



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**GENERACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS MULTIESTABLES**

Tesis que presenta

**Diana Graciela Hurtado Rodríguez**

Para obtener el grado de

**Maestro en Control y Sistema Dinámicos**

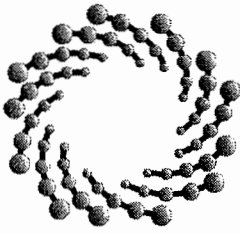
**Directores de la Tesis:**

Dr. Eric Campos Cantón

Dr. Esteban Tlelo Cuautle

San Luis Potosí, S.L.P., Julio de 2016





IPICYT

## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "**Generación de Sistemas Dinámicos Multiestables**" presentada para obtener el Grado de Maestra en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Diana Graciela Hurtado Rodríguez** y aprobada el **doce de agosto del dos mil dieciséis** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

**Dr. Eric Campos Cantón**  
Codirector de la tesis

**Dr. Esteban Tlelo Cuautle**  
Codirector de la tesis

**Dr. Diego Langarica Córdoba**  
Jurado en el Examen

**Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus**  
Jurado en el Examen



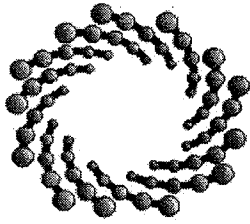


## **Créditos Institucionales**

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la codirección de los Doctores Eric Campos Cantón y Esteban Tlelo Cuautle.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 337133 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.





**IPICYT**

# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 022 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 12 días del mes de agosto del año 2016, se reunió a las 09:30 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

|  |                        |               |
|--|------------------------|---------------|
| <b>Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus</b> | <b>Presidente</b>      | <b>IPICYT</b> |
| <b>Dr. Eric Campos Cantón</b>          | <b>Secretario</b>      | <b>IPICYT</b> |
| <b>Dr. Diego Langarica Córdoba</b>     | <b>Sinodal</b>         | <b>IPICYT</b> |
| <b>Dr. Esteban Tielo Cuautle</b>       | <b>Sinodal externo</b> | <b>INAOE</b>  |

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRA EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó la C.

**Diana Graciela Hurtado Rodríguez**

sobre la Tesis intitulada:

*Generación de Sistemas Dinámicos Multiestables*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Eric Campos Cantón**  
**Dr. Esteban Tielo Cuautle (INAOE)**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLA**

Dándose por terminado el acto a las 10:36 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 12 días del mes de agosto de 2016.

  
**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

  
**Dr. Marcial Bonilla Marín**  
Secretario Académico







*A Dios.*

*A quienes me protegen desde el cielo.*

*A quienes me cuidan y me aman en la tierra.*



---

# Agradecimientos

---

A mi familia: Jesús, Jorge, Graciela, Mariana y Ma. del Refugio, por darme fortaleza y apoyarme en todo momento.

Al Dr. Eric Campos Cantón, por su paciencia y constante asesoría en la realización de esta tesis, por sus consejos brindados y por su motivación incondicional.

Al Dr. Esteban Tlelo Cuautle, por sus valiosas enseñanzas y a mis sinodales: Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus y Dr. Diego Langarica Córdoba, por sus valiosos comentarios y aportaciones para mejorar este trabajo.

A mis compañeros y amigos, en especial a Adriana, Bahia, Hector, Roberto y Rodolfo, por compartir sus conocimientos conmigo y brindarme su amistad sincera.

Al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) por las facilidades otorgadas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo brindado mediante la beca 337133 para realizar mis estudios de maestría.



---

# Contenido

---

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Constancia de aprobación de la tesis</b>            | <b>ii</b>   |
| <b>Créditos institucionales</b>                        | <b>iii</b>  |
| <b>Acta de examen</b>                                  | <b>iv</b>   |
| <b>Dedicatorias</b>                                    | <b>v</b>    |
| <b>Agradecimientos</b>                                 | <b>vi</b>   |
| <b>Abreviaturas</b>                                    | <b>xiii</b> |
| <b>Resumen</b>   | <b>xv</b>   |
| <b>Abstract</b>  | <b>xvi</b>  |
| <b>1. Introducción</b>                                 | <b>1</b>    |
| 1.1. Panorama general de la multiestabilidad           | 1           |
| 1.2. Estado del Arte                                   | 3           |
| 1.3. Motivación  | 7           |
| 1.4. Objetivos   | 7           |
| <b>2. Antecedentes Matemáticos</b>                     | <b>9</b>    |
| 2.1. Definiciones y conceptos sobre sistemas dinámicos | 9           |
| 2.2. Sistemas disipativos inestables y caos            | 11          |
| 2.2.1. Sistemas disipativos inestables Tipo I          | 12          |
| 2.2.2. Sistemas disipativos inestables Tipo II         | 13          |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>3. Atractores multienroscado y comportamiento multiestable a través de funciones PWL dependientes de una y dos variables de estado</b> | <b>15</b> |
| Resumen   | 15        |
| 3.1. Introducción   | 16        |
| 3.2. Modelo General   | 17        |
| 3.3. Diseño de funciones PWL  | 18        |
| 3.3.1. Función PWL dependiente de $x_1$   | 19        |
| 3.3.2. Función PWL dependiente de $x_1$ y $x_2$   | 21        |
| 3.4. Conclusiones   | 24        |
| <b>4. Atractor de doble enroscado, biestabilidad o multiestabilidad a través de variaciones en el espacio de estados</b>                  | <b>25</b> |
| Resumen   | 25        |
| 4.1. Introducción al capítulo   | 25        |
| 4.2. Caracterización del espacio de estados   | 26        |
| 4.2.1. Cambios de estabilidad de los puntos de equilibrio   | 27        |
| 4.3. Atractor caótico de doble enroscado  | 29        |
| 4.3. Variaciones de parámetros y biestabilidad  | 31        |
| 4.5. Pedazos lineales y multiestabilidad  | 34        |
| 4.6. Conclusiones   | 36        |
| <b>5. Estudio de la multiestabilidad generada por UDS's Tipo II</b>   | <b>37</b> |
| Resumen   | 37        |
| 5.1. Introducción   | 37        |
| 5.2. Descripción matemática del modelo  | 38        |
| 5.3. Atractor caótico único en el espacio   | 40        |
| 5.4. Coexistencia de atractores caóticos en el espacio  | 42        |
| 5.4. Multiestabilidad en el plano $(x_1, x_2)$  | 45        |
| 5.5. Conclusiones   | 47        |
| <b>6. Conclusiones y Trabajo a futuro</b>   | <b>49</b> |
| 6.1. Conclusiones   | 49        |
| 6.2. Trabajo a futuro   | 49        |

---

# Lista de figuras

---

- 1.1. Cubo de Necker. Es una figura ambigua en donde el círculo en color azul puede verse en diferentes caras del cubo. 2
- 1.2. Proyecciones sobre el plano  $(x, y)$  de las trayectorias generadas en los atractores caóticos coexistentes con diferentes condiciones iniciales. (a)  $(x_0, y_0, z_0)^T = (0.1, 0.1, 0.1)^T$ ; (b)  $(x_0, y_0, z_0)^T = (-0.12, -0.21, 0)^T$ ; (c)  $(x_0, y_0, z_0)^T = (0.21, 0.12, 0)^T$ . 4
- 1.3. Proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de las trayectorias generadas en los atractores coexistentes con diferentes condiciones iniciales:  $\mathbf{x}(0) = (0.1, 0.1, 0)^T$  color azul;  $\mathbf{x}(0) = (0.6, 0.6, 0)^T$  color rojo;  $\mathbf{x}(0) = (1.5, 1.5, 0)^T$  color verde;  $\mathbf{x}(0) = (2, 2, 0)^T$  color morado;  $\mathbf{x}(0) = (2.5, 2.5, 0)^T$  color amarillo;  $\mathbf{x}(0) = (3, 3, 0)^T$  color café;  $\mathbf{x}(0) = (3.6, 3.6, 0)^T$  color cyan;  $\mathbf{x}(0) = (5, 5, 0)^T$  color magenta. 5
- 1.4. Proyecciones sobre el plano  $(x, y)$  de las trayectorias generadas en los atractores coexistentes con diferentes condiciones iniciales:  $(x_0, y_0, z_0)^T = (2.5, 2, -1)^T$  color azul;  $(x_0, y_0, z_0)^T = (1, 2, -1)^T$  color verde. 6
- 2.1. Proyecciones de una trayectoria en el atractor originado por UDS't's Tipo I sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_1, x_3)$ ; y (c)  $(x_2, x_3)$ . 13
- 2.2. Proyecciones de una trayectoria en el atractor originado por UDS't's Tipo II sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_1, x_3)$ ; y (c)  $(x_2, x_3)$ . 14
- 3.1. Comportamiento de la función saturada propuesta 19
- 3.2. Pedazos lineales definidos por la función  $f(x_1)$  para diferentes valores de  $n$ . 20

- 3.3. Proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de las trayectorias en los atractores caóticos generados. (a) Atractor de 7 enroscados correspondiente a  $n = 3$  con su correspondiente cuenca de atracción; (b) Atractor de 25 enroscados correspondiente a  $n = 12$  con su correspondiente cuenca de atracción. 21
- 3.4. Pedazos lineales definidos en  $x_1$  y  $x_2$  por la función  $f(x_1, x_2)$ . 22
- 3.5. Proyecciones sobre el plano (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_2, x_3)$ ; (c)  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria en el atractor para la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$ . 23
- 3.6. (a) Proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de diferentes trayectorias en algunos de los atractores caóticos coexistentes; (b) cuencas de atracción pertenecientes a los atractores caóticos coexistentes mostrados. 23
- 4.1. Cambios en las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio. (a) trayectorias que convergen a los equilibrios a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.001, 0, 0)^T$  y  $a = 0.9$ ; (b) trayectorias en los ciclos límite a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.5, 0, 0)^T$  y  $a = 1$ ; (c) trayectorias en el atractor de doble enroscado a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.1, 0, 0)^T$  y  $a = 1.1$ ; (d) trayectorias divergentes a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.001, 0, 0)^T$  y  $a = 1.44$ . 28
- 4.2. (a) Bifurcación de Hopf en 3D considerando los ejes  $a, Re(\lambda), Im(\lambda)$ ; (b) Bifurcación vista sobre el plano  $(a, Re(\lambda))$ , los valores positivos de la parte real de los eigenvalores se muestran en color rojo; (c) Bifurcación vista sobre el plano  $(a, Im(\lambda))$ ; (d) Bifurcación vista sobre el plano  $(Re(\lambda), Im(\lambda))$ , la parte imaginaria de los eigenvalores complejos cruza el eje real. 29
- 4.3. Espacio dividido en dos dominios por el plano  $S$ . Cada dominio  $\mathcal{D}_{\pm 1}$  contiene en su interior un punto de equilibrio ubicado en el cruce de una variedad estable y una inestable. 30
- 4.4. Proyecciones sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_2, x_3)$ ; (c)  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria generada en el atractor de doble enroscado a partir de  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0.1)^T$ ; (d) cuenca de atracción perteneciente al atractor de doble enroscado. 31
- 4.5. Diagrama de bifurcación mostrando los valores máximos (puntos en color azul) y mínimos (puntos en color rojo) de las series de tiempo dadas por  $x_1$  a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.3, 0, 0)^T$ . Con  $r > 1.10$ , se da la coexistencia de atractores. 32
- 4.6. Variedades inestables para la generación de un atractor de doble enroscado (azul) y variedades inestables para la obtención de biestabilidad. 32
- 4.7. Proyecciones sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_2, x_3)$ ; (c)  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria en el atractor a partir de  $\mathbf{x}(0) = (-1.1, 0, 0.1)^T$ . 33



|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.8.  | Proyecciones sobre los planos (a) $(x_1, x_2)$ ; (b) $(x_2, x_3)$ ; (c) $(x_1, x_3)$ de la trayectoria en el atractor coexistente a partir de $\mathbf{x}(0) = (1.1, 0, 0.1)^T$ .  | 33 |
| 4.9.  | Coexistencia en el espacio de estados de los atractores pertenecientes a los dominios $\mathcal{D}_{\pm 1}$ .  | 34 |
| 4.10. | Porción de las cuencas de atracción del sistema biestable. En color magenta se representan las condiciones iniciales pertenecientes a la cuenca de atracción del atractor generado en el dominio $\mathcal{D}_{-1}$ y en color verde se muestran las condiciones iniciales pertenecientes a la cuenca de atracción del atractor generado en el dominio $\mathcal{D}_1$ .   | 34 |
| 4.11. | Proyecciones sobre el plano $(x_1, x_2)$ de las trayectorias generadas en los seis atractores coexistentes en el espacio.  | 35 |
| 4.12. | Porción de las cuencas de atracción pertenecientes a los seis atractores coexistentes en el espacio.   | 36 |
| 5.1.  | Diagramas de bifurcación obtenidos al variar el parámetro $a$ dentro del intervalo $0.25 \leq a \leq 60$ (a) $a$ vs $Re(\lambda)$ , los puntos en color azul corresponden a valores positivos mientras que los de color rojo son de valores negativos; (b) $a$ vs $Im(\lambda)$ , los puntos en color azul representan a valores imaginarios nulos y los de color rojo imaginarios diferentes a cero. Cuando $a = 41$ , dejan de existir los eigenvalores complejos conjugados y se tienen tres eigenvalores reales distintos: uno positivo y dos negativos. | 40 |
| 5.2.  | Plano $S_{-1}$ y variedades estable $W^S$ e inestable $W^U$ , tangentes a los equilibrios $\mathbf{x}_0^*$ y $\mathbf{x}_{-10}^*$ .  | 41 |
| 5.3.  | Proyecciones sobre los planos (a) $(x_1, x_2)$ ; (b) $(x_2, x_3)$ ; (c) $(x_1, x_3)$ de la trayectoria en el atractor a partir de $\mathbf{x}(0) = (-1.1, 0, 0)^T$ ; (d) Sección de Poincaré con colocación del plano $\pi_P : x_1 = -1$ .   | 42 |
| 5.4.  | Planos $S_{\pm 1}$ y variedades estable $W^S$ e inestable $W^U$ , tangentes a los equilibrios $\mathbf{x}_0^*$ y $\mathbf{x}_{\pm 10}^*$ .   | 43 |
| 5.5.  | Proyecciones sobre los planos (a) $(x_1, x_2)$ ; (b) $(x_2, x_3)$ ; (c) $(x_1, x_3)$ de la trayectoria generada en el atractor a partir de $\mathbf{x}(0) = (1.1, 0, 0)^T$ ; (d) Sección de Poincaré obtenida con la colocación del plano $\pi_P : x_1 = 1$ .  | 44 |
| 5.6.  | Espacio de estados de las trayectorias generadas en los atractores coexistentes a partir de las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = (-1.025, 0, 0.1)^T$ y $\mathbf{x}(0) = (1.025, 0, 0.1)^T$ .   | 45 |
| 5.7.  | Porción de la cuenca de atracción del sistema conformada por $\Omega_1$ (puntos en color verde) y $\Omega_2$ (puntos en color magenta).  | 45 |
| 5.8.  | Proyecciones sobre el plano $(x_1, x_2)$ de las trayectorias generadas en los cuatro atractores caóticos coexistentes en el espacio.   | 46 |

5.9. Parte de las cuencas de atracción pertenecientes a los cuatro atractores caóticos coexistentes en el espacio.

47

---

# Abreviaturas

---

|            |  |
|------------|--|
| <b>LE</b>  | Exponente de Lyapunov<br>(Lyapunov Exponent)                       |
| <b>MLE</b> | Máximo Exponente de Lyapunov<br>(Maximal Lyapunov Exponent)        |
| <b>ODE</b> | Ecuación Diferencial Ordinaria<br>(Ordinary Differential Equation) |
| <b>PWL</b> | Lineal por pedazos<br>(Piecewise Linear)                           |
| <b>UDS</b> | Sistema Disipativo Inestable<br>(Unstable Dissipative System)      |



---

# Resumen

---

El trabajo de investigación que está presente en esta tesis se enfoca en la generación de sistemas dinámicos multiestables. Aquí, la multiestabilidad puede ser vista como un fenómeno a través del cual, un sistema lineal afín en  $\mathbb{R}^3$  conteniendo una función PWL, origina dos o más cuencas de atracción pertenecientes a atractores caóticos distintos. Ya que la multiestabilidad puede ser encontrada en diversas áreas de la ciencia, en el Capítulo 1 se narra como es percibido tal fenómeno en otras áreas y la importancia de su generación.

Para lograr los objetivos planteados, fueron necesarias las bases matemáticas que se encuentran en el Capítulo 2, donde se mencionan algunas definiciones y conceptos relacionados a la teoría de sistemas disipativos con dinámica inestable (que llamaremos sistemas disipativos inestables) y caos.

Por su parte, los Capítulos 3, 4 y 5 fueron redactados para mostrar individualmente los resultados que se obtuvieron. Cada uno de estos capítulos puede ser consultado en forma aleatoria, sin la necesidad de leer otro capítulo previamente.

En Capítulo 3, se muestra un sistema lineal afín para el cual, la multiestabilidad depende principalmente de una función PWL contenida en la parte afín. En Capítulo 4, se describe como la multiestabilidad puede ser obtenida por medio de la modificación de parámetros de la parte lineal del sistema. En capítulo 5, se corrobora que sistemas basados en UDS's Tipo II [27], propician sistemas multiestables si tienen una función PWL adecuada.

Finalmente, las conclusiones y trabajo a futuro se describen en el Capítulo 6.

---

# Abstract

---

The research that is present in this thesis focuses on generating multistable dynamical systems. Here, multistability can be seen as a phenomenon through which, an affine linear system in  $\mathbb{R}^3$  containing a PWL function is able to originate two or more basins of attraction belonging to different chaotic attractors. Since multistability can be found in various areas of science, in Chapter 1 it is narrated how this phenomenon is perceived in other areas and the importance of its generation.

To achieve the proposed objectives, it was necessary to present the mathematical bases that can be found in Chapter 2, where some definitions and concepts related to theory about dissipative systems that have unstable dynamic (they will be called unstable dissipative systems) and chaos are mentioned.

Meanwhile, Chapters 3, 4 and 5 were written to individually display the results that were obtained. Each of these chapters can be consulted randomly, and previous reading of any other chapter is not required.

In Chapter 3, it is shown an affine linear system for which multistability depends mainly on PWL function contained in the affine part.

In Chapter 4, it is described how multistability can be obtained by modifying parameters of the linear part of the system.

In Chapter 5, it is confirmed that systems based on UDS 's Type II [27], can propitiate multistable systems if they have an adequate PWL function.

Finally, conclusions and future work are presented in Chapter 6.

# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

En sistemas dinámicos disipativos, multiestabilidad significa la coexistencia de diferentes estados estables<sup>1</sup> finales posibles para un conjunto de parámetros dados. El estado final al cual el sistema convergerá, depende crucialmente de las condiciones iniciales, *i.e.*, la dinámica a largo plazo correspondiente a uno de los atractores es definida por la condición inicial. El conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a un conjunto de trayectorias que convergen hacia el mismo atractor, llamado cuenca de atracción, puede tener una estructura fractal o muy complicada.[1].

### 1.1. Panorama general de la multiestabilidad

Ya que el fenómeno de multiestabilidad puede encontrarse de forma habitual en la naturaleza o puede ser creado de manera convencional por la ciencia, se dará una breve reseña de algunas líneas de investigación que se encargan del estudio y modelado de sistemas multiestables pertenecientes a sus respectivas disciplinas.

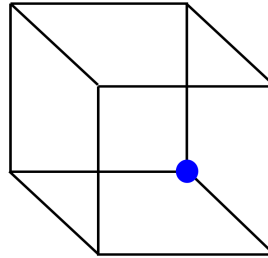
#### **Multiestabilidad en percepción visual**

El primer trabajo que acuñó el término multiestabilidad en 1971, se dedicó al estudio de la percepción visual [3]. La multiestabilidad en percepción puede ser evocada por figuras con patrones visuales que son demasiado ambiguos para el sistema visual humano, por ejemplo,

---

<sup>1</sup>Estabilidad en el sentido de Lyapunov: un punto de equilibrio  $x^*$  de un sistema dinámico en  $t = t_0$  es estable en el sentido de Lyapunov si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$  tal que  $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$ .

la Figura 1.1. Cuando dichas figuras son examinadas por un determinado tiempo, el total de percepciones alternan espontáneamente. La interpretación de imágenes visibles se define por el conocimiento previo y la experiencia personal que actúan como condiciones iniciales.



**Figura 1.1:** Cubo de Necker. Es una figura ambigua en donde el círculo en color azul puede verse en diferentes caras del cubo.

### **Multiestabilidad en sistemas biológicos**

La existencia de múltiples regímenes de funcionamiento es esencial para los sistemas biológicos ya que presentan flexibilidad funcional en respuesta a diversos estímulos. Fue en el contexto de una investigación del sistema metabólico [4], que la multiestabilidad fue discutida por primera vez en términos de la teoría de sistemas dinámicos. La presencia de múltiples atractores tiene significado biológico fundamental, en particular en la diferenciación celular y la especiación simpátrica. La multiestabilidad se ha invocado para explicar circuitos reguladores del ciclo celular en *Xenopus*, la generación de respuestas bioquímicas similares a los interruptores y el establecimiento de oscilaciones en ciclo celular, entre otros fenómenos biológicos.

### **Multiestabilidad en sistemas sociales**

La dinámica de las redes sociales explica cómo un individuo adopta un nuevo estado en comportamiento, opinión, o consumo a través de la influencia de los demás. La multiestabilidad se ha introducido en modelo de redes [5], en donde los agentes representados por vértices pueden tener una de varias opiniones. Estas opiniones son actualizadas por la dinámica de los votantes de la red. Los agentes aceptan conexiones con otros agentes, siempre que tengan igualdad de opiniones. Cuando se eliminan los enlaces y los agentes son desconectados, están asignados a tener nuevas opiniones al azar, el modelo tiene múltiples soluciones con un estado metaestable mixto de los agentes desconectados, esto corresponde a una sociedad disuelta.

### **Multiestabilidad en la dinámica del clima**

Dado que el clima está regulado por numerosos parámetros naturales y se caracteriza por



diversas variables de estado, muchos estudios apoyan la idea de que la dinámica del clima es de carácter multiestable [6]. La coexistencia de atractores, se ha obtenido en la variabilidad atmosférica, la dinámica de la capa de hielo y la desertificación del Sahara. En cada uno de estos fenómenos, el tamaño de las cuencas de atracción de los posibles estados pueden variar drásticamente; un estado en particular se determina por las condiciones iniciales y puede sufrir un cambio importante debido al ambiente ruidoso, por ejemplo, fluctuaciones aleatorias en la dirección del viento, la presión atmosférica y la temperatura.

## 1.2. Estado del Arte

Existe clara evidencia de que la coexistencia de atractores fue reportada por Arecchi y colaboradores por primera vez en un circuito electrónico [8]. El fenómeno de la multiestabilidad se ha identificado en diferentes clases de sistemas, tales como sistemas débilmente disipativos, sistemas acoplados, sistemas paraméricamente excitados, y sistemas estocásticos [9]. Experimentos y modelos teóricos revelan la presencia de diferentes rutas para lograr la multiestabilidad en diferentes clases. La aparición de una multitud de atractores depende en general de los parámetros más importantes que caracterizan a una clase de sistema particular, tal como, la fuerza de la disipación, el tipo y la fuerza de acoplamiento, la amplitud y la frecuencia del parámetro de perturbación y la intensidad de ruido.

A continuación, se presentarán algunos de los métodos reportados que han sido utilizados para la generación de sistemas dinámicos multiestables en donde se considera que los únicos estados estables finales son atractores caóticos.

### Generación de sistemas dinámicos multiestables basados en el sistema de Chua

El circuito de Chua es quizá una de las contribuciones más importantes a la teoría de sistemas caóticos construido a partir de cuatro elementos lineales (un resistor, un inductor y dos capacitores) y un resistor no lineal de dos terminales caracterizado por una curva voltaje-corriente de 5 segmentos (se toman en cuenta solo tres de los cinco segmentos ya que los dos restantes no juegan un papel importante). El circuito de Chua es descrito por la ecuación diferencial autónoma de tercer orden:

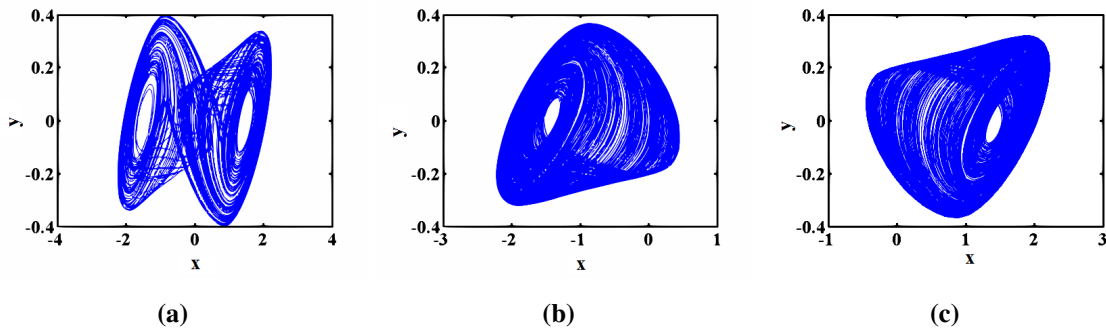
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - h(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde

$$h(x) \triangleq x + f(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|), \tag{1.2}$$

es la función PWL de tres segmentos. El sistema contiene tres puntos de equilibrio hiperbólicos tipo silla y presenta la coexistencia de tres atractores caóticos con los valores  $\alpha = 15.60$ ,

$\beta = 28.58$ ,  $m_0 = -1/7$  y  $m_1 = 2/7$  [10]. En la Figura 1.2 se muestran las proyecciones sobre el plano  $(x, y)$  de las trayectorias generadas en los tres atractores caóticos coexistentes.



**Figura 1.2:** Proyecciones sobre el plano  $(x, y)$  de las trayectorias generadas en los atractores caóticos coexistentes con diferentes condiciones iniciales. (a)  $(x_0, y_0, z_0)^T = (0.1, 0.1, 0.1)^T$ ; (b)  $(x_0, y_0, z_0)^T = (-0.12, -0.21, 0)^T$ ; (c)  $(x_0, y_0, z_0)^T = (0.21, 0.12, 0)^T$ .

En los últimos 30 años, se ha buscado la generación de sistemas dinámicos multiestables a través de sistemas caóticos con dinámica similar a la del sistema de Chua original. Por ejemplo, se ha intercambiado la función PWL por una no linealidad cúbica [11] y se ha buscado modificar las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio [12].

### Generación de sistemas dinámicos multiestables a través de sincronización

La noción de sincronización proporciona un enfoque general para la comprensión del comportamiento colectivo de sistemas dinámicos acoplados. Todos los tipos de sincronización existentes han sido extensivamente estudiados con sistemas caóticos monoestables, si los sistemas no son idénticos, se puede presentar la coexistencia de atractores caóticos en el espacio. Un ejemplo de ello en sistemas no lineales es dado en Ref. [13], donde la obtención de atractores coexistentes es generada a partir de la sincronización del sistema que modela el atractor de Rössler y el sistema que describe la dinámica del atractor de Lorenz. Otro ejemplo, es el que se da en Ref. [14], donde la multiestabilidad es lograda a partir de dos sistemas dinámicos descritos como:

$$\dot{\mathbf{x}}^m = A\mathbf{x}^m + B\mathbf{u}^m, \quad (1.3)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^s = A\mathbf{x}^s + B\mathbf{u}^s + C(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^s), \quad (1.4)$$

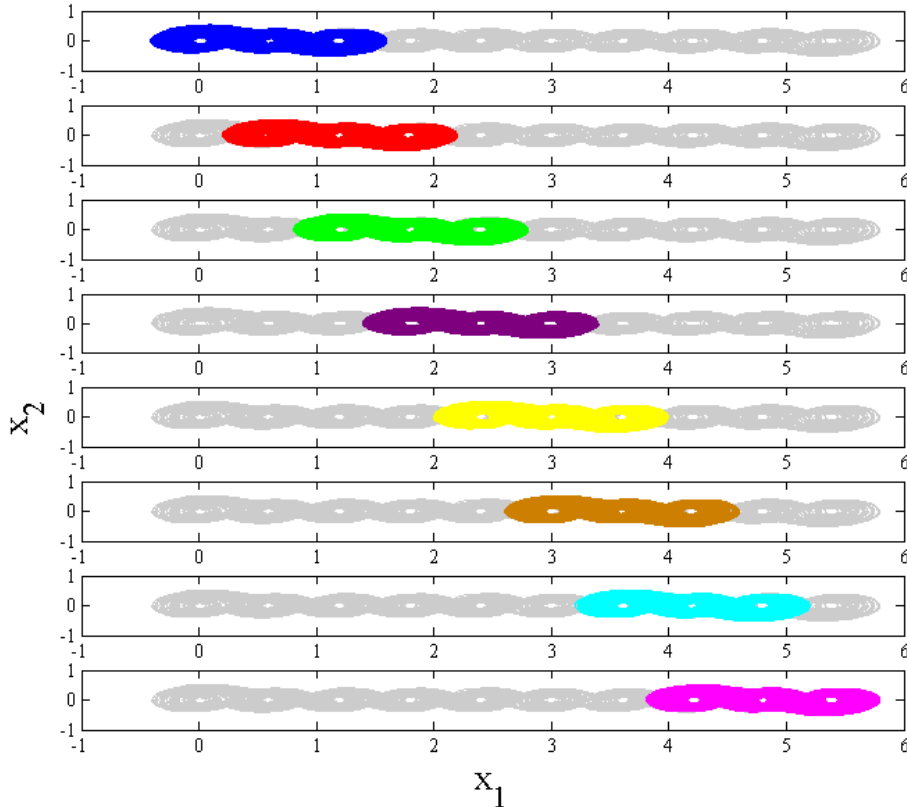
donde  $\mathbf{x}^m = (x_1^m, x_2^m, x_3^m)^T \in \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{x}^s = (x_1^s, x_2^s, x_3^s)^T \in \mathbb{R}^3$  son los vectores de las variables de estado,  $B = (0, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^3$  es un vector real y  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz definida por un número real ( $c_{22} \neq 0$ ). La matriz  $A$  es definida como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.5 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

y las funciones de control  $u^m$  y  $u^s$  están dadas por:

$$u^s = \begin{cases} 8.1, & \text{si } 7.8 \leq x_1; \\ 7.2, & \text{si } 6.7 \leq x_1 < 7.8; \\ 6.3, & \text{si } 6 \leq x_1 < 6.7; \\ 5.4, & \text{si } 5.1 \leq x_1 < 6; \\ 4.5, & \text{si } 3.9 \leq x_1 < 5.1; \\ 3.6, & \text{si } 3.3 \leq x_1 < 3.9; \\ 2.7, & \text{si } 2.1 \leq x_1 < 3.3; \\ 1.8, & \text{si } 1.5 \leq x_1 < 2.1; \\ 0.9, & \text{si } 0.3 \leq x_1 < 1.5; \\ 0, & \text{si } x_1 < 0.3. \end{cases} \quad u^m = \begin{cases} 0.9, & \text{si } x_1 \geq 0.3; \\ 0, & \text{si } 0.3 < x_1 < 0.3; \\ -0.9, & \text{si } x_1 \leq -0.3. \end{cases} \quad (1.6)$$

Las proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de las trayectorias generadas en los ocho atractores coexistentes son mostradas en la Figura 1.3.



**Figura 1.3:** Proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de las trayectorias generadas en los atractores coexistentes con diferentes condiciones iniciales:  $\mathbf{x}(0) = (0.1, 0.1, 0)^T$  color azul;  $\mathbf{x}(0) = (0.6, 0.6, 0)^T$  color rojo;  $\mathbf{x}(0) = (1.5, 1.5, 0)^T$  color verde;  $\mathbf{x}(0) = (2, 2, 0)^T$  color morado;  $\mathbf{x}(0) = (2.5, 2.5, 0)^T$  color amarillo;  $\mathbf{x}(0) = (3, 3, 0)^T$  color café;  $\mathbf{x}(0) = (3.6, 3.6, 0)^T$  color cyan;  $\mathbf{x}(0) = (5, 5, 0)^T$  color magenta.

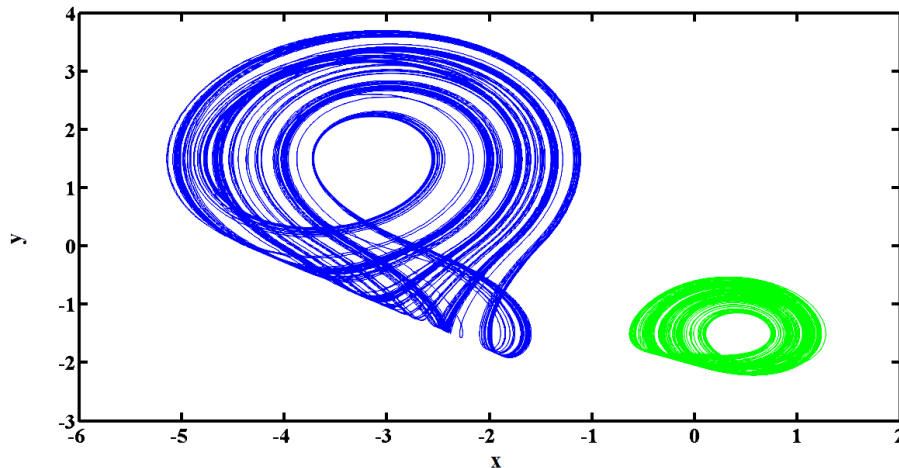
## Generación de sistemas dinámicos multiestables excitados con parámetros

Adaptar un sistema caótico para aplicaciones de ingeniería frecuentemente requiere un control de fase y amplitud. La forma más eficaz de lograrlo es introduciendo un parámetro en un coeficiente cuadrático del sistema pero si esta modificación introduce puntos de equilibrio adicionales al sistema o cambia la estabilidad de los equilibrios existentes, el control de la amplitud podría no ocurrir y a cambio de eso, se obtendría la coexistencia de atractores.

Entre los sistemas que han sido excitados con algún parámetro, se encuentra el que modela al atractor de Linz [15]:  $\ddot{x} = -a\ddot{x} - \dot{x} + |x| - 1$ . Uno de los nuevos sistemas es propuestos en Ref.[17] y está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= |y| - b, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= |x| - y - az - c,\end{aligned}\tag{1.7}$$

donde  $a = 0.6$ ,  $b = 1.5$  y  $c = 2$  son los parámetros con los cuales el sistema presenta la coexistencia de dos atractores que pueden visualizarse en la Figura 1.4.



**Figura 1.4:** Proyecciones sobre el plano  $(x, y)$  de las trayectorias generadas en los atractores coexistentes con diferentes condiciones iniciales:  $(x_0, y_0, z_0)^T = (2.5, 2, -1)^T$  color azul;  $(x_0, y_0, z_0)^T = (1, 2, -1)^T$  color verde.

El término en valor absoluto adicional agrega puntos de equilibrio al sistema (1.7), otras funciones que han sido examinadas para este mismo sistema han sido la función  $sign(\cdot)$ , y la combinación de estas dos funciones [16].

## 1.3. Motivación

Hoy en día, describir cada proceso existente o admisible por la ciencia se ha convertido en un desafío latente. Resulta un factor alentador la idea de reproducir por medio de modelos matemáticos, la dinámica de fenómenos naturales, biológicos y sociales, que ayuden a una mayor comprensión de hechos que no son sencillos de predecir. Ya que la multiestabilidad se encuentra de forma natural en muchos de los fenómenos investigados por la ciencia, la búsqueda de una descripción a través de ecuaciones matemáticas del comportamiento de dicho fenómeno, derivó en la generación de sistemas multiestables.

En la actualidad, generar sistemas multiestables es de suma importancia debido a la gran variedad de aplicaciones que se tienen: sincronización [7, 18] redes complejas [19, 20], comunicación [21], clima [22], entre otras. Asimismo, los sistemas multiestables generados pueden contribuir al estudio sobre las técnicas de control para compensar su alta sensibilidad ante cualquier perturbación [1].

## 1.4. Objetivos

### Objetivo general

Generar sistemas dinámicos multiestables teniendo atractores caóticos como estados estables finales a partir de sistemas lineales afín en  $\mathbb{R}^3$ .

### Objetivos específicos

- Diseñar funciones PWL que definan pedazos lineales en una o dos direcciones.
- Proponer estructuras de matrices  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , que formarán parte de los sistemas lineales afín.
- Obtener los parámetros de cada elemento en las matrices propuestas, que permitan la coexistencia de atractores caóticos.
- Mostrar numéricamente los atractores caóticos que se encuentran coexistiendo.
- Calcular numéricamente parte de las cuencas de atracción pertenecientes a los atractores caóticos coexistentes.



# CAPÍTULO 2

---

## Antecedentes Matemáticos

---

Antes de comenzar con la discusión de la teoría para la generación de estructuras multiestables, se ha propuesto una revisión de los antecedentes matemáticos para facilitar la interpretación de resultados y favorecer a la construcción de nuevo conocimiento para futuras investigaciones. Este capítulo es un repaso de las bases matemáticas que sustentan el trabajo de investigación, estará dividido en dos secciones: en la primera sección se hará una breve recapitulación de las definiciones y teoremas más relevantes que existen sobre el análisis de sistemas dinámicos; mientras que en la segunda sección se hace inclusión de la teoría de sistemas disipativos inestables y caos.

### 2.1. Definiciones y conceptos sobre sistemas dinámicos

A continuación se darán algunas definiciones y conceptos básicos de la teoría local de sistemas no lineales de orden mayor ó igual a tres, que se usarán para la obtención de resultados mostrados en el transcurso de esta tesis.

**Definición 2.1.** [23] *Un sistema dinámico sobre  $E$  es un mapa  $C^1$   $\phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ , donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y si  $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x})$ , entonces  $\phi_t$  satisface*

i)  $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , para toda  $\mathbf{x} \in E$ ;

ii)  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}(\mathbf{x})$ , para toda  $s, t \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x} \in E$ .

**Definición 2.2.** [23] Un punto  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  es llamado un punto de equilibrio de  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  si  $f(\mathbf{x}^*) = 0$ . Un punto de equilibrio es llamado un punto de equilibrio hiperbólico de  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  si ninguno de los eigenvalores de la matriz  $Df(\mathbf{x}^*)$  tiene parte real cero. El sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

con la matriz  $A = Df(\mathbf{x}^*)$  es llamado la linealización de  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{x}^*$ .

**Definición 2.3.** [23] Un punto de equilibrio se llama sumidero si todos los eigenvalores de la matriz de  $Df(\mathbf{x}^*)$  tienen parte real negativa; se llama fuente si todos los eigenvalores de  $Df(\mathbf{x}^*)$  tienen parte real positiva; y se llama silla si es un punto de equilibrio hiperbólico y  $Df(\mathbf{x}^*)$  tiene al menos un eigenvalor con parte real positiva y al menos uno con parte real negativa.

**Definición 2.4.** [23] Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , sea  $f \in C^1(E)$ , y sea  $\phi_t : E \rightarrow E$  el flujo de la ecuación diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces el conjunto  $S \subset E$  es llamado invariante al flujo  $\phi_t$  si  $\phi(S) \subset S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $S$  es llamado positivamente (ó negativamente) invariante con respecto al flujo  $\phi_t$  si  $\phi(S) \subset S$  para todo  $t \geq 0$  (ó  $t \leq 0$ ).

Cerca de un punto de equilibrio  $\mathbf{x}^*$ , el sistema no lineal  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  tiene variedades estables e inestables  $S$  y  $U$  tangentes en  $\mathbf{x}^*$  a los eigenespacios estable e inestable  $E_s$  y  $E_u$  del sistema linealizado (2.1). Además,  $S$  y  $U$  son de las mismas dimensiones que  $E_s$  y  $E_u$ , y si  $\phi_t$  es el flujo del sistema no lineal, entonces  $S$  y  $U$  son positivamente y negativamente invariantes bajo  $\phi_t$  respectivamente.

**Definición 2.5.** [23] Sea  $X$  un espacio métrico y sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$ . Un homeomorfismo de  $A$  sobre  $B$  es un mapa continuo uno-a-uno de  $A$  sobre  $B$ ,  $h : A \rightarrow B$ , tal que  $h^{-1} : B \rightarrow A$  es continuo. Los conjuntos  $A$  y  $B$  se llaman homeomórficos o topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo de  $A$  sobre  $B$ .

### **Teorema de Hartman-Grobman**

Sea  $E$  un subespacio abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen, sea  $f \in C^1(E)$ , y sea  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ . Supóngase que  $f(0) = 0$  y que la matriz  $A = Df(0)$  no tiene eigenvalores con parte real igual a cero. Existe entonces un homeomorfismo  $H$  de un conjunto abierto  $U$  que contiene al origen sobre un conjunto abierto  $V$  que contiene el origen tal que para cada  $\mathbf{x}_0 \in U$ , existe un intervalo abierto  $I_0 \subset \mathbb{R}$  conteniendo al cero tal que para todo  $\mathbf{x}_0 \in U$  y  $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t = e^{At} H(\mathbf{x}_0);$$

i.e.,  $H$  mapea trayectorias de  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  cerca del origen sobre trayectorias de (2.1) cerca del origen y preserva la parametrización del tiempo.



**Definición 2.6.** [23] Un conjunto cerrado e invariante  $\mathcal{A} (\subset E)$  es llamado conjunto atractivo de  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ , si existe una vecindad  $U$  de  $\mathcal{A}$ , tal que para toda  $\mathbf{x} \in U$ ,  $\phi(\mathbf{x}(t)) \in U$  para todo  $t \geq 0$  y  $\phi(\mathbf{x}(t)) \rightarrow \mathcal{A}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Un atractor de  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  es un conjunto atractivo, el cual contiene una órbita densa.

## 2.2. Sistemas disipativos inestables y caos

En la actualidad, existen diferentes definiciones sobre caos que se pueden usar según sea el sistema dinámico en cuestión. Por ejemplo, un sistema se dice caótico en el sentido de Devaney, si es transitivo, sensible a las condiciones iniciales y tiene un conjunto denso de puntos periódicos [24].

Una medida para la cuantificación de caos en sistemas dinámicos es dada por el cálculo de los exponentes de Lyapunov que caracterizan el grado de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas en el espacio de fase. Como los sistemas caóticos presentan sensibilidad a las condiciones iniciales, la presencia de un exponente de Lyapunov positivo frecuentemente es tomado como un signo de caoticidad [25]. Sin embargo, la expansión exponencial o “stretching” indicada por un exponente de Lyapunov positivo sería incompatible con el movimiento de las trayectorias en la frontera de un atractor, de no ser por un proceso “folding” que las compacta. Por eso, los signos de los exponentes de Lyapunov para un sistema dinámico disipativo tridimensional son: (+, 0, -). El flujo que estará expandiéndose o contrayéndose corresponde a los exponente de Lyapunov positivos y negativos; mientras que el exponente de Lyapunov cero corresponde al cambio de magnitud del flujo tangente a un eje principal. La suma de los exponentes de Lyapunov corresponden a la divergencia de la velocidad del espacio de fase en un promedio de tiempo; por lo tanto, cualquier sistema dinámico disipativo tendrá al menos un exponente de Lyapunov negativo y la suma total de sus exponentes será negativa [26].

En general, un atractor caótico puede ser construido a partir de sistemas disipativos no lineales o por medio de sistemas disipativos lineales afín que involucran el uso de funciones PWL.

Para los casos que se manejarán en esta tesis, se considerará únicamente el uso de sistemas disipativos lineales afín de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_i, \quad B_i = \begin{cases} B_1, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{D}_1; \\ \vdots & \\ B_n, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{D}_n; \end{cases} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$  es la variable de estado,  $B_i = (b_{1i}, b_{2i}, b_{3i})^T$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son vectores reales,  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es un operador lineal y  $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{R}^3$  es el dominio o región que contendrá el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_i^* = -A^{-1}B_i$ .

### 2.2.1. Sistemas disipativos inestables Tipo I

Un sistema lineal dado por  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , en  $\mathbb{R}^3$  con eigenvalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  asociados a la matriz  $A$ , es llamado Sistema Disipativo Inestable Tipo I (UDS Tipo I), si  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$  y un eigenvalor  $\lambda_i$  es real negativo y los otros dos son complejos conjugados con parte real positiva [27].

En un UDS Tipo I similar al descrito por la ecuación (2.2), existen dos tipos de variedades: la variedad estable de una dimensión que es equivalente al eigenspacio estable  $E^s = \text{span}\{v_1\}$ , donde  $v_1$  es el eigenvector asociado al eigenvalor  $\lambda_1$  con  $Re(\lambda_1) < 0$  y la variedad inestable de dos dimensiones que es equivalente al eigenspacio inestable  $E^u = \text{span}\{v_2, v_3\}$ , donde  $v_2, v_3$  son los eigenvectores asociados a los eigenvalores  $\lambda_2, \lambda_3$  con  $Re(\lambda_2, \lambda_3) > 0$ .

La misión de las funciones PWL es la de gobernar la dinámica del sistema por medio del cambio de ubicación de un equilibrio  $\mathbf{x}_i^*$  hasta la posición  $x_j^*$ ,  $i \neq j$ , cuando el flujo  $\phi_t : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  cruza del dominio  $i$  al dominio  $j$ .

La forma más sencilla de formar los dominios  $\mathcal{D}_i$  a través de funciones PWL es definir planos paralelos entre sí que sean ortogonales a un eje del espacio.

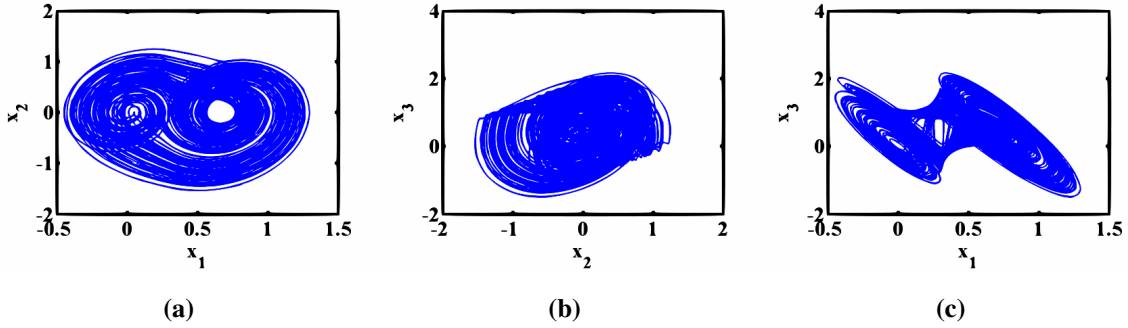
Para ejemplificar este tipo de sistemas disipativos inestables, considérese la ecuación de una estructura en  $\mathbb{R}^3$  dada por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.2465 & 1 \\ -6.8438 & -2.006 & -1.1102 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 = \begin{cases} 0, & \text{Si } x_1 < 0.3021; \\ 5.535, & \text{Si } x_1 \geq 0.3021. \end{cases} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Los eigenvalores asociados a la parte lineal del sistema son:  $\lambda_1 = -1.8730$ ,  $\lambda_2 = 0.2581 + 2.0445i$ ,  $\lambda_3 = 0.2581 - 2.0445i$ ; además,  $\sum_{j=1}^3 \lambda_j < 0$ , por lo que el sistema puede considerarse parte de la familia UDS Tipo I.

Los puntos de equilibrio del sistema se encuentran en  $\mathbf{x}_1^* = (0, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{x}_2^* = (0.6959, 0, 0.6959)^T$ .

Las proyecciones sobre los planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$  y  $(x_2, x_3)$  de una trayectoria en el atractor son mostradas en la Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Proyecciones de una trayectoria en el atractor originado por UDSf's Tipo I sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_1, x_3)$ ; y (c)  $(x_2, x_3)$ .

## 2.2.2. Sistemas disipativos inestables Tipo II

Un sistema lineal dado por  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , en  $\mathbb{R}^3$  con eigenvalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  asociados a la matriz  $A$ , es llamado Sistema Disipativo Inestable Tipo II (UDS Tipo II), si  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$  y un eigenvalor  $\lambda_i$  es real positivo y los otros dos son complejos conjugados con parte real negativa [27].

En un UDS Tipo II similar al descrito por la ecuación (2.2), existen dos tipos de variedades: la variedad inestable de una dimensión que es equivalente al eigenspacio inestable  $E^u = \text{span}\{v_1\}$ , donde  $v_1$  es el eigenvector asociado al eigenvalor  $\lambda_1$  con  $\text{Re}(\lambda_1) > 0$  y la variedad estable de dos dimensiones que es equivalente al eigenspacio estable  $E^s = \text{span}\{v_2, v_3\}$ , donde  $v_2, v_3$  son los eigenvectores asociados a los eigenvalores  $\lambda_2, \lambda_3$  con  $\text{Re}(\lambda_2, \lambda_3) < 0$ .

La cuenca de atracción  $\Omega$  de un atractor  $\mathcal{A}$  de un UDS Tipo II es localizada entre dos variedades estables  $E^s(\mathbf{x}_i^*)$ ,  $i = 1, 2$ .

Las variedades inestables  $E^u(\mathbf{x}_1^*)$  y  $E^u(\mathbf{x}_2^*)$  guían al flujo  $\phi_t$  hacia los equilibrios  $\mathbf{x}_1^*$  y  $\mathbf{x}_2^*$  respectivamente. Por lo que las órbitas oscilan entre estos dos puntos de equilibrio y toda condición inicial localizada fuera de la cuenca de atracción, se vuelve inestable.

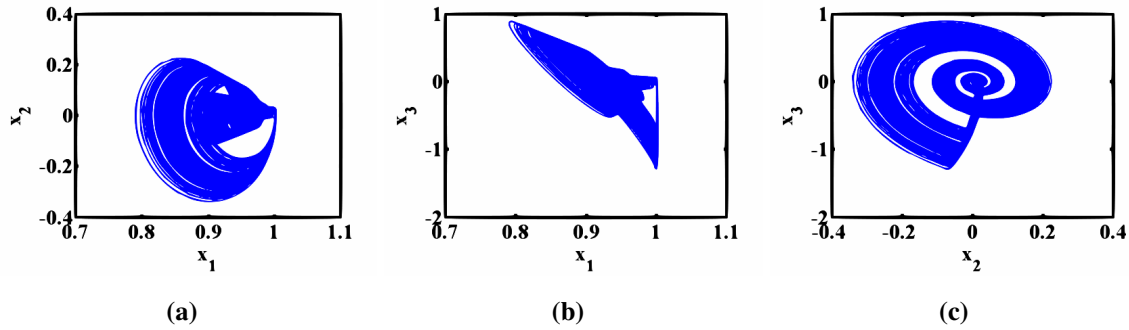
Por su parte, la distancia que existe entre los equilibrios  $\mathbf{x}_1^*$ ,  $\mathbf{x}_2^*$  y la superficie que divide a los dominios  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  debe ser asimétrica para poder romper las oscilaciones periódicas de un ciclo límite y las trayectorias queden atrapadas generando un atractor.

Para ejemplificar este tipo de sistemas disipativos inestables, considérese el sistema conmutado en  $\mathbb{R}^3$  dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.15 & -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 = \begin{cases} 0, & \text{Si } x_1 < 1; \\ -10, & \text{Si } x_1 \geq 1. \end{cases} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Los eigenvalores asociados a la parte lineal del sistema son:  $\lambda_1 = 0.0150$ ,  $\lambda_2 = -0.5075 + 3.1237i$ ,  $\lambda_3 = -0.5075 - 3.1237i$ ; además,  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$ , por lo que el sistema puede considerarse parte de la familia UDS Tipo II.

Los puntos de equilibrios del sistema se encuentran en  $\mathbf{x}_1^* = (0, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{x}_2^* = (66.6667, 0, 0)^T$ . Las proyecciones sobre los planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$  y  $(x_2, x_3)$  de una trayectoria en el atractor son mostradas en la Figura 2.2.



**Figura 2.2:** Proyecciones de una trayectoria en el atractor originado por UDS's Tipo II sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_1, x_3)$ ; y (c)  $(x_2, x_3)$ .

# CAPÍTULO 3

---

## Atractores multienroscado y comportamiento multiestable a través de funciones PWL dependientes de una y dos variables de estado

---

### Resumen

Funciones PWL que forman parte de un sistema lineal afín pueden llegar a generar diferentes tipos de comportamientos. La principal cualidad que tiene una función PWL que depende de una sola variable de estado para delimitar la cantidad de puntos de equilibrio de un sistema y su ubicación, resultan de gran interés para lograr la formación de atractores caóticos multienroscado. Sin embargo, si la función PWL depende de dos variables de estado pero afecta a largo plazo solo a una dimensión, el resultado cambia cualitativamente la dinámica del sistema. La supresión de multienroscados se hace presente pero emerge un infinito de cuencas de atracción en el espacio.

En este capítulo se presenta el modelo general de un sistema débilmente disipativo para generar atractores caóticos con cualquier número impar de enroscados por medio del uso de una función PWL dependiente de un solo estado. Asimismo se hace un cambio en la función PWL para lograr el fenómeno de multiestabilidad y obtener atractores caóticos a lo largo del eje  $x_1$ .

## 3.1. Introducción

Durante las tres últimas décadas, el diseño matemático de diversos sistemas generadores de caos ha sido un tema central de creciente interés debido a sus prometedoras aplicaciones en diferentes tecnologías basadas en el caos del mundo real [29].

En particular, la generación de atractores caóticos multienroscado o con comportamiento multiestable ha experimentado un rápido desarrollo. Trabajos recientes muestran que existe una relación entre el número de enroscados y el valor del Máximo Exponente de Lyapunov, y también una relación entre el número de enroscados y la entropía asociada [30]. Por otro lado, es bien sabido que el fenómeno de multiestabilidad es principalmente relevante para la simetría de un sistema y puede inducir efectos especiales tales como bifurcación de rompimiento de asimetría, restauración de simetría en crisis, coexistencia de bifurcaciones, e histéresis [31].

Hoy en día, la generación de atractores multienroscado no es una tarea difícil, habiendo resultados exitosos reportados en la literatura [32, 33]. Estos métodos reportados pueden ser clasificados como: (1) método de la adición de puntos de ruptura [34]; (2) método de conmutación de variedades [35]; (3) método de la utilización series de conmutación de histéresis [36]; (4) método del uso de la función  $\sin(\cdot)$  [37].

Por su parte, se pueden distinguir varias clases de sistemas que poseen atractores coexistentes: disipativos, acoplados, de retroalimentación retardados, excitados y estocásticos [9]. En cada atractor coexistente, la cuenca de atracción es el conjunto de condiciones iniciales cuyas soluciones se conducen hasta el atractor. Por lo tanto, el comportamiento cualitativo a largo plazo de un sistema dinámico puede ser fundamentalmente diferente dependiendo de la condición inicial.

En este capítulo, se aborda la forma de generar atractores caóticos con cualquier número impar de enroscados a partir de un sistema débilmente disipativo en  $\mathbb{R}^3$  que contenga en su modelo una función Piecewise Linear (PWL) dependiente de una de las variables de estado. Asimismo, se propone una función PWL dependiente de dos variables de estado para que el sistema general presente un comportamiento multiestable y los atractores caóticos resultantes dependan de las condiciones iniciales.

El contenido del capítulo estará dividido de la siguiente manera: Sección 3.2 describe el modelo matemático general del sistema débilmente disipativo; Sección 3.3 describe a las funciones PWL dependientes de una y dos variables y las conclusiones son bosquejadas en Sección 3.4.

## 3.2. Modelo General

Para el diseño de sistemas que generan atractores caóticos multienroscado o comportamiento multiestable, se hará uso de un sistema descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + B, \quad (3.1)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -a & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\gamma f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estados,  $\gamma \in \mathbb{N}$  es un parámetro,  $a > 0$  es un número real y  $f(x)$  es una función PWL.

Los eigenvalores asociados a la matriz  $A$  están dados por  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . De acuerdo con *Campos-Cantón et al.*, [28], el sistema lineal afín es llamado UDS Tipo I si  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$  y un eigenvalor  $\lambda_i$  es real negativo y los otros dos son complejos conjugados con parte real positiva.

**Definición 3.1.** *Sea un sistema en  $\mathbb{R}^n$  de la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + B$  con  $n$  eigenvalores  $\lambda$  asociados a la matriz  $A$ . El sistema es llamado débilmente disipativo si  $-1 < \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$ .*

**Proposición 3.1.** *Sea un sistema perteneciente a la familia UDS Tipo I con matriz  $A$  denotada por la ecuación (3.2). Entonces el sistema es débilmente disipativo si  $0 < a < 1$ .*

*Prueba.* Sean  $\lambda_1 = -\alpha_1$ ,  $\lambda_{2,3} = \alpha_2 \pm \alpha_3 i$ , con  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^+$ , los eigenvalores de la matriz  $A$  y suponga que  $0 < a < 1$ . Luego, si se obtiene un polinomio característico a partir de los eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  se tiene que

$$p_1(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha_1 - 2\alpha_2)\lambda^2 + (\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3^2)\lambda + \alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2); \quad (3.3)$$

con lo cual, es posible igualar cada término del polinomio característico  $p_1(\lambda)$  con los términos del polinomio característico de la matriz  $A$

$$p_2(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + a\lambda + a. \quad (3.4)$$

Como  $\alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) = (\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3^2) = (\alpha_1 - 2\alpha_2) = a$ , y ya que el sistema pertenece a la familia UDS Tipo I, se sigue que  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -\alpha_1 + 2\alpha_2 = -a$ , y se infiere que

$$-1 < -\alpha_1 + 2\alpha_2 < 0; \quad (3.5)$$

con lo cual, se concluye la prueba.

**Proposición 3.2.** *Sea un sistema en  $\mathbb{R}^3$  en la forma  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B$ , y suponga que  $A, B$  son descritos por la ecuación (3.2). Entonces el sistema tiene sus puntos de equilibrio en  $\mathbf{x}^* = (\gamma j, 0, 0)^T, j \in \mathbb{Z}$ , si  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ .*

*Prueba.* Sea  $j \in \mathbb{Z}$  y suponga que  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ . Después, al evaluar el campo vectorial en los puntos de equilibrio se sabe que  $A\mathbf{x}^* + B = 0$  y luego  $\mathbf{x}^* = -A^{-1}B$ . Entonces de (3.2) se tiene que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1/a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

con lo cual

$$-A^{-1}B = (\gamma f(\mathbf{x}), 0, 0)^T; \quad (3.7)$$

concluyendo así la prueba.

Suponiendo que existe  $f(\mathbf{x})$  que satisface la proposición 3.2 y que  $\gamma = 2$ , atendiendo a la proposición 3.1, se ha seleccionado el parámetro  $a = 0.7$  con el cual, los eigenvalores asociados a la matriz  $A$  son:  $\lambda_1 = -0.8480$ ,  $\lambda_2 = 0.0740 + 0.9055i$ ,  $\lambda_3 = 0.0740 - 0.9055i$ , y  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -0.7$ .

Dados los eigenvalores de  $A$  que definen al sistema (3.1) como UDS Tipo I, los eigenvectores que generan los eigenespacios estable e inestable del sistema son:  $v_1 = (-0.6687, 0.5671, -0.4809)^T$ ,  $v_2 = (0.6316, 0.0467, -0.5144)^T$ ,  $v_3 = (0, 0.5719, 0.0846)^T$ ; con los cuales, se define a las variedades del sistema como:

$$\begin{aligned} W^S : (x_1, x_2, x_3) &= (2j - 0.6687t, 0.5671t, -0.4809t); \\ W^U : 0.2981x_1 - 0.0534x_2 + 0.3612x_3 &= 0.2981j; \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $j \in \mathbb{Z}$  y  $t \in \mathbb{R}$  son parámetros. Los puntos de equilibrio se encuentran en  $\mathbf{x}^* = (2j, 0, 0)^T$ .

### 3.3. Diseño de funciones PWL

En esta sección se proponen dos tipos de funciones en las que se considera la premisa de la proposición 3.2 para la ubicación de los puntos de equilibrio sobre el eje  $x_1$ .

Para la generación de atractores caóticos multienrosado, se presenta una función PWL que depende de la variable de estado  $x_1$ , mientras que para la obtención de comportamiento multiestable, la función PWL depende de las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$ .

Considerando la función  $\text{round}(x_1/\gamma)$  definida como:

$$\text{round}(x_1/\gamma) = \begin{cases} -m, & \text{si } -m - \gamma/2 < x_1 \leq -m + \gamma/2; \\ 0, & \text{si } -\gamma/2 < x_1 < \gamma/2; \\ m, & \text{si } m - \gamma/2 \leq x_1 < m + \gamma/2; \end{cases} \quad (3.9)$$



donde  $m \in \mathbb{N}$ , de modo que  $\text{round}(x_1/\gamma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ . A pesar de que esta función es una buena candidata para satisfacer la proposición 3.2, existe un inconveniente si se desean formar atractores multienroscado. El flujo  $\phi_t$  generado por el sistema (3.1), utilizando la función  $\text{round}(x_1/\gamma)$ , gira alrededor de cada punto de equilibrio existente y ya que existirá un infinito de puntos de equilibrio sobre el eje  $x_1$ ,  $\phi_t \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . La única forma de que la función  $\text{round}(x_1/\gamma)$  pueda servir para la generación de atractores multienroscado o atractores coexistentes, es que se modifique su argumento de manera que cada pedazo lineal definido sea delimitado o propiciando la aparición de un número finito de equilibrios.

### 3.3.1. Función PWL dependiente de $x_1$

Para la generación de atractores caóticos multienroscado, se ha propuesto que la función PWL para el sistema descrito por la ecuación (3.1), únicamente propicie un número finito de equilibrios. La manera de lograrlo es a través de una función de saturación similar a la función PWL del circuito de Chua. La función de saturación propuesta está dada por:

$$\text{sat}(x_1) = |x_1 + \gamma n|/2\gamma - |x_1 - \gamma n|/2\gamma; \quad (3.10)$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  determinará el punto de ruptura. En la Figura 3.10 puede observarse que la función de saturación tiene una recta con pendiente positiva cuando no se encuentra saturada.

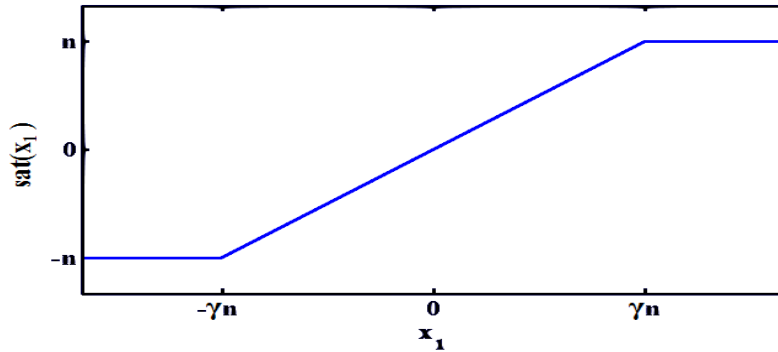


Figura 3.1: Comportamiento de la función saturada propuesta

Entonces, aprovechando la forma que adquiere la función recién descrita, se ha propuesto que la función PWL para la generación de atractores multienroscado esté dada por:

$$f(x_1) = \text{round}(|x_1 + \gamma n|/2\gamma - |x_1 - \gamma n|/2\gamma). \quad (3.11)$$

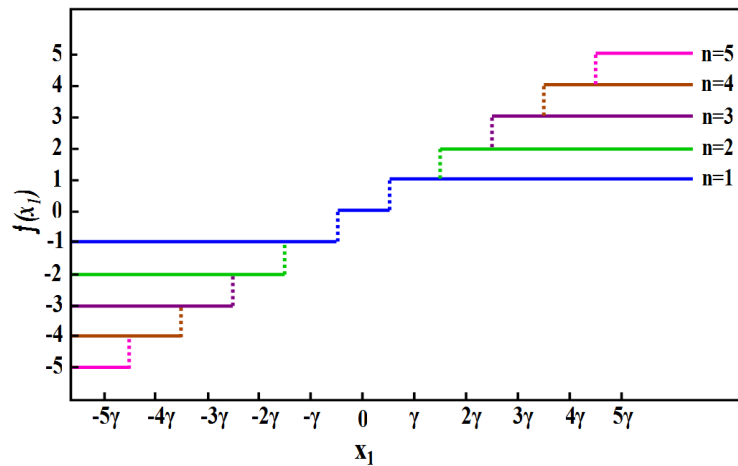
En particular, existirán tres intervalos principales sobre  $x_1$  definidos por la expresión  $|x_1 + \gamma n|/2\gamma - |x_1 - \gamma n|/2\gamma$ ; para los cuales, la función  $f(x_1)$  toma los siguientes valores:

$$f(x_1) = \begin{cases} -n, & \text{si } x_1 \leq -\gamma n; \\ \text{round}(x_1/\gamma), & \text{si } -\gamma n < x_1 < \gamma n; \\ n, & \text{si } x_1 \geq \gamma n. \end{cases} \quad (3.12)$$

De acuerdo con la ecuación (3.12), la función  $f(x_1)$  se mantiene en un valor constante cuando  $x_1 \notin (-\gamma n, \gamma n)$ , pero si  $x_1 \in (-\gamma n, \gamma n)$ , los valores que toma  $f(x_1)$  dentro del intervalo son:

$$f(x_1) = \begin{cases} -n, & \text{si } -\gamma n < x_1 \leq -\gamma n + \gamma/2; \\ \vdots & \vdots \\ -2, & \text{si } -5\gamma/2 < x_1 \leq -3\gamma/2; \\ -1, & \text{si } -3\gamma/2 < x_1 \leq -\gamma/2; \\ 0, & \text{si } -\gamma/2 < x_1 < \gamma/2; \\ 1, & \text{si } \gamma/2 \leq x_1 < 3\gamma/2; \\ 2, & \text{si } 3\gamma/2 \leq x_1 < 5\gamma/2; \\ \vdots & \vdots \\ n, & \text{si } \gamma n - \gamma/2 \leq x_1 < \gamma n. \end{cases} \quad (3.13)$$

Con base en a las ecuaciones (3.12) y (3.13), la función  $f(x_1)$  mapea al conjunto de todos los enteros entre  $-n$  y  $n$  incluyendo a estos últimos. De esta manera, dado un valor para  $n$ , la función PWL siempre genera  $2n + 1$  pedazos lineales, tal y como se muestra en la Figura 3.2.

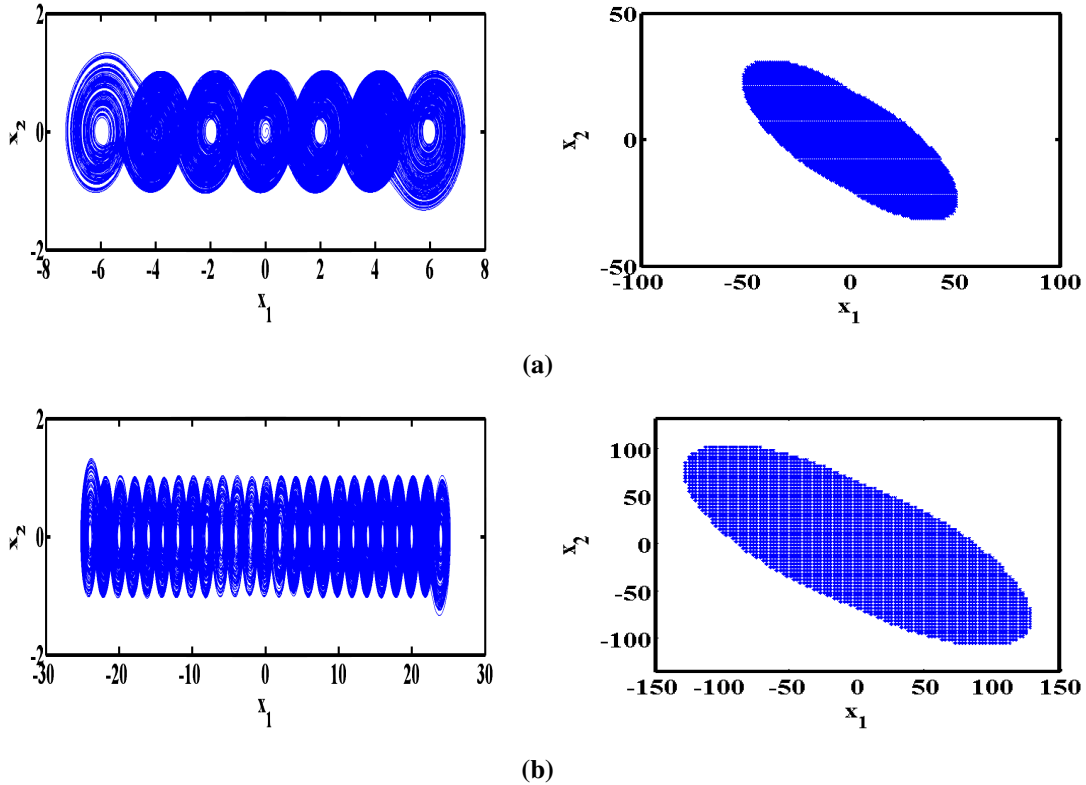


**Figura 3.2:** Pedazos lineales definidos por la función  $f(x_1)$  para diferentes valores de  $n$ .

Se han propuesto los valores  $n = 3$  y  $n = 12$  para la función PWL descrita en la ecuación (3.11), y se obtuvo el MLE utilizando el algoritmo propuesto por Rosenstein [38] para demostrar la existencia de caos en cada atractor multienroscado generado. Los MLE's obtenidos son: 0.797, 1.680 y pertenecen a los atractores caóticos de siete y veinticinco enroscados

respectivamente.

En la Figura 3.3, son mostradas las proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de las trayectorias en el atractor generadas considerando siempre la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = (-0.01, 0, 0)^T$ , así como las cuencas de atracción pertenecientes a los atractores caóticos. Cabe señalar que para que una trayectoria culmine en el atractor, debe seleccionarse una condición inicial dentro de su cuenca de atracción.



**Figura 3.3:** Proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de las trayectorias en los atractores caóticos generados. (a) Atractor de 7 enroscados correspondiente a  $n = 3$  con su correspondiente cuenca de atracción; (b) Atractor de 25 enroscados correspondiente a  $n = 12$  con su correspondiente cuenca de atracción.

### 3.3.2. Función PWL dependiente de $x_1$ y $x_2$

Para obtener el fenómeno de multiestabilidad, se ha propuesto el uso de una función PWL similar a la descrita en la ecuación (3.9), pero agregando más términos al argumento con el fin de delimitar cada pedazo lineal definido en  $x_1$ .

Considérese entonces la función PWL para el sistema (3.1) como:

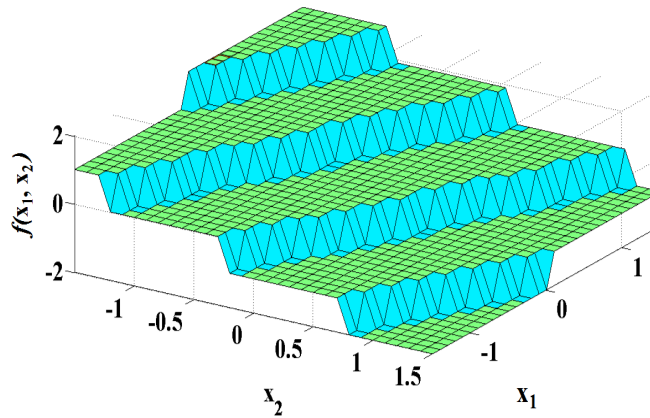
$$f(x_1, x_2) = \text{round}(x_1/\gamma - \gamma x_2/2); \quad (3.14)$$

donde  $\gamma x_2/2$  es seleccionado de esta forma ya que entre más pequeño sea el valor de  $x_2$ , la

función  $f(x_1, x_2)$  tiende a parecerse a la función  $\text{round}(x_1/\gamma)$ . Por otro lado, entre más grande sea el coeficiente que multiplica a  $x_2$ , la serie de tiempo de  $x_2$  se amplifica y la trayectoria escapa a otras cuencas de atracción. Con base en lo anterior, la función  $f(x_1, x_2)$  toma los siguientes valores:

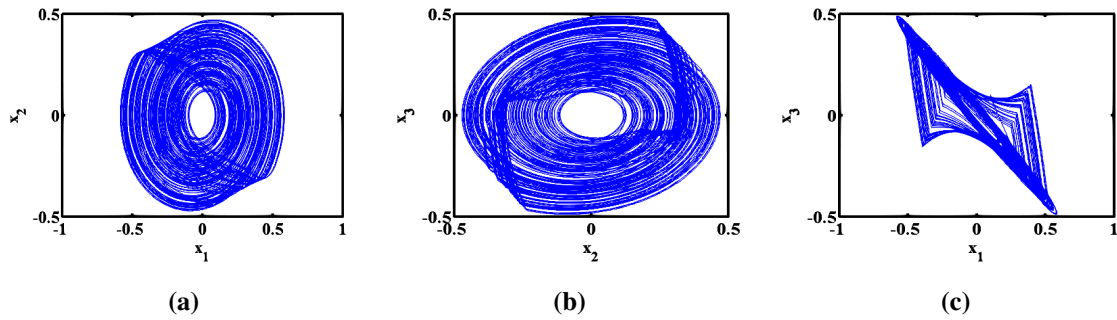
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} -n, & \text{si } (-2\gamma^2 n - \gamma^2 + \gamma^2 x_2)/2 < x_1/\gamma \leq (-2\gamma^2 n + \gamma^2 + \gamma^2 x_2)/2; \\ 0, & \text{si } (-\gamma^2 + \gamma^2 x_2)/2 < x_1 < (\gamma^2 + \gamma^2 x_2)/2; \\ n, & \text{si } (2\gamma^2 n - \gamma^2 + \gamma^2 x_2)/2 \leq x_1 < (2\gamma^2 n + \gamma^2 + \gamma^2 x_2)/2. \end{cases} \quad (3.15)$$

En la Figura 3.4, es mostrada gráficamente la función PWL descrita en la ecuación (3.15). Como puede observarse,  $f(x_1, x_2)$  define pedazos lineales sobre los ejes  $x_1$  y  $x_2$ . Cada pedazo lineal que  $f(x_1, x_2)$  defina sobre  $x_2$  impide que el flujo  $\phi_t$  contenido en algún intervalo en  $x_1$  cruce a un intervalo diferente en la misma dirección y por lo tanto, la supresión de atractores multienroscado se origina y se obtiene el fenómeno de multiestabilidad.



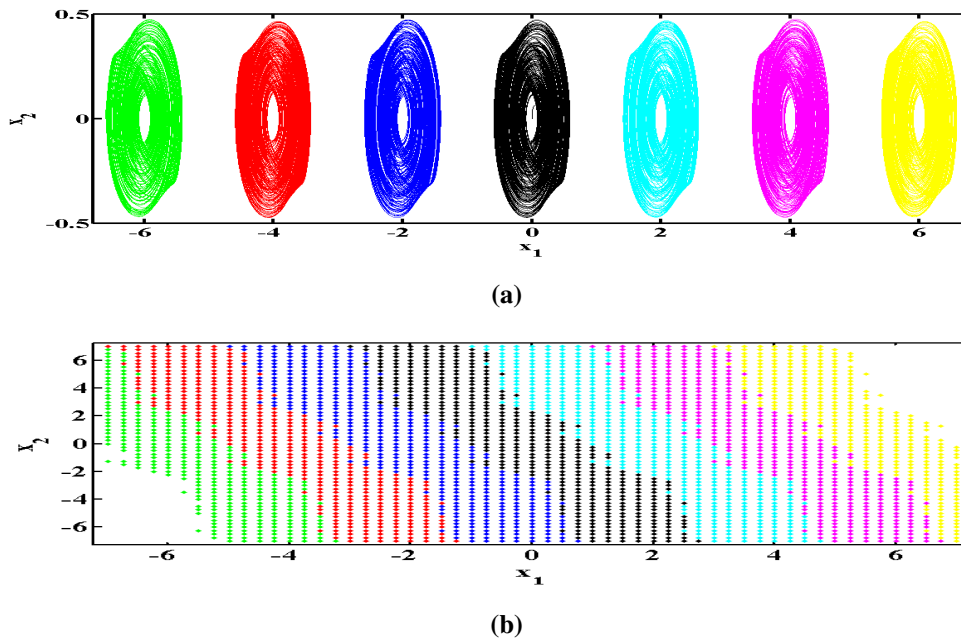
**Figura 3.4:** Pedazos lineales definidos en  $x_1$  y  $x_2$  por la función  $f(x_1, x_2)$ .

Seleccionando la condición inicial  $x(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$ , las proyecciones sobre los planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  y  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria en el atractor caótico resultante es presentada en la Figura 3.5.



**Figura 3.5:** Proyecciones sobre el plano (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_2, x_3)$ ; (c)  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria en el atractor para la condición inicial  $x(0) = (0.1, 0.1, 0.1)^T$ .

Seleccionando el conjunto de condiciones iniciales  $\mathbf{X}(0) = \{(-6.6, 0, 0)^T, (-4.4, 0, 0)^T, (-2.2, 0, 0)^T, (0, 0, 0.1)^T, (2.1, 0, 0)^T, (4.3, 0, 0)^T, (6.5, 0, 0)^T\}$ , las proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de diferentes trayectorias en los atractores coexistentes se pueden apreciar en la Figura 3.6, así como parte de sus cuencas de atracción. Es importante señalar que con cualquier condición dada, el sistema genera atractores caóticos a lo largo de todo el eje  $x_1$ , por lo que los puntos en color blanco corresponden a cuencas de atracción de otros atractores coexistentes no mostrados. El MLE calculado para estos atractores es igual a 0.07.



**Figura 3.6:** (a) Proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de diferentes trayectorias en algunos de los atractores caóticos coexistentes; (b) cuencas de atracción pertenecientes a los atractores caóticos coexistentes mostrados.

### 3.4. Conclusiones

En este capítulo, se presenta la generación de atractores multienroscado y comportamiento multiestable a partir de sistemas débilmente disipativos que involucran el uso de funciones PWL. Particularmente se diseñaron dos tipos de funciones PWL con las cuales, los puntos de equilibrio del sistema siempre se ubican sobre el eje  $x_1$  pero cada función PWL propuesta, conlleva a un comportamiento distinto.

Para el uso de la función PWL que depende de  $x_1$ , es necesario asignar un valor  $n$  para determinar la cantidad de enroscados que existirá en el atractor caótico que se diseña. Por otro lado, se vio como una función PWL que depende de  $x_1$  y  $x_2$  puede generar comportamiento multiestable si logra contener al flujo en ciertos intervalos definidos sobre  $x_1$  aunque la función dependa de dos variables de estado.

# CAPÍTULO 4

---

## Atractor de doble enroscado, biestabilidad o multiestabilidad a través de variaciones en el espacio de estados

---

### Resumen

En los últimos años, numerosos trabajos de investigación se han dedicado a osciladores caóticos simples basados en sistemas lineales afín que utilizan funciones PWL. En el presente capítulo, se considera un sistema lineal afín en  $\mathbb{R}^3$ , cuya dinámica es conmutada con una función PWL y sus ecuaciones de estado están basadas en el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la ecuación jerk  $\ddot{x} + \beta_1\dot{x} + \beta_2x = f$ . La relevancia de este sistema es que la parte lineal contiene en su modelo dos funciones reales dependientes de dos parámetros, con los cuales, es posible obtener diferentes tipos de estabilidad de los puntos de equilibrio ó modificar directamente las variedades inestables del sistema, propiciando la generación de atractores de doble enroscado o la coexistencia de dos atractores en el espacio de estados.

### 4.1. Introducción al capítulo

Cuando las teorías de sistemas dinámicos, oscilaciones, y caos se desarrollaron por primera vez, investigadores se enfocaron principalmente en el análisis de la estabilidad de los equilibrios, lo que se puede hacer fácilmente de manera numérica o analítica. Esto signifi-

caba que era posible aproximar atractores mediante la construcción de una solución a partir de datos iniciales dentro de una pequeña zona alrededor del equilibrio, la observación de la forma en que es atraída la trayectoria y, por tanto, visualizaban el atractor [39].

Varios sistemas disipativos no lineales poseen múltiples atractores coexistiendo para los mismos valores de parámetros [40]. Los atractores coexistentes pueden tener propiedades muy diferentes, tales como exponentes de Lyapunov y dimensión de Lyapunov, y pueden ocurrir en todas las combinaciones: puntos fijos, ciclos límites, toros y atractores caóticos. El número y tipo de atractores pueden cambiar considerablemente a medida que se monitorizan los parámetros [31].

Este fenómeno conocido como multiestabilidad se encuentra en casi todas las ciencias naturales, incluyendo la electrónica, la óptica, la mecánica, y la biología. Cada atractor posee su propia cuenca de atracción, es decir, un conjunto bien definido de condiciones iniciales que llegará a su atractor en un tiempo límite. Las propiedades de las cuencas de atracción están determinadas en gran medida por la estructura de puntos de equilibrio tipo silla.

En el presente capítulo, se considera un sistema lineal afín en  $\mathbb{R}^3$ , cuya dinámica es conmutada con una función PWL y sus ecuaciones de estado están basadas en el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la ecuación jerk  $\ddot{x} + \beta_1\dot{x} + \beta_2x + x = f$ . La relevancia de este sistema es que la parte lineal contiene en su modelo dos funciones reales dependientes de dos parámetros, con los cuales, es posible obtener diferentes tipos de estabilidad de los puntos de equilibrio ó modificar directamente las variedades inestables del sistema. El resto del capítulo es estructurado como sigue: En la sección 4.2 se caracteriza el espacio de estados con el fin de obtener un rango de valores para las funciones contenidas en la parte lineal del sistema y lograr la generación de un comportamiento caótico. En sección 4.3 se muestra el atractor de doble enroscado generado y se describen las variedades estables e inestables del sistema. En sección 4.4, el sistema que origina al atractor de doble enroscado es bifurcado a través de la variación de uno de sus parámetros y se obtiene la coexistencia de dos atractores caóticos en el espacio. Algunas observaciones finales se presentan en la Sección 4.5.

## 4.2. Caracterización del espacio de estados

Para la generación de atractores caóticos únicos o coexistentes en el espacio, considere el sistema dinámico lineal afín en  $\mathbb{R}^3$  dado por:

$$\dot{x} = Ax + B; \tag{4.1}$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estados,  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es un operador lineal y  $B \in \mathbb{R}^3$  es un vector real. Proponiendo los modelos de  $A$  y  $B$  como:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta_1(a,r) & -\beta_2(a,r) & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_1(a,r)f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \quad (4.2)$$

donde  $\beta_1(a,r), \beta_2(a,r) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones reales y  $f(x_1) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  es una función PWL. La finalidad de proponer funciones como parte de la matriz  $A$  en lugar de parámetros, es porque de esta forma es posible obtener un rango de valores  $a$  y  $r$  para los cuales, el sistema (4.1) sea capaz de generar un atractor caótico de doble enroscado o un comportamiento bies-table. Las funciones  $\beta_1(a,r)$  y  $\beta_2(a,r)$  han sido seleccionadas de forma específica para que el sistema tenga las propiedades que se presentarán más adelante. Las funciones propuestas para la matriz  $A$  son de la forma:

$$\begin{aligned} \beta_1(a,r) &= \frac{4a^3r^2 + 8a^3r - 5a^3 + 2a^2 - a}{4}; \\ \beta_2(a,r) &= \frac{4a^2r^2 + 8a^2r - a^2 - a - 1}{4}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

La función PWL del sistema es definida como:

$$f(x_1) = \begin{cases} -1, & \text{si } x_1 \leq 0; \\ 1, & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Sea el mapeo  $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por el lado derecho del sistema (4.1), este mapeo define un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ . El sistema (4.1) tiene las siguientes propiedades:

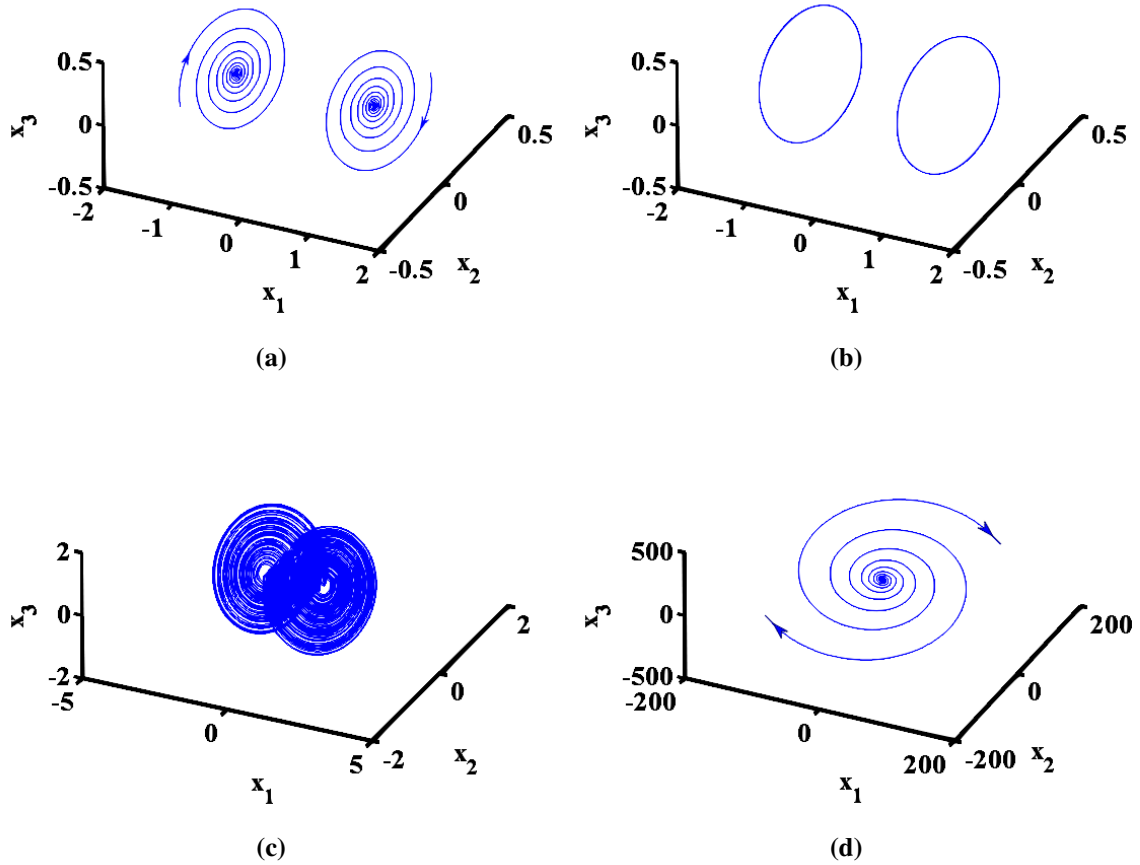
- (i). Presenta una superficie de conmutación  $S$ , igual al plano  $(x_2, x_3)$ , que divide a  $\mathbb{R}^3$  en dos dominios  $\mathcal{D}_{-1}$  y  $\mathcal{D}_1$ .
- (ii). El campo vectorial tiene dos puntos de equilibrio  $\mathbf{x}_{-1}^*$  y  $\mathbf{x}_1^*$ , uno en el interior del dominio  $\mathcal{D}_{-1}$  ubicado en  $(x_1, x_2, x_3)^T = (-1, 0, 0)^T$ , y otro en el interior del dominio  $\mathcal{D}_1$  ubicado en  $(x_1, x_2, x_3)^T = (1, 0, 0)^T$ .
- (iii). El polinomio característico de la matriz  $A$  está dado por:

$$p(\lambda) : \lambda^3 + \lambda^2 + \frac{4a^2r^2 + 8a^2r - a^2 - a - 1}{4}\lambda + \frac{4a^3r^2 + 8a^3r - 5a^3 + 2a^2 - a}{4} \quad (4.5)$$

y sus eigenvalores asociados son de la forma:  $\lambda_1 = -a, \lambda_{2,3} = \frac{a-1}{2} \pm (a+ar)i$ .

### 4.2.1. Cambios de estabilidad de los puntos de equilibrio

De acuerdo a la tercera propiedad que presenta el sistema (4.1), los valores de  $a$  y  $r$  están directamente relacionados con los eigenvalores asociados a la matriz  $A$ . Dependiendo de



**Figura 4.1:** Cambios en las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio. (a) trayectorias que convergen a los equilibrios a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.001, 0, 0)^T$  y  $a = 0.9$ ; (b) trayectorias en los ciclos límite a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.5, 0, 0)^T$  y  $a = 1$ ; (c) trayectorias en el atractor de doble enroscado a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.1, 0, 0)^T$  y  $a = 1.1$ ; (d) trayectorias divergentes a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.001, 0, 0)^T$  y  $a = 1.44$ .

estos valores, se pueden modificar las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema.

Al fijar el valor  $r = 0$  y variar  $a$ , es posible distinguir cuatro cambios de estabilidad importantes, los cuales, pueden ser apreciados en la Figura 4.1. Estos cuatro cambios son:

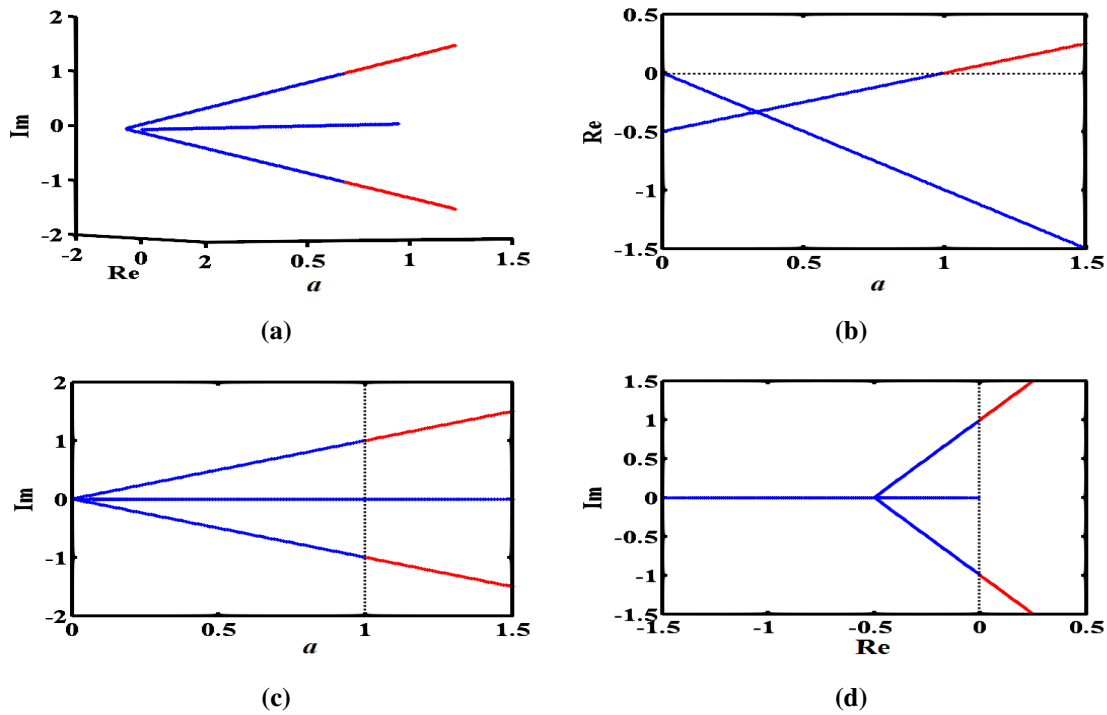
**Caso 1.** Cuando  $a < 1$ , existen dos eigenvalores complejos conjugados y un eigenvalor real, todos ellos con parte real negativa. Los puntos de equilibrio del sistema son asintóticamente estables.

**Caso 2.** Cuando  $a = 1$ , los eigenvalores  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Im}$  debido a que  $\frac{a-1}{2} = 0$ . El sistema genera dos ciclos límite alrededor de sus equilibrios.

**Caso 3.** Cuando  $1 < a < 1.44$ , existen dos eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva y un eigenvalor real negativo. El sistema (4.1) es capaz de generar un atractor de doble enroscado.

**Caso 4.** Cuando  $a \geq 1.44$ , la forma de los eigenvalores se mantiene igual al caso 3; no obstante, las trayectorias del sistema divergen.

Analizando detenidamente los tres primeros casos, el par eigenvalores complejos conjugados cruza el eje imaginario en el plano complejo y cambia la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema, es decir, se da una bifurcación de Hopf. En Figura 4.2 se puede observar la bifurcación de Hopf existente al variar el valor de  $a$ .



**Figura 4.2:** (a) Bifurcación de Hopf en 3D considerando los ejes  $a$ ,  $Re(\lambda)$ ,  $Im(\lambda)$ ; (b) Bifurcación vista sobre el plano  $(a, Re(\lambda))$ , los valores positivos de la parte real de los eigenvalores se muestran en color rojo; (c) Bifurcación vista sobre el plano  $(a, Im(\lambda))$ ; (d) Bifurcación vista sobre el plano  $(Re(\lambda), Im(\lambda))$ , la parte imaginaria de los eigenvalores complejos cruza el eje real.

### 4.3. Atractor caótico de doble enroscado

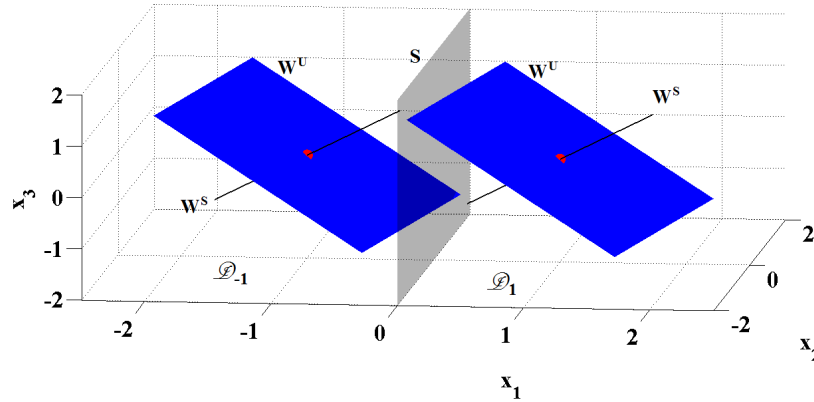
Con base en las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (4.1), se sabe que para lograr la generación de un atractor de doble enroscado basta con fijar  $r = 0$  y elegir un valor  $a$  dentro del intervalo  $1 < a < 1.44$ . Seleccionando  $a = 1.25$ , se tiene que

$\beta_1(a, r) = 1.9727$  y  $\beta_2(a, r) = 1.2656$ , de modo que los eigenvalores asociados a la matriz  $A$  están dados por:  $\lambda_1 = -1.25$ ,  $\lambda_{2,3} = 0.125 \pm 1.25i$  y los eigenvectores asociados a estos eigenvalores son:  $v_1 = (0.4470, -0.5588, 0.6985)^T$ ,  $v_2 = (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3)^T$ ,  $v_3 = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3)^T$ ; donde  $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3) = (0.4354, -0.0555, -0.7010)$  y  $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3) = (0.0880, 0.5552, 0)$ .

Las variedades estable de una dimensión  $W^S$  asociadas al eigenvalor real  $\lambda_1$  y las variedades inestable de dos dimensiones  $W^U$  asociadas a los eigenvalores complejos  $\lambda_{2,3}$  tangentes a los equilibrios  $\mathbf{x}_{-1}^*$  y  $\mathbf{x}_1^*$  son descritas por:

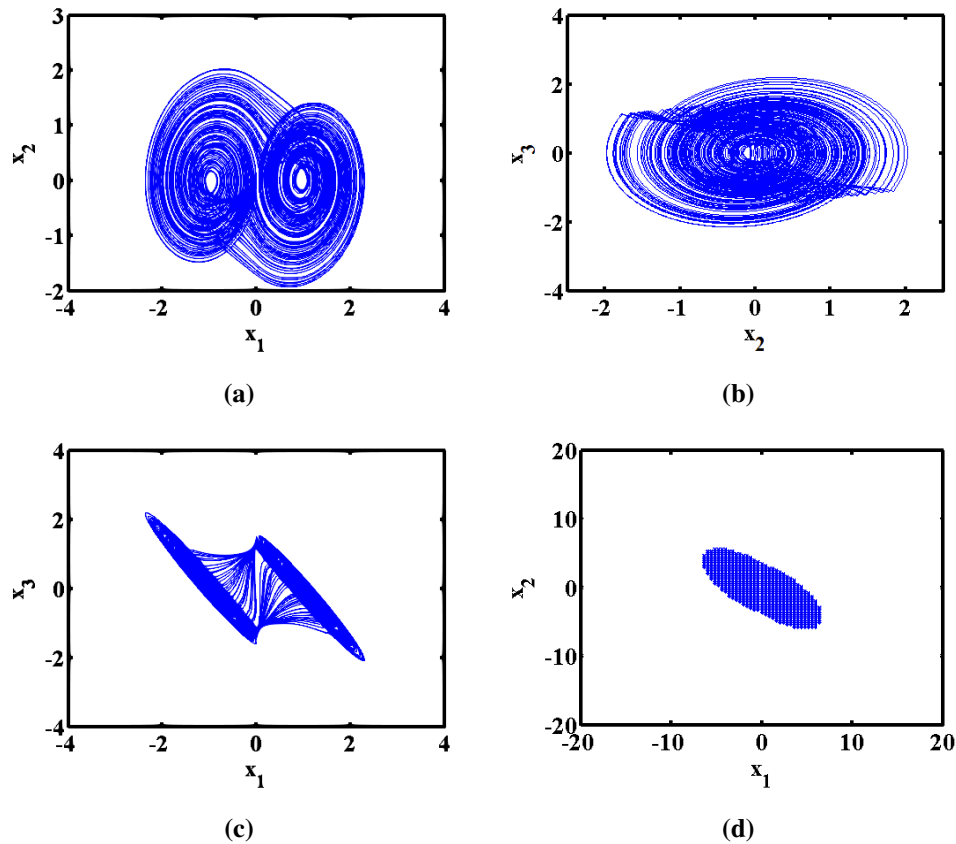
$$\begin{aligned} W^S(\mathbf{x}_{\pm 1}^*) : (x_1, x_2, x_3) &= (\pm 1 + 0.4470t, -0.5588t, 0.6985t); \\ W^U(\mathbf{x}_{\pm 1}^*) : \tilde{\epsilon}_1(x_1 \pm 1) + \tilde{\epsilon}_2x_2 + \tilde{\epsilon}_3x_3 &= 0; \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2, \tilde{\epsilon}_3) = (0.3892, -0.0617, 0.2466)$  son los elementos del producto vectorial  $v_2 \times v_3$ . En Figura 4.3 se pueden apreciar las variedades del sistema que han sido establecidas con  $a = 1.25$ . Asimismo se puede observar que el espacio es dividido en dos dominios por el plano  $S$ , donde cada dominio  $\mathcal{D}_{\pm 1}$  contiene en su interior un punto de equilibrio ubicado en el cruce de una variedad estable y una inestable.



**Figura 4.3:** Espacio dividido en dos dominios por el plano  $S$ . Cada dominio  $\mathcal{D}_{\pm 1}$  contiene en su interior un punto de equilibrio ubicado en el cruce de una variedad estable y una inestable.

Las proyecciones sobre los planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  y  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria en el atractor de doble enroscado a partir de la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0.1)^T$ , pueden ser apreciadas en la Figura 4.4, así como la cuenca de atracción perteneciente a este atractor. El MLE [38] que se ha estimado para el atractor es 0.34.

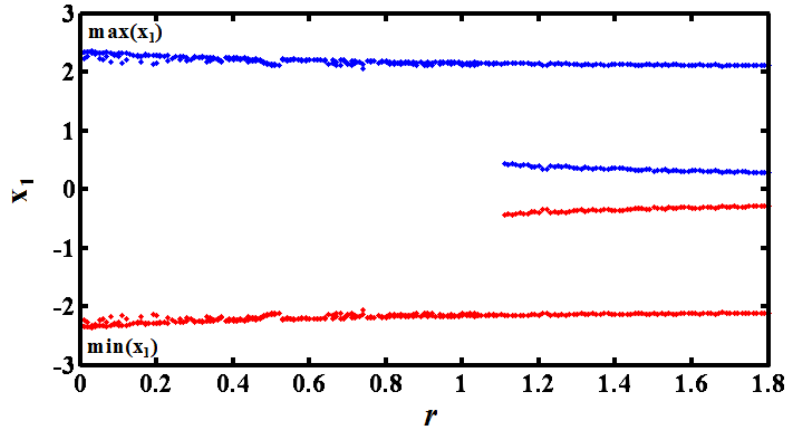


**Figura 4.4:** Proyecciones sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_2, x_3)$ ; (c)  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria generada en el atractor de doble enroscado a partir de  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0.1)^T$ ; (d) cuenca de atracción perteneciente al atractor de doble enroscado.

### 4.3. Variaciones de parámetros y biestabilidad

Para los resultados que se han obtenido hasta el momento, se ha propuesto que  $r = 0$ . Si se considera ahora que  $r \in \mathbb{R}^+$ , y que el valor  $a$  se encuentra en el intervalo  $1 < a < 1.44$ , es posible volver a transformar la dinámica del sistema (4.1).

Para observar los efectos que causan las variaciones de  $r$ , se ha considerado de nueva cuenta el valor  $a = 1.25$ . Luego, utilizando incrementos de 0.01, se ha variado el valor de  $r$  dentro del intervalo  $0.1 \leq r \leq 1.8$ , para obtener los valores máximos y mínimos de las series de tiempo dadas por  $x_1$ , haciendo uso de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (0.3, 0, 0)^T$  y  $\mathbf{x}(0) = (-0.3, 0, 0)^T$ . En la Figura 4.5, se muestran en color azul los puntos correspondientes a los valores máximos de  $x_1$ . Asimismo, los puntos en color rojo representan los valores mínimos. Note que para  $r \leq 1.10$ , los valores máximos y mínimos obtenidos de las dos series de tiempo generadas son muy similares entre sí. En cambio, cuando  $r > 1.10$ , los máximos y mínimos de dichas señales difieren completamente y el sistema genera dos atractores diferentes con el mismo conjunto de parámetros.

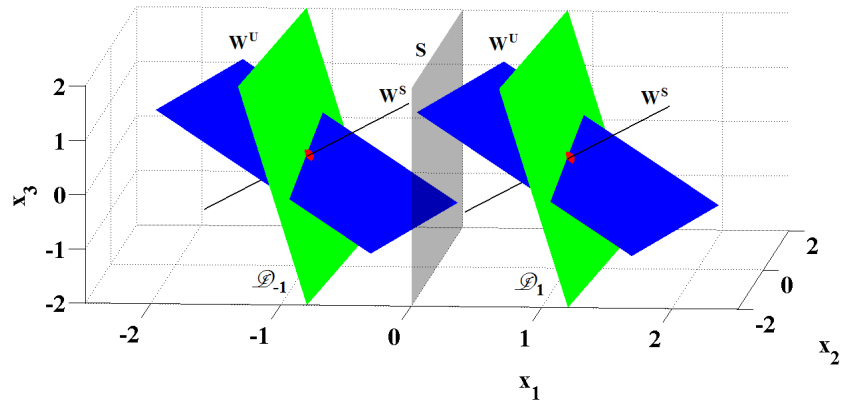


**Figura 4.5:** Diagrama de bifurcación mostrando los valores máximos (puntos en color azul) y mínimos (puntos en color rojo) de las series de tiempo dadas por  $x_1$  a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.3, 0, 0)^T$ . Con  $r > 1.10$ , se da la coexistencia de atractores.

En forma analítica, si  $r = 0$  es reemplazado por  $r = 1.2$ , los siguientes parámetros también varían como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
 &\uparrow \beta_1(a, r) = 9.4727, \uparrow \beta_2(a, r) = 7.2656, \\
 &\downarrow \tilde{\sigma}_1 = -0.1226, \uparrow \tilde{\sigma}_2 = 0.0154, \uparrow \tilde{\sigma}_3 = 0.9328, \\
 &\downarrow \tilde{\omega}_1 = 0.0112, \downarrow \tilde{\omega}_2 = 0.3385, \\
 &\downarrow \tilde{\epsilon}_1 = -0.3158, \uparrow \tilde{\epsilon}_2 = 0.0104, \downarrow \tilde{\epsilon}_3 = -0.0417,
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

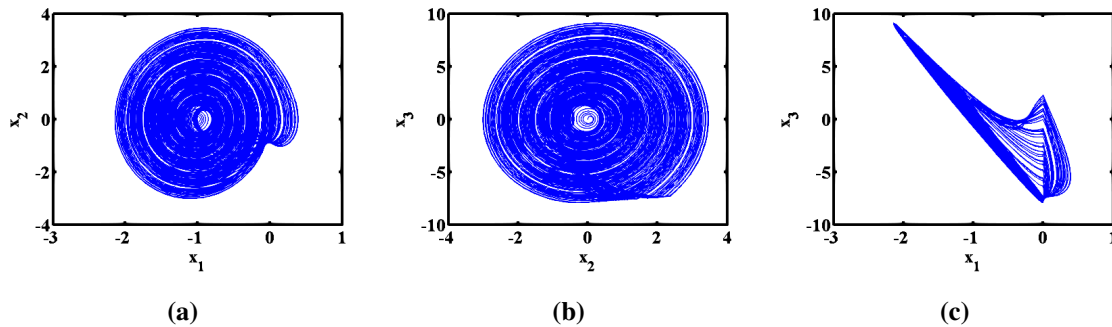
donde las flechas  $\uparrow$  indican un incremento en los parámetros y  $\downarrow$  corresponden a decrementos. En la Figura 4.6 se pueden observar los efectos de estas variaciones en las variedades del sistema. En color azul se muestran las variedades inestables del sistema considerando  $r = 0$ , mientras que en color verde, se muestran las variedades inestables obtenidas con  $r = 1.2$ .



**Figura 4.6:** Variedades inestables para la generación de un atractor de doble enroscado (azul) y variedades inestables para la obtención de biestabilidad.

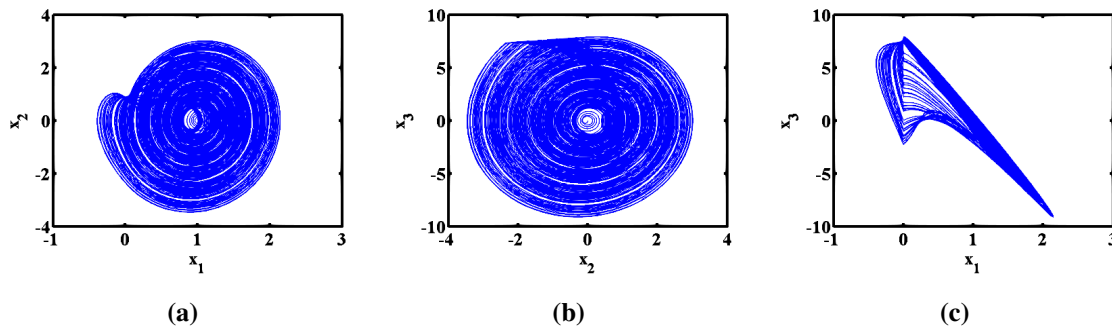
Al variar el parámetro  $r$ , se afecta directamente a las variedades inestables que se han definido dentro de los dominios  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_{-1}$ , puesto que se están modificando los eigenvalores complejos conjugados asociados a la parte lineal del sistema. No obstante, las variedades estables conservan su estructura a pesar de estos cambios, lo cual conlleva a que para ciertos valores  $r \neq 0$ , una trayectoria generada  $\phi_t(x)$ , que se encuentre contenida en algún dominio  $\mathcal{D}_{\pm 1}$ , se desliza por la variedad inestable y cruza la superficie  $S$ , en donde la variedad inestable del otro dominio la guía de regreso hasta la variedad estable del dominio en donde inicio.

En la Figura 4.7 se muestran las proyecciones sobre los planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  y  $(x_1, x_3)$  de una trayectoria en el atractor para la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = (1.1, 0, 0.1)^T$  con los parámetros anteriormente definidos.



**Figura 4.7:** Proyecciones sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_2, x_3)$ ; (c)  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria en el atractor a partir de  $\mathbf{x}(0) = (-1.1, 0, 0.1)^T$ .

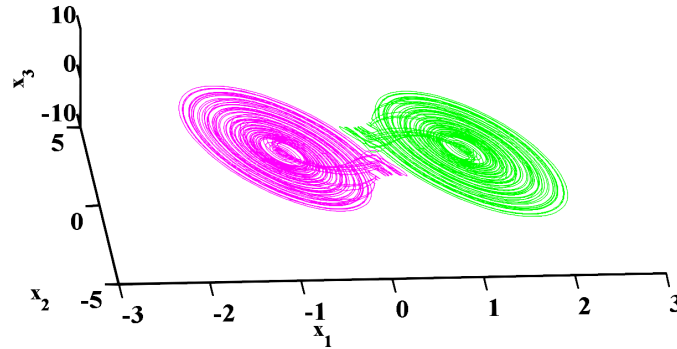
Las proyecciones sobre los planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  y  $(x_1, x_3)$  de una trayectoria en el atractor coexistente para la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = (1.1, 0, 0.1)^T$ , son mostradas en la Figura 4.8. El MLE calculado para ambos atractores es 0.04.



**Figura 4.8:** Proyecciones sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_2, x_3)$ ; (c)  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria en el atractor coexistente a partir de  $\mathbf{x}(0) = (1.1, 0, 0.1)^T$ .

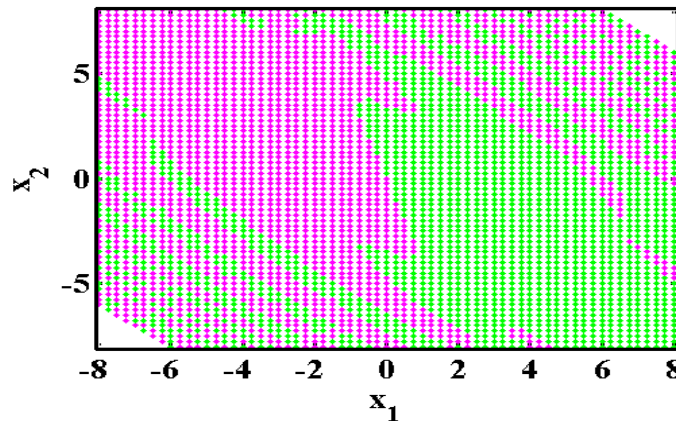
Con el propósito de mostrar la convivencia de los atractores coexistentes en el espacio, se emplearon las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (\pm 0.1, 0, 0)^T$  para generar las trayectorias en los

atractores que se aprecian en el espacio de estados de la Figura 4.9.



**Figura 4.9:** Coexistencia en el espacio de estados de los atractores pertenecientes a los dominios  $\mathcal{D}_{\pm 1}$ .

Por último, se muestran gráficamente en la Figura 4.10 las cuencas de atracción sobre el plano  $(x_1, x_2)$ , pertenecientes a los atractores que coexisten en el espacio. Estas cuencas de atracción se obtuvieron al simular 4096 condiciones iniciales dentro de una rejilla cuadrada.



**Figura 4.10:** Porción de las cuencas de atracción del sistema biestable. En color magenta se representan las condiciones iniciales pertenecientes a la cuenca de atracción del atractor generado en el dominio  $\mathcal{D}_{-1}$  y en color verde se muestran las condiciones iniciales pertenecientes a la cuenca de atracción del atractor generado en el dominio  $\mathcal{D}_{1}$ .

## 4.5. Pedazos lineales y multiestabilidad

Como se ha visto hasta ahora, las variedades inestables del sistema (4.1) han sido modificadas para obtener dos atractores coexistiendo en el espacio, cada uno de ellos oscilando alrededor de un punto de equilibrio.

Tomando en cuenta que las variedades están definidas por los eigenvectores asociados a los eigenvalores obtenidos de la matriz  $A$ , es posible definir cualquier cantidad de puntos de equilibrio en el eje  $x_1$ , sin modificar las propiedades que caracterizan a la parte lineal sistema y



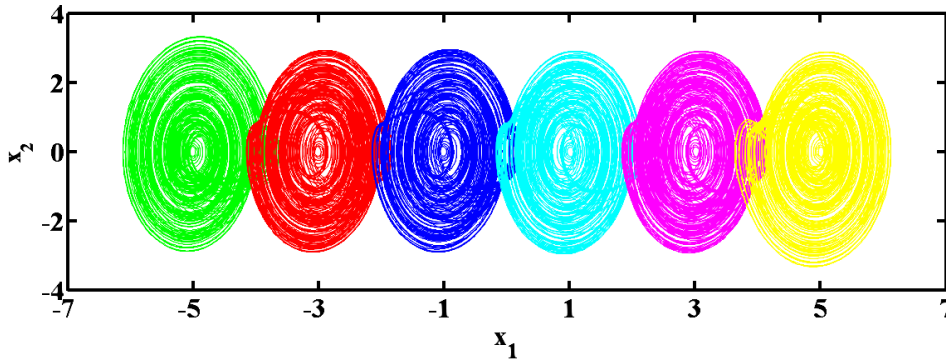
lograr la coexistencia de más atractores en el espacio. Esto es, si se agregan más pedazos lineales a la función PWL y queda definida como:

$$f(x_1) = \begin{cases} -5, & \text{si } x_1 \leq -4; \\ -3, & \text{si } -4 < x_1 \leq -2; \\ -1, & \text{si } -2 < x_1 \leq 0; \\ 1, & \text{si } 0 < x_1 \leq 2; \\ 3, & \text{si } 2 < x_1 \leq 4; \\ 5, & \text{si } 4 < x_1; \end{cases} \quad (4.8)$$

la propiedad (iii) presente en el sistema (4.1), la cual está relacionada únicamente con la parte lineal del sistema, se preserva pero las primeras dos propiedades se modifican por:

- (i). Presenta cinco superficies de conmutación, igual a los planos:  $S_{-2} : x_1 = -4$ ,  $S_{-1} : x_1 = -2$ ,  $S_0 : x_1 = 0$ ,  $S_1 : x_1 = 2$  y  $S_2 : x_1 = 4$ , que dividen a  $\mathbb{R}^3$  en seis dominios  $\mathcal{D}_i$ ,  $i = -5, -3, -1, 1, 3, 5$ .
- (ii). El campo vectorial tiene seis puntos de equilibrio  $\mathbf{x}_i^*$ , cada uno en el interior de un dominio  $\mathcal{D}_i$  ubicado en  $(x_1, x_2, x_3)^T = (i, 0, 0)^T$ .

Considerando los valores  $a = 1.25$  y  $r = 1.2$ , las proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de las trayectorias generadas en los atractores coexistentes con el conjunto de condiciones iniciales  $\mathbf{X}(0) = \{(-5.1, 0, 0)^T, (-3.1, 0, 0)^T, (-1.1, 0, 0)^T, (1.1, 0, 0)^T, (3.1, 0, 0)^T, (5.1, 0, 0)^T\}$ , son mostradas en la Figura 4.11.



**Figura 4.11:** Proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de las trayectorias generadas en los seis atractores coexistentes en el espacio.

Por su parte, las cuencas de atracción pertenecientes a los atractores caóticos coexistentes se muestran en la Figura 4.12. Cada punto mostrado en un color específico corresponde a una condición inicial con la cual, el sistema 4.1 generará una trayectoria que culminará en uno de los atractores caóticos del mismo color.

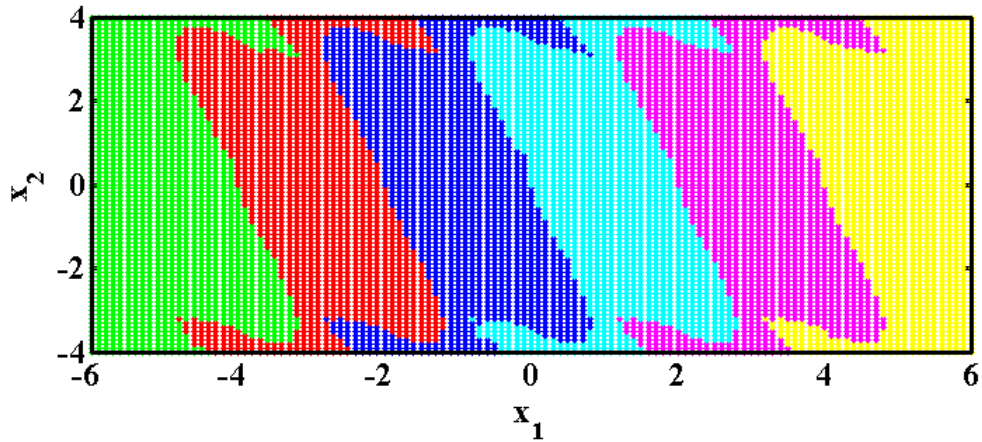


Figura 4.12: Porción de las cuencas de atracción pertenecientes a los seis atractores coexistentes en el espacio.

## 4.6. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la dinámica de un sistema en  $\mathbb{R}^3$  basado en la ecuación dinámica jerk que contiene una función PWL. El análisis de variación de  $a$ , ha revelado escenarios para los cuales el sistema presenta diferentes tipos de comportamientos; sin embargo, dentro del intervalo  $1 < a$ , la exploración detallada del campo vectorial merece estudios adicionales.

Por otra parte, se ha mostrado que para variaciones de  $r$ , el sistema es capaz de mostrar un comportamiento multiestable (con un valor  $a$  dentro del intervalo  $1 < a < 1.44$ ) donde el atractor final resultante está en función únicamente de la elección de las condiciones iniciales. La manera en que fueron seleccionados los parámetros que originan la coexistencia de dos atractores en el espacio representa un recurso para la generación de sistemas multiestables, ya que se pudieran incluir una amplia cantidad de atractores finales si amplía la función PWL.

# CAPÍTULO 5

---

## Estudio de la multiestabilidad generada por UDS's Tipo II

---

### Resumen

En este capítulo se busca mostrar la coexistencia de atractores caóticos que se encuentra reportada para sistemas lineales afín basados en UDS's Tipo II [27]. Para ello, se propone principalmente un modelo matemático de la parte lineal del sistema en términos de un solo parámetro y se da una breve descripción de las variedades estables e inestables del sistema general.

### 5.1. Introducción

El intrigante fenómeno de tener dos atractores coexistiendo generados por un sistema no lineal ha sido reportado por Arecchi et al. [8], quien llamó a este comportamiento multiestabilidad generalizada. La coexistencia de múltiples atractores es común en una amplia variedad de sistemas, por ejemplo, modelos geofísicos, sistemas mecánicos, y sistemas neuronales [9]. La región de coexistencia de estos atractores es crítica, ya que un pequeño ruido puede conmutar el sistema físico, agregando una nueva característica a escenarios caóticos habituales. En tales casos, las propiedades de las cuencas de atracción están determinadas en gran medida por la estructura de puntos de equilibrio tipo silla.

Los puntos de equilibrio tipo silla, los cuales conectan a una variedad estable  $W^S$  y una variedad inestable  $W^U$ , son responsables de los fenómenos conocidos como stretching y folding (estiramiento y doblamiento), por lo tanto, juegan un rol importante en la generación de caos [41]. Acorde con esto, un sistema lineal afín en  $\mathbb{R}^3$ , puede ser caracterizado de acuerdo a los eigenvalores asociados a la parte lineal del sistema. Si la suma de los eigenvalores es negativa y el punto de equilibrio es tipo silla, entonces el sistema es llamado sistema disipativo inestable (UDS) [27, 28]. Aunado a esto, si los eigenvalores son un par de complejos conjugados con parte real positiva y un eigenvalor es real negativo, entonces el sistema es denominado UDS Tipo I. Por otro lado, si la parte real de los eigenvalores complejos conjugados es negativa y el eigenvalor real es positivo, el sistema es nombrado UDS Tipo II.

La meta del presente capítulo es mostrar la coexistencia de atractores caóticos obtenida a través de un sistema basado en la teoría de sistemas disipativos inestables, particularmente UDS Tipo II, que contienen en sus ecuaciones una función PWL. Para ello, la organización del capítulo queda de la siguiente manera: en Sección 5.2, se propone la estructura del sistema lineal afín en  $\mathbb{R}^3$ , de la cual se partirá. En Sección 5.3, se muestran los valores de parámetros seleccionados para el sistema, así como la función PWL empleada para la generación de un atractor caótico. En sección 5.4, la función PWL es aumentada de tal forma que emerge un nuevo atractor en el espacio. Las conclusiones son detalladas en la última sección del capítulo.

## 5.2. Descripción matemática del modelo

Considere el sistema lineal afín descrito por la ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}, \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estados,  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  con  $i, j = 1, 2, 3$  es una matriz no singular y  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$  es un vector real. El punto de equilibrio del sistema se encuentra en  $\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ , una condición importante para que se generen oscilaciones alrededor de dicho equilibrio es que existan eigenvalores complejos conjugados asociados a la matriz  $\mathbf{A}$ , además que las variedades tangentes al equilibrio  $\mathbf{x}^*$  sean: una estable  $W^S(\mathbf{x}^*)$  y la otra inestable  $W^U(\mathbf{x}^*)$ . De acuerdo a los trabajos reportados en Ref. [27, 28], los sistemas disipativos inestables (UDS) poseen las características anteriormente especificadas para producir las oscilaciones que generen un atractor caótico. A pesar de que existen dos tipos de sistemas disipativos inestables (UDS Tipo I y UDS Tipo II), en este capítulo solo abordará la generación de atractores caóticos y multiestabilidad por medio de UDS Tipo II.

Ya que las variedades estable e inestable, así como la ubicación de los puntos de equilibrio

del sistema (5.1) dependen de la matriz  $A$  y del vector  $B$ , considere de manera específica la forma de  $A$  y  $B$  como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -10a & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x_1) \end{pmatrix}; \quad (5.2)$$

con  $a \in \mathbb{R}$  y  $f(x_1) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  representa una función PWL definida como:

$$f(x_1) = \begin{cases} f_1, & \text{si } x_1 \in \mathcal{D}_{-1/a}; \\ f_2, & \text{si } x_1 \in \mathcal{D}_{-2/a}; \\ \vdots & \\ f_n, & \text{si } x_1 \in \mathcal{D}_{-n/a}; \end{cases} \quad (5.3)$$

donde  $\mathcal{D}_{-i/a}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son regiones del espacio. Para que el sistema (5.1) sea nombrado UDS Tipo II, deben existir dos eigenvalores complejos conjugados con parte real negativa asociados a la matriz  $A$ , un eigenvalor real positivo y la suma de los tres eigenvalores debe resultar negativa.

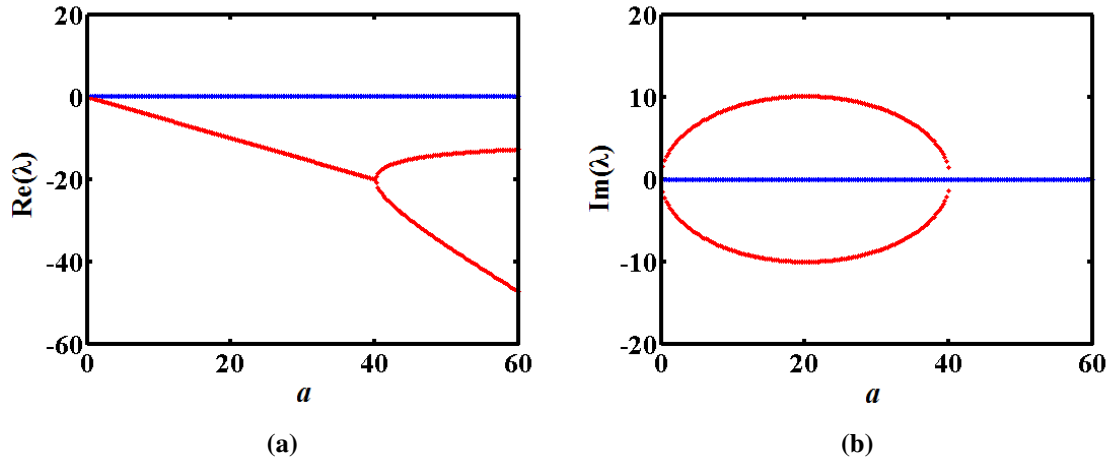
Un factor importante que debe ser tomado en cuenta es que los eigenvalores de la matriz  $A$  dependen del parámetro de  $a$ , entonces, sea  $p(\lambda)$  el polinomio característico de  $A$  expresado como:

$$p(\lambda) : \lambda^3 + a\lambda^2 + 10a\lambda - a; \quad (5.4)$$

con su discriminante  $\bar{D}$  dado por:

$$\bar{D} = 104a^4 - 4180a^3 - 27a^2. \quad (5.5)$$

Ya que la traza de  $A$  es igual a la suma de sus eigenvalores, se sigue que  $\text{trace}(A) = -a$ , y ya que se busca que el sistema (5.1) sea UDS, la suma de sus eigenvalores debe ser negativa; por lo tanto  $a > 0$ . No obstante, para saber cual es el máximo valor que  $a$  puede tomar, se obtuvieron los eigenvalores de la matriz  $A$  para diferentes valores de  $a$  dentro del intervalo  $0.25 \leq a \leq 60$ , considerando un incremento de 0.25. En Figura 5.1, se muestran los diagramas de bifurcación de los eigenvalores asociados a  $A$ . En la subfigura (a) se registran los cambios que corresponden a la parte real de los eigenvalores, mientras que en la subfigura (b) solo se muestran los cambios de las partes imaginarias. Nótese que para valores  $a < 41$ , solo es posible observar dos magnitudes diferentes en la subfigura (a), esto se debe a que  $\bar{D} < 0$ , por lo que  $p(\lambda)$  solo tiene una raíz real y un par de raíces complejas conjugadas. En cambio, con valores  $a \geq 41$ , resulta ser que  $\bar{D} > 0$  y  $p(\lambda)$  tiene tres raíces reales distintas. Por su parte, la subfigura (b) muestra como la parte imaginaria de los eigenvalores se convierte en cero cuando  $a \geq 41$ .



**Figura 5.1:** Diagramas de bifurcación obtenidos al variar el parámetro  $a$  dentro del intervalo  $0.25 \leq a \leq 60$  (a)  $a$  vs  $Re(\lambda)$ , los puntos en color azul corresponden a valores positivos mientras que los de color rojo son de valores negativos; (b)  $a$  vs  $Im(\lambda)$ , los puntos en color azul representan a valores imaginarios nulos y los de color rojo imaginarios diferentes a cero. Cuando  $a = 41$ , dejan de existir los eigenvalores complejos conjugados y se tienen tres eigenvalores reales distintos: uno positivo y dos negativos.

### 5.3. Atractor caótico único en el espacio

Con base en el diagrama de bifurcación anterior, se ha seleccionado  $a = 0.7$  para que los eigenvalores de la matriz  $A$  sean  $\lambda_1 = 0.0989$ ,  $\lambda_2 = -0.3994 + 2.6305i$ ,  $\lambda_3 = -0.3994 - 2.6305i$  y  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -0.7$ .

La función PWL está dada por:

$$f(x_1) = \begin{cases} 7, & \text{si } x_1 \in \mathcal{D}_{-10}; \\ 0, & \text{si } x_1 \in \mathcal{D}_0; \end{cases} \quad (5.6)$$

donde las regiones que se definen son:  $\mathcal{D}_0 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 \geq -1\}$  y  $\mathcal{D}_{-10} = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 < -1\}$ , por lo que puede referirse al plano  $S_{-1} : x_1 = -1$  como la frontera que delimita a las dos regiones sobre el eje  $x_1$ .

Debido al hecho de que la tercera componente del vector  $B$  adquiere dos valores diferentes dependiendo de la región en la que se encuentre  $x_1$ , existirán dos puntos de equilibrio definidos por el sistema (5.1), uno de ellos ubicado en  $\mathbf{x}_0^* = (0, 0, 0)^T$  y el segundo en  $\mathbf{x}_{-10}^* = (-10, 0, 0)^T$ . Cabe señalar que la cercanía entre el equilibrio  $\mathbf{x}_0^*$  y el plano  $S_{-1}$  es menor a la existente entre el equilibrio  $\mathbf{x}_{-10}^*$  y el plano  $S_{-1}$ ; mientras que la distancia euclidiana  $d(\mathbf{x}_0^*, S_{-1}) = 1$ , la distancia  $d(\mathbf{x}_{-10}^*, S_{-1}) = 9$ .

Para calcular las variedades estable e inestable del sistema (5.1), primero se obtuvie-

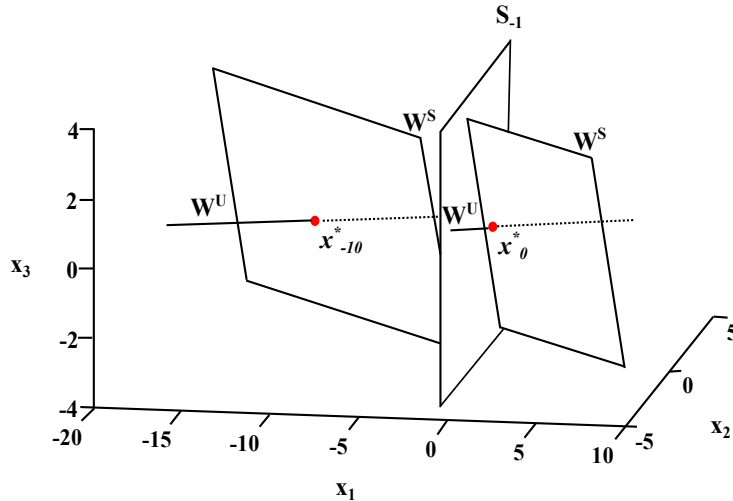
ron los eigenvectores asociados a los eigenvalores previamente calculados. Estos eigenvectores obtenidos son  $\mathbf{v}_1 = (0.9951, 0.0984, 0.0097)^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-0.1252, -0.0524, 0.9280)^T$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0.9280, -0.3448, 0)^T$ ; y ya que las variedades del sistema son iguales a los eigenespacios  $E^U = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$  y  $E^S = \text{span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  pero con un desplazamiento dado por la primer componente de los puntos de equilibrio, se tiene que las variedades  $W^S$  y  $W^U$  tangentes al punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0^*$  son:

$$\begin{aligned} W^U(\mathbf{x}_0^*) &: (x_1, x_2, x_3) = (0.9951t, 0.0984t, 0.0097t); \\ W^S(\mathbf{x}_0^*) &: 0.32x_1 + 0.8612x_2 + 0.0918x_3 = 0; \end{aligned} \quad (5.7)$$

y las variedades  $W^S$  y  $W^U$  tangentes al equilibrio  $\mathbf{x}_{-10}^*$  son:

$$\begin{aligned} W^U(\mathbf{x}_{-10}^*) &: (x_1, x_2, x_3) = (-10 + 0.9951t, 0.0984t, 0.0097t); \\ W^S(\mathbf{x}_{-10}^*) &: 0.32x_1 + 0.8612x_2 + 0.0918x_3 = -3.2; \end{aligned} \quad (5.8)$$

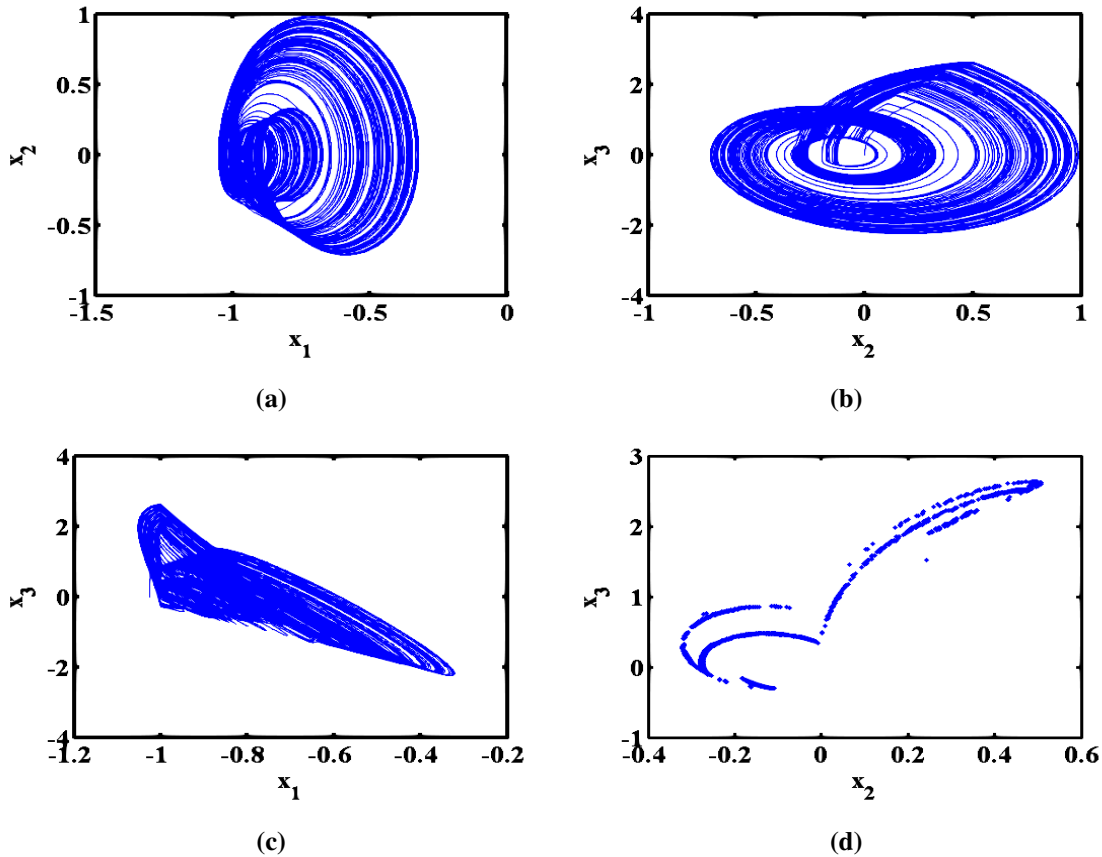
donde  $t \in \mathbb{R}$  es un parámetro. En la Figura 5.2, se pueden observar las variedades y los puntos de equilibrio que han sido definidos por el sistema (5.1). Allí mismo, se aprecia al plano  $S_{-1}$  encargado de delimitar a las regiones  $\mathcal{D}_0$  y  $\mathcal{D}_{-10}$ .



**Figura 5.2:** Plano  $S_{-1}$  y variedades estable  $W^S$  e inestable  $W^U$ , tangentes a los equilibrios  $\mathbf{x}_0^*$  y  $\mathbf{x}_{-10}^*$ .

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  la cuenca de atracción presente en el sistema (5.1), dada una condición inicial  $\mathbf{x}(0) \in \Omega$ , la trayectoria  $\phi_t(\mathbf{x})$  generada por el sistema a partir de  $\mathbf{x}(0)$ , se acerca a uno de los equilibrios a través de su variedad estable tangente generando oscilaciones, esto debido a que la variedad estable está asociada con los eigenvalores complejos conjugados. Después, la acción que ejerce la variedad inestable sobre la trayectoria hace que ésta sea expulsada hacia la región en donde se encuentra el otro punto de equilibrio del sistema en donde se vuelve a repetir el proceso anterior,  $\phi_t(\mathbf{x})$  se acerca al equilibrio generando oscilaciones hasta que la variedad inestable se encarga de llevarla de regreso a la otra región.

Seleccionando la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = (-1.1, 0, 0)^T$ , la trayectoria generada en el atractor puede ser vista mediante las proyecciones sobre los planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  y  $(x_1, x_3)$  que se muestran en la Figura 5.3. Asimismo, para brindar una idea del comportamiento complejo que manifiesta  $\phi_t(\mathbf{x})$ , se muestra una sección de Poincaré, la cual contiene los puntos de intersección entre la trayectoria en el espacio de estados y un plano (Plano de Poincaré)  $\pi_P : x_1 = -1$ .



**Figura 5.3:** Proyecciones sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_2, x_3)$ ; (c)  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria en el atractor a partir de  $\mathbf{x}(0) = (-1.1, 0, 0)^T$ ; (d) Sección de Poincaré con colocación del plano  $\pi_P : x_1 = -1$ .

Obsérvese en la proyección  $(x_1, x_2)$  de la Figura 5.3 que la trayectoria del atractor generado tiene oscilaciones más pequeñas al centro como consecuencia de la cercanía entre  $S_{-1}$  y  $\mathbf{x}_0^*$ , en cambio, las oscilaciones más grandes se deben a que el equilibrio  $\mathbf{x}_{-10}^*$  se encuentra más alejado de  $S_{-1}$  permitiendo que las oscilaciones aumenten de tamaño. El MLE [38] calculado para este atractor es 0.03, respaldando así su dinámica caótica.

## 5.4. Coexistencia de atractores caóticos en el espacio

Con base en el sistema modelado anteriormente, considere ahora la función PWL como:



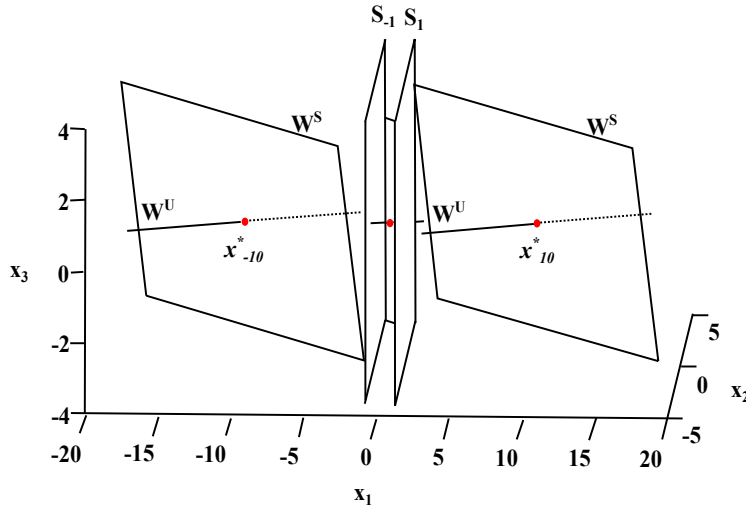
$$f(x_1) = \begin{cases} 7, & \text{si } x_1 \in \mathcal{D}_{-10}; \\ 0, & \text{si } x_1 \in \mathcal{D}_0; \\ -7, & \text{si } x_1 \in \mathcal{D}_{10}; \end{cases} \quad (5.9)$$

donde  $\mathcal{D}_{10} = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 < -1\}$ ,  $\mathcal{D}_0 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | -1 \leq x_1 \leq 1\}$  y  $\mathcal{D}_{-10} = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 > 1\}$ , son las regiones en las que se divide el espacio. Como es de esperarse, existen ahora dos planos  $S_{-1} : x_1 = -1$  y  $S_1 : x_1 = 1$ , que delimitan a las tres regiones existentes, dentro de las cuales, se hallan contenidos los puntos de equilibrio  $\mathbf{x}_{10}^* = (10, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{x}_0^* = (0, 0, 0)^T$  y  $\mathbf{x}_{-10}^* = (-10, 0, 0)^T$ . Para este caso, el equilibrio  $\mathbf{x}_0^*$  es equidistante a ambos planos  $S_{-1}$  y  $S_1$ , ya que  $d(\mathbf{x}_0^*, S_{-1}) = d(\mathbf{x}_0^*, S_1) = 1$ . Por otro lado, el equilibrio  $\mathbf{x}_{-10}^*$  conserva su distancia con respecto a  $S_{-1}$  y de forma simétrica, el equilibrio  $\mathbf{x}_{10}^*$  y el plano  $S_1$  presentan la misma distancia, es decir,  $d(\mathbf{x}_{-10}^*, S_{-1}) = d(\mathbf{x}_{10}^*, S_1) = 9$ .

Ya que las variedades tangentes a los puntos de equilibrio  $\mathbf{x}_0^*$  y  $\mathbf{x}_{-10}^*$  son descritas en las ecuaciones (5.7) y (5.8) respectivamente, las variedades estable e inestable tangentes a  $\mathbf{x}_{10}^*$  son:

$$\begin{aligned} W^U(\mathbf{x}_{10}^*) : (x_1, x_2, x_3) &= (10 + 0.9951t, 0.0984t, 0.0097t); \\ W^S(\mathbf{x}_{10}^*) : 0.32x_1 + 0.8612x_2 + 0.0918x_3 &= 3.2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

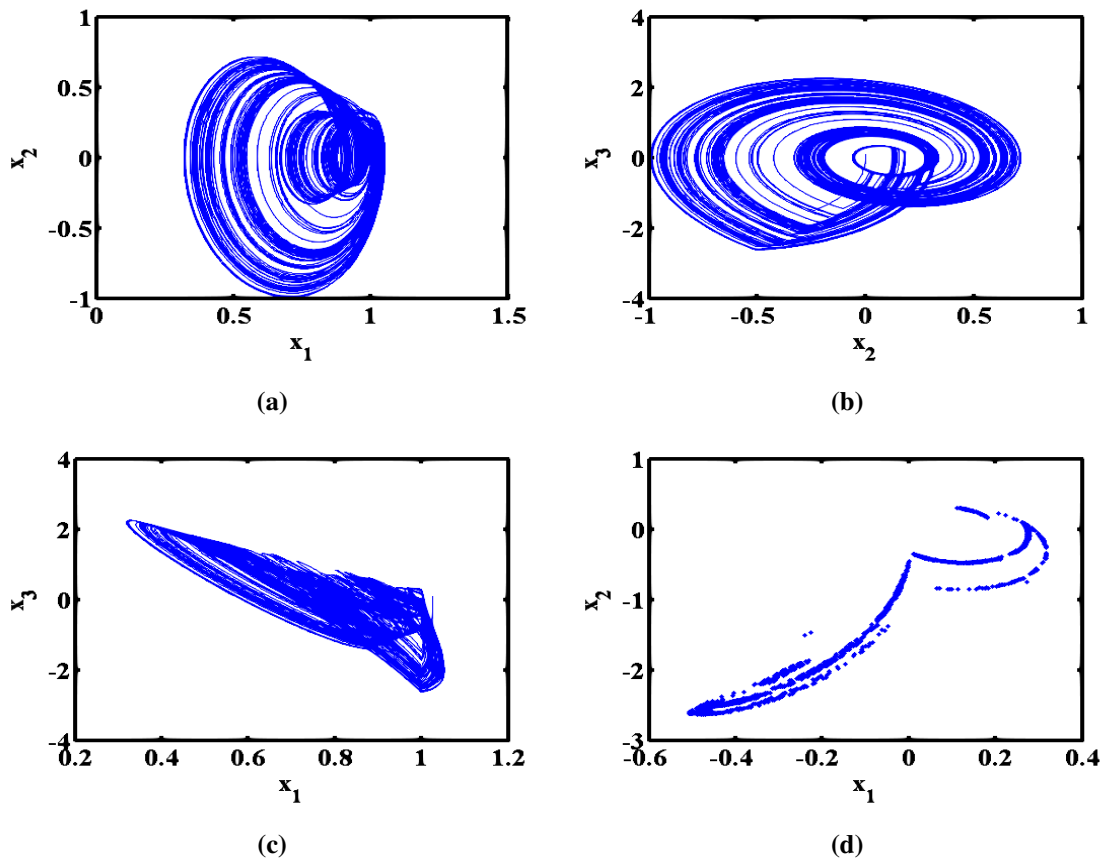
De este modo, la división del espacio hecha con los planos  $S_{-1}$  y  $S_1$ , así como los puntos de equilibrio del sistema, con sus variedades, son bosquejadas en la Figura 5.4.



**Figura 5.4:** Planos  $S_{\pm 1}$  y variedades estable  $W^S$  e inestable  $W^U$ , tangentes a los equilibrios  $\mathbf{x}_0^*$  y  $\mathbf{x}_{\pm 10}^*$ .

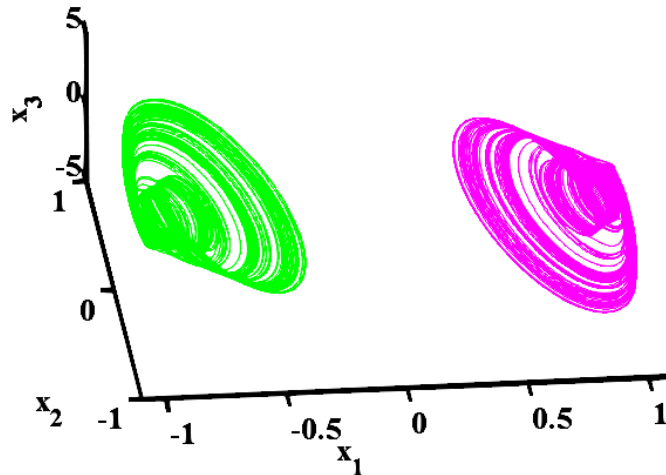
Para el caso en el que existía un sólo atractor en el espacio, se vio que dada una condición inicial  $x(0) \subset \Omega$ , se forma un atractor caótico alrededor del plano  $S_{-1}$ . Para el caso en el que se aborda ahora, considérese la existencia de dos cuencas de atracción  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$  y  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ ,

tal que  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  y  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Cuando la condición inicial  $x(0)$  esté contenida en la cuenca de atracción  $\Omega_1$ , existirá un atractor caótico alrededor de  $S_{-1}$  parecido al de la Figura 5.3, pero cuando  $x(0)$  sea seleccionada dentro de la cuenca  $\Omega_2$ , el atractor caótico que se formará será similar al de la Figura 5.5, en donde se aprecian las proyecciones sobre los planos  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  y  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria generada en el atractor alrededor de  $S_1$ , utilizando la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = (1.1, 0, 0)^T$ . Al igual que en el caso anterior, también se muestra una sección de Poincaré aunque en esta ocasión, el plano  $\pi_P$  está dado por  $\pi_P : x_1 = 1$ . Para este atractor caótico se tiene el MLE calculado igual a 0.03.



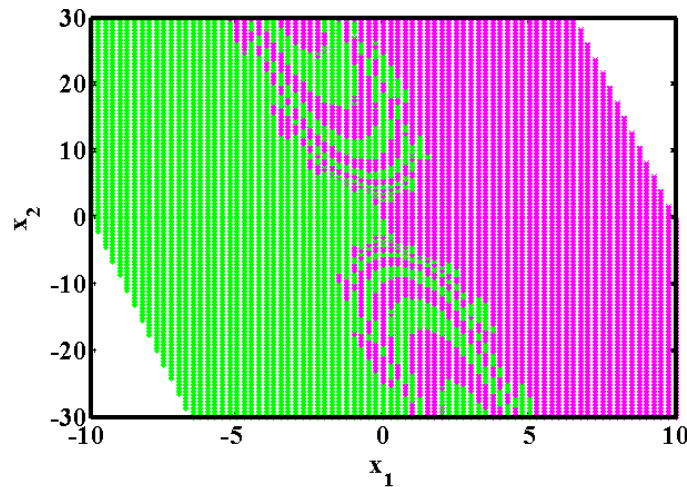
**Figura 5.5:** Proyecciones sobre los planos (a)  $(x_1, x_2)$ ; (b)  $(x_2, x_3)$ ; (c)  $(x_1, x_3)$  de la trayectoria generada en el atractor a partir de  $\mathbf{x}(0) = (1.1, 0, 0)^T$ ; (d) Sección de Poincaré obtenida con la colocación del plano  $\pi_P : x_1 = 1$ .

Con el propósito de observar la coexistencia de los dos atractores conviviendo en el espacio, se han seleccionado las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (-1.025, 0, 0.1)^T$  y  $\mathbf{x}(0) = (1.025, 0, 0.1)^T$  para mostrar las trayectorias generadas en sus respectivos atractores en el espacio de estados, tal y como se aprecia en la Figura 5.6.



**Figura 5.6:** Espacio de estados de las trayectorias generadas en los atractores coexistentes a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0) = (-1.025, 0, 0.1)^T$  y  $\mathbf{x}(0) = (1.025, 0, 0.1)^T$ .

Por su parte, la Figura 5.7 muestra una porción de la cuenca de atracción  $\Omega$ , considerando 19200 condiciones iniciales. Los puntos en color verde representan a la cuenca de atracción  $\Omega_1$ , mientras que la cuenca de atracción  $\Omega_2$  es representada por puntos color magenta.



**Figura 5.7:** Porción de la cuenca de atracción del sistema conformada por  $\Omega_1$  (puntos en color verde) y  $\Omega_2$  (puntos en color magenta).

## 5.4. Multiestabilidad en el plano $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$

Como se pudo hacer notar en la sección anterior, dada una condición inicial, la trayectoria generada en alguno de los atractores coexistentes en el espacio transita únicamente alrededor de dos regiones adyacentes. Entonces, siguiendo esta idea, es posible duplicar la cantidad de

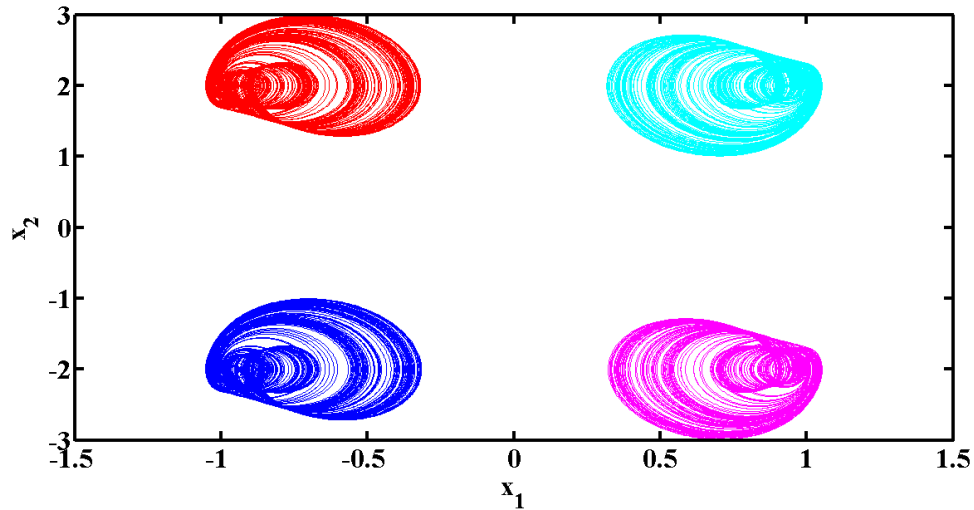
atractores coexistiendo en el espacio si se duplica la cantidad de regiones generadas hasta el momento. Una forma de lograrlo es considerando el vector  $B$  en la forma:

$$B = \begin{pmatrix} -f(x_2)/a \\ 0 \\ f(x_1) + f(x_2) \end{pmatrix}; \quad (5.11)$$

con la función  $f(x_1)$  descrita por la ecuación (5.9) y la función  $f(x_2)$  dada por:

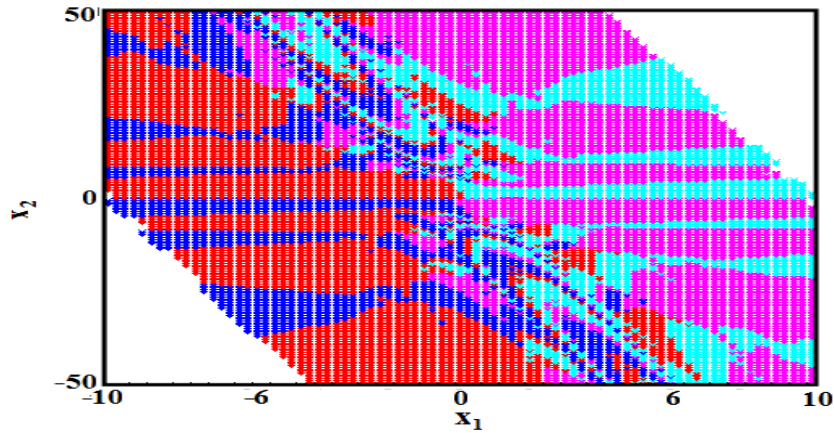
$$f(x_2) = \begin{cases} -14, & \text{si } x_2 \leq 0; \\ 14, & \text{si } x_2 > 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

La función  $f(x_2)$  tiene como propósito dividir en dos, en dirección  $x_2$ , a cada uno de los dominios  $\mathcal{D}_{-i/a}$ . Con esto, el espacio seccionado por  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$  queda dividido en seis regiones distintas que contendrán a los puntos de equilibrio  $\mathbf{x}_{i,j}^* = (i, j, 0)^T$ ,  $i = 0, \pm 10$ ,  $j = \pm 2$ . Las proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de las trayectorias generadas en los atractores coexistentes con el conjunto de condiciones iniciales  $\mathbf{X}(0) = \{(-0.9, 2, 0)^T, (0.9, 2, 0)^T, (-0.9, -2, 0)^T, (0.9, -2, 0)^T\}$ , puede ser apreciado en la Figura 5.9.



**Figura 5.8:** Proyecciones sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de las trayectorias generadas en los cuatro atractores caóticos coexistentes en el espacio.

Por su parte, las cuencas de atracción pertenecientes a los cuatro atractores caóticos coexistentes en el espacio pueden apreciarse en la Figura 5.9.



**Figura 5.9:** Parte de las cuencas de atracción pertenecientes a los cuatro atractores caóticos coexistentes en el espacio.

## 5.5. Conclusiones

En este capítulo se corroboró que es posible obtener el fenómeno de multiestabilidad a partir de sistemas basados en UDS's Tipo II. En particular, se propone la estructura de la parte lineal del sistema y se muestra el rango de parámetros con los cuales, los eigenvalores asociados a  $A$ , están en la forma requerida. Por otro lado, este capítulo puede ser utilizado en investigaciones futuras para propiciar la coexistencia de atractores caóticos que estén distribuidos en el plano  $(x_1, x_2)$ .



# CAPÍTULO 6

---

## Conclusiones y Trabajo a futuro

---

### 6.1. Conclusiones

En estas tesis se presentan tres sistemas multiestables en donde el fenómeno de multiestabilidad fue generado de diferentes formas. Primero, se pudo estudiar que un sistema lineal afín que genera atractores caóticos multienroscado puede ser transformado a un sistema multiestable con el simple hecho de modificar la parte afín del sistema. Por el contrario, es posible generar atractores caóticos multienroscado y posteriormente multiestabilidad si se conserva la parte afín del sistema pero se modifica la parte lineal.

Asimismo, fue posible proponer los modelos matemáticos de las partes lineales de cada sistema presentado; no obstante, al momento de obtener el rango de valores para los parámetros contenidos en tales modelos, se encontraron otros escenarios de interés que caen fuera del alcance esta tesis.

### 6.2. Trabajo a futuro

Considerando el hecho de que la dinámica a largo plazo de un sistema multiestable depende de las condiciones iniciales, es probable que la implementación física de estos sistemas a través del uso de dispositivos electrónicos resulte un trabajo complicado. Si se quisiera seleccionar una condición inicial dentro de una cuenca de atracción específica, sería necesario poder controlar todas las variables físicas de los dispositivos electrónicos, ya que el ruido o pequeñas perturbaciones pueden causar que la trayectoria del sistema no se genere en el atractor deseado. Entonces, para lograr una implementación física, una de las metas a fu-

turo es proponer un controlador que pueda ser aplicado a sistemas multiestables, con el fin de guiar a todas las trayectorias generadas fuera de la cuenca de atracción deseada hasta la cuenca de atracción perteneciente al atractor caótico de interés. Algunos de los requisitos importantes para tomarse en cuenta en el diseño del controlador es que ninguna trayectoria generada debe estabilizarse en puntos que no son equilibrios, además, para cada atractor que se desee preservar, los parámetros del controlador deben ser distintos.

Ya una vez que se logre tener un control sobre el sistema multiestable, la siguiente meta que se tiene pensada es la aplicación de estos sistemas. Aprovechando que el promedio de las series de tiempo de cada atractor coexistente en un sistema multiestable es diferente, se pueden binarizar estas series de tiempo para generar registros y almacenar datos.



---

## Bibliografía

---

- [1] Pisarchik, A. N., & Feudel, U. (2014). *Control of multistability*. Physics Reports, 540(4), 167-218.
- [2] Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y. C., Mancini, H., & Maza, D. (2000). *The control of chaos: theory and applications*. Physics reports, 329(3), 103-197.
- [3] Attneave, F. (1971). *Multistability in perception*. Scientific American.
- [4] Knorre, W. A., Bergter, F., & Simon, Z. (1975). *Multistability in metabolic systems*. Studia biophysica, 49(2), 81-89.
- [5] Ehrhardt, G. C., Marsili, M., & Vega-Redondo, F. (2006). *Phenomenological models of socioeconomic network dynamics*. Physical Review E, 74(3), 036106.
- [6] Paillard, D. (1998). *The timing of Pleistocene glaciations from a simple multiple-state climate model*. Nature, 391(6665), 378-381.
- [7] Pisarchik, A. N., Jaimes-Reátegui, R., Villalobos-Salazar, J. R., Garcia-Lopez, J. H., & Boccaletti, S. (2006). *Synchronization of chaotic systems with coexisting attractors*. Physical review letters, 96(24), 244102.
- [8] Arecchi, F. T., Badii, R., & Politi, A. (1985). *Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system*. Physical Review A, 32(1), 402.
- [9] Feudel, U. (2008). *Complex dynamics in multistable systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 18(06), 1607-1626.
- [10] Lozi, R., & Ushiki, S. (1991). *Coexisting chaotic attractors in Chua's circuit*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1(04), 923-926.

- 
- [11] Tsuneda, A. (2005). *A gallery of attractors from smooth Chua's equation*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 15(01), 1-49.
- [12] Bao, B., Wang, N., Chen, M., Xu, Q., & Wang, J. (2016). *Inductor-free simplified Chua's circuit only using two-op-amp-based realization*. Nonlinear Dynamics, 84(2), 511-525.
- [13] Prasad, A., Iasemidis, L. D., Sabesan, S., & Tsakalis, K. (2005). *Dynamical hysteresis and spatial synchronization in coupled non-identical chaotic oscillators*. Pramana, 64(4), 513-523.
- [14] Jimenez-Lopez, E., Salas, J. G., Ontanon-Garcia, L. J., Campos-Canton, E., & Pisarchik, A. N. (2013). *Generalized multistable structure via chaotic synchronization and preservation of scrolls*. Journal of the Franklin Institute, 350(10), 2853-2866.
- [15] Linz, S. J. (1997). *Nonlinear dynamical models and jerky motion*. American Journal of Physics, 65(6), 523-526.
- [16] Li, C. H. U. N. B. I. A. O., Pehlivan, I., & Sprott, J. C. (2016). *Amplitude-phase control of a novel chaotic attractor*. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, 24, 1-11.
- [17] Li, C., Sprott, J. C., Yuan, Z., & Li, H. (2015). *Constructing chaotic systems with total amplitude control*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 25(10), 1530025.
- [18] Guan, S., Lai, C. H., & Wei, G. W. (2005). *Bistable chaos without symmetry in generalized synchronization*. Physical Review E, 71(3), 036209.
- [19] Riecke, H., Roxin, A., Madruga, S., & Solla, S. A. (2007). *Multiple attractors, long chaotic transients, and failure in small-world networks of excitable neurons*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 17(2), 026110.
- [20] Gross, T., D'Lima, C. J. D., & Blasius, B. (2006). *Epidemic dynamics on an adaptive network*. Physical review letters, 96(20), 208701.
- [21] Ruiz-Oliveras, F. R., & Pisarchik, A. N. (2009). *Synchronization of semiconductor lasers with coexisting attractors*. Physical Review E, 79(1), 016202.
- [22] Pisarchik, A. N., Jaimes-Reátegui, R., Sevilla-Escoboza, R., & Huerta-Cuellar, G. (2012). *Multistate intermittency and extreme pulses in a fiber laser*. Physical Review E, 86(5), 056219.
- [23] Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems (Vol. 7)*. Springer Science & Business Media.

- [24] Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems (Vol. 13046)*. Reading: Addison-Wesley.
- [25] Munoz-Pacheco, J. M., & Tlelo-Cuautle, E. (2010). *Electronic design automation of multi-scroll chaos generators*. Dubai, UEA: Bentham Sciences Publishers.
- [26] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). *Determining Lyapunov exponents from a time series*. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3), 285-317.
- [27] Campos-Cantón, E., Femat, R., & Chen, G. (2012). *Attractors generated from switching unstable dissipative systems*. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(3), 033121.
- [28] Campos-Cantón, E., Barajas-Ramírez, J. G., Solis-Perales, G., & Femat, R. (2010). *Multiscroll attractors by switching systems*. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 20(1), 013116.
- [29] Lü, J., & Chen, G. (2006). *Generating multiscroll chaotic attractors: theories, methods and applications*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16(04), 775-858.
- [30] Tlelo-Cuautle, E., Sánchez-Sánchez, M., Carbajal-Gómez, V. H., Pano-Azucena, A. D., de la Fraga, L. G., & Rodríguez-Gómez, G. (2016). *On the Verification for Realizing Multiscroll Chaotic Attractors with High Maximum Lyapunov Exponent and Entropy*. In *Advances and Applications in Chaotic Systems* (pp. 311-336). Springer International Publishing.
- [31] Kengne, J., Njitacke, Z. T., & Fotsin, H. B. (2016). *Dynamical analysis of a simple autonomous jerk system with multiple attractors*. *Nonlinear Dynamics*, 83(1-2), 751-765.
- [32] Lu, J., Yu, X., & Chen, G. (2003, August). *Switching control for multi-scroll chaos generation: an overview*. In *phycon* (pp. 420-428). IEEE.
- [33] Chua, L. O., Komuro, M., & Matsumoto, T. (1986). *The double scroll family*. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 33(11), 1072-1118.
- [34] Yalçın, M. E., Suykens, J. A., Vandewalle, J., & Özoğuz, S. (2002). *Families of scroll grid attractors*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(01), 23-41.
- [35] Lü, J., Zhou, T., Chen, G., & Yang, X. (2002). *Generating chaos with a switching piecewise-linear controller*. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 12(2), 344-349.
- [36] Saito, T. (1990). *An approach toward higher dimensional hysteresis chaos generators*. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 37(3), 399-409.

- [37] ChuaTang, W. K., Zhong, G. Q., Chen, G., & Man, K. F. (2001). *Generation of n-scroll attractors via sine function*. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, IEEE Transactions on, 48(11), 1369-1372.
- [38] Rosenstein, M. T., Collins, J. J., & De Luca, C. J. (1993). *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 65(1), 117-134.
- [39] Kuznetsov, N. V. (2016). *Hidden Attractors in Fundamental Problems and Engineering Models: A Short Survey*. In *AETA 2015: Recent Advances in Electrical Engineering and Related Sciences* (pp. 13-25). Springer International Publishing.
- [40] Hens, C., Dana, S. K., & Feudel, U. (2015). *Extreme multistability: Attractor manipulation and robustness*. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(5), 053112.
- [41] Devaney, R. L. (1992). *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley Publishing Company.