



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Generación de sistemas dinámicos lineales
por partes caóticos sin puntos de equilibrio.**

Tesis que presenta

Rodolfo de Jesús Escalante González

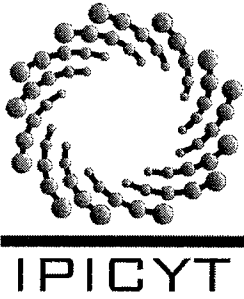
Para obtener el grado de

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Eric Campos Cantón

San Luis Potosí, S.L.P., Julio de 2016



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "**Generación de sistemas dinámicos lineales por partes caóticos sin puntos de equilibrio**" presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Rodolfo de Jesús Escalante González** y aprobada el **cinco de julio del dos mil quince** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Eric Campos Cantón
Director de la tesis

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Jurado en el Examen

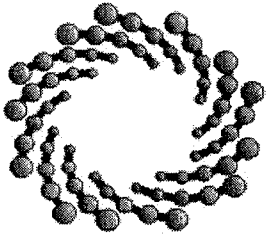
Dr. Javier Salvador González Salas
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Eric Campos Cantón.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología No. 337188 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 020 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 5 días del mes de julio del año 2016, se reunió a las 10:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Presidente	IPICYT
Dr. Eric Campos Cantón	Secretario	IPICYT
Dr. Javier Salvador González Salas	Sinodal externo	UPSLP

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Rodolfo de Jesús Escalante González

sobre la Tesis intitulada:

Generación de sistemas dinámicos lineales por partes caóticos sin puntos de equilibrio

que se desarrolló bajo la dirección de

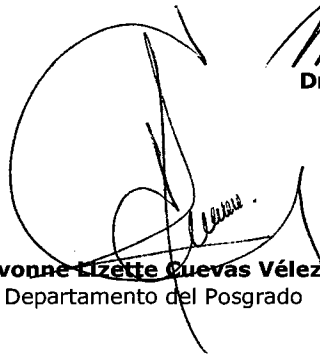
Dr. Eric Campos Cantón


El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 11:10 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 5 días del mes de julio de 2016.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bohillo Marin
Secretario Académico



A mi familia

Agradecimientos

A Dios por todo lo que me da sin yo merecerlo, por las bendiciones y pruebas que pone en mi camino.

A mi familia por su apoyo incondicional en cada proyecto emprendido y en general en cada aspecto de mi vida.

A mi asesor, el Dr. Eric Campos por los conocimientos brindados así como por sus palabras de aliento y motivación.

A mis profesores de maestría el Dr. Gonzalo Barajas, el Dr. Ricardo Femat, el Dr. Jesús Leyva, el Dr. Diego Langarica y la Dra. Ilse Cervantes por sus conocimientos y experiencias compartidas.

Al Dr. Salvador González y al Dr. Hugo Cabrera por sus observaciones y comentarios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para estudios de maestría.

Al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C. por permitirme realizar mis estudios de maestría y en especial al grupo de investigación de Biodinámica y Sistemas no lineales por su valiosa retroalimentación.

A mis compañeros, amigos y todas aquellas personas que me han ayudado y alentado a continuar.

Contenido

Constancia de aprobación de tesis	iii
Créditos Institucionales	v
Acta de examen	vii
Dedicatoria	ix
Agradecimientos	xi
Lista de tablas	xv
Lista de figuras	xvii
Glosario	xix
Resumen	xxi
Abstract	xxiii
1 Introducción	1
1.1 Objetivo de la tesis	2
1.2 Esquema de la tesis	2
2 Sistemas dinámicos	3
2.1 Nota histórica sobre sistemas dinámicos y caos	3
2.2 Noción de sistema dinámico	4
2.3 Sistemas lineales y lineales afines	5
2.3.1 Sistemas en \mathbb{R}^2	7
2.3.2 Sistemas lineales afines	9
2.3.3 Sistemas lineales por partes	9
3 Sistemas caóticos	11
3.1 Definición de sistema caótico	11
3.2 Exponentes de Lyapunov	12
3.3 Dimensión Kaplan-Yorke	15
3.4 Sistemas PWL caóticos	16

4	Sistemas disipativos	19
4.1	Sistemas UDS	19
4.2	Caos mediante sistemas UDS	20
4.3	Sistemas con multienroscados	21
5	Sistemas sin puntos de equilibrio	25
6	Contribución	35
6.1	Sistemas PWL con matriz A no invertible	40
6.2	Sistemas PWL con matriz A invertible	45
7	Conclusiones	53
7.1	Trabajo a futuro	53
	Referencias	54
	Anexo A: Definiciones	57

Índice de tablas

5.1	Sistemas Sprott	26
5.2	Sistemas NE.	31

Índice de figuras

2.1	Puntos de equilibrio de sistemas lineales en \mathbb{R}^2 .	8
3.1	Cálculo del exponente de Lyapunov.	14
3.2	Esfera de condiciones iniciales.	15
3.3	Circuito de Chua.	17
3.4	Función $f(x)$ del sistema de Chua.	18
3.5	Atractor generado por el sistema de Chua	18
4.1	Flujo en un sistema PWL.	21
4.2	La cuenca de atracción Ω de un atractor Λ .	21
4.3	Atractor del sistema (4.2) con A , B_1 y B_2 dados en (4.3).	22
4.4	Atractor del sistema PWL con A , B_1 , B_2 y B_3 dados en (4.4).	23
5.1	Atractor generado por el sistema (5.1) cuando $a = 0.01$.	27
5.2	Atractor generado por el sistema (5.1) cuando $a = -0.05$.	28
5.3	Máximo exponente de Lyapunov del sistema (5.1) con respecto al parámetro a [1].	29
5.4	Atractor hipercaótico del sistema (5.2) con $a = 8$, $b = -2.5$ y $c = -30$.	30
5.5	Proyecciones de los sistemas NE sobre el plano (x, y) .	33
5.6	Atractor hipercaótico del sistema (5.8) para $a = 1$ y $b = 0.25$ sobre los planos: (a) (x, y) , (b) (x, z) , (c) (y, z) y (d) (x, u) .	34
6.1	Bosquejo de un tipo de sistema 3-D de la forma (6.1) con $B = 0$ y cuya matriz A tiene un eigenvalor cero y dos complejos conjugados con parte real negativa.	40
6.2	Bosquejo de las trayectorias de un sistema sin puntos de equilibrio.	41
6.3	Representación gráfica de un tipo de sistemas PWL sin puntos de equilibrio.	41
6.4	Atractor del sistema (6.13) con A dado en (6.14) y B_1 y B_2 dados en (6.17).	44
6.5	Atractor del sistema (6.13) con A dado en (6.18) y B_1 y B_2 dados en (6.21).	46
6.6	Trayectoria en el atractor del sistema (6.23) con A dada en (6.14) y B_1 y B_2 dados en (6.22) posicionado en $\mathbf{x} = (10, 10, 10)^T$.	47
6.7	Una posible implementación electrónica del sistema (6.13) con A dado en (6.14) y B_1 y B_2 dados en (6.17).	47
6.8	Atractor simulado de la implementación electrónica del sistema (6.13) con A dado en (6.14) y B_1 y B_2 dados en (6.17).	48
6.9	Ilustración de la idea de desplazar los campos vectoriales.	48
6.10	Bosquejo de un tipo de sistemas PWL.	49
6.11	Atractor del sistema (6.28) con A dado en (6.31) y B_1 y B_2 dados en (6.32).	51

Glosario

\mathbb{N} números naturales;
 \mathbb{Z} números enteros;
 \mathbb{Z}^- , $\mathbb{Z}_{<0}$ números enteros negativos;
 \mathbb{Z}^+ , $\mathbb{Z}_{>0}$ números enteros positivos;
 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ números enteros no negativos;
 $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ números enteros no positivos;
 \mathbb{R} números reales;
 \mathbb{R}^+ números reales positivos;
 \mathbb{R}^- números reales negativos;
 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ números reales no negativos;
 $\mathbb{R}_{\leq 0}$ números reales no positivos;
 \mathbb{F} campo de números reales o complejos.
nullA espacio nulo de la matriz A ;
rangeA imagen de A ;
 $\det(A)$ determinante de una matriz A ;
 $\text{rank}(A)$ rango de la matriz A .
 $\dim(X)$ dimensión del espacio X ;
 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)^T$ punto de equilibrio;
 $W_{x^*}^s$ variedad estable respecto al punto \mathbf{x}^* ;
 $W_{x^*}^u$ variedad inestable respecto al punto \mathbf{x}^* .
 $D_{\mathbf{x}}F$ Matriz Jacobiana de la función F evaluada en el punto \mathbf{x} .
 A^T matriz A transpuesta.

Resumen

Los sistemas dinámicos con comportamiento caótico han sido de gran utilidad para el modelado de fenómenos así como para el desarrollo de nueva tecnología en diversas áreas del conocimiento. En 1994 Sprott reportó 19 casos de sistemas caóticos con una o dos no linealidades en las ecuaciones diferenciales de su campo vectorial asociado. Un descubrimiento no esperado fue la ausencia de puntos de equilibrio en uno de estos, el caso conocido como Sistema Sprott A. A partir de esto, surge el interés por generar sistemas dinámicos caóticos sin puntos de equilibrio que ha llevado a la publicación de diferentes sistemas dinámicos con no linealidades de tipo cuadrático, cúbico, función signo y valor absoluto, así como métodos de búsqueda numéricos. En esta tesis se presentan tres sistemas sin puntos de equilibrio de los cuales uno exhibe un atractor multienroscado.

Palabras clave.-sistemas dinámicos; sistemas sin equilibrio; sistemas lineales.

Abstract

Dynamical systems with chaotic behavior have been useful for modeling phenomena and to develop new technology in various areas of knowledge. In 1994 Sprott reported 19 cases of chaotic systems with one or two non-linearities in the differential equations of its associated vector field. An unexpected finding was the absence of equilibrium points in one of these, the case known as Sprott System A. From this arise the interest in generating chaotic dynamical systems without equilibria that has led to the publication of different dynamical systems with quadratic, cubic, sign function and absolute value nonlinearities and numerical search methods. In this thesis three systems without equilibrium points are presented, one of which exhibits a multienroscado attractor.

Key words.-dynamical systems; systems without equilibrium; linear systems.

1 Introducción

Casi todos los fenómenos observados en nuestra vida cotidiana o en la investigación científica tienen aspectos dinámicos importantes. Los ejemplos específicos pueden surgir en: (a) un sistema físico, tal como un vehículo que viaja en el espacio, un sistema de calefacción de casa, o en la explotación de un yacimiento mineral; (b) un sistema social, tales como el movimiento dentro de una jerarquía de una organización, la evolución de un sistema de clases tribales, o el comportamiento de una estructura económica; o (c) un sistema de vida, tal como el de transferencia genética, la decadencia ecológica, o el crecimiento de la población[2].

Debido a esto el interés por nuevas técnicas matemáticas útiles para modelar estos fenómenos a continuado con el paso de los siglos. Un tipo especial de sistemas ha sido de gran utilidad en diversas áreas de las ciencias, los sistemas con comportamiento caótico. Su estudio ha llevado a un mejor entendimiento de fenómenos complejos que aparentaban ser estocásticos. Mas aún las nuevas técnicas para generar sistemas caóticos ha sido útil en la creación de nueva tecnología de cifrado[3].

Una forma de encontrar sistemas con atractores caótico que ha sido utilizada es la de probar numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias con no linealidades cuadráticas en búsqueda de atractores acotados con exponentes de Lyapunov positivos. Tal como hace Sprott en [4] donde presenta 19 sistemas con una o dos no linealidades. Uno de estos, el conocido como sistema Sprott A tiene la peculiaridad de que no posee puntos de equilibrio, lo que es interesante debido a que la forma en que se suele estudiar un sistema es mediante el comportamiento en la vecindad de estos.

Esto en los últimos años ha despertado el interés por estos sistemas relativamente desconocidos. Así en [5] se proponen tres métodos de búsqueda basados en la observación de que las ecuaciones de sistemas sin puntos de equilibrio suelen presentar un término constante que al ser cero hace que el punto de equilibrio sea no hiperbólico. Estos métodos se utilizaron para encontrar 17 sistemas conocidos como sistemas NE.

Estos sistemas sin puntos de equilibrio podrían ser útiles en el modelado determinista de dinámicas que aparentemente no tienen puntos de equilibrio en la vida real [6], también podrían contribuir en la construcción de generadores de números pseudoaleatorios [3] y nuevos esquemas de comunicación.

Los sistemas sin puntos de equilibrio hasta ahora han sido basados en no linealidades cuadráticas o bien utilizando las funciones signo y valor absoluto.

Como se sabe es posible obtener comportamiento caótico en sistemas lineales por partes como el conocido sistema asociado al circuito de Chua. Además existen esquemas de construcción como el propuesto en [7].

1.1 Objetivo de la tesis

Obtener sistemas dinámicos sin puntos de equilibrio con atractores caóticos basados en sistemas lineales por partes.

Objetivos particulares:

1. Obtener un sistema dinámico sin puntos de equilibrio con atractor no multienroscado.
2. Obtener un sistema dinámico sin puntos de equilibrio con atractor multienroscado.

1.2 Esquema de la tesis

En este capítulo 1 se ha dado una breve introducción al tema y se han presentado los objetivos de la investigación. En el capítulo 2 se introducen los conceptos y nociones básicas de sistemas dinámicos que serán de utilidad durante el resto de la tesis. En el capítulo 3 se presentan algunas cuestiones pertinentes al tema de caos, tales como la definición misma de caos y algunas herramientas útiles en su identificación. Los sistemas disipativos inestables, su importancia y utilidad en diferentes sistemas con atractores caóticos son estudiados en el capítulo 4. El capítulo 5 está dedicado al estado del arte de los sistemas dinámicos sin puntos de equilibrio. Las contribuciones principales de la investigación se encuentran en el capítulo 6. Finalmente se dan las conclusiones y trabajo a futuro.

CAPÍTULO 2 Sistemas dinámicos

En este capítulo se presenta una breve narración histórica sobre el estudio de los sistemas dinámicos y caos con el fin de mostrar el impacto que ha tenido hasta ahora. También se abordan conceptos básicos que serán de utilidad en los siguientes capítulos de la tesis.

2.1 Nota histórica sobre sistemas dinámicos y caos

El primer intento por describir la realidad física en una forma cualitativa, presumiblemente, se remonta a los Pitagóricos, con su esfuerzo por explicar el mundo tangible por medio de números enteros. El establecimiento de las matemáticas como el lenguaje apropiado para descifrar los fenómenos naturales quedado atrás hasta el siglo 17, cuando Galileo inauguró la física moderna, con su obra principal (1638): *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Discursos y demostraciones matemáticas en relación con dos nuevas ciencias). Medio siglo más tarde, en 1687, Newton publicó *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios de la Filosofía Natural), que sentó las bases de la mecánica clásica. La publicación de *Principia* representa la *summa* de la revolución científica, en el que la ciencia, tal como la conocemos hoy, nació [8].

Desde un punto de vista conceptual, el principal legado de Galileo y Newton es la idea de que la naturaleza obedece a leyes inmutables que pueden formularse en lenguaje matemático, de ahí que ciertos eventos físicos se pueden predecir con certeza [8].

La principal razón para el consenso casi unánime de los científicos del siglo 19 sobre el determinismo tiene que ser, tal vez, buscado en los grandes éxitos de Mecánica Celeste en hacer predicciones precisas de los movimientos planetarios [8]. Irónicamente el primer ejemplo claro de lo que hoy conocemos como Caos - un paradigma para fenómenos deterministas irregulares e impredecibles - fue encontrado en la Mecánica Celeste, la ciencia de fenómenos regulares y predecibles *par excellence*. Este es el caso del problema de los tres cuerpos en un tiempo largo - es decir, el movimiento de tres cuerpos que interactúan gravitacionalmente tales como, por ejemplo, Luna-Tierra-Sol [Gutzwiller (1998)] - el cual ya estaba en las pesadillas de Newton, Euler, Lagrange y muchos otros. Dada la ley de la gravedad, las posiciones y velocidades iniciales de los tres cuerpos, las posiciones y velocidades posteriores son determinados por las ecuaciones de la mecánica. A pesar de la naturaleza determinista del sistema, Poincaré (1892, 1893, 1899) encontró que la evolución puede ser caótica, lo que significa que pequeñas perturbaciones en el estado inicial, como un ligero cambio en la posición inicial de un solo cuerpo, podría conducir a diferencias dramáticas en los estados posteriores del sistema [8].

La profunda implicación de estos resultados es que el determinismo y la predictibilidad son problemas distintos. Sin embargo, los descubrimientos de Poincaré no recibieron la debida

atención por un tiempo bastante largo. De hecho, sólo gracias a la llegada de la computadora y la visualización científica fue posible (numéricamente) calcular y ver la asombrosa complejidad de comportamientos caóticos que emergen de los sistemas deterministas no lineales[8].

Las contribuciones pioneras de Lorenz, Hénon y Heiles y Chirikov, mostrando que los sistemas deterministas de baja dimensionalidad, incluso simples pueden exhibir comportamientos irregulares e impredecibles, trajeron el caos a la atención de la comunidad de físicos. La primera evidencia clara de la relevancia física del caos a fenómenos importantes como la turbulencia, llegó con el trabajo de Ruelle, Takens y Newhouse en el inicio del caos. Epílogos, experimentos brillantes en el inicio del caos en la convección de Rayleigh-Bénard (Libchaber, Swinney, Gollub y Giglio) confirmó las predicciones teóricas, impulsando el interés de los físicos en los sistemas dinámicos no lineales. Otro momento crucial para el desarrollo de la teoría de los sistemas dinámicos fue la divulgación de las conexiones entre el caos, fenómenos críticos y la ampliación posterior a las obras de Feigenbaum sobre la universalidad del mecanismo de duplicación de periodo para la transición al caos. El formalismo termodinámico, originalmente propuesto por Ruelle y luego “traducido” en términos más físicos con la introducción de multifractales y expansión de órbitas periódicas, reveló la profunda conexión entre el caos y la mecánica estadística. Fundamental en la prestación de herramientas adecuadas (prácticas) para la investigación de sistemas dinámicos caóticos fueron: la introducción de métodos numéricos eficientes para el cálculo de exponentes de Lyapunov (Benettin, Galgani, Giorgilli y Strelcyn), la dimensión fractal (Grassberger y Procaccia), y la técnica de empotramiento, por primera vez por Takens, que constituye un puente entre la teoría y experimentos.

La física de los sistemas dinámicos caóticos se benefició de muchas contribuciones de matemáticos que fueron muy activos después de 1960 entre los que debemos recordar Bowen, Ruelle, Sinaí y Smale [8].

2.2 Noción de sistema dinámico

De manera muy general, podemos pensar en un sistema dinámico como un espacio de estados o espacio de fase cuyas coordenadas o variables de estado $\{x_i : i = 1, \dots, n\}$ determinan el estado instantáneo del sistema y una regla de evolución. Esta regla de evolución permite conocer el estado futuro inmediato a partir de cualquier estado inicial. Dependiendo de si esta regla de evolución asigna un solo estado subsecuente o un estado que depende de una distribución de probabilidad el sistema se denomina determinista o estocástico, respectivamente.

Una definición de sistema dinámico determinista es dada en [9]:

Definición 2.1 (Sistema dinámico determinista)

Un sistema dinámico determinista es un par $(M, (\phi^t)_{t \in T})$ tal que:

1. T es ya sea \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, \mathbb{R} o $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Cualquier $t \in T$ es llamado una *duración* del sistema, y T es llamado *conjunto tiempo*;

2. M es un conjunto no vacío. Cualquier $x \in M$ es llamado un *estado* del sistema, y M es llamado su *espacio de estados*;
3. $(\phi^t)_{t \in T}$ es una familia de funciones indexadas por T de M a M . Para cualquier $t \in T$ la función ϕ^t es llamada *transición de estado de la duración t* (de manera breve, *t -transición*) del sistema;
4. Para cualquier $v, t \in T$, para cualquier $x \in M$
 - a) $\phi^0(x) = x$;
 - b) $\phi^{v+t}(x) = \phi^v(\phi^t(x))$.

Se suele llamar mapeo flujo a ϕ^t y espacio de estados extendido a $M \times T$. Al espacio de estados y espacio de estados extendidos se les llama también espacio de fase y espacio de fase extendido, respectivamente. Cuando el estado y el tiempo son continuos al sistema dinámico se le puede asociar un conjunto de ecuaciones diferenciales que forman un campo vectorial. Otro caso es cuando el estado es discreto y el tiempo continuo entonces al sistema se le puede asociar un conjunto de ecuaciones en diferencias.

Para esta tesis se considerará solamente sistemas dinámicos deterministas con estado y tiempo continuos y además autónomos, es decir su campo vectorial asociado no depende explícitamente del tiempo.

Es importante mencionar que una costumbre ampliamente extendida es hablar del sistema dinámico haciendo referencia al campo vectorial asociado al sistema, costumbre utilizada en esta tesis también.

Para ilustrar un poco más los sistemas dinámicos deterministas e introducir algunos conceptos considere el siguiente sistema dinámico autónomo de tiempo continuo en \mathbb{R}^n :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, y x_i con $i = 1, \dots, n$ son las variables de estado.

De acuerdo a la definición 2.1 $\phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$. Decimos que una curva solución es el conjunto de puntos $\{\mathbf{x} \in M : (\forall t \geq 0)(\phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x})\}$. El retrato fase de un sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) es el conjunto de todas las curvas solución de (2.1) en el espacio de fase [10].

2.3 Sistemas lineales y lineales afines

Los sistemas dinámicos lineales son una clase de sistema cuyo campo vectorial es un mapeo lineal, es decir su campo vectorial cumple con el principio de superposición.

Un sistema dinámico lineal puede ser de tiempo continuo o discreto, sin embargo en este trabajo nos enfocaremos en los de tiempo continuo.

Definición 2.2 (Mapeo lineal)

Sea V, W dos espacios vectoriales sobre un campo \mathbb{F} que puede ser \mathbb{R} o bien \mathbb{C} y sea $T : V \rightarrow W$ una función, decimos que T es un mapeo lineal o una transformación lineal si cumple:

Aditividad

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n$ vectores

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}),$$

Homogeneidad

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ un vector y $k \in \mathbb{F}$ un escalar

$$\mathbf{f}(k\mathbf{x}) = k\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

La aditividad y la homogeneidad son en conjunto llamadas principio de superposición.

Definición 2.3 (Operador, $\mathcal{L}(V)$) [11]

- Un mapeo lineal de un espacio vectorial a si mismo es llamado operador.
- La notación $\mathcal{L}(V)$ denota el conjunto de todos los operadores sobre V . En otras palabras, $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$.

Puesto que las transformaciones lineales pueden representarse mediante matrices cuadradas podemos reescribir el sistema lineal como:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{2.2}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz asociada al operador lineal y $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado.

Los sistemas lineales se han estudiado por mucho tiempo, sabemos que esta clase de sistemas dinámicos tienen una solución única y además siempre existe.

Teorema 2.1 (Teorema fundamental de los sistemas lineales) [10]

Sea A una matriz $n \times n$. Entonces para un $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ dado, el problema del valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

tiene una solución única dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0. \tag{2.4}$$

Definición 2.4 (Matriz fundamental de solución) [10]

Una matriz fundamental de solución de (2.2) es una función matricial no singular $n \times n$ $\phi(t)$ que satisface:

$$\dot{\phi}(t) = A\phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Para el estudio cualitativo de un sistema dinámico se suele revisar el comportamiento del sistema en la vecindad de los puntos de equilibrio.

Definición 2.5 (Punto de equilibrio)

Sea un sistema dinámico de la forma (2.1), un punto de equilibrio \mathbf{x}^* satisface:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*). \quad (2.6)$$

En el caso de los sistemas lineales de la forma (2.2) tenemos que para encontrar los puntos de equilibrio se tiene la ecuación:

$$\mathbf{0} = A(\mathbf{x}^*), \quad (2.7)$$

de modo que si A es de rango completo existe un único punto de equilibrio el cual es el origen de otro modo existe un continuo de puntos de equilibrio.

El comportamiento cualitativo del sistema cuando el punto de equilibrio es el origen esta determinado por los eigenvalores [12] del operador A .

En las siguientes definiciones \mathbb{F} denota a \mathbb{R} o \mathbb{C} y V denota un campo vectorial sobre \mathbb{F} .

Definición 2.6 eigenvalor [11]

Suponga $T \in \mathcal{L}(V)$. Un número $\lambda \in \mathbb{F}$ es un eigenvalor de T si existe $v \in V$ tal que $v \neq 0$ y $Tv = \lambda v$.

Definición 2.7 eigenvector [11]

Suponga $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ es un eigenvalor de T . Un vector $v \in V$ es llamado un **eigenvector** de T correspondiente a λ si $v \neq 0$ y $Tv = \lambda v$.

Algunos autores utilizan una definición alternativa de lo que es un eigenvalor.

Definición 2.8 (Eigenvalor)

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Llamamos eigenvalor a toda raíz $\lambda \in \mathbb{C}$ del polinomio $\det([\lambda I - A]) = \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$.

En el caso de los sistemas lineales, a diferencia de los sistemas no lineales, al analizar el punto de equilibrio obtenemos información de todo el espacio de estado y no solo de una vecindad del punto cuando este es hiperbólico (Teorema de Hartman Grobman).

2.3.1 Sistemas en \mathbb{R}^2

Los posibles comportamientos en \mathbb{R}^2 de un sistema lineal son bien conocidos.

Considere el sistema dado por (2.2), y el sistema:

$$\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}, \quad (2.8)$$

donde B es una matriz diagonal por bloques:

$$B = P^{-1}AP, \quad (2.9)$$

se sigue que

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}. \quad (2.10)$$

Los posibles comportamientos del sistema (2.8) en \mathbb{R}^2 se muestran en la Figura 2.1.

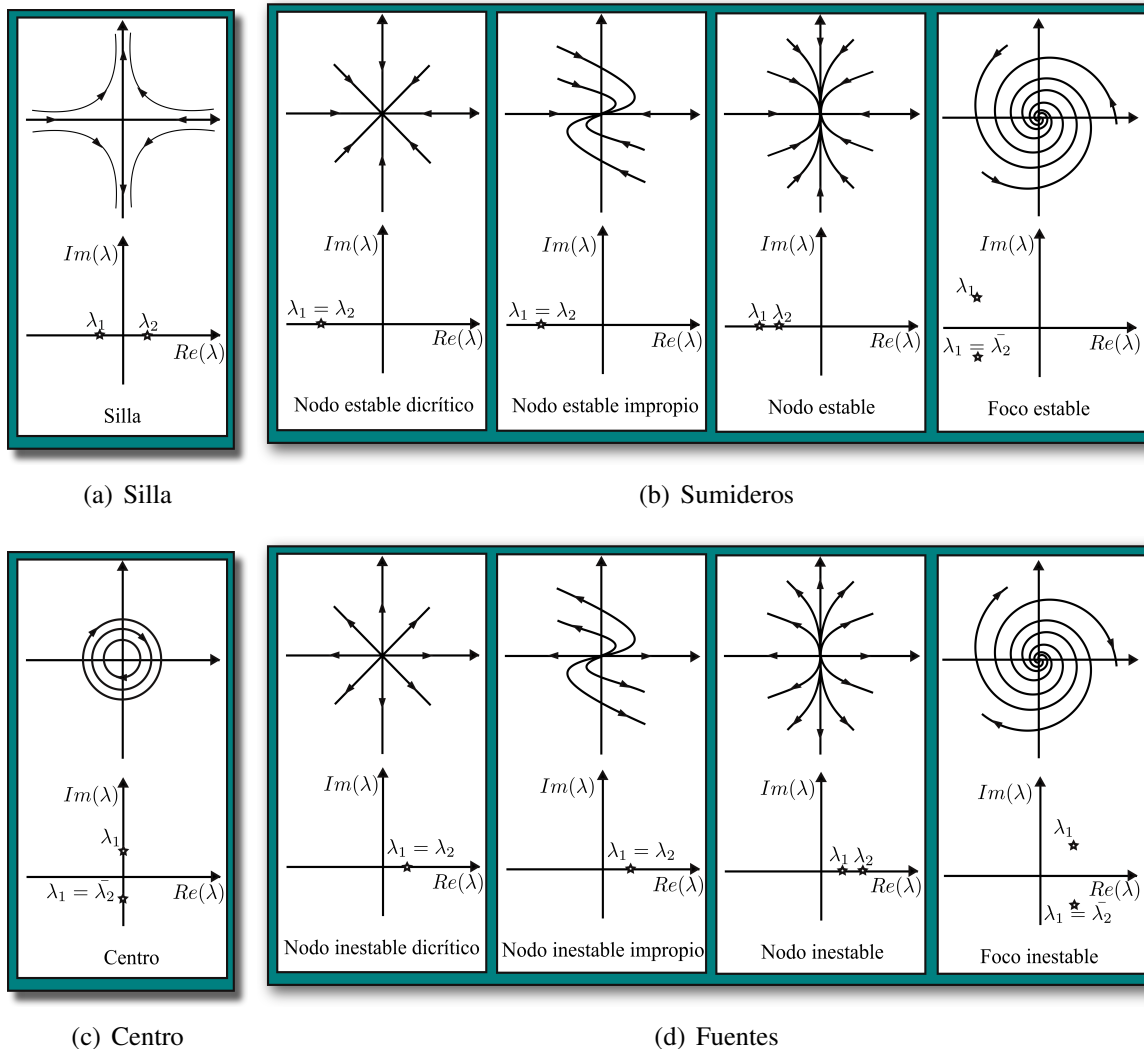


Figura 2.1: Puntos de equilibrio de sistemas lineales en \mathbb{R}^2 .

En el caso de nodos, llamamos nodo dicrítico si existen dos eigenvectores asociados al eigenvalor. En el caso de que solo exista un eigenvector asociado al eigenvalor entonces se le llama nodo impropio [13].

2.3.2 Sistemas lineales afines

Decimos que un sistema es lineal afín si este es de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B, \quad (2.11)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz asociada al operador lineal, $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $B \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante diferente de cero.

Definición 2.9 [10]

Si $\phi(t)$ es cualquier matriz fundamental de solución de 2.2, entonces la solución del sistema lineal no homogéneo:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + b(t), \quad (2.12)$$

junto con la condición inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ es única y esta dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \phi(t)\phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau. \quad (2.13)$$

2.3.3 Sistemas lineales por partes

Decimos que un sistema es lineal por partes (PWL por sus siglas en inglés de Piecewise linear) si el sistema es definido por subsistemas lineales o lineales afines de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_1\mathbf{x} + B_1, & \text{si } \mathbf{x} \in D_1; \\ A_2\mathbf{x} + B_2, & \text{si } \mathbf{x} \in D_2; \\ \vdots & \vdots \\ A_n\mathbf{x} + B_n, & \text{si } \mathbf{x} \in D_n; \end{cases} \quad (2.14)$$

donde B_i puede ser igual a cero, D_i con $i = 1, 2, \dots, n$ son los dominios de cada subsistema, $\bigcup_{i=1}^n D_i = \mathbb{R}^n$ y $\bigcap_{i=1}^n D_i = \emptyset$.

3 Sistemas caóticos

Como se mencionó anteriormente el estudio de los cuerpos celestes llevo al descubrimiento de una clase de sistemas que presentaban una sensibilidad a las condiciones iniciales que fueron llamados sistemas caóticos. Sin embargo hasta la fecha no existe una definición aceptada por toda la comunidad científica. En este capítulo se presenta una definición clásica así como el concepto de máximo exponente de Lyapunov útil en la identificación de sistemas caóticos. También en este capítulo se presenta la dimensión Kaplan-Yorke y se aborda la existencia de sistemas caóticos lineales por partes.

3.1 Definición de sistema caótico

Una posible definición de sistema caótico cuyo uso esta ampliamente extendido fue dada por Devaney, para poder entenderla claramente primero presentamos tres conceptos.

Definición 3.1 (Conjunto denso) [14]

Suponga que X es un conjunto y Y es un subconjunto de X . Decimos que Y es denso en X si, para cualquier punto $x \in X$, hay un punto y en el subconjunto Y arbitrariamente cerca de x .

De manera equivalente, Y es denso en X si para cualquier $x \in X$ podemos encontrar una secuencia de puntos $\{y_n\} \in Y$ que converja a x [14].

Definición 3.2 (Sistema dinámico transitivo) [14]

Un sistema dinámico es transitivo si para cada par de puntos x y y , y para cualquier $\varepsilon > 0$ hay un tercer punto z en la ε vecindad de x cuya órbita viene de la ε vecindad de y .

En otras palabras, un sistema dinámico transitivo tiene la propiedad de que dado cualesquiera dos puntos, podemos encontrar una órbita que pasa arbitrariamente cerca de ambos. Claramente un sistema que tiene un denso de órbitas es transitivo, debido a que las órbitas densas pasan arbitrariamente cerca de todos los puntos[14].

Definición 3.3 (Dependencia a las condiciones iniciales)[14]

Un sistema dinámico F depende de manera sensible en las condiciones iniciales si hay un $\beta > 0$ tal que para cualquier x y cualquier $\varepsilon > 0$ hay un y en la ε vecindad de x y un k tal que la distancia entre $F^k(x)$ y $F^k(y)$ es al menos β .

Finalmente se presenta la definición de sistema caótico dada por Devaney que hace uso de los tres conceptos definidos anteriormente:

Definición 3.4 (Sistema dinámico caótico) [14]

Un sistema dinámico F es *caótico* si:

1. Los puntos periódicos de F son densos.
2. F es transitivo.
3. F depende de manera sensible en las condiciones iniciales.

Si bien esta es una de las definiciones más utilizadas para comprobar caos en sistemas dinámicos de tiempo discreto, no siempre se verifican los tres puntos en sistemas dinámicos de tiempo continuo. Generalmente en sistemas dinámicos continuos se considera que un sistema es caótico si presenta un exponente de Lyapunov positivo, el atractor está acotado en el espacio de estados y no existe ningún término estocástico en el sistema dinámico.

3.2 Exponentes de Lyapunov

Cuando se trata de verificar si un atractor es caótico o no, una herramienta muy útil son los exponentes de Lyapunov.

Es importante mencionar que no existe una noción universal de lo que es considerado un atractor. Antes de dar una definición de atractor propuesta por Morris W. Hirsch necesitamos algunas definiciones:

Definición 3.5 (Conjunto acotado) [15]

Se dice que un conjunto S de \mathbb{R}^n está acotado si está contenido totalmente en una n -bola $B(a;r)$ para algún $r > 0$ y algún a de \mathbb{R}^n .

Definición 3.6 (Punto de acumulación) [15]

Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces \mathbf{x} se llama punto de acumulación de S si cada n -bola $B(\mathbf{x})$ contiene por lo menos un punto de S distinto de \mathbf{x} .

Definición 3.7 (Conjunto cerrado)[15]

Un conjunto S de \mathbb{R}^n es cerrado si, y sólo si, contiene todos sus puntos de acumulación.

Teorema 3.1 [15]

Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n . Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

- a) S es compacto.
- b) S es cerrado y acotado.
- c) Todo subconjunto infinito de S tiene un punto de acumulación en S .

Definición 3.8 (Conjunto invariante)

Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es invariante bajo una transformación f si $f(S) \subseteq S$.

La definición de atractor dada por Morris W. Hirsch es la siguiente:

Definición 3.9 (Atractor) [16]

Sea $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ un sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^n con flujo ϕ_t . Un conjunto Λ es llamado atractor si:

1. Λ es un conjunto compacto e invariante.
2. Hay un conjunto abierto U que contiene a Λ tal que para cada $\mathbf{x} \in U$, $\phi_t(\mathbf{x}) \in U$ y $\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(U) = \Lambda$.
3. (Transitividad) Dados cualesquiera dos puntos $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Lambda$ y cualquier vecindad abierta U_j alrededor de \mathbf{y}_j en U , hay una curva solución que empieza en U_1 y mas tarde pasa por U_2

El atractor mas simple que podemos encontrar es un punto de equilibrio nodo estable. Otro tipo de atractor son los ciclos límites.

Un tercer tipo de atractor son los denominados atractores extraños o atractores caóticos, nombre que reciben cuando éste es acotado y es sensible a las condiciones iniciales.

La principal característica que define el caos es la dependencia sensible a las condiciones iniciales. Dos condiciones iniciales cercanas en el atractor son separadas por una distancia que crece exponencialmente en el tiempo cuando se promedian a lo largo de la trayectoria, lo que lleva a la imprevisibilidad de largo plazo. El exponente de Lyapunov es la tasa promedio de crecimiento de esta distancia, con un valor positivo significando dependencia sensible a las condiciones iniciales (caos), un valor cero significando periodicidad (o quasiperiodicity), y un valor negativo significando un equilibrio estable [17]. Los sistemas dinámicos con mas de un exponente de Lyapunov positivo son llamados "hipercaóticos"[18]. El exponente de Lyapunov se nombra en honor del matemático ruso Aleksandr Lyapunov que fue uno de los primeros en explorar la estabilidad dinámica hace más de cien años. Su nombre se deletrea a veces como "Liapunov"[17].

Considere que tomamos una condición inicial y dejamos que la órbita evolucione en el tiempo de modo que el transitorio decaiga y el estado se encuentre en la región del atractor. Suponga que $\mathbf{x}(t)$ es un punto en el atractor a un tiempo t , y considere un punto cercano digamos $\mathbf{x}(t) + \delta(t)$, donde δ es un vector de separación diminuto de longitud inicial $\|\delta_0\|$, Figura 3.1(a).

Ahora mire como $\delta(t)$ crece. En estudios numéricos del atractor de Lorenz, uno encuentra que

$$\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| e^{\lambda t},$$

donde $\lambda \approx 0.9$. Por lo tanto trayectorias vecinas se separan exponencialmente rápido. De manera equivalente, si graficamos $\|\delta(t)\|$ contra t , encontramos una curva que es cercana a una línea recta con una pendiente positiva de λ , vea Figura 3.1(b) [19].

Necesitamos agregar algunas precisiones:

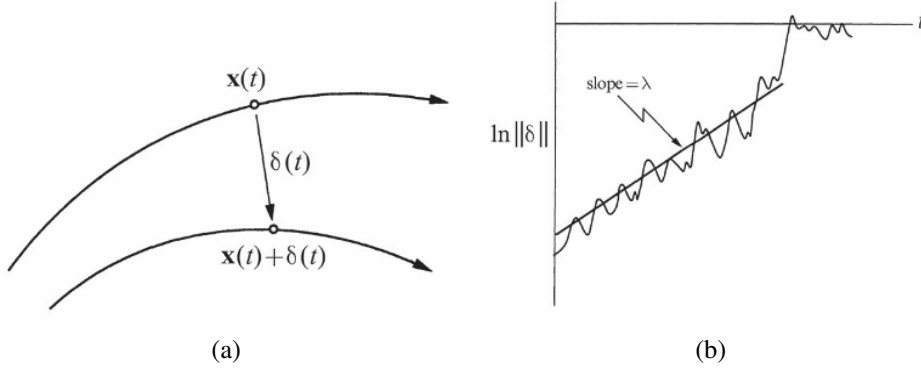


Figura 3.1: Cálculo del exponente de Lyapunov: (a) Separación de dos trayectorias con condición inicial muy cercanas. (b) Cálculo de la pendiente mediante mínimos cuadrados [19].

1. En la gráfica de la Figura 3.1(b) la curva nunca es exactamente derecha. Esta tiene oscilaciones debido a que la fuerza de la divergencia exponencial varía un poco a lo largo del atractor.
2. La divergencia exponencial debe detenerse cuando la separación es comparable al "diámetro" del atractor— las trayectorias obviamente no pueden alejarse más que eso. Esto explica la nivelación o la saturación de la curva en la Figura 3.1(b).
3. El número λ es a menudo llamado el exponente de Lyapunov, aunque esto es un uso descuidado del término, por dos razones:

En primer lugar, en realidad hay n diferentes exponentes de Lyapunov para un sistema n -dimensional, que se define de la siguiente manera. Considere la evolución de una esfera infinitesimal de condiciones iniciales perturbadas. Durante su evolución, la esfera se distorsionará en un elipsoide infinitesimal. Sea $\delta_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, la longitud del k -ésimo eje principal del elipsoide. Entonces $\delta_k(t) \sim \delta_k(0)e^{\lambda_k t}$ donde λ_k son los exponentes de Lyapunov. Para valores de t grandes, el diámetro del elipsoide es controlado por el λ_k más positivo. Así nuestro λ es en realidad el *Máximo Exponente de Lyapunov (MLE)*[19].

La forma de visualizar la acción de los exponentes de Lyapunov es por medio de una bola esférica llena de muchas condiciones iniciales en un espacio de estados tridimensional. A medida que la bola se mueve con el flujo, se distorsiona en un elipsoide como se muestra en la Figura 3.2, donde el eje más largo se expande a una velocidad dada por el primer exponente de Lyapunov λ_1 . Consideremos ahora un plano perpendicular a esta dirección de expansión que corta por el centro del elipsoide. En este plano, los puntos están contenidos dentro de una elipse cuyo eje mayor se está expandiendo a una velocidad dada por el segundo exponente de Lyapunov λ_2 (o contracción si λ_2 es negativo). El eje menor de esta elipse se expande (o más probablemente se contrae) a una velocidad determinada por el tercer exponente de Lyapunov λ_3 . A partir de la definición, está claro que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, y esta convención es universal [17].

En [20] se hace la revisión de dos métodos para el cálculo de los exponentes de Lyapunov. El primer método se aplica cuando las ecuaciones del campo vectorial asociado al sistema son conocidas, se basa la evaluación del Jacobiano a lo largo de una trayectoria y observando

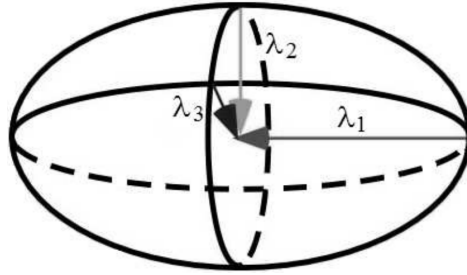


Figura 3.2: Una esfera de condiciones iniciales se distorsiona en un elipsoide conforme el tiempo progresa, con cada eje del elipsoide expandiéndose a una razón dada por uno de los exponentes de Lyapunov (o contracción si el exponente es negativo) [17].

como una esfera (en el caso de dimensión 3) se deforma en sus ejes cada δt , para poder evaluar la esfera cada δt manteniendo la orientación del eje principal se utiliza el método de re-ortonormalización de Gram-Schmidt (GSR). La ventaja de este método es que permite conocer todo el espectro.

El segundo método está pensado para cuando no conocemos las ecuaciones del campo vectorial, es decir, sirve para cuando se tienen únicamente las series de tiempo, sin embargo solo se conoce el máximo exponente de Lyapunov. Para más información sobre el cálculo de los exponentes de Lyapunov puede consultar la referencia [20].

En [21] se propone un método numérico para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov en conjuntos de datos pequeños.

Para esta tesis se ha utilizado ajuste por mínimos cuadrados sobre un promedio de la separación de 50 pares de trayectorias con condiciones iniciales cercanas para la obtención del máximo exponente de Lyapunov.

3.3 Dimensión Kaplan-Yorke

En la geometría fractal, la dimensión fractal, D , es una cantidad estadística que da una indicación de cómo un fractal parece llenar el espacio, cuando se enfoca a escalas cada vez más finas. Hay muchas definiciones específicas de la dimensión fractal y ninguna de ellas debe ser tratada como la universal.

Ha sido establecido (Ruelle and Takens, 1971) que un sistema dinámico disipativo puede convertirse en caótico comenzando de una dimensión de espacio de fase mayor o igual a tres [18].

J. Kaplan y J.A. Yorke (1979) han hecho la conjetura de que la dimensión fractal de un atractor extraño puede ser aproximado a partir del espectro de los exponentes de Lyapunov. Tal dimensión a sido llamada dimensión Kaplan-York o dimensión de Lyapunov [18].

Al ordenar los exponentes de Lyapunov del mayor al menor $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, y considerar la suma S_j de los primeros j exponentes de Lyapunov, donde $j < n$, entonces, para un atractor extraño existe un entero $j + 1$ tal que la suma S_{j+1} de los primeros $j + 1$ exponentes de

Lyapunov es negativa. Esto es:

$$S_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0 \text{ y } S_{j+1} = \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0. \quad (3.1)$$

El atractor extraño puede tener una dimensión contenida entre j y $j + 1$. La conjetura Kaplan-Yorke es obtenida por la interpolación lineal entre las dimensiones j y $j + 1$ de elementos volumétricos. La dimensión Kaplan-Yorke está definida como:

$$d_{KY} = j - \frac{S_j}{\lambda_{j+1}} = j - \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}}. \quad (3.2)$$

Puesto que S_j es positivo y λ_{j+1} es negativo se sigue que $d_{KY} > j$ [18].

Como ejemplo considere los exponentes de Lyapunov $\lambda_1 = 0.21$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -1.21$.

$$\begin{aligned} j &= 2, & S_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 = 0.21, \\ d_{KY} &= 2 - \frac{S_2}{\lambda_3} = 2 - \frac{0.21}{-1.21} = 2.1735537 \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.4 Sistemas PWL caóticos

A pesar de que los comportamientos en sistemas lineales y lineales afines son relativamente sencillos y bien definidos y por si solos no pueden presentar un comportamiento caótico se ha visto que dicho comportamiento si es posible en sistemas lineales por partes (sistemas PWL). Uno de los sistemas mas conocidos es el sistema asociado al circuito de Chua. El circuito de Chua es un sistema electrónico muy simple, el cual consiste de solo un inductor (L), dos capacitores (C_1, C_2), una resistencia lineal (G) y una resistencia negativa lineal por partes (g). En electrónica una resistencia negativa es un dispositivo electrónico en el cual al incrementar el voltaje entre sus dos terminales la corriente eléctrica que atraviesa el dispositivo disminuye. En una resistencia negativa lineal por partes la corriente puede ser descrita por una función lineal por partes de la forma:

$$i(v) = \begin{cases} m_1 v + b_1, & \text{si } v \in D_1; \\ m_2 v + b_2, & \text{si } v \in D_2; \\ \vdots & \vdots \\ m_n v + b_n, & \text{si } v \in D_n; \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $m_k, b_k \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ es el voltaje, $i \in \mathbb{R}$ es la corriente, D_k con $k = 1, \dots, n$ satisface que $\bigcup_{k=1}^n D_k = U \subset \mathbb{R}$ y $\bigcap_{k=1}^n D_k = \emptyset$. U es el conjunto de valores de voltaje para los cuales el dispositivo funciona correctamente.

Las ecuaciones de la dinámica del circuito de Chua son:

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_{C_1} &= G(v_{C_2} - v_{C_1}) - g(v_{C_1}), \\ C_2 \dot{v}_{C_2} &= G(v_{C_1} - v_{C_2}) - i_L, \\ L \dot{i}_L &= -v_{C_2}, \end{cases} \quad (3.5)$$

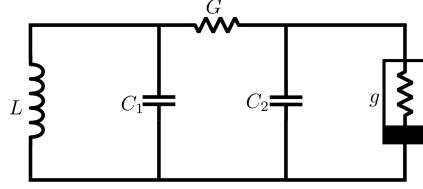


Figura 3.3: Circuito de Chua.

donde i_L es la corriente a través del inductor L , v_{C_1} y v_{C_2} son los voltajes a través de los capacitores C_1 y C_2 , respectivamente, y

$$g(v_{C_1}) = g(v_{C_1}; m_0, m_1) = m_0 v_{C_1} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|v_{C_1} + 1| - |v_{C_1} - 1|), \quad (3.6)$$

con $m_0 < 0$ y $m_1 < 0$ siendo constantes apropiadamente elegidas.

Por conveniencia usualmente se reformulan las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(-x + y - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -qy, \end{cases} \quad (3.7)$$

donde $p = C_2/C_1 > 0$ y $q = C_2/LG^2 > 0$ son los parámetros de bifurcación principales del circuito y el término no lineal representado por una función lineal por partes de tres segmentos:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x; m'_0, m'_1), \\ &= m'_0 x + \frac{1}{2}(m'_1 - m'_0)(|x + 1| - |x - 1|), \\ &= \begin{cases} m'_0 x + m'_1 - m'_0 & \text{si } x \geq 1; \\ m'_1 x & \text{si } |x| \leq 1; \\ m'_0 x - m'_1 + m'_0 & \text{si } x \leq -1; \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $m'_0 = m_0/G < 0$ and $m'_1 = m_1/G < 0$.

Con $p = 9$, $q = 14\frac{2}{7}$, $m'_0 = -\frac{5}{7}$, y $m'_1 = -\frac{8}{7}$ [22].

El atractor resultante simulado a partir del sistema lineal por partes se muestra en la Figura 3.5(a) y sus proyecciones sobre los planos (x, y) , (x, z) y (y, z) en las Figuras 3.5(b), 3.5(c) y 3.5(d).

Como se puede ver, a pesar de que los comportamientos de un sistema lineal o lineal afín son relativamente sencillos y no pueden generar un atractor caótico al utilizar leyes de conmutación si es posible obtenerlos.

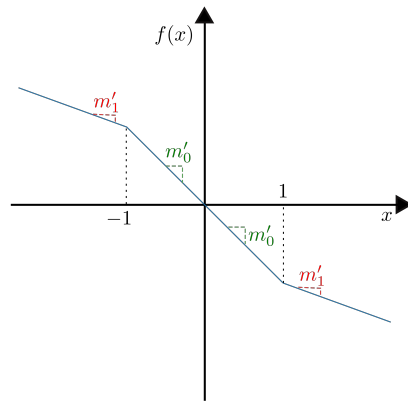


Figura 3.4: Función $f(x)$ del sistema de Chua.

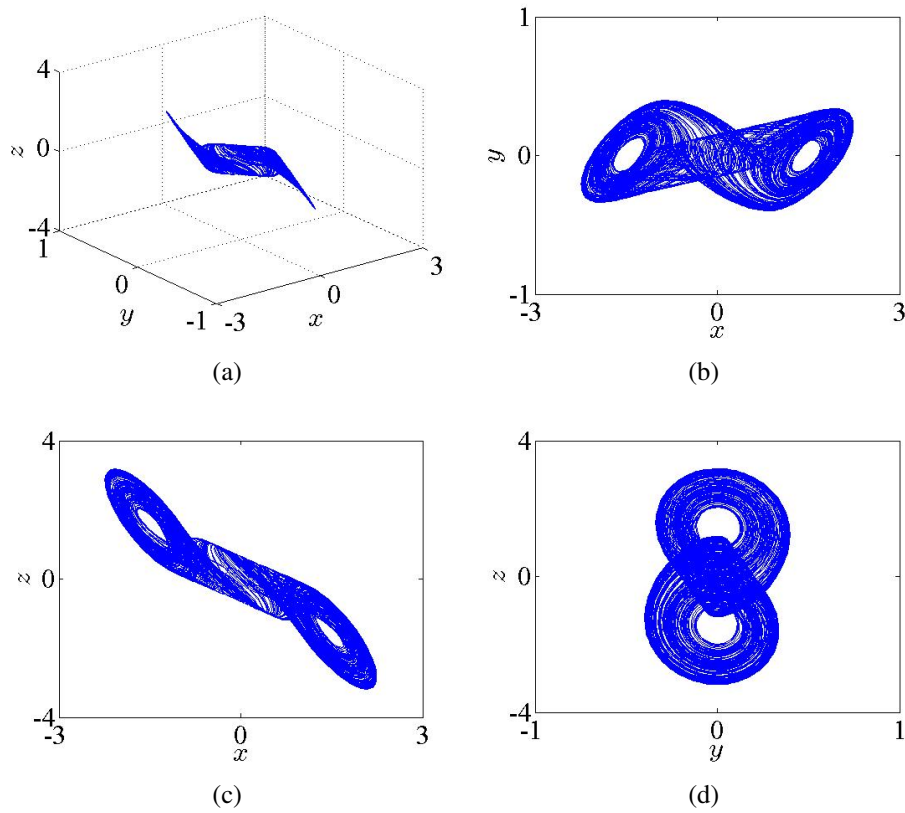


Figura 3.5: Atractor generado por el sistema de Chua (a) (x, y, z) , y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x, y) , (c) (x, z) y (d) (y, z) .

4 Sistemas disipativos

En este capítulo se introducen el concepto de sistema disipativo, prestando especial atención a los llamados sistemas UDS, los cuales son útiles en la generación de sistemas caóticos con puntos de equilibrio.

Se abordará también de manera breve algunos mecanismos de construcción de atractores caóticos con puntos de equilibrio.

4.1 Sistemas UDS

Un sistema dinámico de dimensión n tiene n exponentes de Lyapunov, la suma de estos exponentes miden la tasa de expansión o contracción de elementos volumétricos n -dimensionales infinitesimales:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \quad (4.1)$$

Para los sistemas conservativos $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$, para los sistemas acumulativos $\sum_{i=0}^n \lambda_i > 0$ y para los sistemas disipativos $\sum_{i=0}^n \lambda_i < 0$ [18].

En el caso de sistemas dinámicos de la forma (2.2) si la suma de los eigenvalores es negativa se dice que el sistema es disipativo. Además si al menos uno de sus eigenvalores posee parte real positiva entonces el sistema se dice ser inestable. Así un sistema UDS es un sistema disipativo inestable por sus siglas en inglés. En [7] se definen dos tipos de sistemas disipativos inestables (UDS).

Definición 4.1 (Sistemas UDS tipo I)

Un sistema de la forma dada en (2.2) en \mathbb{R}^3 con eigenvalores λ_i , $i = 1, 2, 3$, se dice ser un UDS tipo I, si $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$ y uno de sus eigenvalores λ_i es real negativo y los otros dos son complejos conjugados con parte real positiva.

Definición 4.2 (Sistemas UDS tipo II)

Un sistema de la forma dada en (2.2) en \mathbb{R}^3 con eigenvalores λ_i , $i = 1, 2, 3$, se dice ser un UDS tipo II, si $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$ y uno de sus eigenvalores λ_i es real positivo y los otros dos son complejos conjugados con parte real negativa.

Algunos sistemas dinámicos con puntos de equilibrio hiperbólicos en \mathbb{R}^3 pueden ser relacionados a estos dos tipos de UDS alrededor de sus equilibrios; por ejemplo, el sistema de Chua tiene dos puntos de equilibrios simétricamente distribuidos en el espacio de estados en los cuales su linealización es un sistema UDS tipo I, y otro mas en el origen cuya linealización corresponde a un UDS Tipo II [7]. Por lo tanto el estudio de los tipos de sistemas UDS obtenidos de la linealización de los sistemas dinámicos caóticos en los puntos de equilibrio podría brindar nueva información.

4.2 Caos mediante sistemas UDS

En [7] se presenta una clase de sistemas disipativos inestables 3-D.

Definición 4.3 [7]

Sean dos sistemas dados por la ecuación (2.11) en \mathbb{R}^3 con dominios $D_i \subset \mathbb{R}^3$ sus puntos de equilibrio $\mathbf{x}_i^* \in D_i$, para $i = 1, 2$. Definimos una conmutación mediante dos UDS Tipo II de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_1\mathbf{x} + B_1, & \text{si } \mathbf{x} \in D_1; \\ A_2\mathbf{x} + B_2, & \text{si } \mathbf{x} \in D_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Denotamos al punto de equilibrio de cada subsistema $\mathbf{x}_i^* = -A_i^{-1}B_i$, $i = 1, 2$. Asuma que el sistema dado por (4.2) tiene una bola de disipación $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\phi^t(\Omega) \subset \Omega$ para todo $t \geq 0$. Esta suposición sera garantizada por la elección de un adecuado par (A_i, B_i) , $i = 1, 2$. El atractor maximal \mathcal{A} del sistema (4.2) es el subconjunto invariante atractivo mas grande de Ω [7].

Proposición 4.1 [7]

Asuma que el sistema (4.2) oscila entre sus dos subsistemas. Entonces, para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}$, existe un flujo $\phi(\Omega) \subset D$ tal que

- (a) $\cup_{i=1}^2 D_i = D \subseteq \mathbb{R}^3$,
- (b) $\cap_{i=1}^2 D_i = \emptyset, \cap_{i=1}^2 cl(D_i) \neq \emptyset$,

donde $cl(\cdot)$ es la cerradura del conjunto.

El enunciado (a) de la proposición 4.1 es acerca del dominio del sistema (4.2) el cual es constituido por dos dominios de UDS Tipo II. El enunciado (b) de la proposición 4.1 indica que el flujo ϕ^t es determinado por solo un campo vectorial y se mueve de un dominio a otro de manera inmediata. Esto es ilustrado en la Figura 4.1 [7].

Proposición 4.2 [7]

La cuenca de atracción Ω de un atractor \mathcal{A} dado por 4.2 es localizada entre los dos variedades estables $W_{\mathbf{x}_i^*}^s$, $i = 1, 2$.

Note que en el sistema (4.2), las variedades inestables $W_{\mathbf{x}_1^*}^u$ y $W_{\mathbf{x}_2^*}^u$ guían el flujo ϕ^t hacia los puntos de equilibrio \mathbf{x}_2^* y \mathbf{x}_1^* , respectivamente. Por lo tanto la órbita oscila entre los dos puntos de equilibrio. Así, todos los puntos iniciales localizados fuera del espacio entre las variedades estables $W_{\mathbf{x}_i^*}^s$, $i = 1, 2$, se vuelven inestables. Como resultado la cuenca de atracción Ω tiene la única posibilidad de estar localizada entre las variedades $W_{\mathbf{x}_i^*}^s$. Además, $W_{\mathbf{x}_i^*}^s \cap \Omega = \emptyset$, $i = 1, 2$, puesto que empezando en cualquier punto inicial en $W_{\mathbf{x}_i^*}^s$ la órbita va a \mathbf{x}_i^* , $i = 1, 2$ [7].

Como ejemplo de esta clase de sistemas considere el siguiente sistema proporcionado en

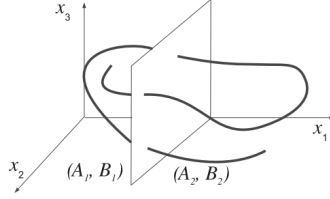


Figura 4.1: Generación de atractores en dominios D_i . El flujo ϕ^t es gobernado por el par correspondiente $(A_i, B_i), i = 1, 2$ [7].

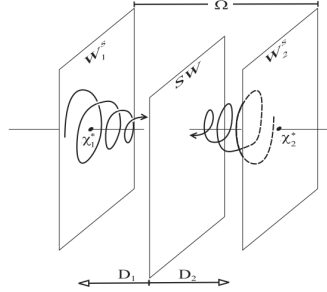


Figura 4.2: La cuenca de atracción Ω de un atractor \mathcal{A} [7].

[7] de la forma (4.2) con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.15 & -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad SW = \begin{cases} B_2 = (0, 0, -10)^T, & \text{si } x_1 \geq 1; \\ B_1 = (0, 0, 0)^T, & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (4.3)$$

En este caso la superficie de conmutación es un plano paralelo al plano (x_2, x_3) ubicado en $x_1 = 1$. Su máximo exponente de Lyapunov reportado es 0.015, por lo que es considerado un atractor caótico. El atractor generado se muestra en la Figura 4.3(a), sus proyecciones sobre los planos (x_1, x_2) , (x_1, x_3) y (x_2, x_3) se muestran en las Figuras 4.3(b), 4.3(c) y 4.3(d), respectivamente.

4.3 Sistemas con multienroscados

El término *atractor multienroscado* es usado para referirse a tres o mas enroscados en un atractor [23]. En [23] se propone una clase de sistemas dinámicos 3-D que presentan atractores multienroscados. El atractor multienroscado en estos sistemas aparece como resultado de la combinación de varios puntos de equilibrio tipo foco-silla mediante leyes de conmutación. El sistema son de la forma de la forma (2.14) en \mathbb{R}^3 en el cual cada subsistema de la forma (2.11) al considerar $B = 0$ cumple con ser un sistema UDS Tipo I. Para ilustrar esto considere el sistema de la forma (2.14) dado en [23] el cual exhibe un atractor caótico con tres enroscado simétricos, este sistema utiliza una sola matriz A dada como:

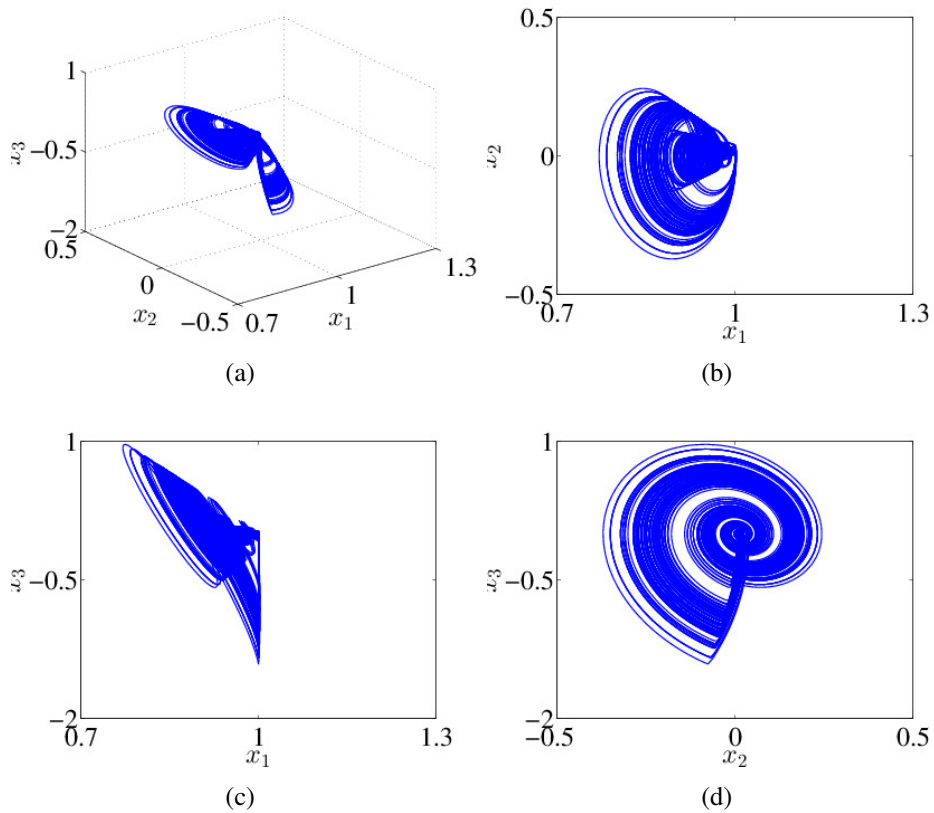


Figura 4.3: Atractor en (a) (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . La superficie de conmutación está definida en $x_1 = 1$. Puesto que el sistema (A_1, B_2) es altamente repulsivo, las trayectorias parecen rebotar en la superficie de conmutación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.2465 & 1 \\ -6.8438 & -2.006 & -1.1102 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Y la ley de conmutación:

$$SW = \begin{cases} B_1, & \text{si } x_1 \geq 0.3021; \\ B_2, & \text{si } -0.3021 < x_1 < 0.3021; \\ B_3, & \text{si } x_1 \leq -0.3021, \end{cases} \quad , \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.5355 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.5355 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

El atractor con tres enrocados generado se muestra en la Figura 4.4(a), su proyección sobre el plano (x_1, x_2) en la Figura 4.4(b).

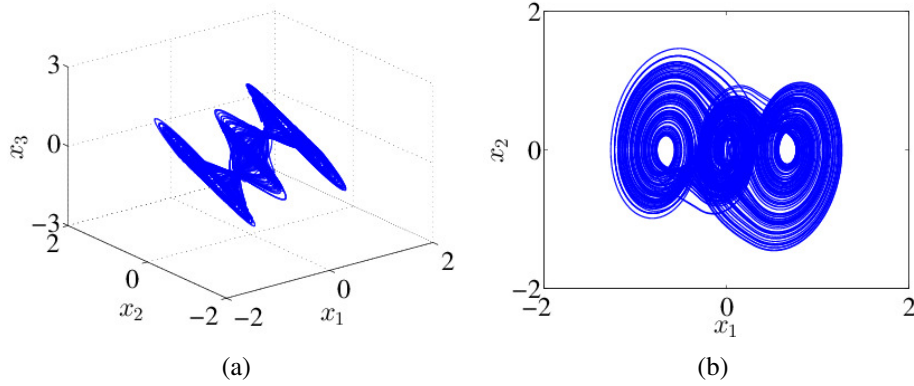


Figura 4.4: Atractor multienroscado del sistema (4.4) propuesto en [23] en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y (b) su proyección sobre el plano (x_1, x_2) .

5 Sistemas sin puntos de equilibrio

En este capítulo se abordan los sistemas sin puntos de equilibrio haciendo una revisión de los trabajos publicados que han marcado los inicios del estudio de esta clase de sistemas sin puntos de equilibrio.

En 1994 Sprott se preguntó si había sistemas dinámicos autónomos que fueran descritos por ecuaciones diferenciales que tuvieran menos de siete términos y tan solo una o dos no linealidades pero que presentaran un comportamiento caótico. El tomó como base ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) con no linealidades cuadráticas de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i x_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_{i,j} x_i x_j$, donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es una variable de un espacio de estados tridimensional real, \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son vectores de coeficientes tridimensionales reales. Utilizó para los cálculos un integrador Runge-Kutta con un paso de $\delta t = 0.01$. Al probar diferentes combinaciones de ecuaciones diferenciales se encontraron 19 sistemas diferentes nombrados por Sprott como casos A-S, de estos los primeros casos A-E presentan 5 términos y dos no linealidades, los casos F-S presentan seis términos pero solo una no linealidad.

La idea era tener un catálogo de sistemas caóticos que pudieran ser útiles y en donde se pudiera elegir el sistema más adecuado para la aplicación. Los sistemas que Sprott encontró se presentan en la Tabla 5.1.

Caso	Ecuaciones	Puntos críticos	Exponentes de Lyapunov	Dimensión (d_{KY})
A	$\dot{x} = y$	none	0.014	3.000
	$\dot{y} = -x + yz$		0	
	$\dot{z} = 1 - y^2$		-0.014	
B	$\dot{x} = yz$	$f_2(1, 1, 0)$	0.210	2.174
	$\dot{y} = x - y$	$f_2(-1, -1, 0)$	0	
	$\dot{z} = 1 - xy$		-1.210	
C	$\dot{x} = yz$	$c_0(1, 1, 0)$	0.163	2.140
	$\dot{y} = x - y$	$c_0(-1, -1, 0)$	0	
	$\dot{z} = 1 - x^2$		-1.163	
D	$\dot{x} = -y$	$c_0(0, 0, 0)$	0.103	2.078
	$\dot{y} = x + z$		0	
	$\dot{z} = xz + 3y^2$		-1.320	
E	$\dot{x} = yz$	$c_0(0.25, 0.063, 0)$	0.078	2.072
	$\dot{y} = x^2 - y$		0	
	$\dot{z} = 1 - 4x$		-1.078	
F	$\dot{x} = y + z$	$f_2(0, 0, 0)$	0.117	2.190
	$\dot{y} = -x + 0.5y$	$f_1(-2, -4, 4)$	0	
	$\dot{z} = x^2 - z$		-1.617	
G	$\dot{x} = 0.4x + z$	$f_2(0, 0, 0)$	0.034	2.054
	$\dot{y} = xz - y$	$f_2(-2.5, -2.5, 1)$	0	
	$\dot{z} = -x + y$		-0.634	

H	$\dot{x} = -y + z^2$	$f_2(0,0,0)$	0.117	2.190
	$\dot{y} = x + 0.5y$	$f_2(-2,4,-2)$	0	
	$\dot{z} = x - z$		-1.617	
I	$\dot{x} = -0.2y$	$f_2(0,0,0)$	0.012	2.012
	$\dot{y} = x + z$		0	
	$\dot{z} = x + y^2 - z$		-1.012	
J	$\dot{x} = 2x$	$f_2(0,0,0)$	0.076	2.037
	$\dot{y} = -2y + z$		0	
	$\dot{z} = -x + y + y^2$		-2.076	
K	$\dot{x} = xy - z$	$f_2(0,0,0)$	0.038	2.042
	$\dot{y} = x - y$	$f_1(-3.333, -3.333, 11.111)$	0	
	$\dot{z} = x + 0.3z$		-0.890	
L	$\dot{x} = y + 3.9z$	$n_1(1, 1.111, -0.231)$	0.061	2.057
	$\dot{y} = 0.9x^2 - y$		0	
	$\dot{z} = 1 - x$		-1.061	
M	$\dot{x} = -z$	$f_1(2.406, -5.791, 0)$	0.044	2.042
	$\dot{y} = -x^2 - y$	$f_2(-0.706, -0.499, 0)$	0	
	$\dot{z} = 1.7 + 1.7x + y$		-1.044	
N	$\dot{x} = -2y$	$f_2(-0.25, 0, 0.5)$	0.076	2.037
	$\dot{y} = x + z^2$		0	
	$\dot{z} = 1 + y - 2z$		-2.076	
O	$\dot{x} = y$	$f_1(0,0,0)$	0.049	2.154
	$\dot{y} = x - z$	$f_2(-1,0,-1)$	0	
	$\dot{z} = x + xz + 2.7y$		-0.319	
P	$\dot{x} = 2.7y + z$	$f_2(0,0,0)$	0.087	2.181
	$\dot{y} = -x + y^2$	$f_2(1,-1,2.7)$	0	
	$\dot{z} = x + y$		-0.481	
Q	$\dot{x} = -z$	$f_2(0,0,0)$	0.109	2.179
	$\dot{y} = x - y$	$f_1(-3.1, -3.1, 0)$	0	
	$\dot{z} = 3.1x + y^2 + 0.5z$		-0.609	
R	$\dot{x} = 0.9 - y$	$f_2(-0.444, 1.111, -0.4)$	0.062	2.058
	$\dot{y} = 0.4 + z$		0	
	$\dot{z} = xy - z$		-1.062	
S	$\dot{x} = x - 4y$	$f_2(-1, 0.25, 1)$	0.188	2.151
	$\dot{y} = x + z^2$	$f_1(-1, 0.25, -1)$	0	
	$\dot{z} = 1 + x$		-1.188	

Tabla 5.1: Sistemas tridimensionales con soluciones caóticas algebraicamente simples [4].

De estos se puede ver que el sistema Sprott A no posee puntos de equilibrio y sin embargo el comportamiento es caótico.

En [1] siguiendo con el estudio de estos nuevos sistemas caóticos sin puntos de equilibrio se presenta un nuevo sistema:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y, \\
 \dot{y} &= z, \\
 \dot{z} &= -y + 3y^2 - x^2 - xz + a.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Cuando $a > 0$, el sistema (5.1) tiene dos puntos de equilibrio simétricos: $(\sqrt{a}, 0, 0)$ y $(-\sqrt{a}, 0, 0)$ como lo mostrado en la figura 5.1.

Cuando $a = 0$ entonces estos dos puntos de equilibrio simétricos se unen en uno, el origen $(0, 0, 0)$. Cuando $a < 0$, no hay punto de equilibrio en el sistema, pero aun se genera el atractor caótico, como lo mostrado en la Figura 5.2. El máximo exponente de Lyapunov con respecto al parámetro a es mostrado en la Figura 5.3 [1].

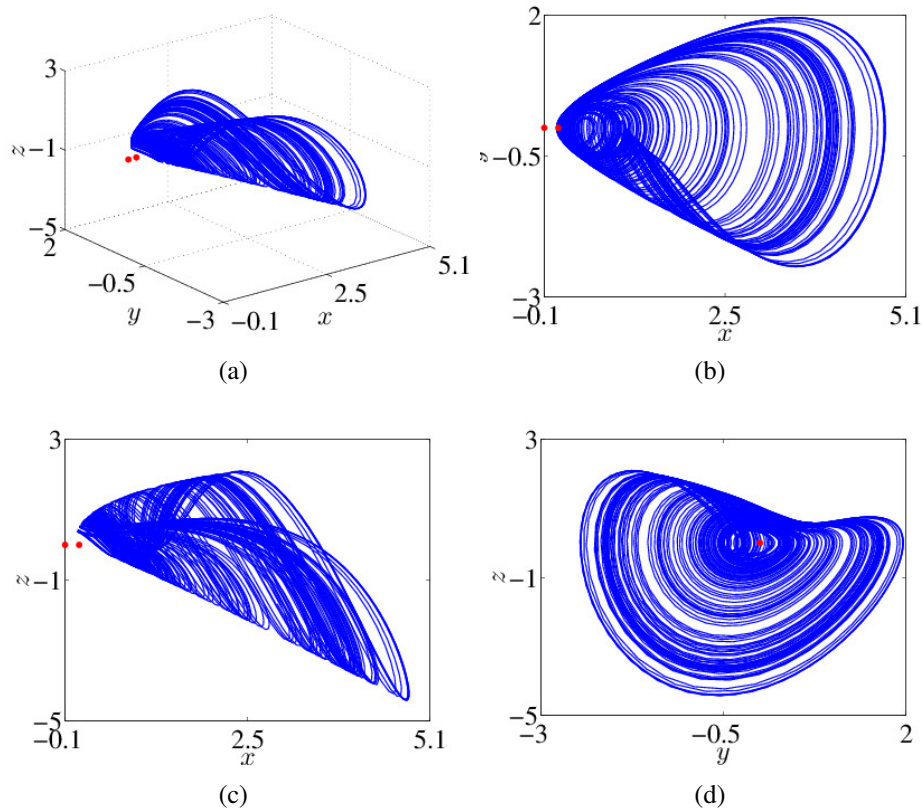


Figura 5.1: Atractor generado por el sistema (5.1) cuando $a = 0.01$ (puntos de equilibrio simétricos en color rojo) en (a) el espacio (x, y, z) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x, y) , (c) (x, z) y (d) (y, z) .

En [24] se presenta también un sistema hipercaótico que no tiene puntos de equilibrio. El sistema 4-D es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y, \\
 \dot{y} &= -x + yz + axzw, \\
 \dot{z} &= 1 - y^2, \\
 \dot{w} &= z + bxz + cxyz.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Aquí, a , b y c son parámetros constantes del sistema [24]. En la Figura 5.4(a) se muestra la proyección del atractor en (x, y, z) . Sus proyecciones sobre los planos (x, w) , (y, w) y (z, w) en las Figuras 5.4(b), 5.4(c) y 5.4(d), respectivamente. En esta fuente se provee una realización

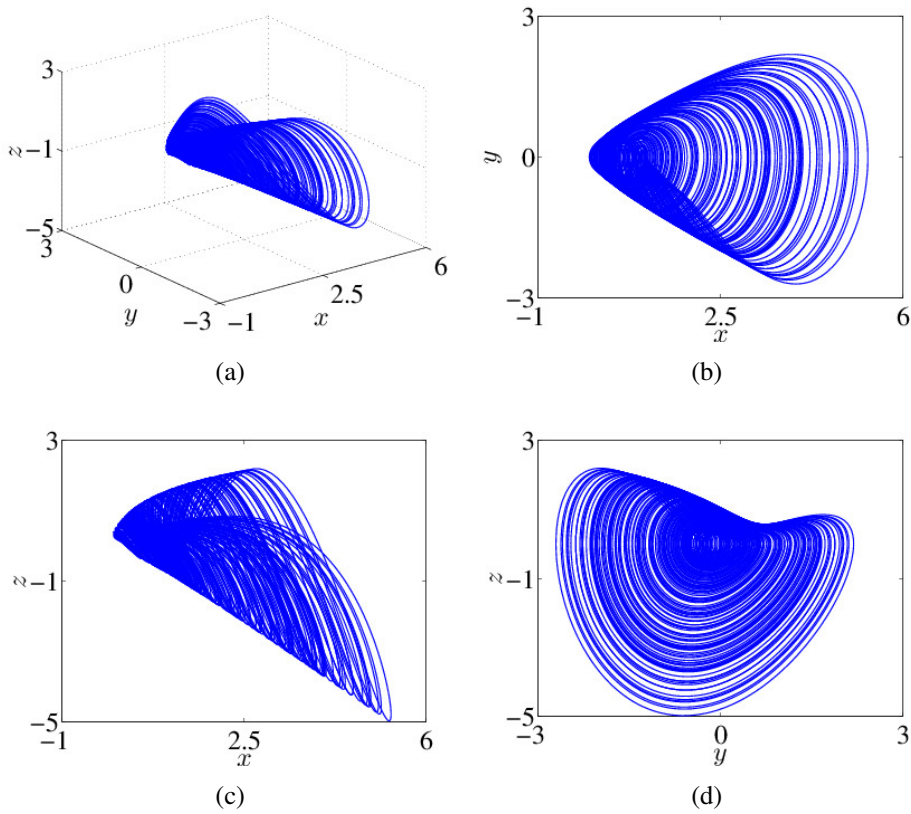


Figura 5.2: Atractor generado por el sistema (5.1) cuando $a = -0.05$ en (a) el espacio (x, y, z) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x, y) , (c) (x, z) y (d) (y, z) .

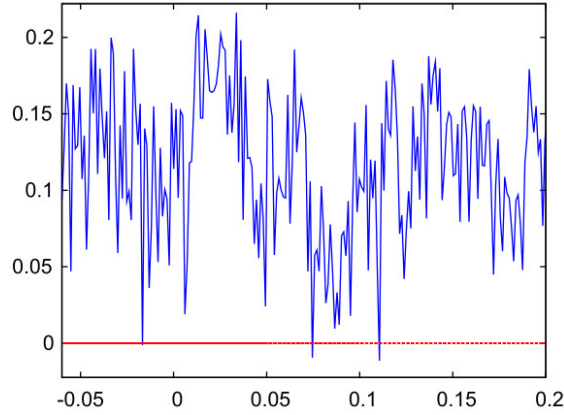


Figura 5.3: Máximo exponente de Lyapunov del sistema (5.1) con respecto al parámetro a [1].

electrónica junto a su simulación.

Siguiendo esta tendencia por encontrar sistemas sin puntos de equilibrio en [5] realizaron una búsqueda sistemática para encontrar sistemas caóticos tridimensionales adicionales con no linealidades cuadráticas que no tuvieran puntos de equilibrio. Su objetivo era encontrar los casos en los cuales no pueden reducirse más las ecuaciones removiendo términos sin destruir el caos. La investigación fue inspirada por la observación de que cada ejemplo conocido contenía un término constante y que si la constante es puesta a cero, el sistema resultante es no hiperbólico (los puntos de equilibrio tienen eigenvalores con parte real igual a cero)[5].

Ellos procedieron utilizando tres métodos:

Método I Agregar un término constante a otro sistema caótico no hiperbólico. Por ejemplo el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + z, \\ \dot{z} &= k_1x^2 + k_2z^2 + k_3y^2 + a, \end{aligned} \quad (5.3)$$

con $a = 0$ tiene un punto de equilibrio en $(0, 0, 0)$ cuyos eigenvalores son cero y puramente imaginarios. Ajustando y simplificando los parámetros k_1, k_2, k_3 , y a da el sistema enlistado como NE₇ en la Tabla 5.2.

Método II Buscar en los casos donde podemos mostrar algebraicamente que los puntos de equilibrio son imaginarios. Por ejemplo cualquier solución caótica de un sistema paramétrico como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= k_1x + k_2y + k_3z + k_4x^2 + k_5y^2 + k_6z^2 + k_7xy + k_8xz + k_9yz + a, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$k_1^2 - 4k_4a \leq 0, \quad (5.5)$$

es candidato. Ajustando los parámetros k_1, \dots, k_9 y a da el sistema enlistado como NE₁₄ en la Tabla 5.2.

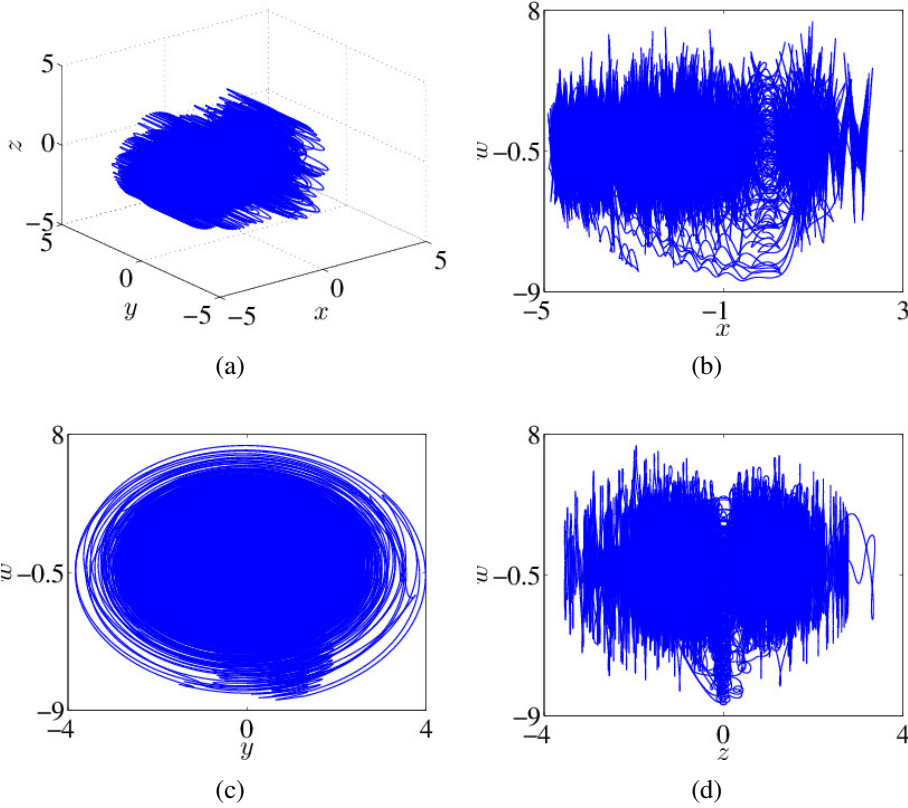


Figura 5.4: Atractor hipercaótico del sistema (5.2) con $a = 8$, $b = -2.5$ y $c = -30$ en sus proyecciones: (a) (x, y, z) , (b) (x, w) , (c) (y, w) y (d) (z, w) .

Método III Agregar una constante a cada una de las ecuaciones diferenciales en un sistema caótico conocido y buscamos soluciones donde los puntos de equilibrio numéricamente calculados no existen. Por ejemplo, el sistema Sprott O[4] con constantes agregadas a_1, a_2 y a_3 .

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= k_1 y + a_1, \\
 \dot{y} &= k_2 x + k_3 z + a_2, \\
 \dot{z} &= k_4 x + k_5 x z + k_6 y + a_3,
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

da el sistema enlistado como NE₄ en la Tabla 5.2.

De esta manera ellos obtuvieron 17 sistemas denominados sistemas NE que se muestran en la Tabla 5.2 [5].

Modelo	Ecuaciones	a	Exponentes de Lyapunov	D_{ky}	(x_0, y_0, z_0)
NE ₁	$\dot{x} = y$	1.0	0.0138, 0, -0.0138	3.0000	(0, 5, 0)
Sprott A (Nose-Hoover)	$\dot{y} = -x - zy$ $\dot{z} = y^2 - a$				
NE ₂	$\dot{x} = -y$	0.35	0.0776, 0, -1.5008	2.0517	(0, 0.4, 1)
Wei	$\dot{y} = -x + z$ $\dot{z} = 2y^2 + xz - a$				
NE ₃	$\dot{x} = y$	1.0	0.0522, 0, -2.6585	2.0196	(1, 1, -1)

Wang-Chen simplificado NE ₄	$\dot{y} = z$ $\dot{z} = -y + 0.1x^2 + 1.1xz + a$ $\dot{x} = -0.1y + a$	1.0	0.0235, 0, -8.480	2.0028	(-8.2, 0, -5)
NE ₅	$\dot{y} = x + z$ $\dot{z} = xz - 3y$ $\dot{x} = 2y$	2.0	0.0168, 0, -0.3622	2.0465	(0.98, 1.8, -0.7)
NE ₆	$\dot{y} = -2x - z$ $\dot{z} = -y^2 + z^2 + a$ $\dot{x} = y$	0.75	0.0280, 0, -3.4341	2.0082	(0, 3, -0.1)
NE ₇	$\dot{y} = z$ $\dot{z} = -y - xz - yz - a$ $\dot{x} = y$	2.0	0.0252, 0, -6.8524	2.0037	(0, 2.3, 0)
NE ₈	$\dot{y} = -x + z$ $\dot{z} = -0.8x^2 + z^2 + a$ $\dot{x} = y$	1.3	0.0314, 0, -10.2108	2.0031	(0, 0.1, 0)
NE ₉	$\dot{y} = -x - yz$ $\dot{z} = xy + 0.5x^2 - a$ $\dot{x} = y$	0.55	0.0504, 0, -0.3264	2.1544	(0.5, 0, 0)
NE ₁₀	$\dot{y} = -x - yz$ $\dot{z} = -xz + 7x^2 - a$ $\dot{x} = z$	0.6	0.0061, 0, -1.3002	2.0047	(1, 0.7, 0.8)
NE ₁₁	$\dot{y} = z - y$ $\dot{z} = -0.9y - xy + xz + a$ $\dot{x} = y$	1.0	0.0706, 0, -0.6456	2.1094	(0, 1.6, 3)
NE ₁₂	$\dot{y} = -x + z$ $\dot{z} = z - 2xy - 1.8xz - a$ $\dot{x} = z$	0.1	0.0654, 0, -2.0398	2.0321	(0.5, 0, -1)
NE ₁₃	$\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = -4x^2 + 8xy + yz + a$ $\dot{x} = -y$	0.4	0.1028, 0, -2.1282	2.0483	(2.5, 0, 0)
NE ₁₄	$\dot{y} = x + z$ $\dot{z} = xy + xz + 0.2yz - a$ $\dot{x} = y$	1.0	0.0532, 0, -11.8580	2.0045	(1, 0, -4)
NE ₁₅	$\dot{y} = z$ $\dot{z} = x^2 - y^2 + 2xz + yz + a$ $\dot{x} = y$	1.0	0.1101, 0, -1.3879	2.0793	(0, 1, -4.9)
NE ₁₆	$\dot{y} = z$ $\dot{z} = x^2 - y^2 + xy + 0.4xz + a$ $\dot{x} = -0.8x - 0.5y^2 + xz + a$	1.0	0.0607, 0, -0.1883	2.3224	(0, 1, -1)
NE ₁₇	$\dot{y} = -0.8y - 0.5z^2 + yx + a$ $\dot{z} = -0.8z - 0.5x^2 + zy + a$ $\dot{x} = -y - z^2 + 2.3xy + a$	2.0	0.2257, 0, -1.7477	2.1292	(1, -1, 0)
	$\dot{y} = -z - x^2 + 2.3yz + a$ $\dot{z} = -x - y^2 + 2.3zx + a$				

Tabla 5.2: Diecisiete sistemas caóticos simples sin puntos de equilibrio basados en no linealidades cuadráticas [5].

Han aparecido también trabajos donde se plantea la posibilidad de utilizar cálculo fraccionario para a partir de un sistema sin puntos de equilibrio entero obtener un sistema sin puntos de equilibrio fraccionario [25].

En [26], se estudia un sistema de cuatro dimensiones que nace como una extensión del

sistema de Lorenz sin difusión a partir de la inclusión de una retroalimentación lineal con una variable adicional u . Este nuevo sistema dado por (5.7) no tiene puntos de equilibrio y además es hipercaótico para los parámetros $a = 2.7$ y $b = 0.44$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x, \\ \dot{y} &= -xz + u, \\ \dot{z} &= xy - a, \\ \dot{u} &= -by.\end{aligned}\tag{5.7}$$

En esta referencia se propone además substituir los términos cuadráticos xz y xy en (5.7) por $z\text{sgn}(x)$ y $|x|$, respectivamente. Al hacer esta sustitución se obtiene un sistema que mantiene el comportamiento caótico e hipercaótico, siendo éste el primer sistema lineal por partes sin puntos de equilibrio reportado. Mas aún el atractor generado es globalmente atractivo y es dado como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x, \\ \dot{y} &= -z\text{sgn}(x) + u, \\ \dot{z} &= |x| - a, \\ \dot{u} &= -by.\end{aligned}\tag{5.8}$$

El hecho de que el atractor no tenga puntos de equilibrio permite que la implementación electrónica no deba satisfacer alguna precarga en los capacitores para su funcionamiento. En [26] se hace también una implementación electrónica del sistema dado por (5.8).

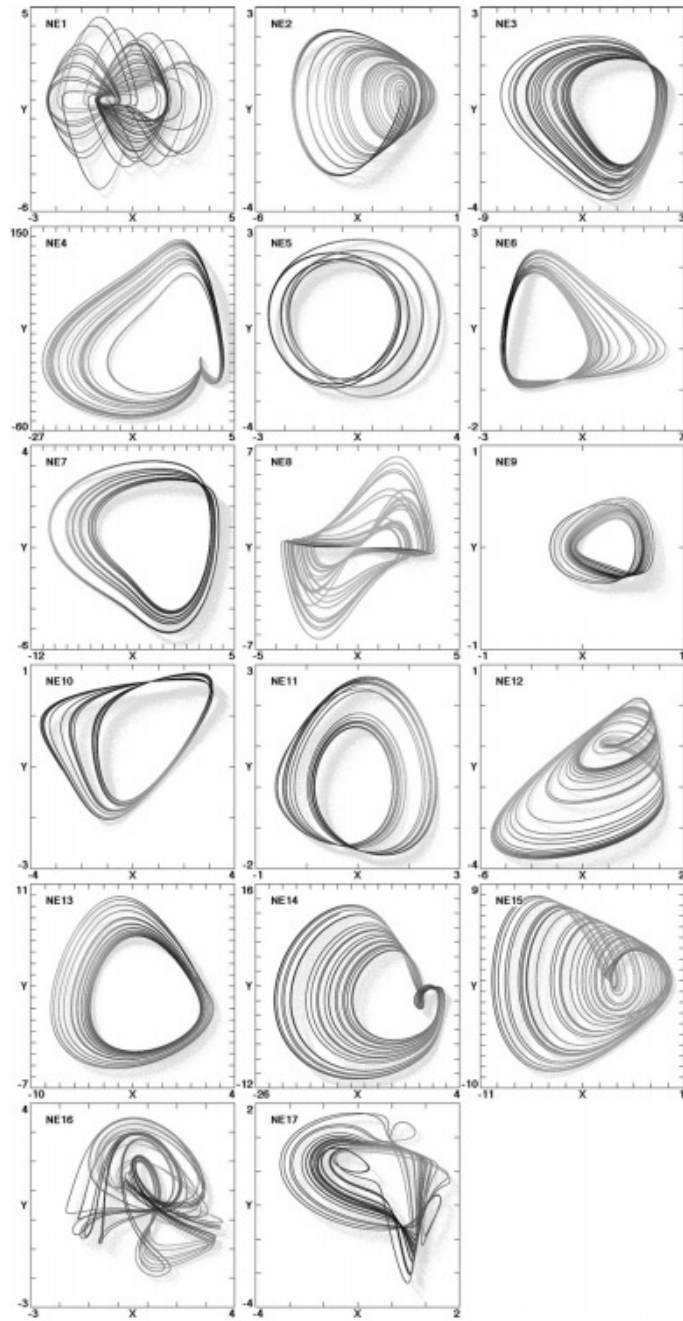


Figura 5.5: Proyecciones de los sistemas NE sobre el plano (x, y) [5].

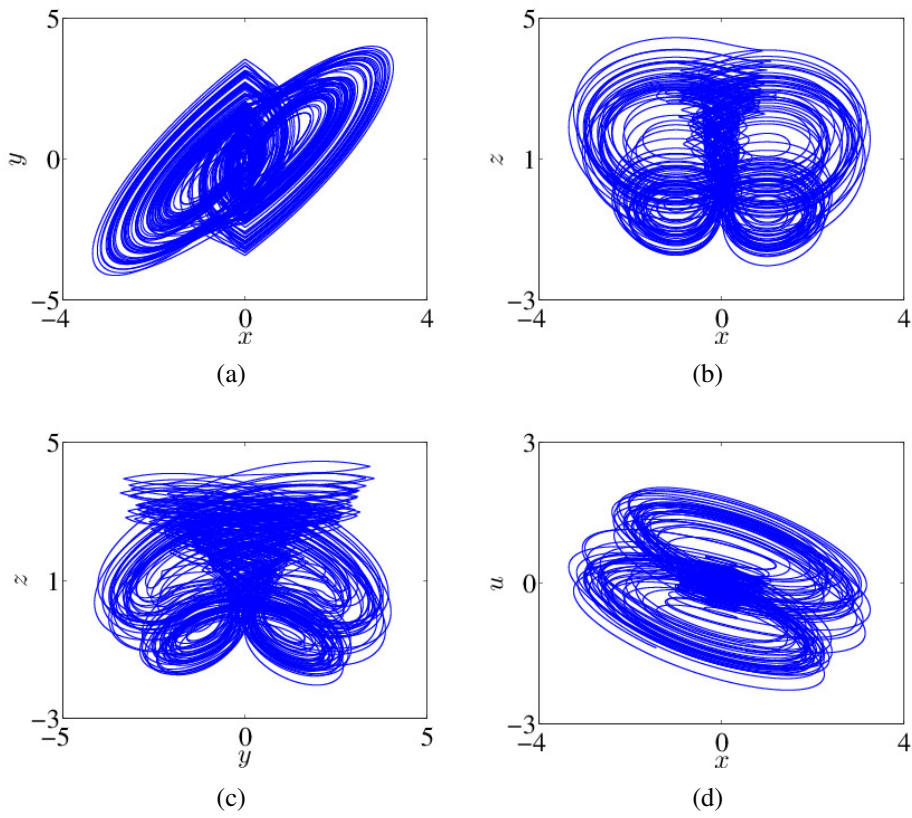


Figura 5.6: Atractor hipercaótico del sistema (5.8) para $a = 1$ y $b = 0.25$ sobre los planos: (a) (x, y) , (b) (x, z) , (c) (y, z) y (d) (x, u) .

El objetivo de esta tesis es obtener sistemas sin puntos de equilibrio lineales por partes, para esto se eligió estudiar solamente dos casos de sistemas PWL:

1. En cada subsistema que compone el sistema PWL la matriz A es no invertible.
2. En cada subsistema que compone el sistema PWL la matriz A es invertible.

Considere un sistema dinámico de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}. \quad (6.1)$$

Donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un operador y $B \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante. Los puntos de equilibrio del sistema son determinados por $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Entonces, cuando $B = 0$, los puntos de equilibrio del sistema están dados por la solución del sistema de ecuaciones homogéneo de la forma $A\mathbf{x} = 0$ y el sistema siempre presenta al menos un punto de equilibrio, i.e., si $Rank(A) = n$ entonces el punto de equilibrio está en el origen $\mathbf{x} = 0$; pero si $Rank(A) < n$ hay un número infinito de puntos de equilibrio.

Cuando el vector $B \neq 0$ lo que tenemos es un sistema de ecuaciones no homogéneo de la forma $A\mathbf{x} = -B$. Hay dos casos, el primer caso es cuando la matriz A es de rango completo, entonces el sistema definido y tiene solo un punto de equilibrio en $\mathbf{x}^* = -A^{-1}B$.

El segundo caso es cuando la matriz A no es de rango completo, entonces hay dos posibilidades: el sistema es inconsistente y no tiene puntos de equilibrio o es indefinido y tiene un número infinito de puntos de equilibrio.

El siguiente Teorema establece condiciones necesarias y suficientes para la construcción de un sistema dinámico lineal afín sin puntos de equilibrio:

Teorema 6.1

Dado un sistema dinámico basado en una transformación afín de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}$ donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $B \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante diferente de cero y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un operador lineal, el sistema no posee puntos de equilibrio si y solo si:

- A es no invertible.
- B es linealmente independiente del conjunto de vectores columna no nulos del operador A .

Demostración. (\Leftarrow)

Empecemos considerando el caso donde la matriz A es singular y el vector B es diferente de cero y es linealmente independiente de los vectores columna no nulos del operador A . Definamos a a_i con $i = 1, \dots, n$ los vectores columna de la matriz A y a b_j con $j = 1, \dots, m$ los vectores columna no nulos de la matriz A donde $m \leq n$.

$$A \text{ es singular} \quad \wedge \quad \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j$$

El que A sea singular implica que no existe A^{-1} .

$$A \text{ es singular} \implies \nexists A^{-1}$$

El que no exista A^{-1} implica que $\det(A) = 0$

$$\nexists A^{-1} \implies \det(A) = 0$$

Puesto que $\det(A) = 0$ entonces A tiene al menos un vector columna linealmente dependiente.

$$\det(A) = 0 \implies \exists c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R} : a_k = \sum_1^{k-1} c_i a_i + \sum_{k+1}^n c_i a_i$$

Puesto que A tiene al menos un vector columna linealmente dependiente entonces $\text{rank}(A) < n$.

$$\exists c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R} : a_k = \sum_1^{k-1} c_i a_i + \sum_{k+1}^n c_i a_i \implies \text{rank}(A) < n$$

Puesto $\text{rank}(A) < n$ entonces existen vectores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes de los vectores columna no nulos de A .

$$\text{rank}(A) < n \implies \exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, \mathbf{w} \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j$$

Definamos W como el conjunto de los vectores linealmente independientes de los vectores columna no nulos de A . Como los vectores de W son linealmente independientes de los vectores columna no nulos de A entonces no pertenecen a la imagen de A .

$$\forall \mathbf{w} \in W \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, \mathbf{w} \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j \implies \forall \mathbf{w} \in W, \mathbf{w} \notin \text{range} A$$

Como todo vector de W no está en la imagen de A entonces no existe vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$.

$$\forall \mathbf{w} \in W, \mathbf{w} \notin \text{range} A \implies \forall \mathbf{w} \in W \nexists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{w}$$

Puesto que B es linealmente independiente de los vectores columna no nulos de A entonces $-B$ también lo es.

$$\forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j \implies \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, -B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j$$

Puesto que $-B$ es linealmente independiente de los vectores columna no nulos de A se sigue que $-B$ pertenece al conjunto W ,

$$\forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, -B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j \implies -B \in W$$

Como $-B$ pertenece al conjunto W y para todo vector $w \in W$ no existe vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = w$ entonces no existe vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = -B$.

$$(-B \in W \wedge \forall w \in W \nexists x \in \mathbb{R}^n : Ax = w) \implies \nexists x \in \mathbb{R}^n : Ax = -B$$

Como no existe un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = -B$ entonces el sistema $\dot{x} = Ax + B$ no tiene puntos de equilibrio.

$$\nexists x \in \mathbb{R}^n : Ax = -B \implies \dot{x} = Ax + B \text{ no tiene P.E.}$$

(\Rightarrow)

Empecemos considerando que el sistema $\dot{x} = Ax + B$ no tiene puntos de equilibrio.

$$Ax + B \text{ no tiene P.E.}$$

El sistema no tiene puntos de equilibrio entonces $\forall x \in \mathbb{R}^n, Ax \neq -B$.

$$Ax + B \text{ no tiene P.E.} \implies \forall x \in \mathbb{R}^n, Ax \neq -B$$

Puesto que A no mapea a $-B$ entonces $-B$ no pertenece a la imagen de A .

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, Ax \neq -B \implies -B \notin \text{range}A$$

Puesto que $-B$ no es parte de la imagen de A se sigue que $-B$ es linealmente independiente de los vectores columna no nulos de la matriz A .

$$-B \notin \text{range}A \implies \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, -B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j$$

Puesto que $-B$ es linealmente independiente de los vectores columna no nulos de A entonces B también es linealmente independiente.

$$\forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, -B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j \implies \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j$$

Como B es linealmente independiente de los m vectores columna no nulos de A entonces $\text{rank}A < m \leq n$.

$$\forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j \implies \text{rank}A < n$$

Puesto que $\text{rank}A < n$ entonces $\det(A) = 0$.

$$\text{rank}A < n \implies \det(A) = 0$$

Al ser $\det(A) = 0$ se sigue que A es singular.

$$\det(A) = 0 \implies A \text{ es singular}$$

□

Corolario 6.1 Dado un sistema dinámico basado en una transformación afín de la forma $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B$ donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $B \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante diferente de cero y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un operador lineal, el sistema no posee puntos de equilibrio si y solo si:

- $rank([A, B]) > rank(A)$.

Demostración. (\Leftarrow)

Considere primero que $rank([A, B]) > rank(A)$.

$$rank([A, B]) > rank(A)$$

Puesto que $[A, B]$ es una matriz rectangular su rango es a lo mucho n y como $rank([A, B]) > rank(A)$ se sigue que $rank(A) < n$ por lo que A es no invertible. Además puesto que el rango de $[A, B]$ es igual al número de vectores columna linealmente independientes de $[A, B]$, B debe ser linealmente independiente de los vectores columna no nulos de A . Definamos a b_j con $j = 1, \dots, m$ los vectores columna no nulos de la matriz A donde $m \leq n$.

$$rank([A, B]) > rank(A) \implies (rank(A) < n \wedge \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j)$$

Como $rank(A) < n$ entonces $det(A) = 0$.

$$rank(A) < n \implies det(A) = 0$$

Como $det(A) = 0$ entonces A es no invertible.

$$det(A) = 0 \implies A \text{ es no invertible}$$

Puesto que A es no invertible y B es linealmente independiente de los vectores columna no nulos de A , se satisfacen las condiciones del Teorema 6.1 y entonces el sistema $A\mathbf{x} + B$ no tiene puntos de equilibrio.

$$(A \text{ es no invertible} \wedge \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j) \implies A\mathbf{x} + B \text{ no tiene puntos de equilibrio.}$$

(\Rightarrow)

Considere ahora que el sistema no tiene puntos de equilibrio.

$$A\mathbf{x} + B \text{ no tiene puntos de equilibrio.}$$

Como el sistema no tiene puntos de equilibrio el Teorema 6.1 dice que entonces A es no invertible y el vector B es linealmente independiente de los vectores columna no nulos de la matriz A .

$$A\mathbf{x} + B \text{ no tiene puntos de equilibrio.} \implies (A \text{ es no invertible} \wedge \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j)$$

Puesto que el rango de una matriz es igual al número de vectores columna linealmente independientes se sigue que $rank([A, B]) > rank(A)$.

$$(A \text{ es no invertible} \wedge \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, B \neq \sum_{j=1}^m c_j b_j) \implies rank([A, B]) > rank(A)$$

□

Teorema 6.2

Sean dos campos vectoriales $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B$ y $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B + k_1 C_1 + \dots + k_n C_n$ donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un operador lineal, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $B, C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}^n$ son vectores constantes y $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ constantes. Si $A = [C_1, \dots, C_n]$ entonces $f(\mathbf{x} + K) = g(\mathbf{x})$ donde $K = (k_1, \dots, k_n)^T$.

Demostración. Definamos $K = (k_1, \dots, k_n)^T$ y consideremos que $A = [C_1, \dots, C_n]$.

$$A = [C_1, \dots, C_n]$$

Por la forma en que se multiplican las matrices y como $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $K \in \mathbb{R}^n$ entonces se puede escribir $g(\mathbf{x})$ como $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B + AK$.

$$A = [C_1, \dots, C_n] \implies g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B + AK$$

Como A es un operador lineal y $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ entonces $g(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x} + K) + B$.

$$g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B + AK \implies g(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x} + K) + B$$

Ya que $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B$ se sigue que $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + K)$.

$$g(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x} + K) + B \implies g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + K)$$

□

Considere un sistema dinámico dado por la Ecuación (6.1), cuya matriz A no es de rango completo y el vector $B = 0$, lo que significa que el sistema tiene un número infinito de puntos de equilibrio. Para un vector $B \neq 0$ si este vector hace que el sistema cumpla las condiciones en el Teorema 6.1 entonces el sistema dinámico (6.1) no tiene puntos de equilibrio.

Esto nos permite comparar el sistema dinámico (6.1) con y sin puntos de equilibrio para $B = 0$ y $B \neq 0$, respectivamente, considerando la misma matriz A . En cuanto el sistema “pierde” sus puntos de equilibrio debido al vector $B \neq 0$ el campo vectorial en esos puntos ya no es cero y la magnitud y dirección del campo vectorial depende del operador lineal A y el vector B . Para ilustrar esto, considere el sistema dinámico dado por (6.1) con vector $B = 0$ y matriz A como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

con $a_{22} \neq 0$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, note que la matriz A es singular y $rank(A) = 1$. Los ejes x_1 y x_2 corresponden a los eigenspacios asociados a los eigenvalores 0 y a_{22} , respectivamente. En el

eje x_1 se encuentran los puntos de equilibrio, el eje x_2 es un eigenespacio estable para $a_{22} < 0$ e inestable para $a_{22} > 0$.

Ahora para el caso $B \neq 0$, cuando $B = (b_1, 0)^T$, hay dos casos $b_1 > 0$ y $b_1 < 0$, note que ambos casos hacen que el sistema satisfaga la segunda condición del Teorema 6.1 puesto que $\text{rank}([A, B]) = 2$. Las trayectorias en el nuevo campo vectorial se dirigen hacia mas x_1 o hacia $-x_1$ para $b_1 > 0$ y $b_1 < 0$, respectivamente. Así el sistema dinámico (6.1) no tiene puntos de equilibrio.

Después de cambiar el vector $B = 0$ a $B \neq 0$, el sistema dinámico (6.1) satisface las condiciones del Teorema 6.1 los puntos en el espacio de estados que eran equilibrio para $B = 0$ ya no son puntos de equilibrio en el caso de $B \neq 0$.

Es importante observar que los puntos de equilibrio podían haberse localizado en una forma diferente y la misma idea aplica, el cambio en el campo vectorial depende de la matriz A y del vector B . Como ejemplo de otra posible localización de los puntos de equilibrio considere el sistema dado por (2.11) con matriz A como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

donde $a_{11}, a_{21} \neq 0$. Los eigenvalores de la matriz A son a_{11} y 0 , en este caso los puntos de equilibrio están localizados a lo largo del eje x_2 . Manteniendo la matriz A y usando los mismos vectores B propuestos anteriormente las dos condiciones del Teorema 6.1 son satisfechas.

6.1 Sistemas PWL con matriz A no invertible

Considere un sistema de la forma dada por (6.1) en \mathbb{R}^3 que satisfagan las condiciones en el Teorema 6.1 y cuya matriz A tiene eigenvalores λ_i con $i = 1, 2, 3$ donde uno de ellos es igual a cero y los otros dos son complejos conjugados con parte real negativa i.e. el sistema tiene un número infinito de puntos de equilibrio para $B = 0$. Podemos pensar este sistema de la forma (6.1) en \mathbb{R}^3 como un conjunto de sistemas paralelos en \mathbb{R}^2 los cuales presentan un foco estable, una representación gráfica de esta idea se muestra la Figura 6.1.

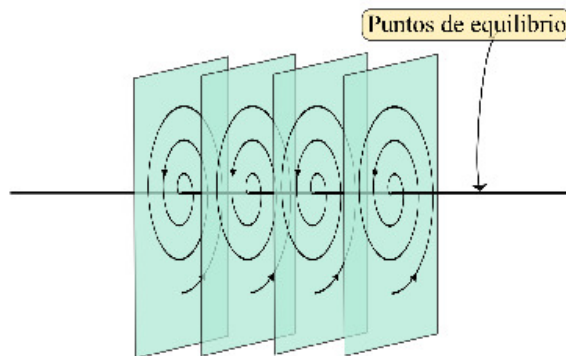


Figura 6.1: Bosquejo de un tipo de sistema 3-D de la forma (6.1) con $B = 0$ y cuya matriz A tiene un eigenvalor cero y dos complejos conjugados con parte real negativa.

Sin embargo si consideramos el vector $B \neq 0$ tal que el sistema dinámico 6.1 satisfaga las condiciones en el Teorema 6.1 lo que se obtiene es un sistema sin puntos de equilibrio en el cual las trayectorias son muy parecidas a las trayectorias que obtenemos de un sistema UDS Tipo II. Una ilustración de esta idea se muestra en la Figura 6.2.

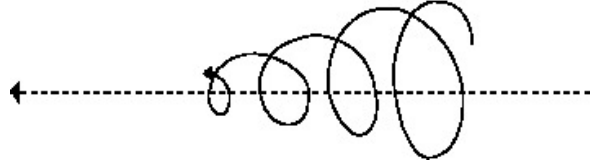


Figura 6.2: Bosquejo de las trayectorias de un sistema sin puntos de equilibrio.

Podemos pensar que tal vez con una elección adecuada de dos sistemas de la forma (6.1) que cumplan con las condiciones del Teorema 6.1 se podría obtener un sistemas lineal por partes con un atractor acotado en el espacio de estados. Una ilustración de esta idea se muestra en la Figura 6.3.

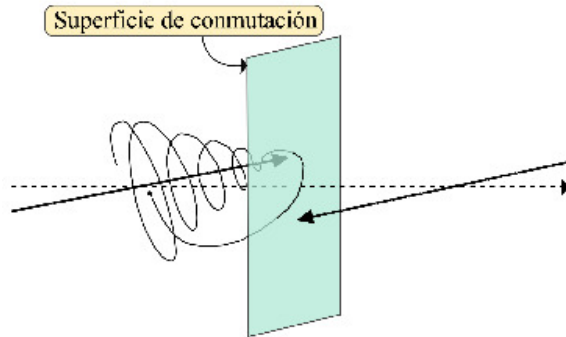


Figura 6.3: Representación gráfica de un tipo de sistemas PWL sin puntos de equilibrio.

Considere ahora una matriz dada de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & f & g \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

donde su polinomio característico tiene las raíces:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{d+a}{2} \pm \frac{\sqrt{d^2 - 2ad + a^2 + 4bc}}{2}. \quad (6.5)$$

Si deseamos que las raíces λ_2 y λ_3 sean complejas con parte real negativa se debe cumplir:

$$d+a < 0, \quad d^2 - 2ad + a^2 + 4bc < 0 \quad (6.6)$$

Para esta matriz y estas restricciones el subespacio asociado a $\lambda_1 = 0$ es expandido por el vector:

$$u_1 = \begin{bmatrix} \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

donde ϕ es un parámetro arbitrario.

El subespacio asociado a las raíces complejas es expandido por los vectores de la forma:

$$u_2 = \begin{bmatrix} \phi \frac{fbx+g(-ax+y^2+x^2)}{b(x^2+y^2)} \\ 0 \\ \phi \frac{y}{b} \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} \phi \frac{-fby+gya}{b(x^2+y^2)} \\ \phi \\ \phi \frac{-a+x}{b} \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

o bien:

$$u_2 = \begin{bmatrix} \phi \frac{fdy-gcy}{c(x^2+y^2)} \\ \frac{y}{c} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} \phi \frac{f(-dx+x^2+y^2)+gcy}{c(x^2+y^2)} \\ \frac{-d+x}{c} \\ \phi \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

donde $\lambda_2 = x + iy$, ϕ es un parámetro arbitrario y a, b, c, d, f, g son los parámetros en la matriz A .

Con la idea de la posible existencia de sistemas PWL sin puntos de equilibrio con atractores acotados en mente y pensando en una matriz de la forma (6.4) se siguió el siguiente esquema para obtener dos sistemas sin puntos de equilibrio. Este esquema que hemos utilizado puede o no conducir a la obtención de un sistema caótico para otros valores de parámetros.

1.-Seleccione una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & f & g \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

con a, b, c, d, f, g que satisfagan las siguientes condiciones:

$$d + a < 0, \quad d^2 - 2ad + a^2 + 4bc < 0, \quad f, g \neq 0 \quad (6.11)$$

2.-Seleccione dos vectores de la forma:

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} f \\ a \\ c \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} g \\ b \\ d \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} f \\ a \\ c \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} g \\ b \\ d \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

eligiendo $b_1 > 0$ y $b_2 < 0$ y asignando valores reales a tres de los cuatro parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, pueden ser el mismo valor para los tres.

3.-Encuentre un valor real para el parámetro que falta de tal manera que el sistema:

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + B_1, & \text{si } x_1 \leq 0; \\ Ax + B_2, & \text{si } x_1 > 0; \end{cases}, \quad (6.13)$$

tenga un atractor acotado con un exponente de Lyapunov positivo y obtener una condición inicial perteneciente a la cuenca de atracción.

SISTEMA A

1.-Considere la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & f & g \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -0.5 & 3 \\ 0 & -3 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

esta matriz satisface las condiciones:

$$d + a = -1, \quad d^2 - 2ad + a^2 + 4bc = -36, \quad f, g \neq 0. \quad (6.15)$$

2.- Selecciono los vectores:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3699}{999} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{20}{37} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -3 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

donde se cumple la condición de que $b_1 > 0$ y $b_2 < 0$ y se han elegido $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ y $\alpha_2 = -\frac{20}{37}$.

3.-Busco un valor real para el parámetro que falta donde el sistema dado por (6.13) tiene un atractor acotado con un exponente de Lyapunov positivo y encuentro el valor de $\beta_2 = \frac{120}{37}$ con lo que los vectores B_1 y B_2 finales son:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Una condición inicial perteneciente a la cuenca de atracción es $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)^T$.

El atractor que se obtiene es mostrado en la Figura 6.4(a) y sus proyecciones sobre los planos (x_1, x_2) , (x_1, x_3) y (x_2, x_3) en las Figuras 6.4(b), 6.4(c) y 6.4(d), respectivamente.

Se calculó el máximo exponente de Lyapunov se encontró el valor de $\lambda = 0.243$ (Figura 6.4(e)).

SISTEMA B

1.-Considere la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & f & g \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

esta matriz satisface las condiciones:

$$d + a = -1, \quad d^2 - 2ad + a^2 + 4bc = -47, \quad f, g \neq 0. \quad (6.19)$$

2.- Selecciono los vectores:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{27}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{5}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{15}{4} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

donde se cumple la condición de que $b_1 > 0$ y $b_2 < 0$ y se han elegido $\alpha_1 = -\frac{5}{4}$ $\beta_1 = \frac{15}{4}$ y $\beta_2 = 0$.

3.-Busco un valor real para el parámetro que falta donde el sistema dado por (6.13) tiene un

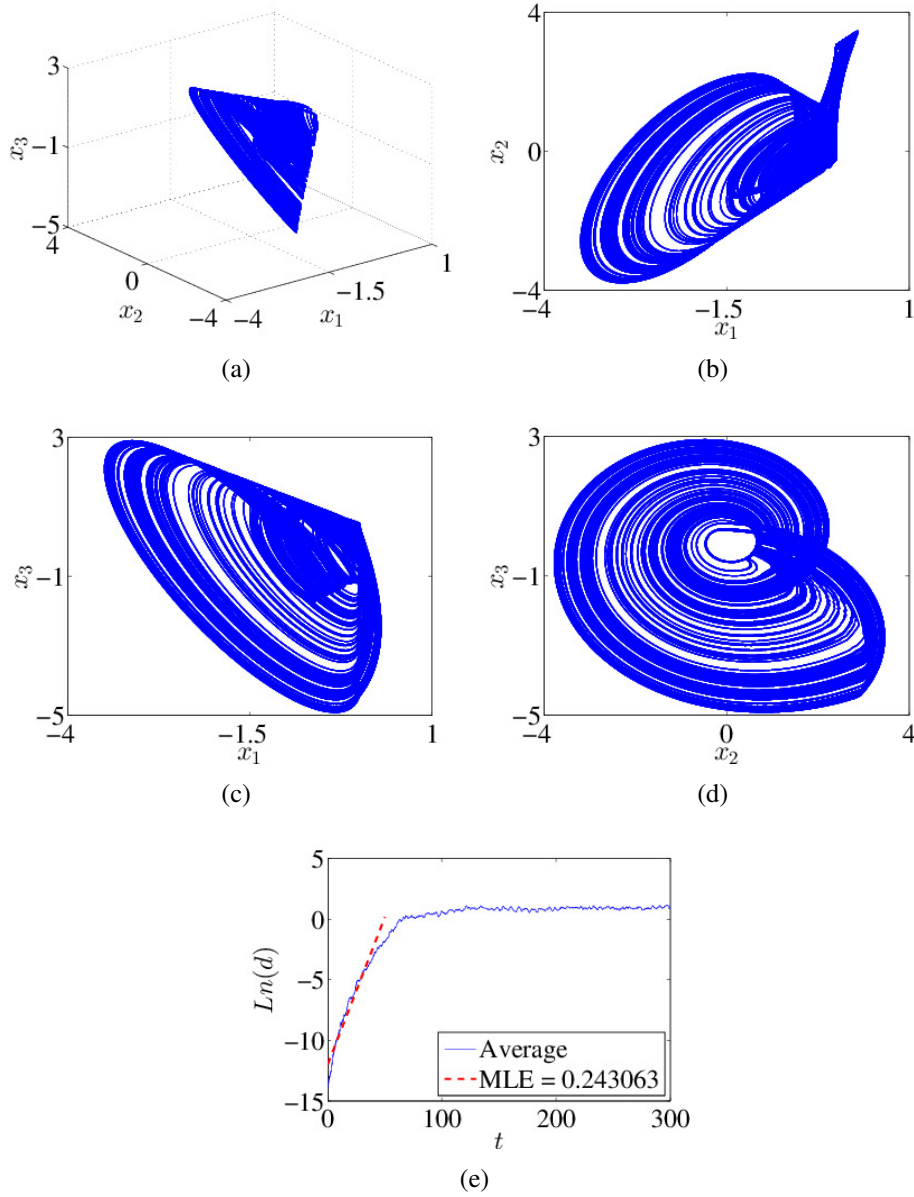


Figura 6.4: Atractor del sistema (6.13) con A dado en (6.14) y B_1 y B_2 dados en (6.17) en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . En (e) el máximo exponente de Lyapunov.

atractor acotado con un exponente de Lyapunov positivo y encuentro el valor de $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$ con lo que los vectores B_1 y B_2 finales son:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Una condición inicial perteneciente a la cuenca de atracción es $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)^T$.

El atractor resultante se muestra en la Figura 6.5(a) y sus proyecciones sobre los planos (x_1, x_2) , (x_1, x_3) y (x_2, x_3) en las Figuras 6.5(b), 6.5(c) y 6.5(d), respectivamente. Se máximo exponente de Lyapunov se muestra en la Figura 6.5(e).

Los atractores generados por los sistemas A y B de la forma (6.13) se encuentran alrededor del origen, estos se pueden desplazar sobre el eje x_1 simplemente moviendo la superficie de conmutación a lo largo del eje x_1 . Sin embargo, podemos desplazar estos atractores en los ejes x_2 y x_3 utilizando el Teorema 6.2. Así una manera de colocar el atractor del sistema A de la forma (6.13) con A dada en (6.14) y B_1 y B_2 dados en (6.17) cerca de $\mathbf{x} = (10, 10, 10)^T$ es modificando la localización de la superficie de conmutación a $x_1 = 10$ debido que esto desplaza el atractor sobre el eje x_1 . Para las otras dos direcciones solo debemos restar a ambos vectores B_1 y B_2 diez veces las columnas segunda y tercera de la matriz A. Así podemos definir los nuevos vectores B_1 y B_2 como:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -3 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -3 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

y escribir el nuevo sistema como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_1, & \text{si } x_1 < 10; \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_2, & \text{si } x_1 \geq 10. \end{cases} \quad (6.23)$$

El atractor generado al rededor del punto $\mathbf{x} = (10, 10, 10)^T$ mediante el uso del Teorema 6.2 es mostrado en la Figura 6.6(a) y sus proyecciones sobre los planos (x_1, x_2) , (x_1, x_3) y (x_2, x_3) en las Figuras 6.6(b), 6.6(c) y 6.6(d), respectivamente.

Una posible implementación electrónica del sistema A de la forma (6.13) con A dado en (6.14) y B_1 y B_2 dados en (6.17) es dada en la Figura 6.7. Como se puede ver la implementación es sencilla gracias a que solo es necesario la utilización de amplificadores operacionales, resistencias y diodos. Si embargo, otras implementaciones podrían hacer uso de conmutadores analógicos, multiplicadores analógicos y transistores.

Las proyecciones del atractor generado en la simulación de la implementación electrónica sobre los planos (x_1, x_2) , (x_1, x_3) y (x_2, x_3) se muestran en las Figuras 6.8(a), 6.8(b) y 6.8(c), respectivamente.

6.2 Sistemas PWL con matriz A invertible

Considere un sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \quad (6.24)$$

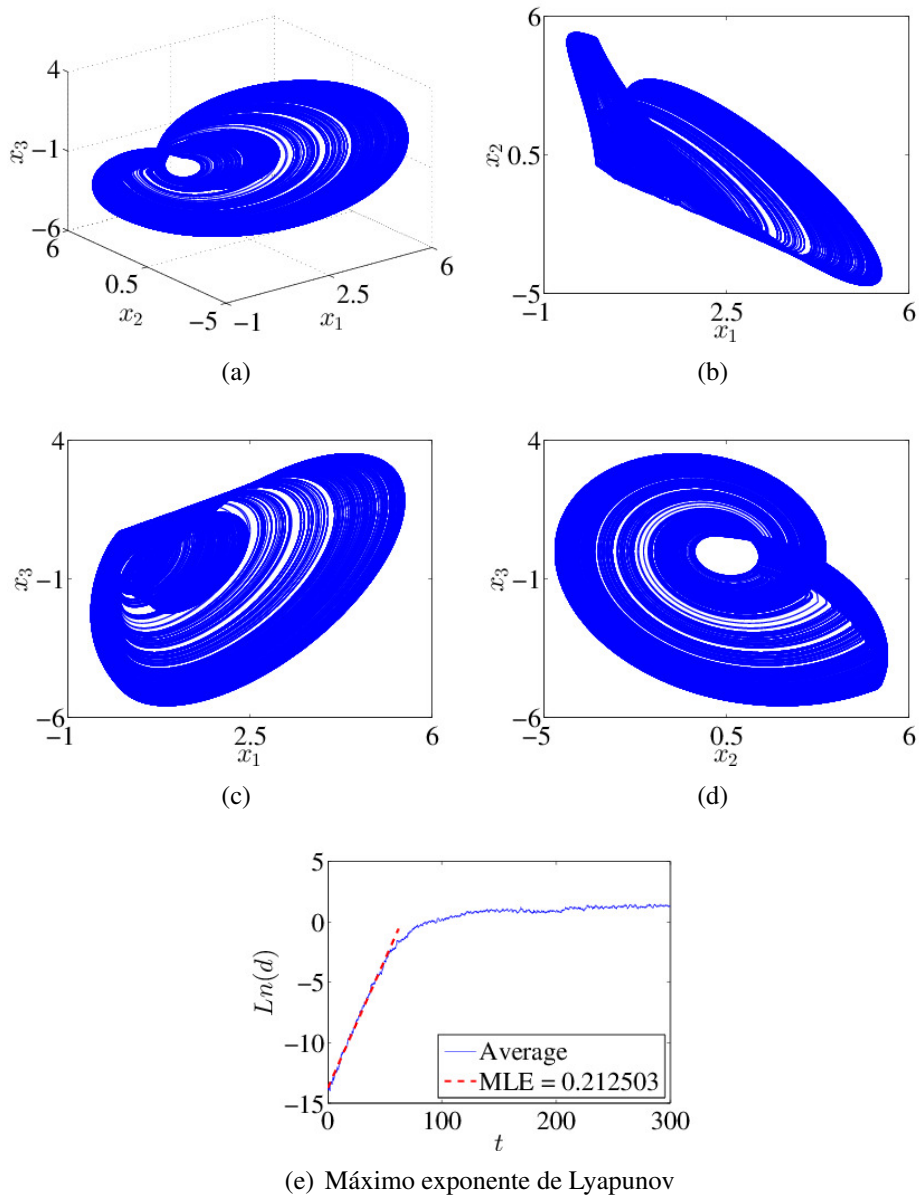


Figura 6.5: Atractor del sistema (6.13) con A dado en (6.18) y B_1 y B_2 dados en (6.21). en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . En (e) el máximo exponente de Lyapunov.

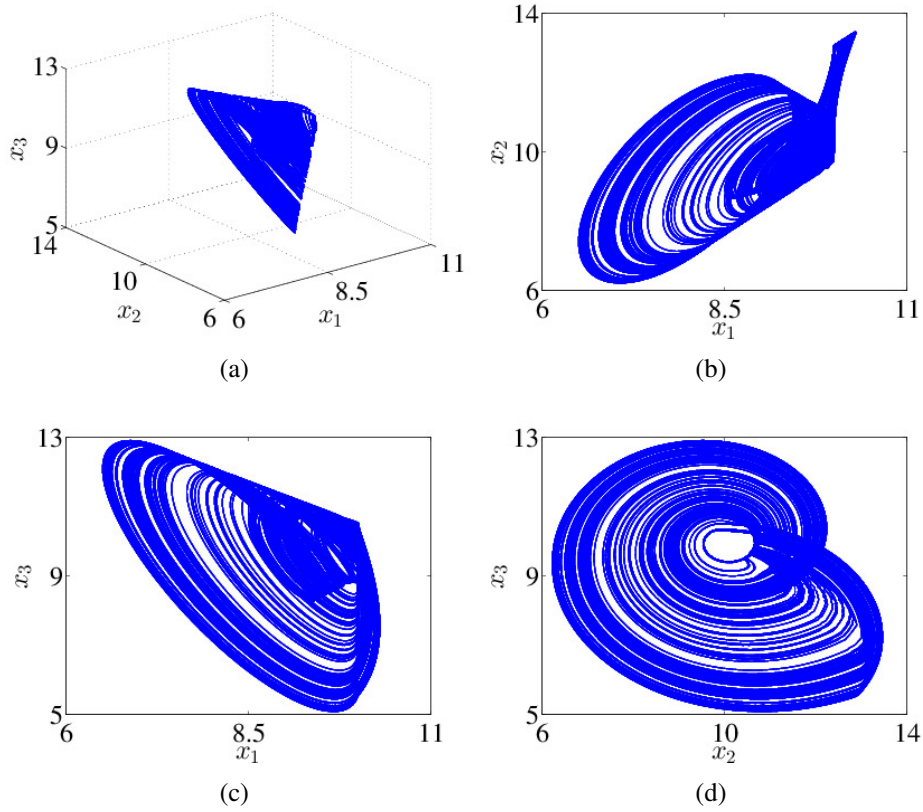


Figura 6.6: Trayectoria en el atractor del sistema (6.23) con A dada en (6.14) y B_1 y B_2 dados en (6.22) en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . El atractor se encuentra posicionado en $\mathbf{x} = (10, 10, 10)^T$ mediante traslación

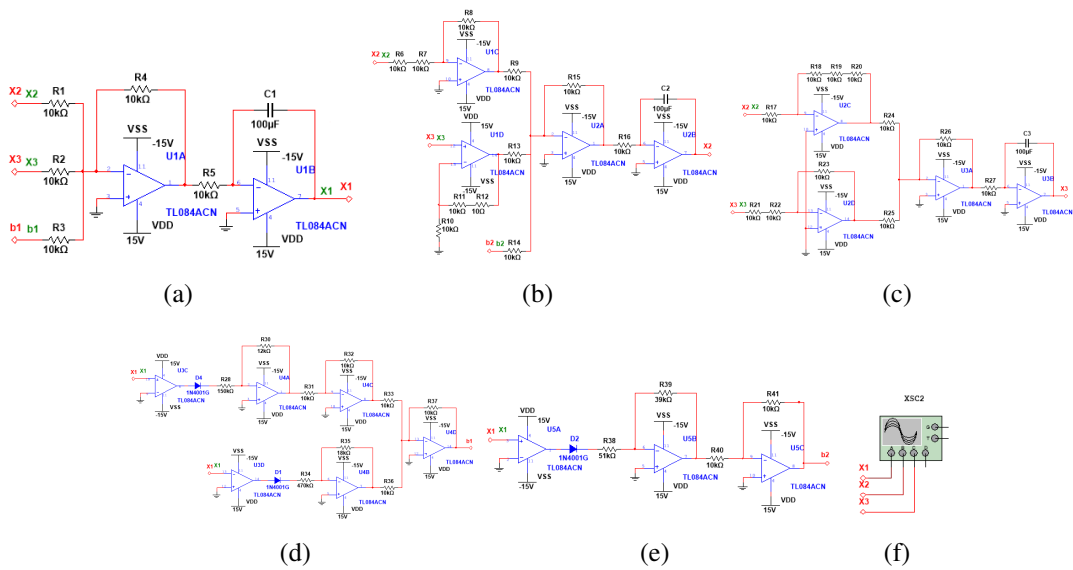


Figura 6.7: Una posible implementación electrónica del sistema (6.13) con A dado en (6.14) y B_1 y B_2 dados en (6.17). Se muestra la parte correspondiente a: (a) x_1 , (b) x_2 , (c) x_3 , (d) b_1 y (e) b_2 . En (f) se muestra la conexión al osciloscopio.

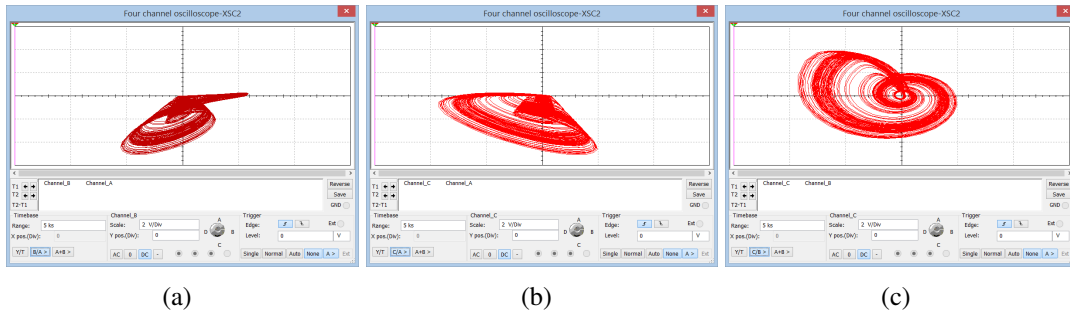


Figura 6.8: Atractor simulado de la implementación electrónica del sistema (6.13) con A dado en (6.14) y B_1 y B_2 dados en (6.17). sobre los planos: (a) (x_1, x_2) , (b) (x_1, x_3) y (c) (x_2, x_3) .

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado y $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es un operador lineal. La matriz A tiene eigenvalores λ_i con $i = 1, 2, 3$ donde dos de ellos son complejos conjugados con parte real positiva y uno de ellos real negativo.

Si establecemos una superficie de conmutación paralela al plano (x_2, x_3) pasando por el origen obtenemos un sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}, & \text{si } x_1 < 0; \\ \mathbf{A}\mathbf{x}, & \text{si } x_1 \geq 0; \end{cases} \quad (6.25)$$

Si además desplazamos los campos vectoriales en ambos subsistemas para evitar que tengan punto de equilibrio en su dominio obtenemos un sistema lineal por partes sin puntos de equilibrio con órbitas cualitativamente parecidas a las de un sistema con un punto de equilibrio tipo foco-silla. Esta idea se ilustra en la Figura 6.9.

Podemos pensar que tal vez con una elección adecuada de tres sistemas PWL de este tipo

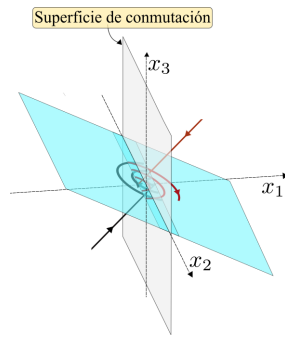


Figura 6.9: Ilustración de la idea de desplazar los campos vectoriales.

podemos obtener un sistema con un atractor multienroscado. Una ilustración de esta idea se muestra en la Figura 6.10. Con la idea de la posible existencia de sistemas PWL sin puntos de equilibrio con atractores multienroscados en mente se siguió el siguiente esquema para obtener un sistemas sin puntos de equilibrio. Este esquema que hemos utilizado puede o no conducir a la obtención de un sistema caótico para otros valores de parámetros.

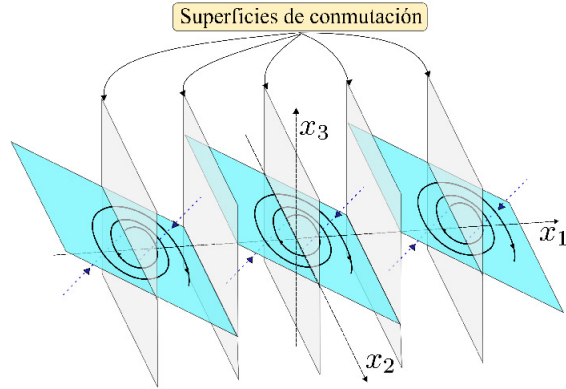


Figura 6.10: Bosquejo de un tipo de sistemas PWL.

1.-Seleccione una matriz $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

con $a > 0$, $b > 0$ y $c < 0$.

2.-Obtenga la matriz $A = PJP^{-1}$ donde P esta dada como sigue:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Denotamos como a_1, a_2, a_3 a las columnas de A .

3.-Encontrar $d \in \mathbb{R}_{>0}$, $k_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $k_3 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ y una condición inicial tal que k_2 y k_3 no sean ambos cero y que el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_1, & \text{si } x_1 < 0; \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_2, & \text{si } 0 \leq x_1 < \frac{d}{2}; \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_3, & \text{si } \frac{d}{2} \leq x_1 < d; \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_4, & \text{si } d \leq x_1 < \frac{3d}{2}; \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_5, & \text{si } \frac{3d}{2} \leq x_1 < 2d; \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_6, & \text{si } x_1 \geq 2d. \end{cases} \quad (6.28)$$

con:

$$\begin{aligned} B_1 &= -.1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3, \\ B_2 &= .1a_1 - k_2a_2 - k_3a_3, \\ C &= -da_1, \\ B_3 &= B_1 + C, \\ B_4 &= B_2 + C, \\ B_5 &= B_1 + 2C, \\ B_6 &= B_2 + 2C, \end{aligned} \quad (6.29)$$

tenga un atractor acotado con multienrosados y tenga un exponente de Lyapunov positivo. Además obtener una condición inicial perteneciente a la cuenca de atracción.

Note que el vector B_1 desplaza el campo vectorial del primer subsistema en x_1 , de modo que el punto $-A^{-1}B_1$ tiene la primera componente $x_1 = 0.1$. En el segundo subsistema $-A^{-1}B_2$ tiene la primera componente $x_1 = -0.1$. De manera similar $-A^{-1}B_3$ tiene la primera componente $x_1 = 0.1 + d$ y $-A^{-1}B_4$ tiene la primera componente $x_1 = -0.1 + d$. Finalmente $-A^{-1}B_5$ tiene la primera componente $x_1 = 0.1 + 2d$ y $-A^{-1}B_6$ tiene la primera componente $x_1 = -0.1 + 2d$. Así ningún subsistema tiene punto de equilibrio en su dominio.

SISTEMA C

1.-Considere la matriz:

$$J = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 10 \\ 0 & -10 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad (6.30)$$

la cual satisface que $a > 0$, $b > 0$ y $c < 0$.

2.-Obtengo la matriz $A = PJP^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} -2.45 & -10 & -2.55 \\ 5 & 0.1 & -5 \\ -2.55 & 10 & -2.45 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

3.-Busco y encuentro los valores de parámetros $k_2 = 0.1$, $k_3 = 0$ y $d = 8$ con los cuales el sistema de la forma dada por (6.28) tiene un atractor multienroscado con un exponente de Lyapunov positivo. Una condición inicial perteneciente a la cuenca de atracción es $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$. Los vectores resultantes B_1, \dots, B_6 son:

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{bmatrix} -0.755 \\ -0.49 \\ 1.255 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.755 \\ 0.49 \\ -1.255 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 18.845 \\ -40.49 \\ 21.655 \end{bmatrix}, \\ B_4 &= \begin{bmatrix} 20.355 \\ -39.51 \\ 19.145 \end{bmatrix}, B_5 = \begin{bmatrix} 38.445 \\ -80.49 \\ 42.055 \end{bmatrix}, B_6 = \begin{bmatrix} 39.955 \\ -79.51 \\ 39.545 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

El atractor resultante con tres enroscados sin puntos de equilibrio se muestra en la Figura 6.11(a) y sus proyecciones sobre los planos (x_1, x_2) , (x_1, x_3) y (x_2, x_3) en las Figuras 6.11(b), 6.11(c) y 6.11(d), respectivamente. Su máximo exponente de Lyapunov calculado es de $\lambda = 0.42$ (Figura 6.11(e)).

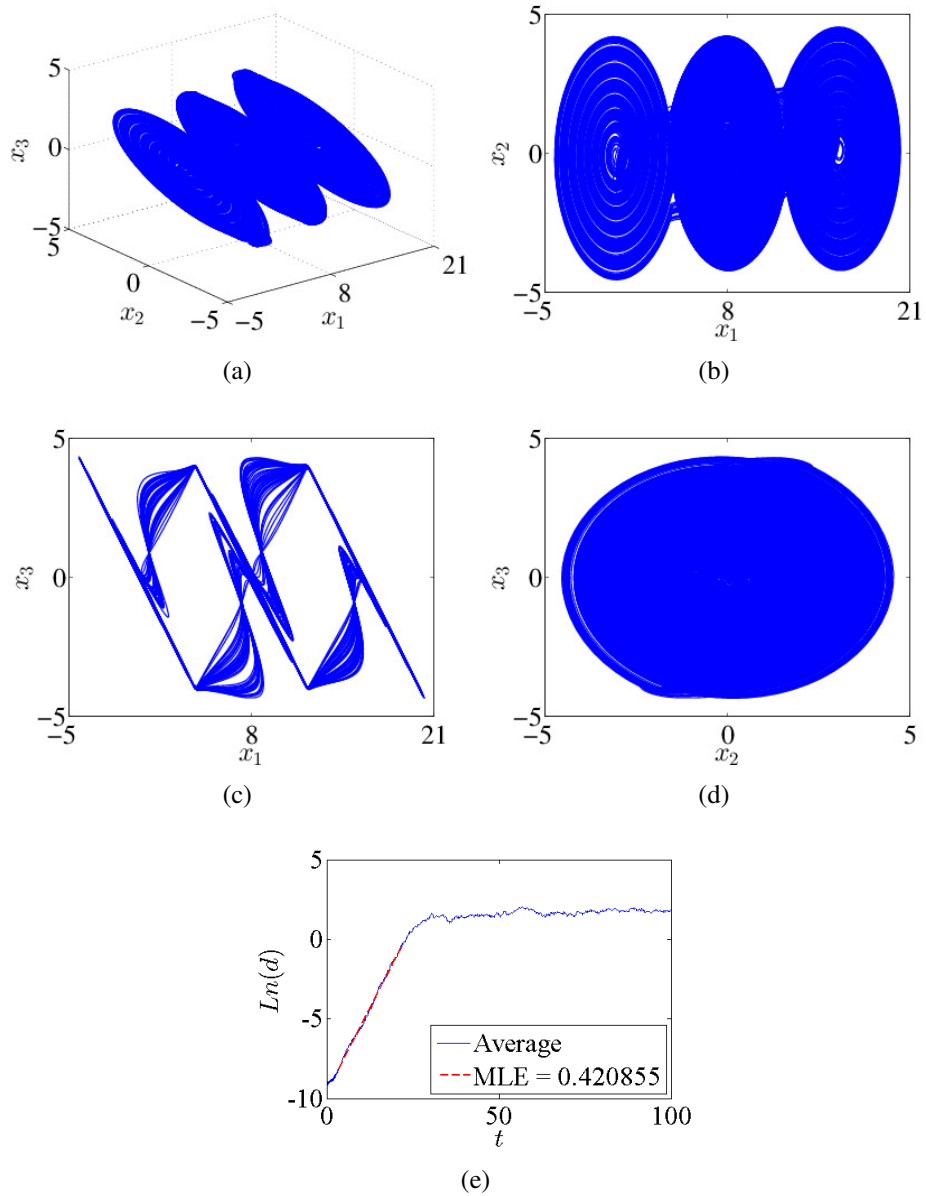


Figura 6.11: Atractor del sistema (6.28) con A dado en (6.31) y B_1 y B_2 dados en (6.32). en (a) el espacio (x_1, x_2, x_3) y sus proyecciones sobre los planos: (b) (x_1, x_2) , (c) (x_1, x_3) y (d) (x_2, x_3) . En (e) el máximo exponente de Lyapunov.

7 Conclusiones

En este trabajo de tesis se hizo una revisión de algunos sistemas dinámicos sin puntos de equilibrio que se han propuesto los cuales contienen no linealidades cuadráticas o bien funciones signo y valor absoluto en sus campos vectoriales asociados.

Como contribución principal de este trabajo se presentaron tres sistemas sin puntos de equilibrio lineales por partes. Los primeros dos sistemas (sistema A y sistema B) corresponden al caso en el que la matriz A de cada subsistema que compone al sistema PWL es no invertible. El tercer sistema (sistema C) presentado tiene un atractor multienroscado y corresponde al caso donde la matriz A de cada subsistema que compone al sistema PWL es invertible.

7.1 Trabajo a futuro

En el caso de los sistemas A y B, los atractores formados son aparentemente globalmente atractivos, sin embargo la prueba no se ha trabajado.

Un aspecto interesante que aún no se trabaja es la posibilidad de obtener sistemas de dimensión mayor a 3.

También falta estudiar aspectos de sincronización para revisar si existen ventajas sobre los sistemas con puntos de equilibrio.

Bibliografía

- [1] X. Wang and G. Chen, “Constructing a chaotic system with any number of equilibria,” *Nonlinear Dyn*, vol. 71, pp. 429–436, 2013.
- [2] D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems Theory, Models and Applications*. John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- [3] M. García-Martínez, L. J. O. nón García, E. Campos-Cantón, and S. Čelikovský, “Hyperchaotic encryption based on multi-scroll piecewise linear systems,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 270, no. 1, pp. 413–424, 2015.
- [4] J. Sprott, “Some simple chaotic flows,” *The American Physical Society, Physical Review E*, vol. 50, no. 2, pp. 647–650, 1994.
- [5] S. Jafari, J. Sprott, and S. M. R. H. Golpayegani, “Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria,” *Physics Letters A*, vol. 377, pp. 699–702, 2013.
- [6] G. Huerta-Cuellar and A. N. P. E. Jiménez-López, E. Campos-Cantón, “An approach to generate deterministic Brownian motion,” *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, vol. 19, pp. 2740–2746, 2014.
- [7] E. Campos-Cantón, R. Femat, and G. Chen, “Attractors generated from switching unstable dissipative systems,” *Chaos*, vol. 22, no. 033121, pp. 1–7, 2012.
- [8] M. Cencini, F. Cecconi, and A. Vulpiani, *Chaos From Simple to Complex Systems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2010.
- [9] C. Mazzola and M. Giunti, *Methods, Models, Simulations and Approaches Towards a General Theory of Change*. World Scientific, 2012.
- [10] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer., 2000.
- [11] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*. Springer., 2015.
- [12] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*. Springer., 1997.
- [13] J. Argyris, *An Exploration of Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2015.
- [14] R. Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems theory and experiment*. Perseus Books Publishing, L.L.C., 1992.
- [15] T. M. Apostol, *Mathematical analysis*. China Machine Press, 1996.
- [16] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier, 2004.
- [17] J. C. Sprott, *Elegant Chaos*. World Scientific., 2010.

- [18] J.-M. Ginoux, *Differential Geometry Applied to Dynamical Systems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2009.
- [19] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Perseus Books, LLC, 2015.
- [20] A. Wolf, J. Swift, H. Swinney, and J. Vastano, “Determining lyapunov exponents from a time series,” *Physica D*, vol. 16, pp. 285–317, 1985.
- [21] M. Rosenstein, J. Collins, and C. de Luca, “A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets,” *Physica D*, vol. 65, pp. 117–134, 1993.
- [22] G. Chen and X. Dong, “Controlling chua’s circuit,” *Journal of Circuits, Systems and Computers*, vol. 03, no. 01, pp. 139–149, 1993.
- [23] E. Campos-Cantón, J. Barajas-Ramirez, G. Solís-Perales, and R. Femat, “Multiscroll attractors by switching systems,” *Chaos*, vol. 20, no. 1, pp. 013116–1–6, 2010.
- [24] Z. Wang, S. Cang, E. O. Ochola, and Y. Sun, “A hyperchaotic system without equilibrium,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 69, pp. 531–537, 2012.
- [25] D. Cafagna and G. Grassi, “Chaos in a new fractional-order system without equilibrium points,” *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, vol. 19, pp. 2919–2927, 2014.
- [26] C. Li, J. C. Sprott, W. Thio, and H. Zhu, “A new piecewise linear hyperchaotic circuit,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems—Part II: Express Briefs*, vol. 61, no. 12, pp. 977–981, 2014.
- [27] G. Jeronimo, J. Sabina, and S. Tesauri, *Álgebra lineal*. CONICET-Argentina, 2008.

Anexo A: Definiciones

Definición 7.1 (Cerradura, $cl(\cdot)$)[15]

El conjunto de todos los puntos adherentes de un conjunto es llamado la cerradura de S y se denota $cl(\cdot)$.

Definición 7.2 [16]

Una matriz A es hiperbólica si ninguno de sus eigenvalores tiene parte real 0. Decimos también que el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ es hiperbólico.

Definición 7.3 [16]

Decimos que un punto de equilibrio \mathbf{x}^* de un sistema no lineal es hiperbólico si todos los eigenvalores de $D_{\mathbf{x}^*}F$ tienen parte real diferente de cero.

Definición 7.4 (Variedad)[18]

Una variedad $M \subset \mathbb{R}^n$ puede considerarse como un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n que satisface un sistema de m ecuaciones escalares:

$$\phi(\mathbf{x}) = 0,$$

donde $\phi : \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^m$ para $m \leq n$ y $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in E \subset \mathbb{R}^n$. La variedad M es suave (diferenciable) si ϕ es suave y el rango de la matriz Jacobiana $D\phi_{\mathbf{x}}$ es igual a m en cada punto $\mathbf{x} \in M$. En cada punto \mathbf{x} de una variedad suave M , un espacio tangente $T_{\mathbf{x}M}$ de dimensión $(n - m)$ es definido.

Definición 7.5 (Variedad Lineal) [27]

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{F} . Una variedad lineal $M \subseteq V$ es un conjunto de la forma $M = \{s + p : s \in S\}$, donde S es un subespacio de V y $p \in V$.

Notación $M = S + p$.

Para un punto de equilibrio hiperbólico \mathbf{x}^* las variedades estable $W_{\mathbf{x}^*}^S$ e inestable $W_{\mathbf{x}^*}^U$ satisfacen:

$$\forall \mathbf{x} \in W_{\mathbf{x}^*}^S, \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$$

$$\forall \mathbf{x} \in W_{\mathbf{x}^*}^U, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$$

Definición 7.6 (Fractal)[14]

Un fractal es un subconjunto de \mathbb{R}^n el cual es autosimilar y cuya dimensión fractal excede su dimensión topológica.

La idea de autosimilitud es que si examinamos pequeñas porciones de un conjunto bajo el microscopio la imagen que vemos se asemeja a nuestro conjunto original [14].

Definición 7.7 [14]

Un conjunto S tiene dimensión topológica 0 si cada punto tiene vecindades arbitrariamente pequeñas cuyas fronteras no tocan el conjunto.

Definición 7.8 [14]

Un conjunto S tiene dimensión topológica k si cada punto en S tiene vecindades arbitrariamente pequeñas cuyas fronteras tocan el conjunto S en un conjunto de dimensión $k - 1$, y k es el entero no negativo más pequeño para el que se cumple.

Una noción de dimensión más sensible es provista por la dimensión fractal (a veces llamada dimensión de similaridad). No todos los conjuntos tienen una dimensión fractal bien definida [14].

Definición 7.9 [14]

Un conjunto S es llamado autosimilar afín si S puede ser subdividido en K subconjuntos congruentes, cada uno de los cuales puede ser magnificado por un factor constante M para producir el conjunto S completo.

Definición 7.10 [14]

Suponga que el conjunto autosimilar afín S puede ser subdividido en k piezas congruentes, cada una de las cuales puede ser magnificada por un factor M para producir el conjunto S completo. Entonces la dimensión fractal D de S es:

$$\frac{\log(k)}{\log(M)} = \frac{\log(\text{número de piezas})}{\log(\text{factor de magnificación})}$$