $G_u$ , para cada  $u \in B$ . Dada una conexión  $\Gamma$  en  $P$ , podemos definir una 1-forma sobre  $B$  con valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Para cada  $X_u \in T_u B$  podemos definir una única 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada tal que  $\omega(X) = 0$  si y solo si  $X$  es horizontal.

La 1-forma  $\omega$  es llamada forma conexión asociada a la conexión  $\Gamma$  dada y satisface lo siguiente:

- $\omega(X_\xi) = \xi$  para cada  $\xi \in \mathfrak{g}$
- $R_g^* \omega = \text{Ad}(g^{-1})\omega$ , donde  $\text{Ad}$  denota la representación adjunta de  $G$  en  $\mathfrak{g}$

La relación entre  $\Omega$  y  $\omega$  se da en el siguiente lema

**Lema 2** ([7], p. 102) *Sea  $\Omega$  la 1-forma tautológica sobre  $B \rightarrow M$  y sea  $\omega$  la pseudo conexión para  $B \rightarrow M$ . Entonces*

$$d\Omega = -\omega \wedge \Omega + T$$

**Demostración.** Sea  $g = \exp(t\xi)$ , diferenciando la propiedad de equivarianza

$$R_g^* \Omega = g^{-1} \circ \Omega = \exp(-t\xi) \circ \Omega$$

Por definición de la derivada de Lie de una 1-forma a lo largo de un campo vectorial, tenemos

$$L_{X_\xi} \Omega = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (R_g^* \Omega) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp(-t\xi) \circ \Omega) = -\xi \circ \Omega$$

Además sabemos  $\Omega(X_\xi) = 0$  y  $\omega(X_\xi) = \xi$  por otro lado

$$\begin{aligned} L_{X_\xi}\Omega(Y) &= (d \circ \mathbf{i}_{X_\xi}\Omega + \mathbf{i}_{X_\xi} \circ d\Omega)(Y) \\ &= d(\Omega(X_\xi)) + d\Omega(X_\xi, Y) \\ &= d\Omega(X_\xi, Y) \end{aligned}$$

Entonces  $d\Omega(X_\xi, Y) = L_{X_\xi}\Omega(Y) = -\xi(\Omega(Y)) = -\omega(X_\xi)\Omega(Y) + \omega(Y)\Omega(X_\xi)$ .

Pero  $\Omega(X_\xi) = 0$  por lo tanto  $d\Omega(X_\xi, Y) = -(\omega \wedge \Omega)(X_\xi, Y)$  donde  $X_\xi$  es vertical y  $Y \in T_uB$ . Ahora si definimos  $T = d\Omega(\xi_B, Y) + (\omega \wedge \Omega)(\xi_B, Y)$ , entonces podemos observar que  $T$  es una 2-forma semi-básica y se llama torsión asociada a la pseudo-conexión  $\omega$ .

Recordemos que  $M$  es una variedad Riemanniana con métrica  $\mathcal{G}$ , consideremos entonces un marco  $(e_1, \dots, e_n)$  para  $TM$  para el cual  $\eta^I(e_J) = \delta_{IJ}$  (delta de Kronecker). Entonces podemos expresar la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  asociada a  $\mathcal{G}$  en términos de las 1-formas locales, las cuales satisfacen  $\omega_{IJ} = -\omega_{JI}$ , mediante

$$\nabla_X(e_J) = \sum_I \omega_{IJ}(X)e_I$$

Luego de los estados del principio de D'Alembert que dice que si una partícula libre cuya curva es  $c(t)$  con energía cinética  $T = \frac{1}{2}\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$  esta sujeto a la restricción  $\dot{c} \in \mathcal{H}_{c(t)}$ , entonces la fuerza de restricción es  $\mathcal{G}$  perpendicular a  $\mathcal{H}_{c(t)}$ . Esto sugiere hacer la siguiente definición:

$$D_X e_j = \sum_i \omega_{ij}(X)e_i$$

**Definición 6** ([1], p. 113) Sea  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \omega$ . Una geodésica de una  $C^r$ -conexión afín  $\nabla$  sobre una variedad  $M$  es una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  que satisface  $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$

**Definición 7** ([1], p. 118) Una  $C^\infty$ -distribución  $\mathcal{H}$  sobre  $M$  es geodésicamente invariante con respecto a una  $C^\infty$ -conexión afín  $\nabla$ , si cada geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  tiene la propiedad de que  $\gamma'(t_0) \in \mathcal{H}_{\gamma(t_0)}$  para algún  $t_0 \in I$ , satisface  $\gamma'(t) \in \mathcal{H}_{\gamma(t)}$  para todo  $t \in I$ .

Entonces la curva  $c(t)$  es una geodésica no holonómica si esta satisface las ecuaciones geodésicas no holonómicas

$$\left(\frac{d}{dt}\dot{c}_i + \dot{c}_j\omega_{ij}(\dot{c})\right)e_i = 0 \tag{5.2}$$



donde  $\dot{c}_k = \eta^k(\dot{c})$ .

Si  $\bar{D}$  es otra conexión no holonómica sobre  $\mathcal{H}$  asociada con la métrica Riemanniana  $\bar{\mathcal{G}}$ . Surge entonces la pregunta ¿Cuándo las geodésicas son las mismas para esta conexión?. Para responder esta pregunta Cartan lo hizo en términos de las formas conexiones y comarcos.

Para esto debemos encontrar un comarco completo canónico que preserve la equivalencia geométrica. Recordemos del capítulo 3 que el cambio de coordenadas de comarcos que preserva la distribución  $\mathcal{H}$  es de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \bar{\eta}^i \\ \bar{\eta}^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^i \\ \eta^\alpha \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

donde  $A \in GL(m)$ ,  $a \in GL(n-m)$ , y  $b \in M_{m,n-m}$ . Para el caso de que la métrica Sub-Riemanniana  $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$  sea preservada  $A$  debe ser una matriz ortogonal, es decir  $A \in O(m)$ . Cartan observó que en el caso de lo no holonómico existe una restricción adicional sobre la matriz  $b$ . Considerar la métrica  $\bar{d}s^2 = \bar{\eta}^1 \otimes \bar{\eta}^1 + \cdots + \bar{\eta}^n \otimes \bar{\eta}^n$  y conexión no holonómica asociada  $\bar{D}$ . Las correspondientes ecuaciones geodésicas son

$$(\ddot{s}_i + \dot{s}_j \bar{\omega}_{ij}(\dot{s})) \bar{e}_i = 0 \quad (5.4)$$

donde  $\dot{s}_k = \bar{\eta}^k(\dot{s})$ .

**Proposición 1** *Las geodésicas de  $D$  y  $\bar{D}$  son las misma si y solo si  $\omega_{ij}(X) = \bar{\omega}_{ij}(X)$  para todo  $X \in \mathcal{H}$ .*

**Definición 8** *El subhaz  $B_0 \subset F^*M$  con grupo de estructura  $G_0 \subset GL(n)$  es la  $G$ -estructura inicial para la geometría no holonómica. Las secciones de  $B_0$  son llamadas comarcos 0-adaptados.*

Para una estructura no holonómica sobre una variedad 3-dimensional, la condición de no integrabilidad  $d\eta^3 \wedge \eta^3 \neq 0$  implica que  $I^{(1)} = 0$  por consiguiente la matriz  $b$  de (5.3) debe ser cero. Así la  $G$ -estructura inicial para la 3-variedad de contacto tiene grupo de estructura

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid A \in O(2), a \neq 0 \right\} \quad (5.5)$$

Luego la  $G$ -estructura caracteriza completamente a la geometría no holonómica en el sentido que dada la  $G$ -estructura, nosotros podemos reconstruir la estructura geométrica. Lo anterior nos lleva a decir que dos  $G$ -estructuras,  $\pi_1 : B(M) \rightarrow M$  y  $\pi_2 : B(N) \rightarrow N$ , se dicen ser equivalentes si existe un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  para el cual  $f_1(B(M)) = B(N)$  donde  $f_1$  es el mapeo haz inducido.

Si  $\beta \in B(M)$  es un isomorfismo  $\beta_{\pi_1(\beta)} : T_{\pi_1(\beta)}M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces  $f_1(\beta) = \beta \circ (f_*)^{-1}$  donde  $f_*$  es la diferencial de  $f$ . Es decir,  $f_1(\beta) \in B(N)$  por consiguiente en el punto  $f(\pi_1(\beta)) \in N$  es un isomorfismo  $(f_1(\beta))_{f(\pi_1(\beta))} : T_{f(\pi_1(\beta))}N \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 f : M \rightarrow N & & \\
 \pi_1 : B(M) \rightarrow M & & \\
 \pi_2 : B(N) \rightarrow N & & \\
 \beta_{\pi_1(\beta)} : T_{\pi_1(\beta)}M \rightarrow \mathbb{R}^3 & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T_{\pi_1(\beta)}M & \xrightarrow{T_{\pi_1(\beta)}f} & T_{f(\pi_1(\beta))}N \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

La pregunta que se plantea casi al inicio de este capítulo de si existe o no un difeomorfismo entre variedades que preserve la estructura no holonómica ahora puede ser respondida en base a la equivalencia de las  $G$ -estructuras, para lo cual debemos calcular los invariantes diferenciales para las  $G$ -estructuras.

La aplicación del método de equivalencia para calcular tales invariantes consiste en hacer prolongaciones y/o reducciones de  $G$ -estructuras de tal forma que obtengamos el grupo de estructura tan simple como sea posible. Es decir, el método está basado sobre dos construcciones, reducción y prolongación, el primero produce un subhaz  $B_1 \subset B$ , del haz de comarcos  $B \rightarrow M$ , el segundo produce un “super haz”  $B^1 \rightarrow B$  de  $B \rightarrow M$ .

Lo siguiente consiste en aplicar el método de equivalencia para encontrar los invariantes diferenciales a través de una reducción, es decir, un subhaz de  $B_0$  que tenga un comarco canónico. Una vez que se obtiene este comarco, es fácil determinar todos los invariantes diferenciales locales y simetrías de la estructura geométrica a través de la teoría general de  $e$ -estructuras.

Es importante recordar que para el caso del haz de comarcos podemos definir la 1-forma tautológica  $\mathbb{R}^3$ -valuada  $\Omega = (\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3)^{tr}$  sobre  $B_0$  mediante  $\Omega_u(v) = u(T_u\pi(v))$

donde  $u \in B_0$  y  $v$  es un vector tangente de  $T_u B_0$ . Si  $\eta$  es una sección local de  $B_0$ , entonces  $\Omega$  tiene expresión local  $\Omega = g^{-1}\eta$ . Esto es, existe  $\eta : B_0 \rightarrow T^*B_0$  una sección sobre  $B_0$  tal que por la acción derecha de  $G$  sobre  $B$  existe un  $g \in G$  tal que  $\Omega_b = g^{-1}\eta_b$ . Además como se mencionó anteriormente la 1-forma tautológica es semi-básica y provee un comarco parcial para  $B_0$ . La importancia de la 1-forma tautológica es que a través de ella podemos determinar la equivalencia entre  $G$ -estructuras como se menciona en el siguiente teorema.

**Teorema 2** *Sea  $G$  un grupo conexo,  $B(M)$  y  $B(N)$   $G$ -estructuras sobre variedades  $M$  y  $N$  respectivamente con 1-formas tautológicas  $\Omega_M$  y  $\Omega_N$ . Si existe un mapeo  $C^\infty$ ,  $F : B(M) \rightarrow B(N)$  tal que  $F^*\Omega_N = \Omega_M$ , entonces estas  $G$ -estructuras son equivalentes.*

Para encontrar el mapeo  $F$ , se requiere usar el método de Cartan de la gráfica. Esto es, para una variedad integral  $\Sigma \subset B(M) \times B(N)$  se define la 1-forma  $\Omega_N - \Omega_M$  la cual se proyecta mediante un difeomorfismo sobre cada factor. Entonces  $\Sigma$  es la gráfica de una función  $g : B(M) \rightarrow B(N)$  para el cual  $g^*\Omega_N = \Omega_M$ . Por el teorema 2,  $B(M)$  y  $B(N)$  son equivalentes. No obstante  $\Omega_M$  y  $\Omega_N$  proveen un comarco parcial para  $M$  y  $N$  por lo que el método de la gráfica no puede ser empleado (Ver [9] p.116). Esto nos lleva entonces a búsqueda de un comarco completo para la  $G$ -estructura.

**Proceso de Reducción.** Por el Lema 2 las ecuaciones de estructura para la 1-forma tautológica sobre  $B_0$  son  $d\Omega = -\Gamma \wedge \Omega + T$  donde  $T$  la torsión asociada a la pseudo-conexión  $\Gamma$  sobre  $B_0$ . Una pseudo-conexión es una 1-forma  $\mathfrak{g} = T_e G_0$ -valuada satisfaciendo las propiedades (i), (ii) como antes. Al restringir  $\Gamma$  a las fibras  $B_u \cong G$  de  $B \rightarrow M$ , coincide con la forma de Maurer-Cartan sobre  $G$ . El término pseudo-conexión se refiere a que  $\Gamma$  no es equivariante con respecto a la acción del grupo (ii). Luego la 1-forma tautológica y la pseudo-conexión provee un comarco completo para la  $G$ -estructura  $B_0$ . Esto es,

$$d \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{23}^1 & T_{31}^1 & T_{12}^1 \\ T_{23}^2 & T_{31}^2 & T_{12}^2 \\ T_{23}^3 & T_{31}^3 & T_{12}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega^2 \wedge \Omega^3 \\ \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\ \Omega^1 \wedge \Omega^2 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

con  $T_{jk}^i : B_0 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ejemplo.** Para  $G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid A \in O(2), a \neq 0 \right\}$

El grupo 1-paramétrico está conformado por las imágenes de los mapeos

$$t \rightarrow \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{da}{dt} \end{pmatrix}$$

Luego los generadores infinitesimales son

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sí  $(\gamma, \alpha) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$  el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  coincide con el grupo 1-paramétrico.

Luego el  $\text{span}\{\xi_1, \xi_2\} = \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

Podemos usar el álgebra de Lie que sea conveniente para elegir el  $\gamma$  que haga que  $T_{12}^1$  y  $T_{12}^2$  sean simultáneamente cero. De igual forma se elige el  $\alpha$  que satisfice  $T_{23}^3 = T_{31}^3 = 0$ . Por otro lado por la condición de contacto  $d\Omega^3 \wedge \Omega^3 \neq 0$ ,  $T_{12}^3$  no puede ser cero. Con las condiciones anteriores (5.3) se puede escribir de la forma

$$d \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{23}^1 & T_{31}^1 & 0 \\ T_{23}^2 & T_{31}^2 & 0 \\ 0 & 0 & T_{12}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega^2 \wedge \Omega^3 \\ \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\ \Omega^1 \wedge \Omega^2 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Así  $\{\gamma, \alpha, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^3\}$  conforma un comarco completo para la  $G$ -estructura  $B_0$ . No obstante este comarco no es único, por la condición de contacto se pueden agregar todos múltiplos de  $\Omega^3$  a  $\alpha$ . Ahora consideremos la acción de  $G_0$  sobre el espacio torsión. Sea  $g \in G_0$ , entonces  $R_g^* \Omega = a^{-1} \Omega^3$ . Aplicando la diferenciación exterior a ambos lados de la siguiente identidad obtenemos lo siguiente

$$d(R_g^* \Omega^3) = R_g^* d\Omega^3 = R_g^*(\alpha \wedge \Omega^3) + (R_g^* T_{12}^3) R_g^*(\Omega^1 \wedge \Omega^2) \quad (5.8)$$

dado que  $\alpha \wedge \Omega^3 \neq 0$  entonces  $\alpha = \det A \Omega^3$ . Luego

$$d(R_g^* \Omega^3) = R_g^* d\Omega^3 = \det(A) (R_g^* T_{12}^3) \Omega^1 \wedge \Omega^2 \pmod{\Omega^3} \quad (5.9)$$

y

$$d(g^{-1} \Omega^3) = a^{-1} T_{12}^3 \Omega^1 \wedge \Omega^2 \pmod{\Omega^3} \quad (5.10)$$

De lo anterior se deduce  $R^* T_{12}^3 = \det A a^{-1} T_{12}^3$ , por convención usamos  $G_0$  de tal forma que  $T_{12}^3 \equiv 1$ . Así el grupo reducido  $G_1 \subset G_0$  consiste de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

donde  $A \in O(2)$ .

De la reducción obtenida como arriba las ecuaciones de estructura son ahora de la forma

$$d \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{23}^1 & T_{31}^1 & 0 \\ T_{23}^2 & T_{31}^2 & 0 \\ T_{23}^3 & T_{31}^3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega^2 \wedge \Omega^3 \\ \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\ \Omega^1 \wedge \Omega^2 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Si hacemos algunos cambios de variable, esto es, si  $\gamma \rightarrow \gamma + \frac{1}{2}(T_{31}^2 + T_{23}^1)$  entonces podremos tomar  $T_{23}^1 = -T_{31}^2 \equiv p$ ,  $q = T_{31}^1$ ,  $r = T_{23}^2$ ,  $s = T_{23}^3$  y  $t = T_{31}^3$ .

Para que la pseudo-conexión sea única debemos se debe tener  $A \wedge \Omega = 0$  cuya única solución es que  $A = 0$ . De esta forma obtenemos un comarco canónico  $\{\gamma, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^3\}$  que preserva la equivalencia. Por consiguiente una  $G$ -estructura dotada de un comarco canónico es una  $e$ -estructura. Como resultado se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3** *Sea  $\{M, \mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  una variedad tres-dimensional dotada con una estructura de contacto no holonómica. Existe una  $G_1 \cong O(2)$  estructura  $B_1 \rightarrow M$  dotada con un comarco canónico  $\{\gamma, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^3\}$  con ecuaciones de estructura*

$$d \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ r & -p & 0 \\ s & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega^2 \wedge \Omega^3 \\ \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\ \Omega^1 \wedge \Omega^2 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

donde  $p, q, r, s$  y  $t$  son las funciones torsión asociadas con la pseudo-conexión.

De la ecuación estructural tenemos las siguientes ecuaciones

$$d\Omega^1 = -\gamma \wedge \Omega^2 + p\Omega^2 \wedge \Omega^3 + q\Omega^3 \wedge \Omega^1 \quad (5.14)$$

$$d\Omega^2 = \gamma \wedge \Omega^1 + r\Omega^2 \wedge \Omega^3 - p\Omega^3 \wedge \Omega^1 \quad (5.15)$$

$$d\Omega^3 = s\Omega^2 \wedge \Omega^3 + t\Omega^3 \wedge \Omega^1 + \Omega^1 \wedge \Omega^2 \quad (5.16)$$

De la teoría de las  $e$ -estructuras se tiene que existen 3 invariantes diferenciales. Debemos encontrar explícitamente los invariantes diferenciales, para lo cual empleamos las **Identidades Bianchi**. Veremos cuál es la relación entre las funciones torsión y los tres invariantes diferenciales sobre la variedad  $M$ . Las funciones torsión se preservan bajo automorfismos de  $B_1$ , luego por la teoría general de  $e$ -estructuras forman un conjunto completo de invariantes diferenciales para las estructuras de contacto no holonómicas de dimensión 3.

Calculamos entonces la segunda diferenciación exterior, es decir,  $d^2\Omega^I = 0$  para  $I = 1, 2, 3$  de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= d^2\Omega^1 = -d\gamma \wedge \Omega^2 + \gamma \wedge d\Omega^2 + dp \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + pd(\Omega^2 \wedge \Omega^3) + dq \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + qd(\Omega^3 \wedge \Omega^1) \\ &= -d\gamma \wedge \Omega^2 + \gamma \wedge (\gamma \wedge \Omega^1 + r\Omega^2 \wedge \Omega^3 - p\Omega^3 \wedge \Omega^1) + dp \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + dq \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\ &\quad + p(d\Omega^2 \wedge \Omega^3 - \Omega^2 \wedge d\Omega^3) + q(d\Omega^3 \wedge \Omega^1 - \Omega^3 \wedge d\Omega^1) \\ &= -d\gamma \wedge \Omega^2 + \gamma \wedge (\gamma \wedge \Omega^1 + r\Omega^2 \wedge \Omega^3 - p\Omega^3 \wedge \Omega^1) + dp \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + dq \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\ &\quad + p(\gamma \wedge \Omega^1 + r\Omega^2 \wedge \Omega^3 - p\Omega^3 \wedge \Omega^1) \wedge \Omega^3 - p\Omega^2 \wedge (s\Omega^2 \wedge \Omega^3 + t\Omega^3 \wedge \Omega^1 + \Omega^1 \wedge \Omega^2) \\ &\quad + q(s\Omega^2 \wedge \Omega^3 + t\Omega^3 \wedge \Omega^1 + \Omega^1 \wedge \Omega^2) \wedge \Omega^1 - q\Omega^3 \wedge (-\gamma \wedge \Omega^2 + p\Omega^2 \wedge \Omega^3 + q\Omega^3 \wedge \Omega^1) \\ &= -d\gamma \wedge \Omega^2 + r\gamma \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 - p\gamma \Omega^3 \wedge \Omega^1 + dp \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + dq \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + p\gamma \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^3 \\ &\quad - pt \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + qs \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - q \wedge \Omega^3 \wedge -\gamma \wedge \Omega^2 \\ &= -d\gamma \wedge \Omega^2 + r\gamma \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + dp \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 - q\gamma \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^2 - p\gamma \Omega^3 \wedge \Omega^1 + p\gamma \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^3 \\ &\quad + dq \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - pt \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + qs \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\ &= -d\gamma \wedge \Omega^2 + (dp + (q+r)\gamma) \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + (dq - 2p\gamma) \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + (qs - pt)\Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= d^2\Omega^1 = d\gamma \wedge \Omega^1 - \gamma \wedge d\Omega^1 + dr \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + rd(\Omega^2 \wedge \Omega^3) - dp \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - pd(\Omega^3 \wedge \Omega^1) \\
&= d\gamma \wedge \Omega^1 - \gamma \wedge d\Omega^1 + dr \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + rd\Omega^2 \wedge \Omega^3 - r\Omega^2 \wedge d\Omega^3 - dp \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - pd\Omega^3 \wedge \Omega^1 \\
&\quad + p\Omega^3 \wedge d\Omega^1 \\
&= d\gamma \wedge \Omega^1 - \gamma \wedge (-\gamma \wedge \Omega^2 + p\Omega^2 \wedge \Omega^3 + q\Omega^3 \wedge \Omega^1) + dr \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 - dp \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\
&\quad + r(\gamma \wedge \Omega^1 + r\Omega^2 \wedge \Omega^3 - p\Omega^3 \wedge \Omega^1) \wedge \Omega^3 - r\Omega^2 \wedge (s\Omega^2 \wedge \Omega^3 + t\Omega^3 \wedge \Omega^1 + \Omega^1 \wedge \Omega^2) \\
&\quad - p(s\Omega^2 \wedge \Omega^3 + t\Omega^3 \wedge \Omega^1 + \Omega^1 \wedge \Omega^2) \wedge \Omega^1 + p\Omega^3 \wedge (-\gamma \wedge \Omega^2 + p\Omega^2 \wedge \Omega^3 + q\Omega^3 \wedge \Omega^1) \\
&= d\gamma \wedge \Omega^1 - p\gamma \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 - q\gamma \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + dr \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 - dp \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + r\gamma \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^3 \\
&\quad - rt\Omega^2 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - ps\Omega^2 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - p\Omega^3 \wedge \gamma \wedge \Omega^2 \\
&= d\gamma \wedge \Omega^1 - p\gamma \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + dr \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 - p\Omega^3 \wedge \gamma \wedge \Omega^2 - q\gamma \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - dp \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\
&\quad + r\gamma \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^3 - rt\Omega^2 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - ps\Omega^2 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\
&= d\gamma \wedge \Omega^1 + (dr - 2p\gamma) \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 - (dp + (q+r)\gamma) \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - (rt + ps)\Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= d^2\Omega^3 = ds \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + sd(\Omega^2 \wedge \Omega^3) + dt \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + td(\Omega^3 \wedge \Omega^1) + d\Omega^1 \wedge \Omega^2 - \Omega^1 \wedge d\Omega^2 \\
&= ds \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + sd\Omega^2 \wedge \Omega^3 - s\Omega^2 \wedge d\Omega^3 + dt \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + td\Omega^3 \wedge \Omega^1 - t\Omega^3 \wedge d\Omega^1 \\
&\quad + d\Omega^1 \wedge \Omega^2 - \Omega^1 \wedge d\Omega^2 \\
&= ds \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + s(\gamma \wedge \Omega^1 + r\Omega^2 \wedge \Omega^3 - p\Omega^3 \wedge \Omega^1) \wedge \Omega^3 + dt \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\
&\quad - s\Omega^2 \wedge (s\Omega^2 \wedge \Omega^3 + t\Omega^3 \wedge \Omega^1 + \Omega^1 \wedge \Omega^2) + t(s\Omega^2 \wedge \Omega^3 + t\Omega^3 \wedge \Omega^1 + \Omega^1 \wedge \Omega^2) \wedge \Omega^1 \\
&\quad - t\Omega^3 \wedge (-\gamma \wedge \Omega^2 + p\Omega^2 \wedge \Omega^3 + q\Omega^3 \wedge \Omega^1) + (-\gamma \wedge \Omega^2 + p\Omega^2 \wedge \Omega^3 + q\Omega^3 \wedge \Omega^1) \wedge \Omega^2 \\
&\quad - \Omega^1 \wedge (\gamma \wedge \Omega^1 + r\Omega^2 \wedge \Omega^3 - p\Omega^3 \wedge \Omega^1) \\
&= ds \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + s\gamma \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^3 + dt \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - st\Omega^2 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + st\Omega^2 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\
&\quad - t\Omega^3 \wedge -\gamma \wedge \Omega^2 + q\Omega^3 \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^2 - r\Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 \\
&= ds \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + s\gamma \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^3 + dt \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + t\gamma \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^2 + q\Omega^3 \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^2 \\
&\quad - r\Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 \\
&= (ds - t\gamma) \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + (dt - s\gamma) \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + (q - r)\Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos lo siguiente:

$$0 = -d\gamma \wedge \Omega^2 + (dp + (q+r)\gamma) \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + (dq - 2p\gamma) \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + (qs - pt)\Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 \quad (5.17)$$

$$0 = d\gamma \wedge \Omega^1 + (dr - 2p\gamma) \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 - (dp + (q+r)\gamma) \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 - (rt + ps)\Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 \quad (5.18)$$

$$0 = (ds - t\gamma) \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 + (dt - s\gamma) \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^1 + (q-r) \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 \quad (5.19)$$

Las ecuaciones de las expansiones de las derivadas de las funciones torsion en términos del comarco canónico se dan como sigue:

$$ds = t\gamma + \sum S_I \Omega^I \quad (5.20)$$

$$dt = s\gamma + \sum T_I \Omega^I \quad (5.21)$$

$$dp = -(q+r)\gamma + \sum P_I \Omega^I \quad (5.22)$$

$$dr = 2p\gamma + \sum R_I \Omega^I \quad (5.23)$$

$$dq = 2p\gamma + \sum Q_I \Omega^I \quad (5.24)$$

donde los  $S_I, T_I, P_I, R_I$  y  $Q_I$  son las derivadas covariantes de las respectivas funciones torsión en las  $\Omega^i$  direcciones. De lo anterior sabemos que  $\gamma$  es una 1-forma conexión, luego  $d\gamma$  es una 2-forma y en la siguiente proposición se demuestra que es semi-básica.

**Proposición 2** *La 2-forma  $d\gamma$  es semi-básica. Esto es,  $\gamma$  se puede escribir como*

$$d\gamma = H_2 \Omega^2 \wedge \Omega^3 + H_2 \Omega^3 \wedge \Omega^1 + K \Omega^1 \wedge \Omega^2 \quad (5.25)$$

**Demostración.** Calculando el producto exterior de (5.18) con  $\Omega^3$  obtenemos  $0 = d\gamma \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^3$ , también de (5.17) con  $\Omega^3$ , obtenemos  $d\gamma \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3 = 0$ . Luego el producto exterior de (5.17) con  $\Omega^1$  y (5.18) con  $\Omega^2$  al sumar obtenemos  $d\gamma \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^2 = 0$ . Por lo tanto podemos definir una función  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que satisface  $d\gamma = K \Omega^1 \wedge \Omega^2 \pmod{\Omega^3}$

Por otro lado las funciones torsión serán funciones sobre  $M$  en la siguiente proposición se muestra que están bien definidas

**Proposición 3**  *$K, s^2 + t^2$ , y  $s^2 + qr$  son funciones bien definidas sobre  $M$ .*



**Demostración.** Si diferenciamos (5.25) y calculamos el producto exterior con  $\Omega^3$  obtenemos

$$0 = d^2\gamma = dK \wedge \Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge \Omega^3$$

De esto se deduce que  $dK$  es semi-básica, por consiguiente  $K$  debería ser constante en la dirección de las fibras. De manera similar para (5.20) y (5.21) calculamos  $d(s^2+t^2) \equiv 0 \pmod{\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3}$  luego de (5.22), (5.23) y (5.24) calculamos  $d(p^2+qr) \equiv 0 \pmod{\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3}$ , de esto podemos deducir que  $s^2+t^2$  y  $p^2+qr$  deben ser constantes en la dirección de la fibra.

Por lo tanto de la teoría general de  $\{e\}$ -estructuras, las funciones  $K$ ,  $s^2+t^2$ , y  $s^2+qr$  son invariantes diferenciales para una variedad no holonómica, y más aún forman un conjunto completo de invariantes diferenciales.

Consideremos ahora las siguientes relaciones basadas sobre las identidades Bianchi.

$$r - q = S_2 + T_2, \quad rt + ps = R_1 - P_2, \quad pt - qs = P_1 + Q_2 \quad (5.26)$$

La acción del grupo reducido  $G_1 \equiv O(2)$  sobre el espacio torsión puede ser deducido de las identidades Bianchi. En particular tenemos  $\pmod{\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3}$

$$d \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

y

$$d \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q+r) \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\gamma \\ -2\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q+r) \\ p \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

$G_1$  actúa sobre el los planos torsión  $(s, t)$  y sobre  $(\frac{1}{2}(q+r), p)$ . Ambos planos torsión rotan en la dirección en que movemos la fibra.

**Lema 3** (*Framing*). Sea  $B$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con un comarco  $u = (\eta^1, \dots, \eta^n)$ . Entonces el pseudo-grupo de difeomorfismos  $G$ , que preserva este comarco, es un grupo de Lie de dimensión a lo sumo  $n$ , el cual se alcanza si y solo si  $d\eta^i = \sum C_{jk}^i \eta^k \wedge \eta^j$ .

Con  $C_{jk}^i$  constantes. Si este es el caso las  $C_{jk}^i$  son las constantes de estructura de  $G$ .  $G$  actúa transitivamente sobre  $B$  y el comarco puede identificarse con una pase para las 1-formas invariantes a la izquierda sobre  $G$ .

De la teoría de las  $e$ -estructuras se tiene que las funciones  $C_{jk}^i$ , cuando son constantes forman un conjunto completo de invariantes diferenciales.

Ahora falta dar una interpretación de los invariantes diferenciales obtenidos. La  $B_1$ -estructura 4-dimensional tiene un comarco canónico. Se sigue de el framing lemma ([7], [8]), que la dimensión maximal de un grupo de Lie (local)  $G$  de difeomorfismos de  $B_1$  que preserva el campo de comarcos  $\{\gamma, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^3\}$  es de dimensión 4 ( la dimensión de  $B$ ) y esta cota se logra si y solo si  $K$  y las funciones torsión  $p, q, r, s$  son constantes. En este caso  $G$  actúa libre y transitivamente sobre  $B$  y los covectores que integran el comarco pueden ser identificados con las formas de Maurer-Cartan sobre  $G$ .

**Proposición 4** *La dimensión del grupo de simetría (local) de  $B_1$  es cuatro si y solo si  $p = q = r = s = t = 0$  y  $K$  es por consiguiente el único invariante local para variedades de contacto no holonómicas con simetría maximal.*

**Demostración.** Por el Lema del framing, las funciones torsión deberían ser todas constantes.  $G_1$  actúa sobre el plano torsión  $(s, t)$  por rotaciones ver (5.27), entonces  $s$  y  $t$  son constantes, más aún  $s$  y  $t$  deberían ser cero,  $S_1$  y  $T_2$  son ambos cero y (5.26) implica que  $q = r$ . De (5.28) se tiene que los planos torsión  $(p, q)$  y  $(p, r)$  rotan en la dirección en que se mueven las fibras. En conclusión  $p, q$  y  $r$  deberían ser todas cero.

En efecto las identidades Bianchi son ahora  $0 = d^2\Omega^i = d\gamma \wedge \Omega^i, i = 1, 2$ . Calculando el producto exterior de (5.25) con  $\Omega^i$  vemos que  $H_i = 0$  lo que nos queda es que  $d\gamma = K\Omega^1 \wedge \Omega^2$ . Entonces se tiene que  $d\gamma = K\Omega^1 \wedge \Omega^2 = Kd\Omega^3$  para lo cual  $\gamma = d\Omega^3$ . Finalmente las ecuaciones de estructura resultantes son:

$$d\Omega^1 = K\Omega^2 \wedge \Omega^3, \quad d\Omega^2 = K\Omega^3 \wedge \Omega^1, \quad d\Omega^3 = \Omega^1 \wedge \Omega^2 \quad (5.29)$$

Ahora si  $\{\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3\}$  son identificadas con las formas de Maurer-Cartan sobre  $M$ , entonces las constantes torsión son identificadas con las constantes de estructura de la variedad  $M$ . Localmente, las simetrías de  $M$  son:  $SO(3)$  si  $K > 0$ , el grupo Heisenberg si  $K = 0$ , o  $S\mathfrak{I}(2, \mathbb{R})$  si  $K < 0$ . Con estructura de contacto no holonómica dada por  $\mathcal{D} = (\Omega^3)^\perp$  y podemos considerar entonces a  $\omega^3$  como una forma conexión sobre

el haz principal  $\pi : M \rightarrow \Sigma$  donde  $\pi_*$  es una submersión Riemanniana y  $\Sigma$  es una superficie cuya curvatura Gaussiana es  $K$  constante. Los grupos de simetría cuatro dimensional de estas estructuras son las variedades base  $M$  centralmente extendidas por  $S^1$ . Nota que mientras las clasificaciones en el caso de simetría maximal para casos Sub-Riemanniana y no holonómica son análogos, las geometrías no son las mismas.

Un ejemplo estándar de un sistema no holonómico con simetría cuatro dimensional es el sistema no holonómico sobre el grupo Heisenberg con métrica  $ds^2 = (1 + \frac{y^2}{4})dx \otimes dx + (1 + \frac{x^2}{4})dy \otimes dy + dz \otimes dz + xdy \otimes dz - ydx \otimes dz - \frac{xy}{2}dx \otimes dy$  cuyo representante matricial es

$$[\mathcal{G}_p] = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{2} & -y \\ 0 & 1 + \frac{x^2}{4} & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y una distribución de contacto  $\mathcal{H}$  generada por el  $\ker(\eta^3)$  donde

$$(\eta^1, \eta^2, \eta^3)^{tr} = (dx, dy, dz + \frac{1}{2}(xdy - ydx))^{tr}$$

es el comarco estándar invariante por las izquierda. Se tiene que  $s^2 + t^2 = p^2 + qr = K = 0$ . En este caso  $(\eta^1, \eta^2, \eta^3)^{tr}$  es un comarco  $B_1$ -adaptado y  $ds^2$  puede ser identificado con la métrica canónica.

Ehlers da una interpretación geométrica de los invariantes diferenciales obtenidos. Considera que  $K$  puede ser interpretado como la curvatura Gaussiana en ciertas circunstancias. Hughen, por otro lado, observó que los invariantes para una geometría Sub-Riemanniana puede ser interpretados en términos de la curvatura seccional, en el plano de  $\mathcal{H}$ , de una métrica Riemanniana definida canónicamente. Ehlers hace una interpretación en el caso no holonómico. Esto es, sea la métrica canónica introducida por Cartan dada por  $\bar{ds}^2 = (\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2 + (\Omega^3)^2$  donde  $(\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3)^{tr}$  es la 1-forma tautológica sobre  $B_1$ . Subsecuentemente cualquier sección de  $B_1$  es un comarco ortonormal en esta métrica, podemos calcular la forma conexión de Levi-Civita de  $\mathcal{A}$  relativa a cualquier comarco adaptado  $B_1$ , de (5.13) y las ecuaciones de estructura  $d\Omega = -\mathcal{A} \wedge \Omega$ . Tenemos

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

con  $\alpha_1 = (\frac{1}{2} - p)\Omega^1 - r\Omega^2 - s\Omega^3$ ,  $\alpha_2 = -q\Omega^1 + (\frac{1}{2} + p)\Omega^2 - t\Omega^3$ , y  $\alpha_3 = \gamma - \frac{1}{2}\Omega^3$ . La matriz curvatura es  $\Theta = [\Theta_{ij}] = d\mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ . Calculamos

$$\theta_{12} = d\alpha_3 - \alpha_1 \wedge \alpha_2 = (K + p^2 + rq - \frac{3}{4})\Omega^1 \wedge \Omega^2 \pmod{\Omega^3} \quad (5.31)$$

La curvatura seccional en la dirección de la distribución es por consiguiente  $K - p^2 - qr - \frac{3}{4}$ . Si  $s = t = 0$  entonces  $r = q$  y recupera el resultado obtenido por Hughen para geometría Sub-Riemanniana.

**Ejemplos con simetría de dimensión 3.** El grupo  $G_1$  actúa sobre los planos torsión  $(s, t)$  y  $(\frac{1}{2}(r+q), p)$  por rotaciones. Si  $s, t, p$ , o  $r+q \neq 0$  nosotros podemos usar  $G_1$  para simplificar la torsión. El grupo estabilizador  $G_2$  para la elección simplificada de torsión sera entonces discreto, consistiendo de las matrices diagonales en  $SO(3)$ . La  $G_2$ -estructura  $B_2$  resultante es tres-dimensional. El lema del Framing implica que la dimensión de dicha estructura es tres si y solo si la torsión es constante. En estos casos la torsión puede ser identificado con las constantes de estructura del álgebra de Lie del grupo de Lie (local) de simetrías de la estructura no holonómica. Existen dos situaciones por estudiar:  $s$  o  $t \neq 0$ , y  $p$  o  $\frac{1}{2}(r+q) \neq 0$ .

**caso 1:**  $s$  o  $t \neq 0$ . En este caso podemos usar la acción de  $G_1$  para forzar  $t = 0$  y  $s > 0$ . La pseudo-conexión es entonces básica y podemos expresarla como  $\gamma = \lambda_1\Omega^1 + \lambda_2\Omega^2 + \lambda_3\Omega^3$ . Las ecuaciones de estructura en este caso son

$$d \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_3 + p) & q & -\lambda_1 \\ r & (\lambda_3 - p) & -\lambda_2 \\ \sigma & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega^2 \wedge \Omega^3 \\ \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\ \Omega^1 \wedge \Omega^2 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

donde  $\sigma = \sqrt{s^2 + t^2}$ . Las identidades Bianchi  $0 = d^2\Omega^i$  para  $i = 1, 2, 3$  da respectivamente

$$0 = q\sigma + r\lambda_1 - p\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 = (\lambda_3 - p)(\sigma + \lambda_1) - q\lambda_2 = q - r - \sigma\lambda_2$$

**Ejemplo.** Sea la estructura no holonómica caracterizada por el comarco  $(\eta^1 = dx, \eta^2 = dy, \eta^3 = e^{\sigma y}dz + xdy)^{tr}$  sobre la variedad  $\mathbb{R}^3$ . Con ecuaciones de estructura dada por  $d\Omega^1 = d\Omega^2 = 0$ , y  $d\Omega^3 = \sigma\Omega^3 \wedge \Omega^1 + \Omega^1 \wedge \Omega^2$ . El álgebra de Lie de dimensión tres correspondiente es soluble (si existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que la serie derivada del álgebra

es cero, es decir, si  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de Lie entonces  $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$  ) pero no nilpotente ( $\mathfrak{g} \supseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \dots \supseteq [[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}], \mathfrak{g}] \supseteq \dots$  termina en cero). El factor  $\sigma$  se obtiene de manera explícita por las ecuaciones geodésicas. En geometría Sub-Riemanniana este caso no ocurre, la acción del grupo nos permite manipular la función torsión  $\sigma$  de tal manera que pueda ser cero.

**Caso 2:**  $p$  o  $r+q \neq 0$ . El grupo  $G_1$  actúa sobre el plano torsión dado por  $(p, \frac{1}{2}(r+q))$  por rotaciones. Por la acción del grupo podemos se puede llegar a igualdad  $r = q$ . Luego el grupo consistirá de las todas las matrices diagonales en  $SO(3)$  con ecuaciones de estructura dada por

$$d \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_3 + P) & q & -\lambda_1 \\ -q & (\lambda_3 - P) & -\lambda_2 \\ s & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega^2 \wedge \Omega^3 \\ \Omega^3 \wedge \Omega^1 \\ \Omega^1 \wedge \Omega^2 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

donde  $P = \|(p, \frac{1}{2}(r+q))\|$ . Con identidades Bianchi dadas mediante

$$\begin{aligned} 0 &= q(s - \lambda_1) - (\lambda_3 + P)(\lambda_2 + t) \\ 0 &= (\lambda_3 - P)(s + \lambda_1) + q(t - \lambda_2) \\ 0 &= 2q - s\lambda_2 + \lambda_1 t \end{aligned}$$

Para el caso  $s = t = 0$ , se tiene  $q = 0$  y las identidades Bianchi se pueden reescribir mediante  $(\lambda_3 - p)\lambda_1 = (\lambda_3 + p)\lambda_2 = 0$ . Para los casos en que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  sean también cero se incluyen varios ejemplos de sistemas no holonómicos. Para estos caso las álgebras de Lie son  $\mathfrak{so}(3)$  para  $\lambda_3 > p$ ,  $e(2)$  para  $\lambda_3 = p$ ,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  para  $-p < \lambda_3 < p$ ,  $e(1, 1)$  para  $\lambda_3 = -p$ , y  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  para  $\lambda_3 < -p$ .

**Ejemplo.** Un patín sobre la variedad  $SE(2)$ . Considerar un patín de hielo vertical moviéndose sobre el plano  $xy$ . Tiene una variedad de configuración  $SE(2)$ . Consideramos las coordenada Cartesianas  $(x, y)$  como el punto de contacto del patín sobre el hielo y las coordenada  $\theta$  como la orientación del patín respecto a la posición del eje  $x$ . El patín tiene gira en la dirección de  $\theta$  pero solo puede trasladarse en la dirección en la cual está orientado. En este caso la energía cinética del patín es  $2T = m((dx)^2 + (dy)^2) + I(d\theta)^2$  donde  $m$  es la masa del patín y  $I$  es su momento de inercia alrededor del punto de contacto. Para caracterizar esta estructura geométrica comenzamos con un marco ortonormal dado por  $\{X_1, X_2, X_3\}$  donde  $X_1 =$

$(\frac{\cos \theta}{\sqrt{m}}) \frac{\partial}{\partial x} + (\frac{\sin \theta}{\sqrt{m}}) \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $X_2 = \frac{1}{\sqrt{I}} \frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $X_3 = -(\frac{\sin \theta}{\sqrt{m}}) \frac{\partial}{\partial x} + (\frac{\cos \theta}{\sqrt{m}}) \frac{\partial}{\partial y}$ , y su respectivo marco dual  $(\sqrt{m} \cos \theta dx + \sqrt{m} \sin \theta dy, \sqrt{I} d\theta, -\sqrt{m} \sin \theta dx + \sqrt{m} \cos \theta dy)^{tr}$ . Calculamos la forma conexión y las funciones torsión para la  $B_1$ -estructura reducida definida en (5.13) haciendo cambios de variables mediante lo siguiente:  $\gamma = -d\phi + \frac{1}{2I} \Omega^3$ ,  $p = \frac{1}{2I} \cos 2\phi$ , y  $q = r = -\frac{1}{2I} \sin 2\phi$ ,  $s = t = 0$ . Las ecuaciones de estructura para la  $G_2$ -estructura  $B_2$  reducida son  $d\Omega^1 = I^{-1} \Omega^2 \wedge \Omega^3$ ,  $d\Omega^2 = 0$ , y  $d\Omega^3 = \Omega^1 \wedge \Omega^2$ . Identificamos las constantes de estructura para el álgebra de Lie  $\mathfrak{se}(2)$  y así también podemos identificar el grupo de simetría  $SE(2)$  para esta estructura con la variedad de configuración.

Esta es la forma en que el método de equivalencia es aplicado a variedades de contacto de dimensión 3, Ehlers da una interpretación geométrica de los invariantes diferenciales pero aun falta comparar los invariantes encontrados con los que se obtengan de otras estructuras geométricas usando diferentes significados.

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo a futuro

### Conclusiones

En esta tesis se estudia el método de equivalencia para la clasificación de estructuras no holonómicas. Una versión de la aplicación del método comienza codificando la estructura bajo estudio mediante una  $G$ -estructura la cual a su vez contiene toda la información que caracteriza a dicha estructura, en el sentido en que dada la  $G$ -estructura podemos obtener nuevamente el objeto. Una vez obtenida la  $G$ -estructuras del objeto se procede a calcular sus respectivos invariantes. La forma de proceder del método de equivalencia para identificar y calcular invariantes diferenciales es relativamente sistemática, esto es, el método aplica procesos de reducciones y/o prolongaciones para obtener el grupo de estructura más simple como sea posible, y de esta manera obtener fácilmente los invariantes diferenciales.

El método de equivalencia es una herramienta muy útil para la clasificación de estructuras geométricas y es por eso que en teoría de control surge de manera natural para la clasificación de sistemas mecánicos simples. Se codificaron mediante una  $G$ -estructura, algunas estructuras tales como una estructura Riemanniana, sub Riemanniana también se encontró la  $G$ -estructura de la Forma Encadenada Extendida(FEE). Se aplicó el método de equivalencia para el cálculo de invariantes diferenciales sobre una curva en  $\mathbb{R}^2$  y aunque sabemos que una curva en el plano queda totalmente especificada una vez que se conoce su curvatura, es decir, la curvatura es una propiedad intrínseca e invariante bajo transformaciones de cuerpos rígidos, por el método de equivalencia se obtuvo que efectivamente la curvatura es un invariante diferencial.

## **Trabajo a futuro**

Calcular invariantes diferenciales FEE. Al encontrar los invariantes diferenciales podemos caracterizar este sistema y establecer las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un sistema mecánico simple es transformable a la FEE. Y consecuentemente con la información que se obtenga la posibilidad de hacer una clasificación de los sistemas mecánicos simples que sean transformables a la FEE.



# Bibliografía

- [1] F. Bullo and A.D. Lewis. *Geometric control of mechanical systems. Modeling, analysis, and design for simple mechanical control systems*, Texts in Applied Mathematics, Vol.49, Springer Science Business Media, Inc. USA, 2005.
- [2] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Graduate Texts in Mathematics, Vol 94. Springer Verlag, New York, 1983.
- [3] H. Nijmeijer and A. Van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, Nueva York Inc, 1990.
- [4] J. E. Marsden, T. S. Ratiu. *The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry*. Festschrift in Honor of Alan Weinstein, Vol. 232, Birkhäuser Boston 2005.
- [5] J. E. Marsden, T.S. Ratiu. *Introduction to mechanics and simmetry*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 17 Second edition, Springer-verlag, New York, Inc.,1999.
- [6] Jhon M. Lee *Riemannian Manifolds, an introduction to curvature*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 176, Springer-Verlag, New York, 1997
- [7] Richard Montgomery. *A tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesic and applications*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 91. American Mathematical Society, USA 2002.
- [8] Robert B. Gardner. *The Method of Equivalence and Its Applications*. CBMS-NSF Regional conference Series, Vol.58, SIAM, 1989.
- [9] R.W. Sharpe. *Differential Geometry Cartan's generalization of Klein's erlangen Program*. Graduate Texts in Mathematic, Vol. 166. Springer-verlag, New York, 1997.
- [10] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1. Wiley-Interscience, 1996.

- [11] Shlomo Sternberg. *Lectures on Differential Geometry*. AMS Chelsea, 2nd edition, New York, 1983.
- [12] Thomas A. Ivey, J. M. Landsberg. *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 61. American Mathematical Society 2003.
- [13] William M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic Press, 2nd edition, USA, 2003.
- [14] A. Sánchez Valenzuela. Una descripción parcial del desarrollo de la geometría diferencial en el siglo XX, y una panorámica sesgada de sus perspectivas al futuro. *Miscelánea Matemática*, Vol. 32, p. 69-102, 2000.
- [15] Kurt Ehlers. Geometric equivalence on nonholonomic three-manifolds. *Proceedings of the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations*, p. 246-255, may 24-27, Wilmington, NC, USA 2002.
- [16] J.N. Tavares. About Cartan Geometrization of Non-Holonomic Mechanics. *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 45 p. 1-23, 2003.
- [17] David A. Lizárraga, Henk Nijmeijer. Control of underactuated systems. Partial results and open problems in the characterization of the Extended Chained Form. *Information, Decision and Control 2002*, Adelaide, Australia, 2002.