



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINAMICOS

Modelo Euler – Lagrange de marcha humana:
Simulaciones numéricas y experimentos.

Tesis que presenta
Angela Patricia Bravo Vidales

Para obtener el grado de
Maestra en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:
Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores

San Luis Potosí, S.L.P., Marzo de 2016



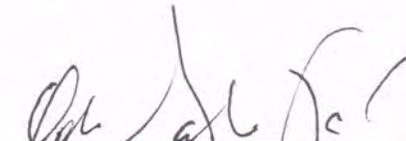
IPICYT

Constancia de aprobación de la tesis

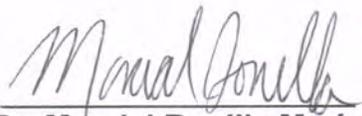
La tesis "**Modelo Euler - Lagrange de marcha humana: Simulaciones numéricas y experimentos**" presentada para obtener el Grado de Maestra en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Angela Patricia Bravo Vidales** y aprobada el **quince de marzo del dos mil dieciséis** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.



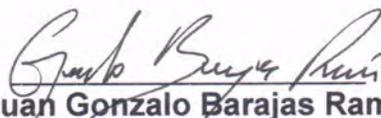
Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores
Director de la tesis



Dr. Francisco Cruz Ordaz Salazar
Jurado en el Examen



Dr. Marcial Bonilla Marín
Jurado en el Examen



Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores.

Durante la realización del trabajo la autora recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología No.297707 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 019 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 15 días del mes de marzo del año 2016, se reunió a las 10:15 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Francisco Cruz Ordaz Salazar	Presidente	UPSLP
Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores	Secretario	IPICYT
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Sinodal	IPICYT
Dr. Marcial Bonilla Marín	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRA EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó la C.

Angela Patricia Bravo Vidales

sobre la Tesis intitulada:

Modelo Euler - Lagrange de marcha humana: Simulaciones numéricas y experimentos.

que se desarrolló bajo la dirección de

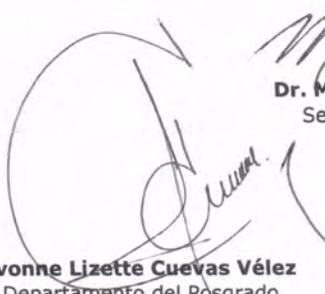
Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores

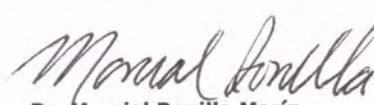
El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 11:29 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 15 días del mes de marzo de 2016.


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



Dedicatorias

Dedico este trabajo a mi familia, por apoyarme siempre en mis decisiones, por sus enseñanzas y consejos, por su esfuerzo para brindarme las herramientas necesarias para llegar a ser una persona de bien, por su ejemplo; pero sobre todo por su amor incondicional.

¡Gracias a ustedes he podido concluir una etapa más en mi vida!

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo otorgado mediante la beca No. 297707, para poder llevar a cabo mis estudios de maestría.

De igual forma, agradezco al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A.C., en especial a la División de Matemáticas Aplicadas, por permitirme ser partícipe de este proyecto. De manera especial quiero agradecer al Dr. Ricardo Femat por su confianza al permitirme participar en esta investigación, por su dirección, sus enseñanzas, anécdotas y consejos. También quisiera extender un agradecimiento muy especial a Claudia Flores Gutiérrez, quien me ha brindado un gran apoyo desde la asignación de mi tema de tesis, y a Martín Méndez González, por su ayuda en los experimentos realizados. A Crescencio y Jesús por ayudarme en las cuestiones técnicas del proyecto. A mis compañeros de maestría, Abel, Adrián, Efrén y Virgilio; por su amistad y compañía durante este proceso; e igualmente a Nelly y Héctor, por su ayuda y consejos. Asimismo, agradezco a todos los profesores del IPICYT que estuvieron presentes durante mi formación; porque la mayor parte del tiempo sus clases en verdad representaron un reto para mí, por sus críticas, observaciones y consejos durante las presentaciones semestrales; y por las conversaciones que pude tener con algunos de ustedes fuera del ambiente académico.

Agradezco a mis papás Paty y Miguel, por confiar en mí y apoyarme en todo momento, pero en especial, por ser mi ejemplo a seguir. A mi hermano Mike, por ayudarme en cuestiones de TI, y por desafiar mi intelecto con argumentos y cuestionamientos sobre ciencia y tecnología. A mi hermana Karen, por ser siempre mi cómplice de muchas travesuras, y por sus comentarios siempre certeros ante mis “dudas existenciales”. Los quiero mucho.

Agradezco a Aldo, por acompañarme en mis muchos momentos de alegría, desestrés y satisfacción; y por qué en mis ratos de tristeza, enojo, desesperación y frustración siempre me brindó su apoyo, encontrando formas distintas de sacarme una sonrisa y motivarme a seguir superándome. Gracias por aparecerte en mi camino y permanecer en él.

Finalmente, quiero agradecer a mis amigos de PRISMATIC, Rodolfo, Cintia, Emilia y Luis; y a mis amigos fuera de la Institución, Karla, Fer, Gaby, Almond, Ara, Carlitos, Lalo, y aquellos que estuvieron presentes y no he mencionado; gracias por contribuir a que pudiera concluir este proyecto y sobre todo gracias por su amistad.

Contenido

Constancia de aprobación de tesis	ii
Créditos institucionales	iii
Dedicatorias	v
Agradecimientos.....	vi
Contenido	vii
Apéndice	x
Notación y abreviaturas.....	xi
Glosario	xiii
Resumen	xix
Abstract	xx

Capítulo 1.

INTRODUCCIÓN	1
1.1. Hipótesis y Motivación	5
1.2. Objetivo General.....	5
1.3. Objetivos Particulares.....	5
1.4. Resultados.....	6
1.5. Organización de los capítulos.....	6

Capítulo 2.

GENERALIDADES DEL MOVIMIENTO DURANTE LA MARCHA HUMANA	8
2.1. Descripción de los sistemas HW (<i>Human Walking</i>) y AW (<i>Air-Walker</i>).	9
2.2. Sistema coordinado para la anatomía humana.	12
2.3. El cuerpo humano en movimiento	14
2.4. Antropometría humana	20
2.5. Parámetros corporales relacionados con las propiedades inerciales del cuerpo humano.....	22
2.5.1. Centro de Masa (CM)	22
2.5.2. Momento de Inercia	27

Capítulo 3.

METODOLOGÍA Y CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO DINÁMICO DE LA MARCHA HUMANA	29
3.1. Modelado de un Sistema Dinámico	30
3.2. Metodología Euler-Lagrange ($E - L$)	31
3.2.1. Coordenadas Generalizadas	32
3.2.2. Descripción de la metodología.....	33
3.3. Construcción de los Modelos Dinámicos.	36
3.3.1. Condiciones para construir el modelo HW	36
3.3.2. Construcción del modelo dinámico HW	38
3.3.3. Construcción del modelo dinámico AW	46
3.4. Acoplamiento de los sistemas HW y AW	49
3.5. Modelo en el espacio de estados	53

Capítulo 4.

ANÁLISIS MATEMÁTICO.	56
4.1. Características Preliminares del Modelo Euler-Lagrange	57
4.2. Propiedades fundamentales – Existencia y Unicidad	59
4.2.1. Existencia y Unicidad de la solución del sistema HW.....	63
4.2.2. Existencia y Unicidad de la solución del sistema AW.....	64
4.2.3. Existencia y Unicidad de la solución del sistema HW-AW.....	64
4.3. Dependencia continua a condiciones iniciales y parámetros.....	65
4.4. Puntos de equilibrio	69
4.5. Estabilidad de los puntos de equilibrio (Lyapunov)	72

Capítulo 5.

IDENTIFICACIÓN DE PARAMÉTRICA	77
5.1. Teoría	77
5.2. Método de mínimos cuadrados no lineales.....	79
5.3. Diseño de experimentos para la identificación paramétrica.....	82

5.3.1. Descripción del experimento.....	82
5.3.2. Algoritmo de identificación y obtención de parámetros.....	85
RESULTADOS.....	96

Capítulo 6.

ENERGÍA, CALOR Y TRABAJO MECÁNICO EN EL CUERPO HUMANO	106
6.1. Metabolismo del cuerpo humano: obtención, almacenamiento y uso de la energía.....	
.....	106
6.2. Trabajo mecánico	111
6.3. Potencia.....	113

Capítulo 7.

CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO	117
7.1. Conclusiones y Discusiones	117
7.2. Trabajo a futuro	121

Apéndices

Apéndice A	REFERENCIAS SOBRE PARÁMETROS CORPORALES DEL SER HUMANO.	125
Apéndice B	MODELO MATEMÁTICO PROPUESTO Y PRELIMINARES MATEMÁTICOS.	135
Apéndice C	EQUIPO UTILIZADO EN LOS EXPERIMENTOS RELATIVOS A LA ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA.	139
Apéndice D	GRAFICAS DE LOS DATOS EXPERIMENTALES	140

Notaciones y Abreviaturas

SI	Sistema Internacional de Unidades
GDL	Grado de Libertad
UB	<i>Upper Body</i> , parte superior del cuerpo
Th	<i>Thigh</i> , muslo
Ca	<i>Calf</i> , pantorrilla
HW	<i>Human walking</i> , marcha humana
AW	<i>Air Walker</i> , caminadora tipo esquiadora
CM	Centro de masa
<i>F</i>	Fuerza
<i>m</i>	Masa
<i>a</i>	Aceleración
<i>M</i>	Momento angular
<i>I</i>	Inercia
<i>α</i>	Aceleración angular
<i>ρ₀</i>	Radio de giro
<i>K</i>	Energía cinética
<i>P</i>	Energía potencial
<i>E – L</i>	Ecuaciones Euler-Lagrange
<i>v</i>	Velocidad
MTx	<i>Motion Tracker</i> (sensor de movimiento)
ATP	Trifosfato de adenosina
C	Capacidad calorífica

cal.	Caloría
ρ	Densidad
c	Calor específico
ME	Energía Metabolizable
W	Trabajo
ΔT	Cambio en la temperatura
ΔU	Cambio en la energía
Q_{met}	Producción de calor del metabolismo (Tasa Metabólica)
Q_{loss}	Pérdida de calor
TM	Tasa Metabólica
TMB	Tasa Metabólica Basal
TIR	Tasa de Intercambio Respiratorio
F_{ext}	Fuerza externa
ϵ	Eficiencia
W_m	Trabajo mecánico
P_m	Potencia
E_b	Energía Total del cuerpo
E_{si}	Energía del segmento i

Glosario

Anabolismo. Conjunto de procesos metabólicos a través de los cuales, las moléculas complejas son sintetizadas a partir de otras más sencillas.

Anatomía. Estudio de la estructura, entorno y relaciones entre las diferentes partes del cuerpo humano.

Antropometría. Tratado de las proporciones y medidas del cuerpo humano.

Articulación, juntas de revolución. Unión entre dos piezas rígidas que permite el movimiento relativo entre ellas. En el caso del cuerpo humano, se refiere a la unión de un hueso u órgano esquelético con otro.

- **Articulación ideal.** Articulación sin disipación de energía debida a la fricción o a la deformación.
- **Articulación de revolución.** Articulación que permite solamente la rotación de los segmentos adyacentes.

Aceleración. Tasa de cambio de velocidad.

- **Aceleración angular.** Tasa de cambio de la velocidad angular
- **Aceleración de Coriolis.** La aceleración que actúa cuando un cuerpo se mueve con respecto a un marco de referencia rotacional.

Actuador. Un dispositivo que genera fuerzas o convierte una forma de energía en otra.

Biodinámica. Parte de la fisiología que estudia las leyes de la física y la ingeniería para describir la energía, la fuerza y el movimiento de un sistema biológico.

Biocinética. Parte de la física que estudia los sistemas biológicos durante el movimiento, utilizando conceptos como longitud, tiempo y masa.

Biomecánica. Disciplina que describe, analiza y evalúa el movimiento humano.

Cadena cinemática. Conjunto de dos o más eslabones enlazados por articulaciones.

Calor. Energía manifestada por el aumento de temperatura procedente de la transformación de otras formas de energía. El calor es transferido de un cuerpo a otro por la diferencia de temperaturas, con el fin de que éstas se equilibren.

- **Calor específico.** Cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un cuerpo un grado centígrado por cada kilogramo de masa.
- **Caloría.** Es una unidad de energía, equivalente a la cantidad de calor necesaria para elevar 1 grado centígrado la temperatura de 1 gramo de agua.
- **Calorimetría.** Parte de la física que estudia la medición del calor y las constantes térmicas.
- **Capacidad calorífica.** Energía requerida para elevar la temperatura T de un objeto un grado centígrado.

Catabolismo. Conjunto de procesos metabólicos a través de los cuales, las sustancias consumidas por un organismo son degradadas para obtener otras más simples.

Caminadora tipo esquiadora. Aparato para realizar ejercicio cuya característica principal es que al ser utilizada, el individuo balanceará sus piernas hacia adelante y hacia atrás (movimiento pendular) similar al movimiento que ocurre al esquiar.

Caminata humana. Modo de locomoción bípeda, en la cual se mueven en vaivén y de manera alternada las extremidades inferiores.

Centro de masa. Punto geométrico que dinámicamente se comporta como el punto en el que las fuerzas resultantes se encuentran en equilibrio. Depende de las distribuciones de masas y densidades de las partículas que componen el sistema.

Punto respecto al cual el momento de masa de primer orden en cualquier plano es igual a cero.

Cinemática. Parte de la física que estudia el movimiento sin tomar en cuenta las fuerzas que lo producen.

Cinética. Estudio de las relaciones entre las fuerzas y sus efectos en los cuerpos en reposo (estática) y cuerpos en movimiento (dinámica).

Coefficiente de fricción cinética. Un coeficiente de fricción cinética que depende de la velocidad de deslizamiento, fuerza normal y el tiempo en que la fuerza es aplicada.

Coefficiente de fricción dinámica. Tasa de fuerza cortante a la fuerza normal registrada durante el deslizamiento.

Coefficiente de fricción estática. Tasa de la fuerza de fricción cortante a la fuerza que corresponde a la transición entre el estado de reposo y el de movimiento.

Dinámica. Es una rama de la cinética que estudia la relación entre fuerzas y el movimiento resultante. Es el estudio de los movimientos de cuerpos interactuando. El movimiento es descrito en términos de leyes postuladas

Energía. Capacidad para realizar un trabajo.

- **Energía cinética.** La que posee un cuerpo por razón de su movimiento.
 - **Rotacional (de un cuerpo rígido).** Energía cinética asociada con la rotación de un cuerpo alrededor de su centro de masa.
 - **Traslacional (de un cuerpo rígido).** Energía cinética asociada con el movimiento del centro de masa de un cuerpo.
- **Energía mecánica (de un cuerpo rígido).** Es la suma de las energías cinética y potencial de un cuerpo.

- **Energía potencial.** Capacidad de un cuerpo para realizar trabajo en razón de su posición en un campo de fuerzas.

Entalpía. Magnitud termodinámica de un cuerpo, la cual es igual a la suma de su energía interna más el producto de su volumen por la presión externa.

Fuerza. Una medida de la acción de un cuerpo en otro. La fuerza es una cantidad vectorial que está definida por su magnitud, dirección, y punto de aplicación (o la línea de acción de la fuerza).

- **Fuerza de fricción.** Componente tangencial de una fuerza de contacto entre dos cuerpos.

Grado de libertad. Es el número de movimientos independientes que puede tener un objeto, y sirve para describir la cinemática de tal objeto.

Identificación paramétrica. Conjunto de estudios, teorías y algoritmos que nos permiten obtener parámetros desconocidos de un modelo matemático para obtener un modelo que represente con suficiente exactitud las características del sistema real.

Inercia. Propiedad de un cuerpo de no cambiar su estado de reposo, o por el contrario, de mantenerse en movimiento a menos que haya una fuerza que actúe sobre él.

Lagrangiano. Ecuación derivada de la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial de un sistema.

Macronutrientes. Aquellos nutrientes que suministran la mayor parte de la energía metabólica al organismo. (Carbohidratos, lípidos y proteínas).

Metabolismo. Es la suma de todos los procesos químicos realizados por las células con el propósito de mantener vivo al cuerpo humano. A través del metabolismo, la energía obtenida de los alimentos es almacenada y utilizada.

Modelo matemático. En esta tesis entendemos por este concepto a una representación de un sistema por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Momento angular. El producto del momento de inercia de un cuerpo y su velocidad angular.

Momento de inercia. Ocurre cuando un cuerpo gira en torno a uno de sus ejes. Su expresión matemática general es, la suma de los productos que resultan de multiplicar la masa de cada elemento de un cuerpo por el cuadrado de su distancia a un eje de rotación.

Movimiento pendular. Movimiento de un péndulo ideal, en el cual la energía mecánica total es constante durante un ciclo de oscilación.

Parámetro. Variable para identificar elementos mediante su valor numérico.

- **Parámetros segmentales corporales.** Características inerciales de un segmento corporal tal como la masa, tensor de inercia, localización del centro de masa, longitud, Etc.
- **Parámetro medible.** Aquel cuyo valor puede ser obtenido a través de un método físico y de forma directa.
- **Parámetro no medible.** Aquel cuyo valor no puede ser ponderado por un método simple o directo.

Potencia. Cantidad de energía producida o consumida por unidad de tiempo.

Radio de giro. Distancia desde el eje en el cual una partícula de la misma masa de un cuerpo tiene el mismo momento de inercia que el cuerpo original.

Sistema conservativo. Sistema en el cual el trabajo es hecho solo por fuerzas conservativas y entonces la suma de la energía cinética y potencial permanece constante en medio de todos los cambios.

Sistema neuromuscular. Aquel que considera la interacción entre el sistema nervioso y el sistema musculo-esquelético. Este sistema actúa para controlar la liberación de energía para generar patrones de tensión controlados.

Subsistema. Subsistemas que conforman el cuerpo humano. Sistema muscular, sistema óseo, sistema respiratorio, sistema digestivo, sistema circulatorio, sistema excretor (urinario), sistema endocrino, sistema nervioso, entre otros.

Segmento corporal. Una parte del cuerpo considerada por separado de las partes adyacentes.

Trabajo mecánico. Fuerza que se aplica a un objeto \times la distancia que recorre al ser empujado o al tirar de él.

Transferencia de energía. Redistribución de la energía cinética a través de los eslabones de un cuerpo. Un eslabón pierde energía mientras que un segundo eslabón gana energía en la misma cantidad.

Resumen

Modelo Euler – Lagrange de marcha humana: simulaciones numéricas y experimentos.

PALABRAS CLAVE. *Locomoción, modelo matemático, cinética, mecánica, identificación paramétrica, inercia, constante elástica, constante amortiguamiento.*

El cuerpo humano es uno de los sistemas más increíbles que existen y que ha sido de gran interés para muchos investigadores de varias áreas del conocimiento. En particular aquellas enfocadas en la locomoción humana. En este trabajo, se conceptualiza al cuerpo humano como un “sistema mecánico” formado por 5 eslabones, para desarrollar un modelo matemático que represente una aproximación al modelado de la marcha humana bajo ciertas condiciones. La construcción del modelo matemático se realizó utilizando la metodología Euler-Lagrange, la cual se basa en balances de energía y coordenadas generalizadas. Una de las condiciones consideradas para la construcción del modelo fue que el cuerpo humano tuviera movimientos particulares para limitar así el número de grados de libertad. Para ello se consideró “una caminadora tipo esquiadora”, cuya característica principal es permitir balancear las piernas de manera independiente una de la otra. En esta tesis también se presentan los resultados obtenidos de la identificación paramétrica de algunos de los valores nominales del modelo matemático propuesto para un individuo. Dichos parámetros fueron: Inercias (I_i), constantes elásticas (k_i) y, constantes de amortiguamiento (b_i). Las mediciones experimentales permiten validar las hipótesis de construcción del modelo y establecen retos para la identificación de los parámetros.

Abstract

Euler – Lagrange modelling of human gait: numerical simulations and experiments.

KEYWORDS. *Locomotion, mathematical model, kinetics, mechanics, parametric identification, inertia, elastic constant, damping constant.*

The human body is an amazing system. It has been an object of study of great interest to many researchers in many areas of knowledge. In particular those focused on human motion. In this paper, the human body has been established as a “mechanical system” formed of five rigid links to develop a mathematical model that represents an approach to human walking modelling, under certain conditions. To build the mathematical model it was used the Euler-Lagrange methodology, which is based on energy balance and generalized coordinates. One of the conditions to build the model was that the human body has specific movements and therefore a limited number of degrees of freedom. For this issue, we consider an “air walker”, whose main feature is to allow swinging legs independently one of each other. In this thesis, the results of the parametric identification of some of the nominal values of the mathematical model proposed for a particular individual are also presented. These parameters were: Inertia constants (I_i), elastic constants (k_i) and damping constants (b_i). Experimental measurements validate the building model assumptions and establish challenges for parametric identification.

“El eterno misterio del mundo es su comprensión”

Albert Einstein

Capítulo 1.

INTRODUCCIÓN

El cuerpo humano es uno de los sistemas más increíbles y complejos que existen. A lo largo de la historia han existido diferentes razones para estudiar la locomoción humana [23]. Una de ellas es conocer la cantidad de energía utilizada durante la realización de la caminata o marcha humana. En la **Figura 1.1** se muestra como una vez obtenida la energía metabólica, ésta es utilizada para diferentes propósitos de entre los cuales en la figura se destaca el que la energía obtenida sea transformada para la realización de trabajo externo.

Como principal motivación de este trabajo está el poder explicar las relaciones existentes entre la energía metabólica, principalmente de carbohidratos, y su transformación para llevar a cabo trabajo externo, como la locomoción para desplazarnos (caminata o marcha humana). Sin embargo, en esta tesis sólo nos enfocaremos en estudiar algunos aspectos relacionados con la energía mecánica, en particular en el modelado del cuerpo humano visto como un sistema mecánico bajo ciertas condiciones.

Hay diferentes modelos que representan el movimiento del cuerpo humano al caminar. Los hay desde los más sencillos, que consideran su dinámica similar a la de un péndulo invertido (por ejemplo: [4], [40], [44], [48], [50], [52], [53] y [54]); hasta los más complejos que consideran al cuerpo humano como un conjunto de eslabones acoplados, (por ejemplo: [41], [46], [47] y [51]).

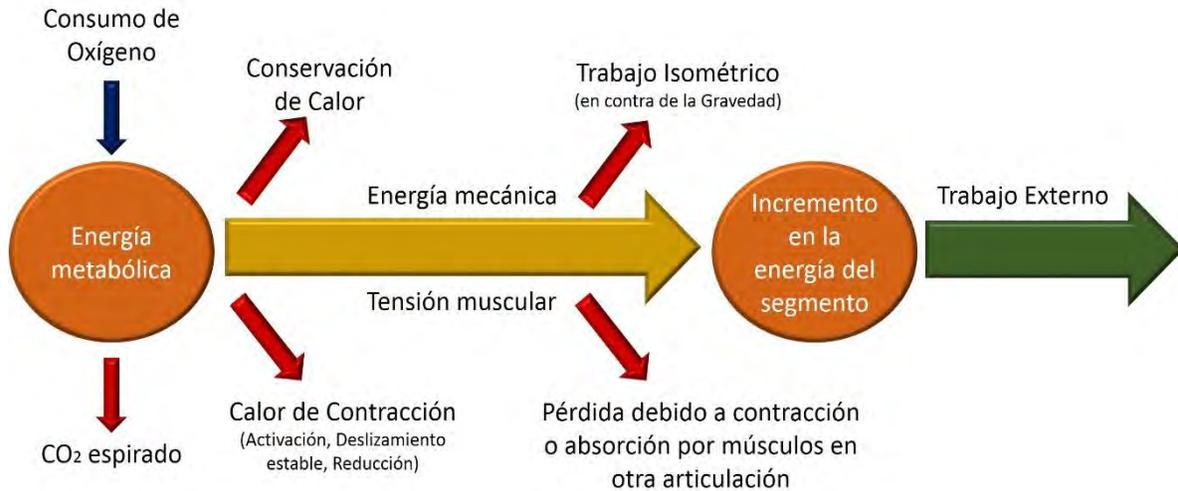


Figura 1.1. Flujo de energía desde el nivel metabólico hasta su utilización para el trabajo mecánico externo [20].

En aquellos trabajos que presentan modelos matemáticos sencillos, se exhibe la dinámica del cuerpo humano descrita por un péndulo invertido; es decir, por un eslabón con movimientos oscilatorios respecto a un eje (1 GDL), con masa en la parte superior, ver **Figura 1.1a**. Otros de ellos, siguen esta misma idea, pero en lugar de considerar un eslabón rígido, consideran un resorte con giro respecto a un eje y desplazamiento elástico hacia arriba y abajo, ver **Figura 1.1b**. Es posible modelar el cuerpo humano de esta manera debido a que la energía de un péndulo invertido es conservativa; es decir, permanece invariable conforme pasa el tiempo, aunque puede llegar a transformarse en otra forma de energía. Este modelo también suele elegirse debido a que su dinámica parece gobernar el movimiento de las extremidades inferiores de una amplia variedad de animales que caminan sobre la tierra. Además, el estudio de la dinámica de un péndulo invertido es muy amplio en la actualidad, por lo cual existen herramientas que pueden facilitar su análisis dinámico.

Por otro lado, en los trabajos que se presenta un modelo dinámico más complejo el análisis dinámico es más general; es decir, se centran en estudiar las trayectorias del movimiento de cada uno de los segmentos considerados y caracterizar así la

marcha de algún individuo. En [51] se estudia un caso similar al que nos interesa abordar en esta tesis. Los autores plantean modelar el cuerpo humano mediante la metodología Euler – Lagrange, con el propósito de controlar un exoesqueleto accionado con motores eléctricos. Se considera que los movimientos involucrados en la marcha humana se encuentran en un plano bidimensional y los eslabones que conforman el exoesqueleto se conectan el uno con el otro por medio de articulaciones rígidas, sin efectos elásticos o de amortiguamiento.

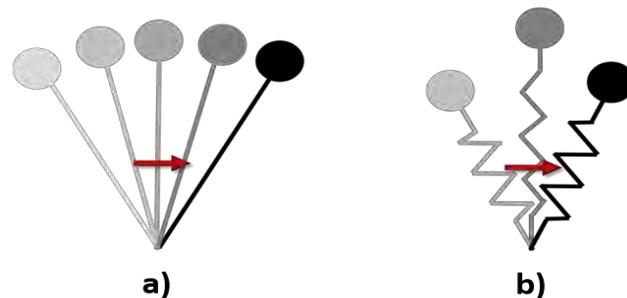


Figura 1.2 a) modelo de péndulo invertido con eslabón rígido, b) modelo de péndulo invertido con eslabón elástico.

Las características consideradas para la construcción de un modelo matemático dependen de su propósito. En esta tesis, se investigará el movimiento de un individuo sobre un aparato para realizar ejercicio, el cual ha sido nombrado “caminadora tipo esquiadora” (debido al movimiento pendular de las piernas, similar al que ocurre al esquiar). Para ello, se construirá un modelo matemático que refleje la dinámica, tanto del movimiento de la persona como del movimiento de la caminadora, y las relaciones entre ambos. Más adelante se verá que, a pesar de que la marcha humana es distinta de la realización de ejercicio sobre una caminadora tipo esquiadora, existen aspectos que pueden considerarse similares en entre ambas actividades.

El modelo propuesto en este trabajo, considera al cuerpo humano como el conjunto de 5 segmentos sólidos, de masa constante; en ciertas partes acoplados por articulaciones y en otras por sistemas resorte-amortiguador. De esta forma habrá

ciertas componentes elásticas y amortiguadoras en los movimientos, simulando el efecto muscular, el cual será visible en el valor de las constantes elásticas y de amortiguamiento. Otros supuestos considerados para la construcción del modelo son que los eslabones se consideran rígidos, unidos por juntas de revolución ideales (en las que no se tiene energía disipada por fricción), las líneas de acción de las fuerzas de reacción en las juntas pasan a través del centro de las mismas y las masas y momentos de inercia no cambian durante el movimiento.

El modelo de la marcha humana es obtenido mediante la metodología Euler – Lagrange. Esta metodología se basa en el balance de energías cinética y potencial; lo cual nos permite, obtener el valor de la energía, una vez que se tienen los parámetros del sistema y los valores de las variables a través del tiempo. Algunos de estos parámetros, como las longitudes y perímetros de los segmentos corporales, serán medidos directamente de un individuo voluntario (bajo previo consentimiento). Otros parámetros, como lo son las masas correspondientes a cada segmento, serán calculados en base al peso total del individuo y ecuaciones reportadas por otros investigadores [18]. Sin embargo, no se cuenta con el valor de algunos de los parámetros considerados en la modelación de la marcha; por ejemplo, las constantes de amortiguamiento del torso respecto a cada uno de los ejes cartesianos. Para la obtención de éstos parámetros se utilizará la teoría de identificación paramétrica. El proceso de identificación paramétrica requiere de la obtención de datos experimentales, los cuales determinaran la función de referencia a la cual queremos aproximar la solución del modelo obtenido. Una vez que se tienen los datos experimentales y la solución del modelo se busca compararlas mediante una función de costo, la cual posteriormente será minimizada para garantizar que las respuestas sean similares. Para minimizar la función de costo se utiliza un método recursivo, en este caso se utilizará el método de mínimos cuadrados, el cual varíe el valor del conjunto de parámetros a identificar y determine los valores para los parámetros que hace que la función de costos sea mínima; es decir, que las diferencias entre la respuesta experimental y la respuesta simulada mediante el modelo sea la menor posible. Finalmente, los valores obtenidos

mediante el proceso de identificación son evaluados en el modelo propuesto para validarlo.

1.1. Hipótesis y Motivación

A partir de un modelo matemático construido mediante la metodología Euler – Lagrange, se pueden establecer relaciones para visualizar la energía cinética en actividad física.

Los parámetros del cuerpo humano incluidos en dicho modelo (por ejemplo: longitudes, distribuciones de masa, inercia, etc.), tienen un efecto en el desempeño de un individuo durante el ejercicio en una caminadora tipo esquiadora. De ser así, en un futuro, el modelo propuesto, los parámetros medibles y los parámetros identificados podrían ser acoplados a algún modelo de metabolización de carbohidratos y estudiar los efectos que tienen las características físicas de un individuo en su metabolismo y, los efectos de su metabolismo en la actividad física.

1.2. Objetivo General

Analizar la dinámica de la marcha humana en una caminadora tipo esquiadora, para construir un modelo matemático de la energía cinética y potencial, al cual podamos realizar una identificación de los parámetros no medibles de forma directa.

1.3. Objetivos Específicos

1. Obtener un modelo dinámico de la marcha humana y el modelo dinámico de una caminadora tipo esquiadora.
2. Realizar el acoplamiento de ambos sistemas y hacer un análisis general de los modelos obtenidos.
3. Realizar la identificación paramétrica para complementar el modelo dinámico de la marcha humana.

1.4. Resultados.

Como veremos más adelante, es necesario realizar algunos experimentos, para poder realizar la estimación paramétrica, a fin de tener acceso a las señales de entrada y salida del sistema para, a partir de estas señales, identificar el valor de los parámetros a los cuales no se tiene acceso de forma directa del modelo matemático. Para realizar la estimación paramétrica se eligió a un *sujeto de prueba* cuyas características se detallarán en la sección de Resultados del Capítulo 5.

El lector podrá encontrar las longitudes de los segmentos corporales basados en tablas reportadas por ciertos investigadores, los cuales son calculados a partir de la altura del *sujeto de prueba*; en comparación con las longitudes medidas directamente del *sujeto de prueba*. Esto, para resaltar el hecho de que los parámetros corporales varían entre diferentes poblaciones. Los parámetros que caracterizan a una población, no necesariamente aplican para otra, de ahí la importancia de contar con estudios estadísticos sobre la población mexicana respecto a este tema.

Para la obtención de datos de entrada y salida del sistema, necesarios en la identificación paramétrica, se utilizaron sensores de movimiento MTx de la marca Xsens [**Apéndice C**]. Respecto a estas mediciones, se mostrarán algunas de las gráficas obtenidas. Además, se presenta la comparación de algunas de las señales obtenidas de forma experimental contra algunas de las señales obtenidas por medio de simulaciones (las cuales incluyen el valor de los parámetros estimados). En esta parte se incluye el criterio de minimización del error, el valor inicial de los parámetros, el valor identificado y el error entre el sistema real y el simulado.

1.5. Organización del documento de tesis.

En el Capítulo 2 se discute sobre las características generales del cuerpo humano: cómo los músculos y huesos interactúan para moverse, las características de las

articulaciones, los grados de libertad, los parámetros que influyen en el movimiento y los valores que suelen tener estos parámetros. Esta información, será la base del conocimiento para la construcción del modelo matemático para la marcha humana. Una vez determinadas las bases, será de interés el desplazamiento de los segmentos corporales a lo largo del tiempo. Esto es posible analizarlo por medio de las leyes de Newton, o por medio de balances de energía (metodología Euler – Lagrange). En el Capítulo 3 se discute sobre la metodología Euler – Lagrange, la cual utiliza la suma de la energía cinética, la energía potencial y la energía disipada para obtener el modelo matemático de un sistema.

En el Capítulo 4 se reportan las características y las propiedades con las que el modelo debe contar para poder ser una representación de un sistema real. Estas son: la existencia y unicidad de soluciones, dependencia continua de las condiciones iniciales y de los parámetros; además de la existencia de los puntos de equilibrio del sistema y su estabilidad. Posteriormente, en el Capítulo 5 se encuentra la identificación de algunos de los parámetros contenidos dentro del modelo Euler – Lagrange. Para ello, fue necesario realizar algunos experimentos con los cuales se pudiera obtener la respuesta del sistema medida a partir de ciertas condiciones iniciales dadas. Al realizar ejercicio, el desplazamiento de los huesos que forman parte de una extremidad, se ve afectado por las características físicas de la fibra muscular, de la señal eléctrica y de los tendones que forman parte de la extremidad que se desea mover; además, la cantidad de energía estará regulada por el sistema nervioso, pero su fuente de energía serán principalmente los alimentos que el individuo haya ingerido con anterioridad. Esto nos lleva a introducir un concepto que abordaremos en el Capítulo 6, el metabolismo. En este capítulo se plantea de forma general una manera de relacionar el modelo presentado en el Capítulo 3 con la energía metabólica, principalmente la obtenida de los carbohidratos.

“Aunque puede que nunca sea capaz de comprender la vida humana, sabemos sin duda que se trata de un movimiento, de cualquier naturaleza que sea. La existencia del movimiento inevitablemente implica un cuerpo que está en movimiento y una fuerza que se mueve por él. Por lo tanto, cada vez que hay vida, hay una masa movida por una fuerza. Toda masa posee inercia, toda la fuerza tiende a persistir”.

Nikola Tesla

Capítulo 2.

GENERALIDADES DEL MOVIMIENTO DURANTE LA MARCHA HUMANA

La marcha humana o caminata es una tarea importante en nuestro cuerpo. La marcha humana es un modo de locomoción bípeda, en la cual, se balancean en vaivén y de forma alternada las extremidades inferiores. Se distingue del saltar o el correr por que durante un ciclo se realiza una sucesión de un apoyo bipodal y uno unipodal, mientras que al correr o saltar hay lapsos sin apoyo podal. Esto es, encontrándose una persona en reposo con ambos pies juntos, al comenzar a caminar, desplazará primero un pie hacia adelante para apoyarlo y levantar entonces el otro pie para dirigirlo un paso más hacia adelante y apoyar el pie contrario. En la **Figura 2.1** se observa la secuencia equivalente a un ciclo de la marcha humana. La longitud medida de talón a talón durante el apoyo bipodal será definida como “longitud del paso”.

Conocer y entender las características de la marcha humana es necesario para poder establecer relaciones entre la dinámica, el metabolismo del humano durante la marcha y los factores ambientales que afectan o mejoran el desempeño del individuo que la realiza.

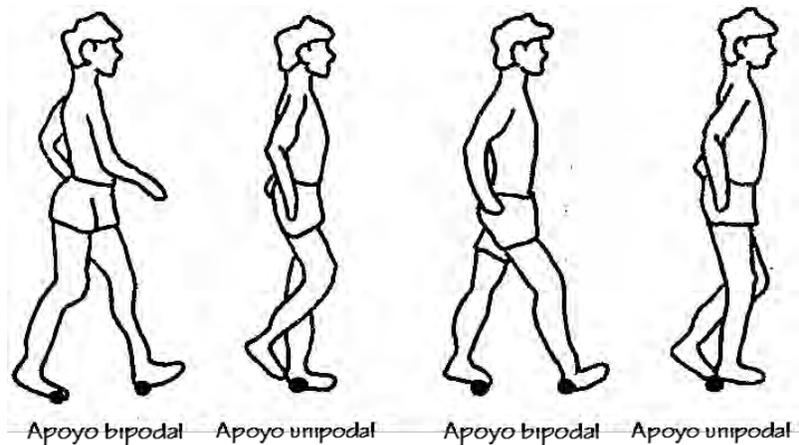


Figura 2.1: Ciclo de la Marcha Humana.

En este capítulo se establecen las bases teóricas que servirán para, posteriormente construir el modelo dinámico que representa las relaciones matemáticas que describen la marcha humana. Se describen los aspectos a considerar, los supuestos, las propiedades y características que estos aspectos implican. Además, se discuten algunos de los estudios que otros investigadores han realizado para obtener valores de los parámetros corporales que se encuentran involucrados en el modelo dinámico que se quiere construir. Inicialmente se exponen las condiciones generales que implica la marcha humana, para después focalizar la atención del lector en un caso en particular, el estudio del movimiento de una persona al realizar ejercicio sobre una caminadora tipo esquiadora.

2.1. Descripción de los sistemas *HW (Human Walking)* y *AW (Air-Walker)*.

La *biomecánica* del cuerpo humano implica describir, analizar y evaluar el movimiento humano. Sin duda, la biomecánica humana es muy compleja, debido a que involucra una gran variedad de movimientos físicos – desde la manera de andar de una persona con alguna discapacidad, la forma en la que un trabajador en una fábrica levanta una carga, hasta evaluar el rendimiento de un atleta profesional. En todos los casos, los principios biológicos y físicos aplicables son los mismos, la

diferencia entre ellos es la tarea específica de cada desplazamiento y el nivel de detalle que se pide en la realización de cada movimiento.

A lo largo de la historia se han realizado muchos modelos matemáticos para estudiar la biomecánica del ser humano con diferentes finalidades, tanto en cuerpos en movimiento como en reposo. Algunos de ellos, son [4], [40], [44], [46], [48], [50] - [53]. Sin embargo, dada la complejidad de un análisis que involucre las características específicas del segmento (por ejemplo, composición muscular, fricción articular, etc), se ha elegido utilizar supuestos y herramientas que establezcan casos simples, de forma que representen los fenómenos a estudiar proyectando valores cercanos a la realidad, pero de manera tal que su nivel de detalle no sea imposible de analizar o innecesario.

Uno de los modelos más usados para representar al cuerpo humano es aquel compuesto por una cadena cinemática compuesta por eslabones rígidos conectados por juntas de revolución o articulación [22]. En dichos modelos, suele ignorarse la anatomía particular de los músculos, debido a la complejidad de los mismos. Además, las juntas de revolución son consideradas como “ideales”, debido a que no se considera la energía disipada causada por la fricción en las articulaciones. También, se supone el hecho de que las líneas de acción de las fuerzas en las articulaciones pasen a través del centro de masa de los eslabones; y que las masas y momentos de inercia no tienen una variación considerable durante el movimiento.

Para este trabajo, se considerarán los supuestos anteriores, donde la cadena cinemática que modela al cuerpo humano está formada por 5 eslabones, de forma que podamos observar los efectos “más significativos” que tiene cada uno de ellos durante la caminata. Estos son: la parte superior del cuerpo o dorso, la cual ha sido nombrada como eslabón UB por sus siglas en inglés del término *Upper Body*; los muslos derecho e izquierdo, que serán los eslabones Th_{RL} y Th_{LL} del término *Thigh*; y las pantorrillas derecha e izquierda, con los nombres Ca_{RL} y Ca_{LL} , del término

Calf. Al conjunto de estos 5 segmentos se le dará el nombre de sistema *HW* por sus siglas en inglés de *Human Walking*, el cual representa a la marcha humana.

Debido a que la biomecánica comprende una gran variedad de movimientos, dependiendo de la tarea que deseemos realizar, enfocaremos nuestro estudio a un caso en particular: el movimiento de un individuo al realizar ejercicio en una caminadora tipo esquiadora. A este tipo de caminadora la nombraremos *AW*, por sus siglas en inglés de *Air-Walker*. A pesar de que el movimiento de un individuo utilizando un *AW* es distinto al movimiento de la marcha, el desplazamiento de los *CM* de los segmentos es comparable. Es decir, una vez que se haya obtenido la respuesta del modelo y los experimentos, se espera que las posiciones, velocidades y aceleraciones de cada segmento a lo largo del tiempo tengan un comportamiento sinusoidal, similar al que ocurre al caminar.

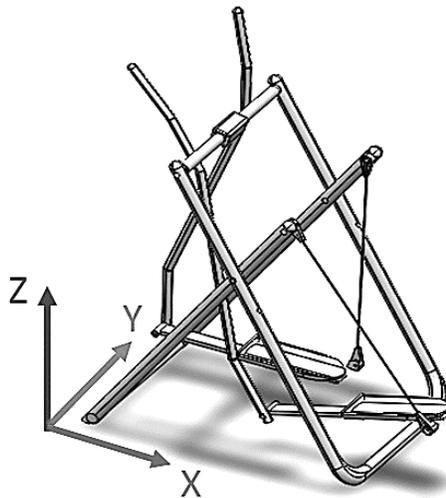


Figura 2.2: Caminadora tipo esquiadora: equipo utilizado para aproximar la modelación de la marcha humana.

La caminadora tipo esquiadora o *AW*, es un aparato para realizar ejercicio que consta de dos barras paralelas las cuales pueden ser tomadas por las manos del individuo para mantener el equilibrio a la hora de realizar el ejercicio. Estas barras están conectadas a la parte delantera de un pedal, el cual se encuentra sujeto por

la parte trasera por una cuerda, lo cual provoca que quede suspendido en el aire. Esta configuración hace que el individuo pueda balancear sus piernas hacia adelante y hacia atrás, como si estuviera sobre “esquíes”, de ahí el nombre que se ha escogido para referirnos a este tipo de aparato, mostrado en la **Figura. 2.2**. El lector puede observar que, tomando en cuenta el aparato de ejercicio *AW*, los movimientos permisibles para un individuo se encontrarán limitados. Por ejemplo, observe además la **Figura 2.3**, al situarse el individuo en la caminadora tipo esquiadora se verá una mayor variación para el caso de las extremidades inferiores en la posición respecto al eje *Y*, en comparación con los ejes *X* y *Z*. En el caso del segmento *UB*, se espera que el eje respecto al cual exista una mayor variación en la posición sea el eje *Z*, debido a que este segmento tiende a contrarrestar el giro que se provoca por la rotación de la cadera al mover las extremidades inferiores. En la sección 2.3 se toman en cuenta estas características y se detallan los movimientos considerados en la modelación.

2.2. Sistema coordenado para la anatomía humana.

Debido a que el ser humano es un organismo que realiza movimientos en 3 dimensiones, en *anatomía* suele utilizarse el sistema coordenado *xyz*. En la **Figura 2.3** se muestran algunos de los términos referentes a direcciones, orientaciones y a los planos que nos servirán para describir algunos aspectos a lo largo de esta tesis.

Es necesario que sean definidos los términos que serán utilizados y que se indique a que se refieren. Para evitar alguna ambigüedad, se establecen las direcciones, orientaciones y planos de referencia que se utilizan en este trabajo. Primeramente, se establece que, ya que nuestro interés es estudiar las características de un individuo durante la actividad física, el individuo es la base para construir la referencia. Para ello, se describen algunos de los términos relativos a la dirección de los movimientos. El primer par de direcciones es derecha e izquierda; el segundo es superior e inferior; después están anterior y posterior, las cuales son para referenciar los movimientos hacia adelante y hacia atrás respectivamente. Otros de

los términos anatómicos requieren otros tipos de sistemas coordenados. Uno de estos conjuntos describe la distancia desde el punto de adhesión de cualquiera de los dos brazos o cualquiera de las dos piernas al tronco.

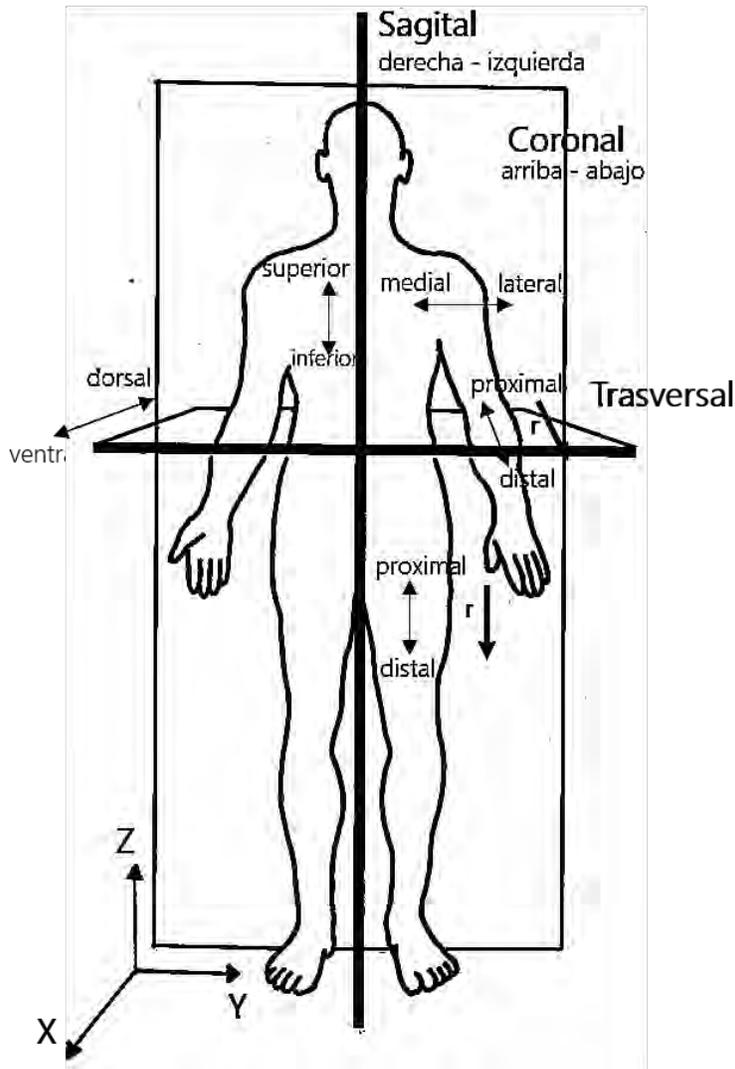


Figura 2.3: Sistema coordinado para la anatomía humana

De igual forma, en la **Figura 2.3** se puede observar que r corresponde a esta coordenada, donde $r = 0$ en el punto de adhesión al tronco. Por lo tanto, r nunca es negativa. Entonces, el término proximal significa “más cercano al punto de adhesión”, y distal significa más alejado del punto de adhesión. Estos términos servirán de referencia más adelante, en la sección sobre los parámetros del cuerpo

humano. El último conjunto de términos es muy común en anatomía. Son utilizados para describir planos bidimensionales, cortes o secciones del cuerpo. La sección Transversal u Horizontal, separa al cuerpo en las secciones superior e inferior. Este plano tiene una z constante. La sección sagital separa al cuerpo en las secciones derecha e izquierda y mantiene una y constante. La sección medio-sagital es especial, ya que ocurre en la línea media y es un plano con $y = 0$. La sección frontal o coronal separa el cuerpo en las porciones anteriores y posteriores (delantera y trasera respectivamente). Éstas son descritas por planos con x constante. En la siguiente sección, se trata con los términos anatómicos propios de los tipos de movimiento del cuerpo humano.

2.3. El cuerpo humano en movimiento

Una característica importante para comprender el movimiento del cuerpo humano, es el número de grados de libertad (GDL). Los GDL se refieren al número de movimientos independientes que puede hacer un objeto y sirven para describir su cinemática. Recordando la cadena cinemática de la que se hablaba en un inicio, imagine que se tiene una cadena cinemática formada por dos eslabones, la cual tiene uno de los eslabones fijo y el otro solo puede ser desplazado sobre uno de sus ejes. Entonces el eslabón se estará moviendo a través de su junta de revolución, sólo en un par de direcciones, lo que hace que cuente con solo un GDL. Esto ocurre debido a que, la configuración de la junta solo permite el movimiento respecto a uno de los ejes coordenados, ver la **Figura 2.4**.

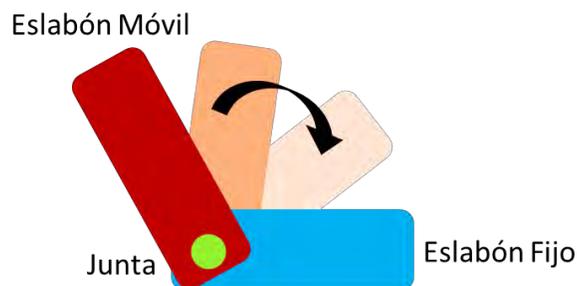


Figura 2.4: Movimiento de una cadena cinemática de dos eslabones.

Pensando en un espacio euclidiano tridimensional (x, y, z) , se necesitan tres coordenadas para describir el movimiento del centro de masa de un objeto para desplazarlo de un punto a otro. Es decir, si un objeto se encuentra en la posición $(0,0,0)$ y se quiere desplazarlo, se necesitará saber la posición (a, b, c) . Dado que el objeto puede ser desplazado en 3 direcciones distintas, a través de los 3 planos existentes, se dice que el objeto cuenta con tres GDL “*traslacionales*”. De manera similar, al momento de rotar el objeto, sus ángulos pueden cambiar respecto a los ejes a cada uno de los ejes del plano tridimensional $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$. Por lo tanto, existen también tres GDL “*rotacionales*”. Esto hace que un objeto en tercera dimensión pueda tener seis GDL independientes uno de otro.

En el cuerpo humano, tanto los movimientos traslacionales como los rotacionales son posibles gracias a las juntas de revolución que unen las extremidades. El término anatómico para llamar a las juntas de revolución que unen dichas extremidades es *articulaciones*. Existen dos tipos de articulaciones, las fibrosas (Huesos unos por tejido conectivo) y las cartilaginosas que solo pueden doblarse muy poco (Huesos unidos por cartílago).

Si hacemos una comparación entre una cadena cinemática y una pierna humana, es fácil ver que el fémur es uno de los eslabones, el cual se encuentra unido a otro de ellos llamado tibia, por medio de una junta llamada rótula. Esto es ilustrado en la **Figura 2.5**. Consideremos una pierna con pies rígidos. Supongamos que el fémur está fijo y la tibia tiene libertad de movimiento solo respecto a uno de los ejes coordenados, de hecho el único movimiento posible es el giro respecto al eje y , en consecuencia, este eslabón solo cuentan con un GDL. Este supuesto, es uno de los movimientos que estudiaremos a lo largo de este trabajo.

Otro de los movimientos de interés, es el del fémur con respecto de la cadera. Sigamos pensando en una pierna con pies rígidos. La parte superior del hueso de la pierna (fémur) está conectado a la cadera por una articulación de esfera y cavidad (lo que hace que posea tres GDL, ilustrados en la **Figura 2.6**).

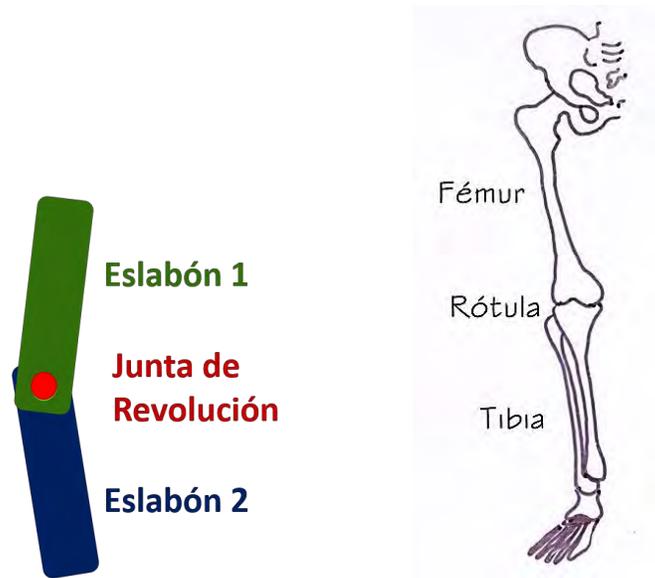


Figura 2.5: Comparativo entre una cadena cinemática de dos eslabones y la estructura ósea de una pierna. La rótula es comparable a una junta de revolución, mientras que el fémur y la tibia y peroné con los eslabones.

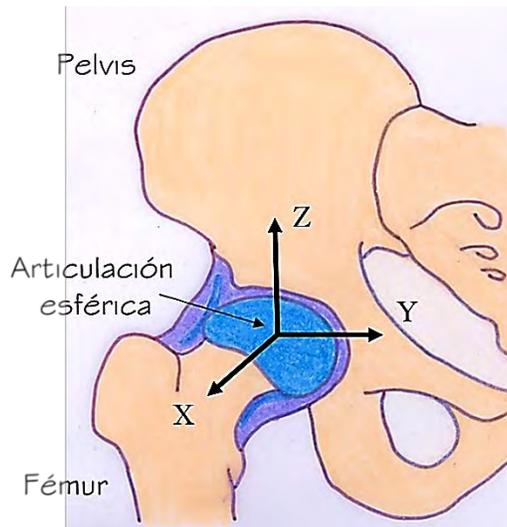


Figura 2.6: Articulación esférica localizada en la cadera. Note que este tipo de articulación proporciona a los seres humanos 3 GDL en las piernas, es decir, es posible la rotación con respecto a cada uno de los 3 ejes cartesianos.

Entonces, si se suman los GDL en la pierna tenemos que: la articulación cadera-fémur cuenta con 3GDL, La rodilla es una articulación de un GDL, mientras que el

tobillo es una articulación tipo silla, de dos GDL. Esto significa que cada pierna tiene seis GDL de movimiento angular, lo que hace posible una completa localización del pie. Sin embargo, algunos de estos GDL cuentan con un movimiento angular restringido, algunas de las restricciones con las que cuenta el cuerpo humano pueden consultarse en [18].

Hasta ahora se han visto los ejes de referencia para ubicar los movimientos en un espacio determinado y cómo es que se determinan los GDL de cada extremidad debido a las características de la articulación que los une al cuerpo. Ahora, se considerará que existen cuatro tipos de componentes involucrados en el movimiento: huesos, ligamentos, músculos y tendones. Cada uno de ellos tiene funciones y propiedades mecánicas diferentes. Los huesos, como ya vimos, tienen en sus extremos articulaciones que los conectan a otra parte del cuerpo. Existe una cavidad de la junta formada entre los huesos articulados en las articulaciones sinoviales. Esta cavidad está formada por un cartílago articular hialino, lo que permite que pueda haber un alto grado de movimiento angular; además, tiene la característica de que su coeficiente de fricción es menor al de las juntas que el ser humano ha realizado para intentar reproducir la biomécanica humana.

Por otra parte, los ligamentos unen los huesos entre sí. Los músculos, en particular los esqueléticos, son los motores que mueven los huesos sobre las articulaciones. (También hay músculo cardíaco – el corazón – y músculos lisos – que conforman el aparato digestivo y otros órganos). Mientras que los tendones conectan los músculos con los huesos.

Los músculos trabajan solamente por contracción, es decir, para realizar algún movimiento se vuelven más cortos, o en caso contrario si se encuentran contraídos, se estiran para regresar a su posición original. En consecuencia, para mover cualquiera de las extremidades del cuerpo humano, necesitaremos el trabajo de pares de músculos en el mismo segmento del cuerpo para cada movimiento de

oposición que queremos realizar. Tales pares opuestos son conocidos como "antagonistas".

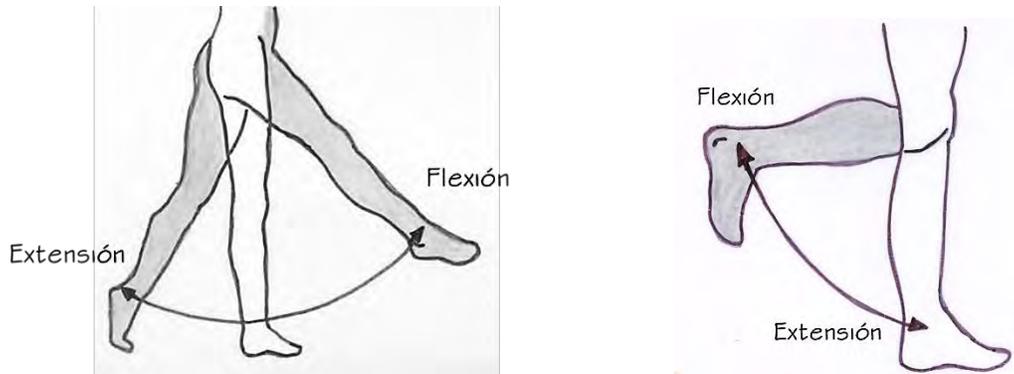


Figura 2.7: Movimientos que se llevan a cabo durante la caminata. a) Flexión y Extensión de la parte superior de la pierna; b) Flexión y extensión de la parte inferior de la pierna (rodilla).

Ahora que se tiene conocimiento sobre el movimiento de los eslabones que conforman las extremidades del cuerpo humano, el cual es posible gracias al trabajo conjunto de huesos, músculos, ligamentos y tendones, hablemos un poco más sobre los movimientos que nos interesan. En el caso de las piernas, cuando el ángulo de una articulación de un GDL, como en el caso de la rodilla, aumenta, se le llama extensión; mientras que cuando disminuye se le llama flexión. Estos movimientos se muestran en la **Figura 2.7**. Ya que se quiere estudiar el movimiento provocado por la contracción y extensión de los músculos que mueven las piernas, nos referiremos al eslabón que anteriormente habíamos llamado fémur, como muslo o eslabón *Th* del término en inglés *Thigh*, y al eslabón de la tibia, como pantorrilla o *Ca* del término en inglés *Calf*. Por practicidad, a lo largo de ésta tesis se utilizan las siglas de los términos en inglés; además, para distinguir entre los eslabones correspondientes a la pierna izquierda y derecha, utilizaremos las siglas *RL / LL* de los términos *Right Leg / Left Leg*, respectivamente. Los movimientos de extensión y flexión a su vez forman un movimiento angular del segmento respecto a un eje, al cual llamaremos rotación. A estos movimientos será sumado uno más, el cual será de tipo traslacional provocado por el desplazamiento de la cadera al caminar.

Debido a que este movimiento es suave será representado por un resorte-amortiguador de cada lado de la cadera.

El eslabón *UB* comprende los segmentos corporales correspondientes al dorso, o parte superior del cuerpo, es decir, el tronco, los brazos y la cabeza. Los movimientos que considerados como posibles a realizar por el eslabón *UB* serán: rotación respecto a los tres ejes coordenados, lo que dará lugar a las primeras tres movimientos representados en la **Figura 2.8**. Además, debido a que al caminar existe un movimiento traslacional en el eje vertical, similar al que ocurre con un sistema masa-resorte-amortiguador, también será considerado el movimiento que se ilustra en la **Figura 2.8c**.

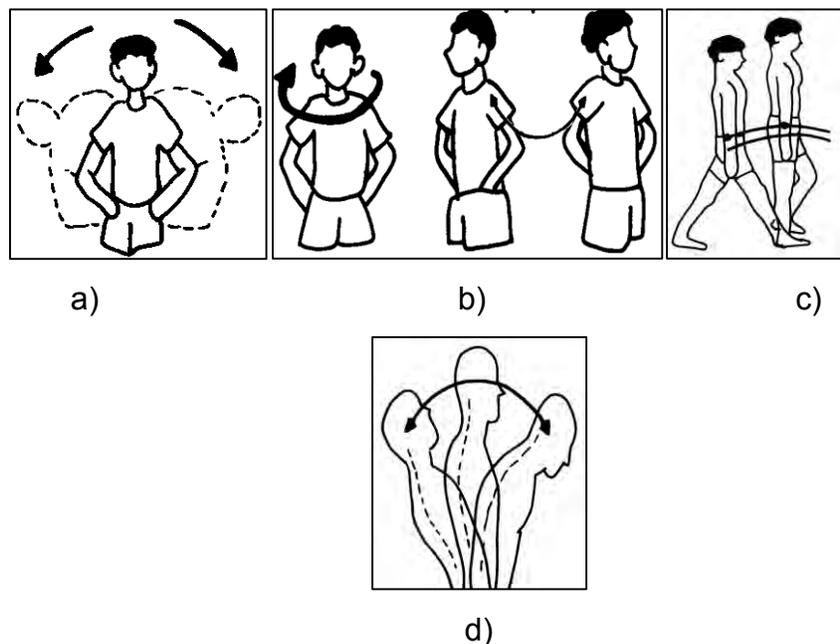


Figura 2.8: Movimientos de la parte superior del cuerpo (segmento *UB*) que se llevan a cabo durante la caminata a) Movimiento lateral; b) Giro sobre el eje vertical; c) Desplazamiento del centro de masa hacia arriba y hacia abajo; d) movimiento hacia adelante y hacia atrás.

En resumen, el eslabón *UB* cuenta con 4GDL, de los cuales 3 son rotacionales a través de los ejes x, y, z , y uno es traslacional a lo largo del eje vertical z ; por otro

lado, cada pierna cuenta con 3GDL, de los cuales 2 son rotacionales, ambos con respecto del eje y , y el otro es traslacional a lo largo del eje x , provocado por el movimiento de los músculos de la cintura al caminar, los cuales provocan una especie de “impulso-freno” al eslabón Th .

2.4. Antropometría humana

Existen factores tanto fisiológicos, anatómicos y físicos que influyen y definen la manera en la que se mueve cada persona en particular. En esta sección se estudiarán las características físicas y su influencia en la caminata.

A las características físicas que dan lugar a las diferencias entre un individuo y otro, y que por lo tanto definen su forma de caminar, las llamaremos “parámetros corporales”. Para determinar formas sencillas de obtener aproximaciones a estos parámetros, sin necesidad de recurrir a pruebas invasivas o tardadas, se han realizado estudios para encontrar “patrones de tendencia” en los parámetros corporales de una persona viva, es decir, a partir de la medición de ciertos parámetros como la estatura y el peso, se pueden obtener aproximaciones sobre longitudes y masas de cada extremidad por separado. Sin embargo, se ha encontrado que estos patrones de tendencia suelen no ser los mismos en poblaciones de diferentes razas. Algunos de estos estudios se encuentran en las siguientes referencias [37], [38], [39] y [49].

La antropometría ha sido utilizada para estudios evolutivos e históricos. Actualmente, la antropometría es utilizada además para definir espacios y condiciones de trabajo, para el diseño de ropa y calzado, para el diseño de muebles, para el diseño de prótesis, y en el tema de salud, para establecer estándares que definan las características de una persona sana. Para la mayoría de estos casos, basta tener conocimiento de medidas lineales básicas, áreas y volúmenes. Sin embargo, para poder hacer un análisis de movimiento humano se requiere además, tener conocimiento de los parámetros involucrados en el movimiento cinético, como

lo son las masas y momentos de inercia, y la localización de cada uno de ellos. En ocasiones, en los modelos humanos se asumen valores paramétricos basados en estudios estadísticos sobre la obtención de dichos parámetros, realizados tanto en personas vivas como en cadáveres. Estos estudios constan de pruebas específicas, muchas veces difíciles o peligrosas para el sujeto de estudio para obtener medidas como las masas, longitudes, etc. A partir de ellos, los científicos han desarrollado tanto tablas como ecuaciones para determinar valores aproximados basados en mediciones obtenidas directamente del individuo, como lo son la estatura o el peso total de una persona. Precisamente esto es lo que estudia la antropometría, las mediciones físicas del cuerpo humano para determinar diferencias individuales y grupales. Se requiere una amplia variedad de mediciones físicas para describir y diferenciar las características de raza, sexo, edad, y tipo de cuerpo. Por lo que, a pesar de todos estos años de estudio sobre la antropometría humana, aún permanecemos lejos de una caracterización de las propiedades inerciales de los segmentos corporales. Muchos de los resultados de estos estudios suelen ser presentados en largas tablas o extensas listas de ecuaciones empíricas, que suelen aplicarse a poblaciones reducidas. El lector puede encontrar algunas de ellas en el **[Apéndice A]**.

La más básica de las dimensiones del cuerpo humano es la longitud de los segmentos. Estos varían de acuerdo a como está construido el cuerpo, el sexo y origen racial de la persona. En la **Figura 2.9** se muestran algunas de las diferentes longitudes de los segmentos expresadas como un porcentaje promedio de la altura del cuerpo, esta figura fue hecha por Contini y Drillis en 1966 **[49]**. Estas proporciones, pueden ser aproximaciones útiles cuando necesitamos alguna de estas medidas y no contamos con los datos o la manera de medirlas, aunque es preferible que estas mediciones se realicen directamente sobre el individuo a evaluar. En cuanto a las unidades de longitud, utilizaremos la unidad del SI, la cual es el metro (m). Más adelante, en el Capítulo 5, haremos un comparativo entre las longitudes obtenidas con la altura de un individuo en específico y las longitudes calculadas con las proporciones mostradas en la **Figura 2.9**.

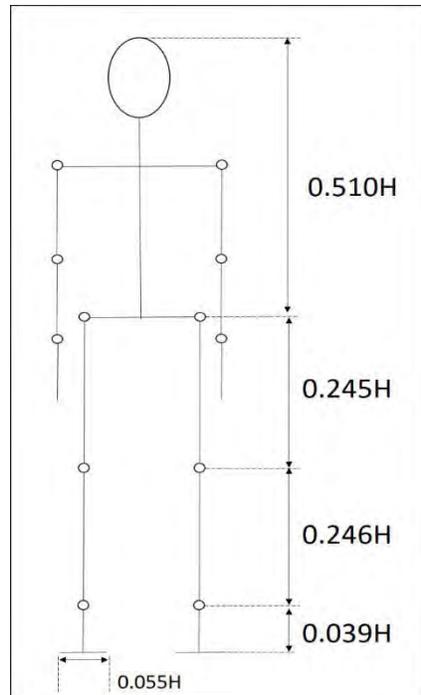


Figura 2.9: Longitud de los segmentos corporales nominales, en relación a la altura H de un individuo [18].²

2.5. Parámetros corporales relacionados con las propiedades inerciales del cuerpo humano.

2.5.1. Centro de Masa (CM)

El análisis cinemático y cinético requiere de datos con respecto de las distribuciones de masa, centros de masa, momentos de inercia, entre otros. Algunos valores nominales de estos parámetros corporales han sido determinados directamente de cadáveres; otras han utilizado mediciones aproximadas de volúmenes de los segmentos, en conjunto con tablas de densidad; las técnicas más modernas utilizan sistemas de escaneo que producen la imagen de la sección transversal en muchos intervalos a lo largo de todo el segmento.

² Nota. En la Figura. 2.9 sólo se muestran las proporciones necesarias para calcular las longitudes de los segmentos de interés para este trabajo. El lector puede consultar la figura con las proporciones faltantes en la referencia [18].

Conforme la masa corporal incrementa también lo hará la masa de cada uno de los segmentos. Por lo tanto, es posible expresar la masa de cada segmento como un porcentaje de la masa total.

Segmento	Masa del segmento / Masa total del cuerpo m_b	Centro de Masa (CM)		Densidad de Masa (g/cm ³)
		Proximal*	Distal*	
UB	0.678	0.5	0.5	≈1.083
Th	0.1	0.433	0.567	1.05
Ca	0.0465	0.433	0.567	1.09
Pie	0.0145	0.5	0.5	1.10

Tabla 2.1: Masas, centros de masa y densidades de algunos segmentos corporales.³

De forma similar a lo que se ilustró con la **Figura 2.8**, respecto a las longitudes, en la **Tabla 2.1** se muestran las masas de las diferentes partes anatómicas del cuerpo como fracciones “promedio” de la masa total m_b (o de forma equivalente, el peso total del cuerpo W_b). La Tabla 2.1 muestra los resultados obtenidos por varios investigadores [18].

El término centro de masa (CM) y el término centro de gravedad suelen ser intercambiados. El término más general es el de CM, ya que se refiere al punto geométrico que dinámicamente se comporta como el punto en el que las fuerzas resultantes se encuentran en equilibrio. El CM depende de las distribuciones de masas y densidades de las partículas que componen el sistema. Mientras que el de centro de gravedad se refiere al CM respecto al eje vertical solo en dirección gravitacional. De manera similar a los casos de longitudes y masas, algunos investigadores han realizado estudios para determinar la localización del CM en relación a la longitud total del segmento de interés. En la **Tabla 2.1** también se

³ *Sección 2.2. Proximal: “más cercano al punto de adhesión”. Distal: “más alejado del punto de adhesión”.

muestra el *CM* como porcentaje de la longitud del segmento medido desde el extremo distal o proximal. Existen dos formas de realizar los estudios, en cadáveres o en cuerpos vivos. En el primer caso es bastante sencillo localizar el *CM* simplemente determinando el punto en el que se balancea cada segmento. Por otro lado, para el segundo caso, es necesario el área de la sección transversal del segmento y la longitud. Si se piensa en la sección transversal de un segmento hipotético, como el que se ilustra en la **Figura 2.9**, y se divide en n secciones, cada una con la masa que se indica en la figura; entonces se tiene una masa total M del segmento representada por:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad m_i = d_i V_i \quad (2.1)$$

donde m_i , es la masa de la i -ésima sección, y depende de la densidad y volumen de dicha sección d_i es la densidad de la i -ésima sección, y V_i es el volumen de la i -ésima sección.

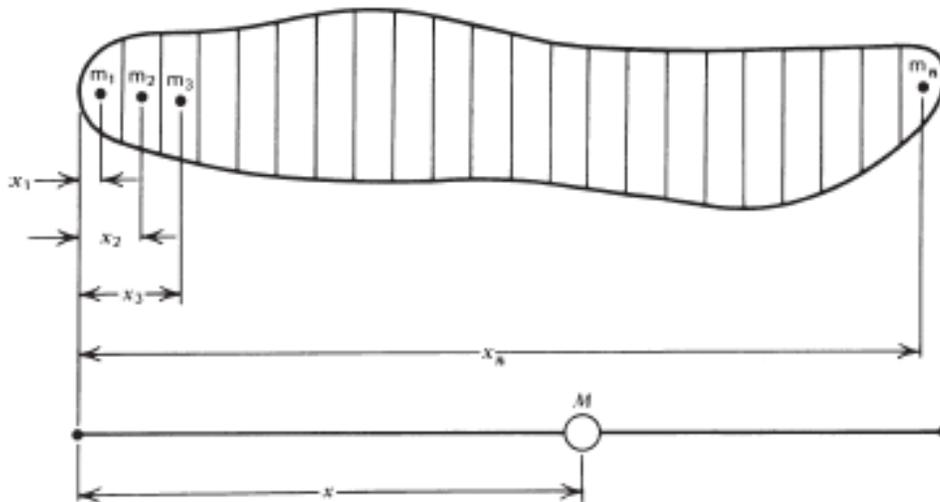


Figura 2.10: Localización del centro de masa de un segmento corporal en relación a la distribución de masa [20].

La densidad es otra propiedad de la materia, la cual que está relacionada con la masa ya que, ésta es la cantidad de masa por unidad de volumen. Lo que nos lleva a mencionar las diferencias entre un cuerpo homogéneo y otro heterogéneo. Si las masas contenidas en cualesquiera dos volúmenes iguales de un cuerpo dado son iguales, entonces el cuerpo es homogéneo, en caso contrario será heterogéneo. Dado que el cuerpo humano está compuesto por huesos, músculos, órganos internos, tejido graso, etc., se tienen diferentes densidades, por lo que no es homogéneo. Sin embargo, para la simplificación de los cálculos, suele suponerse que los segmentos tienen densidad uniforme.

Regresando al ejemplo, si la densidad d_i se asume como uniforme a lo largo del segmento completo, entonces $m_i = dV_i$ y entonces

$$M = d \sum_{i=1}^n V_i \quad (2.2)$$

El CM es tal que debe crearse el mismo momento de fuerza gravitacional neta en todos los puntos a lo largo de un eje del segmento, como sucede si la masa se encuentra distribuida. Considérese que el CM se localiza a una distancia x medida desde el extremo izquierdo hacia el derecho,

$$Mx = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (2.3)$$

$$x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (2.4)$$

Así, para el caso unidimensional, es posible representar la compleja masa distribuida por una simple masa M localizada a una distancia x medida desde uno de los extremos del segmento **[20]**.

Con cada segmento del cuerpo en movimiento, el *CM* de todo el cuerpo cambia continuamente conforme avanza el tiempo. Por lo que es entonces necesario recalcularlo después de cada intervalo de tiempo, y esto requiere el conocimiento de las trayectorias del *CM* de cada segmento del cuerpo.

Segmento	Masa del segmento / Masa total del cuerpo mb	Centro de Masa (<i>CM</i>)	
		Proximal*	Distal*
Brazo completo	0.05	0.53	0.47
Tronco	0.497	0.5	0.5
Cabeza y cuello	0.081	1	-

Tabla 2.2: Masas y centros de masa de algunos de los segmentos corporales. Estos pueden ser tomados como valores nominales de los parámetros corporales correspondientes [18].

Consideremos un punto particular, en un tiempo determinado, en un sistema de tres segmentos con determinados *CM*. Entonces, el *CM* total del sistema está localizado en (x_0, y_0) , cada una de estas coordenadas puede ser calculada de forma separada ($M = m_1 + m_2 + m_3$).

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} , \quad (2.5)$$

$$y_0 = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} . \quad (2.6)$$

En Capítulo 5 será necesario el conocimiento de la ubicación del *CM* respecto al eje vertical, debido a que en ese lugar se ubicarán los sensores de movimiento para obtener los datos experimentales. Entonces, para el caso del segmento *UB* se tiene que la localización del *CM* es:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 = (2 * 0.05 + 0.497 + 0.081) \cdot m_b = 0.678m_b \quad (2.7)$$

CM del segmento *UB* (proximal):

$$y_0 = \frac{2 * 0.05(0.53) + 0.497(0.5) + 0.081(1)}{0.678} = 0.564 \quad (2.8)$$

El *CM* del cuerpo completo suele ser una variable calculable. Es útil en la evaluación del movimiento humano, aunque es limitado. Uno de los mayores usos que tiene el *CM*, es en el análisis de los eventos deportivos, especialmente los eventos con saltos, donde la trayectoria del *CM* es crítica para que el evento sea satisfactorio; ya que la trayectoria es decidida inmediatamente al momento del despegue. El cálculo del *CM* es esencial en estudios de la postura del cuerpo y balance.

2.5.2. Momento de Inercia visto como parámetro corporal

En el análisis de movimiento dentro de un espacio, es necesario conocer la localización del centro de masa de cada segmento. Si se involucra la aceleración necesitamos saber la resistencia inercial a tales movimientos. En un sentido lineal, $F = ma$ describe la relación entre la fuerza lineal F y la aceleración resultante a . En el caso rotacional, $T = I\alpha$, donde T es el momento de fuerza causada por la aceleración angular α . El momento de inercia caracteriza la resistencia del cuerpo al cambio en la magnitud de la velocidad angular a través del espacio. Por lo tanto I es la constante de proporcionalidad que mide como el segmento resiste el cambio en la velocidad angular. Las unidades para M son $N \cdot m$, para α son rad/s^2 , y I está en $kg \cdot m^2$. El valor de la inercia dependerá del punto sobre el cual se lleve a cabo la rotación, siendo mínimo cuando la rotación toma lugar cerca de su *CM*. Consideremos un segmento con masa distribuida como en la **Figura 2.10**. El momento de inercia con respecto del extremo izquierdo es:

$$I = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + \dots + m_nx_n^2 = \sum_{i=1}^n m_ix_i^2 \quad (2.9)$$

Podemos ver entonces que, la masa que se encuentra más cerca del centro de rotación, tiene una menor influencia en la inercia I , mientras que la masa que está más alejada tiene un efecto considerablemente mayor [20].

Entre los métodos para calcular el valor de la constante inercial de los segmentos corporales están el determinarlo directamente de cadáveres (a través de cálculos y pruebas al segmento aislado), otro es utilizando aproximaciones geométricas mediante el cálculo del volumen del segmento en conjunto con el uso de tablas de densidad; otra técnica un poco más moderna es mediante el uso de sistemas de escaneo tridimensional, el cual producen la imagen de la sección transversal en diversos intervalos a lo largo del segmento. Sin embargo, en este trabajo se optó por utilizar una técnica diferente, la identificación paramétrica.

En el siguiente capítulo se construirán las ecuaciones para modelar la marcha humana, en las cuales la constante de inercia juega un papel importante, debido a que su valor influye en todos los movimientos rotacionales; además, el lector podrá observar que en el caso del segmento UB se ha planeado que la constante de inercia no necesariamente tendrá el mismo valor respecto a cada uno de los ejes cartesianos.

“Las matemáticas son mucho más que un lenguaje para lidiar con el mundo físico. Son una fuente de modelos y abstracciones que nos permiten obtener nuevos conocimientos sobre la forma en que funciona la naturaleza. De hecho, la belleza y elegancia de las leyes de la física por sí mismas, son sólo aparentes cuando se expresan en el marco matemático adecuado”.

Melvin Schwartz

Capítulo 3.

METODOLOGÍA Y CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO DINÁMICO DE LA MARCHA HUMANA

En el capítulo anterior, se discutió sobre algunas generalidades sobre el movimiento durante la marcha humana, con el fin de exponer las bases sobre las cuales se construirá un modelo dinámico que la represente.

En este capítulo, se verá qué es un modelo dinámico y cuál es su importancia. Posteriormente, se describirá paso a paso la construcción de un modelo para la marcha humana. El lector recordará que, la motivación de construir un modelo de la marcha humana es establecer, posteriormente, relaciones entre la dinámica al realizar una actividad física determinada y la metabolización carbohidratos. Por lo que, el modelo HW será construido utilizando la metodología Euler – Lagrange, referida en este trabajo por las siglas $E - L$, la cual es útil debido a que está basada en balances de energía.

Una de las condiciones restrictivas para el sistema HW es que el individuo en cuestión se encontrará realizando ejercicio sobre un AW ; razón por la cual, es necesario construir un modelo de la dinámica de este aparato. Después de esto, se describen las relaciones matemáticas que hay entre el modelo de la marcha humana y el de la caminadora tipo esquiadora, para acoplar ambos sistemas.

3.1. Modelado de un Sistema Dinámico

La dinámica es una rama de la cinética que estudia los movimientos de cuerpos interactuando. El movimiento es descrito en términos de leyes postuladas [24]. Por otro lado, de forma general, un modelo matemático es una representación de un sistema por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Un modelo matemático de un sistema físico, sirve para comprender el comportamiento dinámico de un proceso o sistema. Cuando se cuenta con un modelo matemático de un sistema físico, existe la posibilidad de predecir su comportamiento ante determinadas entradas, condiciones iniciales, perturbaciones y acciones de control, entre otras, a través de simulaciones. Esto permite que puedan ser evaluadas diferentes situaciones, y de acuerdo a los resultados, realizar los cambios pertinentes, sin necesidad de correr riesgos o costos innecesarios.

Se dice que existen dos formas por medio de las cuales se puede obtener un modelo matemático de un sistema: la forma analítica y la forma experimental [25].

La forma analítica es un procedimiento que se construye a partir del comportamiento del sistema, ya sea utilizando las leyes de la física o por medio de balances de energía. El cuerpo humano puede ser considerado como un sistema mecánico formado por varios eslabones acoplados por articulaciones; bajo este supuesto, construir un modelo de forma analítica puede ser una tarea sencilla, dependerá del grado de detalle que se quiera considerar. El obtener un modelo de forma analítica, tiene la ventaja de que éste puede considerarse tan preciso como se quiera. Dentro de la forma analítica existen varias metodologías para construir el modelo, para este trabajo se decidió trabajar la metodología $E - L$, la cual está basada en balances de energía.

Por otro lado, la forma experimental requiere de una cantidad mínima de datos empíricos medidos directamente del sistema. Típicamente, el sistema es analizado habiendo determinado condiciones específicas como: condiciones iniciales,

entradas, salidas, tiempo de muestreo, etc. En este caso, el modelo obtenido es en general más impreciso que el obtenido de forma analítica dado que depende de las condiciones de las entradas y el punto de operación. Sin embargo, en ciertos casos, obtener así un modelo tiene la ventaja de ser más fácil y rápido; incluso, podría ser la única forma de modelar el sistema (sistemas caja negra: se desconocen los detalles “internos” del sistema, solo se tiene acceso a las señales de entrada y salida).

A pesar de que se utilizará la forma analítica, también se obtendrán datos experimentales, necesarios para realizar la estimación de algunos de los parámetros que no son fáciles de calcular; sobre esto se discutirá en el Capítulo 5.

3.2. Metodología Euler-Lagrange ($E - L$)

Las ecuaciones dinámicas pueden ser derivadas usando diferentes técnicas. Todos los métodos generan un conjunto de ecuaciones equivalentes, pero algunos conjuntos de ecuaciones suelen ser más sencillos de analizar que otros.

Las ecuaciones obtenidas por la metodología $E - L$ resultan una herramienta necesaria para los casos en los que no se cuenta con gran conocimiento del funcionamiento del sistema, debido a que incluye de manera natural las restricciones, concibe al sistema como un todo y usa funciones escalares para describir las energías cinética y potencial. Además, se basan en el concepto de coordenadas generalizadas, las cuales permiten describir la dinámica en términos de las variables asociadas con los grados de libertad del sistema.

El número de grados de libertad del sistema es igual al número de ecuaciones que se obtienen por esta metodología. Las fuerzas restrictivas en las articulaciones no aparecen en las ecuaciones; por lo tanto, utilizando este método, las fuerzas de reacción conjuntas no están determinadas. Aunque técnicamente esta metodología es un método alternativo al aproximamiento obtenido por Newton – Euler , no es

una nueva teoría, se basa completamente en las leyes de movimiento de Newton, y los resultados del análisis $E - L$ y el método Newtoniano son los mismos para cualquier sistema mecánico [22].

3.2.1. Coordenadas Generalizadas

La configuración de un sistema dado puede ser expresada por varios conjuntos de coordenadas. Estos conjuntos, no necesariamente tienen siempre el mismo número de coordenadas, ni el mismo número de restricciones. Las coordenadas generalizadas usualmente tienen una visualización con significado geométrico, y suelen ser elegidas basadas en esto. Además, en la mayoría de los análisis es de gran ayuda elegir un conjunto de coordenadas generalizadas que sean independientes. Si las coordenadas generalizadas especifican la configuración del sistema y pueden ser variadas independientemente sin violar las restricciones, entonces el número de coordenadas generalizadas es igual al número de GDL.

Ahora considere dos conjuntos de coordenadas las cuales describen el mismo sistema. A cualquier tiempo, los valores de cada conjunto de coordenadas son simplemente un grupo de números. El proceso de obtener un conjunto de números a partir de otro es conocido como transformación de coordenadas. La gama de posibles transformaciones es muy amplia, cualquier conjunto de parámetros que den una representación sin ambigüedades de la configuración del sistema servirán como un sistema de coordenadas en un sentido más general. Estos parámetros son conocidos como coordenadas generalizadas. Existen procedimientos sencillos, como el uso de las ecuaciones de Lagrange, para obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento en términos de coordenadas generalizadas. Como se verá a continuación, el uso de coordenadas generalizadas independientes permite el análisis del movimiento de la mayoría de los sistemas sin necesidad de resolver para las restricciones de las fuerzas [24].

3.2.2. Descripción de la metodología.

Por simplicidad, se ha dividido la metodología $E - L$ en cuatro pasos: 1) el cálculo de la energía cinética, 2) el cálculo de la energía potencial, 3) la construcción del Lagrangiano y 4) la resolución de las ecuaciones de $E - L$.

La energía es la capacidad de realizar trabajo. La energía cinética de un cuerpo de masa m moviéndose con una velocidad v es un escalar positivo: $K = (mv \cdot v)/2 = mv^2/2$. La energía cinética está determinada por los movimientos que el sistema pueda realizar, existen dos tipos de movimiento considerados por la energía cinética; los movimientos rotacionales y los movimientos traslacionales [22]. En el Teorema de Kőning se puede observar cómo se combinan estos dos tipos de movimiento [32].

Considere una cadena cinemática de i - eslabones con movimiento en un espacio tridimensional. La velocidad lineal del CM del eslabón es v_i , y su velocidad angular sobre el CM es $\dot{\theta}_i$. La energía cinética K_i está dada por

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \dot{\theta}_i^T [I_i] \dot{\theta}_i \quad (3.1)$$

donde m_i es la masa del eslabón y $[I_i]$ es el tensor de inercia (3 X 3). Todas las variables de la ecuación están representadas en el marco global de referencia de orientación fija. El primer término del lado derecho de la ecuación es llamada la energía cinética traslacional, mientras que el segundo término representa la energía cinética rotacional del eslabón. La expresión para la energía cinética traslacional es análoga a la expresión para la energía cinética de una partícula, $K = mv^2/2$. La energía cinética rotacional también puede ser escrita como el producto escalar de los vectores,

$$K_{irot} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_i H_i \quad (3.2)$$

donde H_i es el momento angular del eslabón con respecto de su CM. Si el eslabón rota con respecto a un punto fijo, H_i puede ser calculado con respecto del centro de rotación, en cuyo caso la ecuación 3.1 sigue siendo el total de la energía cinética del eslabón.

En forma de matriz, la energía cinética rotacional de un eslabón es:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde el origen de las coordenadas en el marco está en el CM. La multiplicación de la ecuación anterior es equivalente a

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_{xx} \dot{\theta}_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \dot{\theta}_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \dot{\theta}_z^2 + I_{xy} \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y + I_{xz} \dot{\theta}_x \dot{\theta}_z + I_{yz} \dot{\theta}_y \dot{\theta}_z \quad (3.4)$$

O

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j I_{ij} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \quad (3.5)$$

Si el vector de velocidad angular está a lo largo de uno de los ejes coordenados, la ecuación (3.5) se reduce a

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (3.6)$$

donde I es el momento de inercia con respecto del eje de rotación y $\dot{\theta}$ es la velocidad angular (escalar).

Por otro lado, la energía potencial (gravitacional) del eslabón i es igual a la cantidad de trabajo necesaria para elevar el CM, del eslabón desde un plano de referencia hasta su posición actual, $P_i = m_i g h_i$, donde h_i es la altura del CM del eslabón sobre la superficie de referencia.

La energía potencial total del cuerpo P es igual a la suma de las energías potenciales almacenadas en los eslabones individuales. La energía potencial es una función de la configuración en cadena de los eslabones.

Ahora ya es posible continuar con la descripción del Lagrangiano. El Lagrangiano es una función escalar representada por la letra L , definido como la diferencia entre la energía cinética K y la energía potencial P del sistema.

$$L = K - P. \quad (3.7)$$

Dado que la energía es una cantidad escalar, el Lagrangiano es invariante a las coordenadas de transformación incluyendo la transformación a coordenadas generalizadas. Por lo general, en la biomecánica del movimiento humano, el Lagrangiano es calculado en las coordenadas articuladas.

Por último, las ecuaciones de movimiento en la formulación $E - L$ son:

$$T_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.8a)$$

O

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.8b)$$

donde q_i son las coordenadas en las cuales se expresan las energías cinética y potencial. Cuando las coordenadas del eslabón corresponden a los ángulos que forman durante el movimiento, q_i tendrá unidades angulares, \dot{q}_i será la velocidad angular y T_i representará a los torques que actúan en los ejes de las articulaciones; mientras que si las coordenadas corresponden a los movimientos lineales, q_i tendrá unidades de longitud, \dot{q}_i será una velocidad lineal y F_i representará la fuerza ejercida para provocar ese movimiento [22].

En (3.8) ha sido añadido el término D , el cual representa la energía disipada por el sistema, lo cual sucede, por ejemplo, cuando hay amortiguadores.

3.3. Construcción de los Modelos Dinámicos.

3.3.1. Condiciones para construir el modelo *HW*

A continuación se mencionan las condiciones para construir el modelo para el sistema *HW*. Recuerde que una de las restricciones es que el individuo en cuestión esté realizando ejercicio en una *AW*.

Se sabe que la biomecánica del cuerpo humano es compleja. Muchos investigadores han realizado modelos biomecánicos humanos, para estudiar a un individuo tanto en condiciones movimiento como de reposo. Sin embargo, el propósito de este modelo es estudiar las características dinámicas de un individuo al realizar actividad física en un sistema *AW*, para posteriormente relacionarlo con energía metabólica. Uno de los modelos más usados para representar el cuerpo humano es mediante una cadena cinemática, la cual consiste en eslabones rígidos conectados por juntas de revolución. Por lo que cada segmento del cuerpo humano es considerado con un eslabón y cada articulación es una junta de revolución. El modelo bípedo a estudiar, descrito en el Capítulo 2, está formado por 5 eslabones: 1 eslabón *UB*, 2 eslabones *Th*, y 2 eslabones *Ca*. Al conjunto de los eslabones *Th* y *Ca*, de los lados izquierdo y derecho, que forman la parte inferior del cuerpo lo llamaremos *LB* por sus siglas en inglés del término *Lower Body*. La anatomía particular de los músculos es ignorada.

Además, se considera que, la marcha bípeda es realizada en el plano sagital; las articulaciones son ideales, es decir, no se tiene energía disipada debida a la fricción o deformación en la articulación; la línea de acción de las fuerzas en las articulaciones se considera que pasa a través del centro de las mismas; las masas y momentos de inercia son constantes; y la zona del abdomen y la cadera está formada por un conjunto de 3 sistemas resorte – amortiguador, denominados *SDS* por sus siglas en inglés del término *Spring Damping System*. Los *SDS* que simulan la cadera se mueven en el plano transversal (o plano coordenado *XY*).

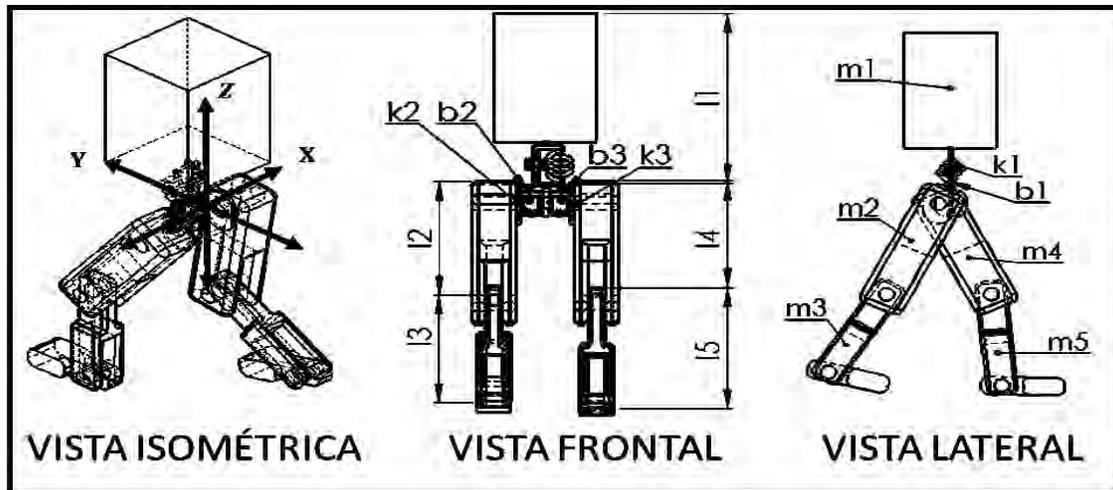


Figura 3.1: Representación gráfica del cuerpo humano considerado para la construcción del modelo dinámico.

A su vez, existe un *SDS* que une la cadera con *UB*. En particular, el sistema *SDS* que une la cadera con el eslabón *UB* se plantea con un comportamiento especial, ver la **Figura 3.2**. Este sistema permite movimientos rotacionales sobre los 3 ejes coordenados y un movimiento traslacional a lo largo del eje *Z*. Por lo que las constantes elásticas y de amortiguamiento son consideradas distintas para cada tipo de movimiento, ver la **Tabla 3.1**.

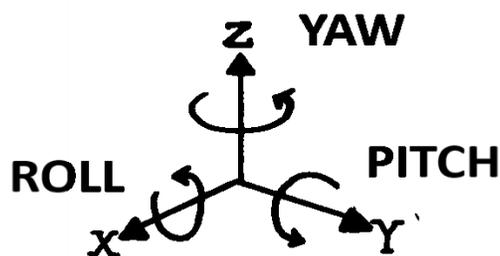


Figura 3.2: Nombre de los movimientos rotacionales respecto al eje de referencia, donde *Roll* se refiere al giro alrededor del eje *X*, *Pitch* al giro alrededor del eje *Y*, y *Yaw* al giro alrededor del eje *Z*. Estos términos son comunes en aeronáutica y robótica, cuyos equivalentes en español son: balanceo, cabeceo y guiñada respectivamente.

Retomando, se tiene que el eslabón UB cuenta con 4GDL, que le permiten realizar 3 movimientos rotacionales respecto a cada uno de los ejes cartesianos, y un movimiento traslacional a lo largo del eje Z ; mientras que los eslabones RL y LL cuentan con 3GDL, que les permiten 2 movimientos rotacionales alrededor del eje Y , y uno traslacional en plano XY .

3.3.2. Construcción del modelo dinámico HW

Paso 1. Calcular energía cinética de cada eslabón.

Ecuaciones para el eslabón UB . La energía cinética del eslabón UB es igual a la suma de las energías cinéticas traslacionales y las energías cinéticas rotacionales:

$$K_{tras} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (3.9)$$

donde v es la velocidad del eslabón UB debida al movimiento vertical al dar los pasos.

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_{1ij}^T [I_{1ij}] \dot{\theta}_{1ij} \quad (3.10)$$

donde 1 se refiere al eslabón UB , y el subíndice ij se refiere a los ejes con respecto de los cuales se lleva el movimiento.

Entonces:

$$K_{UB} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_{1ij}^T [I_{1ij}] \dot{\theta}_{1ij} \quad (3.11)$$

$$K_{UB} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{1xx} \dot{\theta}_{1x}^2 + \frac{1}{2} I_{1yy} \dot{\theta}_{1y}^2 + \frac{1}{2} I_{1zz} \dot{\theta}_{1z}^2 + I_{1xy} \dot{\theta}_{1x} \dot{\theta}_{1y} + I_{1xz} \dot{\theta}_{1x} \dot{\theta}_{1z} + I_{1yz} \dot{\theta}_{1y} \dot{\theta}_{1z}. \quad (3.12)$$

De igual forma, para los eslabones Th y Ca tenemos que la energía cinética es la suma de las energías cinéticas traslacionales y rotacionales. En este caso los movimientos rotacionales sólo son considerados respecto al eje y

$$K_{LL} = K_{Th_{tras}} + K_{Th_{rot}} + K_{Ca_{rot}} \quad (3.13)$$

$$K_{LL} = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{\delta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2 v_i^T v_i + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_i^T v_i + \frac{1}{2}I_3(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \quad (3.14)$$

$$K_{LL} = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{\delta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \quad (3.15)$$

Coordenadas Generalizadas sobre la localización de los eslabones *Th* y *Ca*:

- *Th*_{LL} (Muslo izquierdo)

- Posición

- $x_{Th_{LL}} = (\delta_2 + l_{c2}) \cos(\theta_2)$ (3.16)

- $y_{Th_{LL}} = (\delta_2 + l_{c2}) \sin(\theta_2)$ (3.17)

- Velocidad

- $\dot{x}_{Th_{LL}} = -(\delta_2 + l_{c2})\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) + \dot{\delta}_2 \cos(\theta_2)$ (3.18)

- $\dot{y}_{Th_{LL}} = (\delta_2 + l_{c2})\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + \dot{\delta}_2 \sin(\theta_2)$ (3.19)

- *Ca*_{LL} (Pantorrilla derecha)

- Posición

- $x_{Sh_{LL}} = (\delta_2 + l_2) \cos(\theta_2) + l_{c3} \cos(\theta_3 - \theta_2)$ (3.20)

- $y_{Sh_{LL}} = (\delta_2 + l_2) \sin(\theta_2) + l_{c3} \sin(\theta_3 - \theta_2)$ (3.21)

- Velocidad

- $\dot{x}_{Sh_{LL}} = -(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) + \dot{\delta}_2 \cos(\theta_2) - l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 - \theta_3)$ (3.22)

- $\dot{y}_{Sh_{LL}} = (\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + \dot{\delta}_2 \sin(\theta_2) - l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)$ (3.23)

Como $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, entonces $v_{Th}^2 = (\dot{x})(\dot{x}) + (\dot{y})(\dot{y})$.

Velocidad del eslabón *Th*_{LL}

$$v_{ThLL}^2 = [-(\delta_2 + l_{c2})\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) + \dot{\delta}_2 \cos(\theta_2)]^2 + [(\delta_2 + l_{c2})\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + \dot{\delta}_2 \sin(\theta_2)]^2 \quad (3.24)$$

$$v_{ThLL}^2 = (\delta_2 + l_{c2})^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2 \quad (3.25)$$

Velocidad del eslabón Ca_1

$$v_{CaLL}^2 = [-(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) + \dot{\delta}_2 \cos(\theta_2) - l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 - \theta_3)]^2 + [(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + \dot{\delta}_2 \sin(\theta_2) - l_{c3}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)]^2 \quad (3.26)$$

$$v_{CaLL}^2 = (\delta_2 + l_2)^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2 + l_{c3}^2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)^2 + 2(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) - 2(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3) - 2\dot{\delta}_2 \cos(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) - 2\dot{\delta}_2 \sin(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3) \quad (3.27)$$

Entonces:

$$K_{LL} = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{\delta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2[(\delta_2 + l_{c2})^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2] + \frac{1}{2}I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3[(\delta_2 + l_2)^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2 + l_{c3}^2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)^2 + 2(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) - 2(\delta_2 + l_2)\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3) - 2\dot{\delta}_2 \cos(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) - 2\dot{\delta}_2 \sin(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3)] + \frac{1}{2}I_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2, \quad (3.28)$$

mientras que

$$K_{RL} = \frac{1}{2}(m_4 + m_5)\dot{\delta}_3^2 + \frac{1}{2}m_4[(\delta_3 + l_{c4})^2 \dot{\theta}_4^2 + \dot{\delta}_3^2] + \frac{1}{2}I_4 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}m_5[(\delta_3 + l_4)^2 \dot{\theta}_4^2 + \dot{\delta}_3^2 + l_{c5}^2 (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5)^2 + 2(\delta_3 + l_4)\dot{\theta}_4 \sin(\theta_4) l_{c5} (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) \sin(\theta_4 - \theta_5) + 2(\delta_3 + l_4)\dot{\theta}_4 \cos(\theta_4) l_{c5} (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) \cos(\theta_4 - \theta_5) - 2\dot{\delta}_3 \cos(\theta_4) l_{c5} (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) \sin(\theta_4 - \theta_5) - 2\dot{\delta}_3 \sin(\theta_4) l_{c5} (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) \cos(\theta_4 - \theta_5)] + \frac{1}{2}I_5 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2. \quad (3.29)$$

Paso 2. Calcular energía potencial de cada eslabón.

Se considera que el CM del eslabón UB tiene energía potencial debido al resorte con constante k_1 y debido a la gravedad.

$$P_{UB} = m_1 g l_{c1} (\cos(\theta_{1x}) + \cos(\theta_{1y}) + \cos(\theta_{1z})) + m_1 g (\delta_1 - \delta_0) + \frac{1}{2} k_{1x} \theta_{1x}^2 + \frac{1}{2} k_{1y} \theta_{1y}^2 + \frac{1}{2} k_{1z1} \theta_{1z}^2 + \frac{1}{2} k_{1z2} \delta_{1z2}^2, \text{ donde } \delta_0 \text{ denota al punto de referencia.} \quad (3.30)$$

Para los eslabones Th_1 y Sh_1 la energía potencial está dada por:

$$P_{LL} = -\frac{1}{2} k_2 \theta_{1z}^2 + m_2 g l_{c2} \cos(\theta_2) + m_3 g l_2 \cos(\theta_2) + m_3 g l_{c3} \cos(\theta_3 - \theta_2) \quad (3.31)$$

Para el eslabón RL , mientras que para el eslabón LL :

$$P_{RL} = -\frac{1}{2} k_3 \theta_{1z}^2 + m_4 g l_{c4} \cos(\theta_4) + m_5 g (l_4 \cos(\theta_4) + l_{c5} \cos(\theta_5 - \theta_4)). \quad (3.32)$$

Paso 3. Calcular el Lagrangiano.

$$L_P = K_{UB} + K_{LL} + K_{RL} - P_{UB} - P_{LL} - P_{RL} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} L_P = & \frac{1}{2} m_1 \dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{1xx} \dot{\theta}_{1x}^2 + \frac{1}{2} I_{1yy} \dot{\theta}_{1y}^2 + \frac{1}{2} I_{1zz} \dot{\theta}_{1z}^2 + I_{1xy} \dot{\theta}_{1x} \dot{\theta}_{1y} + I_{1xz} \dot{\theta}_{1x} \dot{\theta}_{1z} + \\ & I_{1yz} \dot{\theta}_{1y} \dot{\theta}_{1z} + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{\delta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 [(\delta_2 + l_{c2})^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2] + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \\ & \frac{1}{2} m_3 [(\delta_2 + l_2)^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{\delta}_2^2 + l_{c3}^2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)^2 + 2(\delta_2 + l_2) \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \\ & \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) - 2(\delta_2 + l_2) \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \theta_3) - \\ & 2\dot{\delta}_2 \cos(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) - 2\dot{\delta}_2 \sin(\theta_2) l_{c3} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 - \\ & \theta_3)] + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2} (m_4 + m_5) \dot{\delta}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 [(\delta_3 + l_{c4})^2 \dot{\theta}_4^2 + \dot{\delta}_3^2] + \\ & \frac{1}{2} I_4 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} m_5 [(\delta_3 + l_4)^2 \dot{\theta}_4^2 + \dot{\delta}_3^2 + l_{c5}^2 (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5)^2 + 2(\delta_3 + \\ & l_4) \dot{\theta}_4 \sin(\theta_4) l_{c5} (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) \sin(\theta_4 - \theta_5) + 2(\delta_3 + \\ & l_4) \dot{\theta}_4 \cos(\theta_4) l_{c5} (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) \cos(\theta_4 - \theta_5) - 2\dot{\delta}_3 \cos(\theta_4) l_{c5} (\dot{\theta}_4 - \\ & \dot{\theta}_5) \sin(\theta_4 - \theta_5) + 2\dot{\delta}_3 \sin(\theta_4) l_{c5} (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_5) \cos(\theta_4 - \theta_5)] + \frac{1}{2} I_5 (\dot{\theta}_4 + \\ & \dot{\theta}_5)^2 - [m_1 g l_{c1} (\cos(\theta_{1x}) + \cos(\theta_{1y}) + \cos(\theta_{1z})) + m_1 g (\delta_1 - \delta_0) + \\ & \frac{1}{2} k_{1x} \theta_{1x}^2 + \frac{1}{2} k_{1y} \theta_{1y}^2 + \frac{1}{2} k_{1z1} \theta_{1z}^2 + \frac{1}{2} k_{1z2} \delta_{1z2}^2] - [-\frac{1}{2} k_2 \theta_{1z}^2 + \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$m_2 g l_{c2} \cos(\theta_2) + m_3 g(l_2 \cos(\theta_2) + l_{c3} \cos(\theta_3 - \theta_2))] - [-\frac{1}{2}k_2\theta_{1z}^2 + m_4 g l_{c4} \cos(\theta_4) + m_5 g(l_4 \cos(\theta_4) + l_{c5} \cos(\theta_5 - \theta_4))].$$

Paso 4. Calcular las ecuaciones de $E - L$.

$$u_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1x}} = I_{1xx} \ddot{\theta}_{1x} + b_{1x} \dot{\theta}_{1x} + k_{1x} \theta_{1x} + m_1 g l_{c1} \sin(\theta_{1x}) \quad (3.35)$$

$$u_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1y}} = I_{1yy} \ddot{\theta}_{1y} + b_{1y} \dot{\theta}_{1y} + k_{1y} \theta_{1y} + m_1 g l_{c1} \sin(\theta_{1y}) \quad (3.36)$$

$$u_3 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1z}} = I_{1zz} \ddot{\theta}_{1z} + b_{1z1} \dot{\theta}_{1z1} + k_{1z1} \theta_{1z1} + m_1 g l_{c1} \sin(\theta_{1z}) \quad (3.37)$$

$$u_4 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_1} = m_1 \ddot{\delta}_1 + b_{1z2} \dot{\delta}_{1z2} + k_{1z2} \delta_{1z2} + m_1 g \quad (3.38)$$

$$u_5 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = [m_2(\delta_2 + l_{c2})^2 + m_3(\delta_2 + l_2)^2 + \beta - 2\alpha(\delta_2 + l_2) \cos(2\theta_2 - \theta_3) + I_2] \ddot{\theta}_2 + [-\beta + \alpha(\delta_2 + l_2) \cos(2\theta_2 - \theta_3) + I_3] \ddot{\theta}_3 + [-\alpha \sin(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2 + [4\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\theta}_2^2 + [-4\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + [2m_2(\delta_2 + l_{c2}) + 2m_3(\delta_2 + l_2) - 2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2 \dot{\theta}_2 + [2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2 \dot{\theta}_3 + [\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_3^2 - \gamma g \sin(\theta_2) - \epsilon g \sin(\theta_2) - \alpha g \sin(\theta_2 - \theta_3). \quad (3.39)$$

$$u_6 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = [-\beta + \alpha(\delta_2 + l_2) \cos(2\theta_2 - \theta_3) + I_3] \ddot{\theta}_2 + [\beta + I_3] \ddot{\theta}_3 + [\alpha \sin(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2 + [-2\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 - \theta_3) - \alpha(\delta_2 + l_2) \sin(\theta_3)] \dot{\theta}_2^2 + [2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2 \dot{\theta}_2 + [-2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2 \dot{\theta}_3 + [\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \alpha g \sin(\theta_2 - \theta_3). \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
u_7 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_2} &= [-\alpha \sin(2\theta_2 + \theta_3)]\ddot{\theta}_2 + [\alpha \sin(2\theta_2 + \theta_3)]\ddot{\theta}_3 + \\
[2(\mu)]\ddot{\delta}_2 + [-\alpha \cos(2\theta_2 + \theta_3) - (\mu)\delta_2 - \gamma - \varepsilon]\dot{\theta}_2^2 + [-\alpha \cos(2\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_3^2 + & \quad (3.41) \\
[2\alpha \cos(2\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + b_2\dot{\delta}_2 - k_2\delta_2. &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_8 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_4} &= [m_4(\delta_3 + l_{c4})^2 + m_4(\delta_3 + l_4)^2 + B - 2A(\delta_3 + \\
l_4) \cos(2\theta_4 - \theta_5) + I_4]\ddot{\theta}_4 + [-B + A(\delta_3 + l_4) \cos(2\theta_4 - \theta_5) + I_5]\ddot{\theta}_5 + & \quad (3.42) \\
[-A \sin(2\theta_4 - \theta_5)]\ddot{\delta}_3 + [4A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\theta}_4^2 + [-4A(\delta_3 + \\
l_4) \sin(2\theta_4 + \theta_5)]\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + [2m_4(\delta_3 + l_{c4}) + 2m_5(\delta_3 + l_4) - 2A \cos(2\theta_4 - \\
\theta_5)]\dot{\delta}_3\dot{\theta}_4 + [2A \cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_3\dot{\theta}_5 + [A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 + \theta_5)]\dot{\theta}_5^2 - \\
\Gamma g \sin(\theta_4) - E g \sin(\theta_4) - A g \sin(\theta_4 - \theta_5). &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_9 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_5} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_5} &= [-B + A(\delta_3 + l_4) \cos(2\theta_4 - \theta_5) + I_5]\ddot{\theta}_4 + [B + I_5]\ddot{\theta}_5 + \\
[A \sin(2\theta_4 - \theta_5)]\ddot{\delta}_3 + [-2A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 - \theta_5) - A(\delta_3 + l_4) \sin(\theta_5)]\dot{\theta}_4^2 + & \quad (3.43) \\
[2A \cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_3\dot{\theta}_4 + [-2A \cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_3\dot{\theta}_5 + [A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 - \\
\theta_5)]\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 - A g \sin(\theta_4 - \theta_5). &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{10} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta_3} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_3} &= [-A \sin(2\theta_4 + \theta_5)]\ddot{\theta}_4 + [A \sin(2\theta_4 + \theta_5)]\ddot{\theta}_5 + \\
[2(N)]\ddot{\delta}_3 + [-A \cos(2\theta_4 + \theta_5) - (N)\delta_3 - \Gamma - E]\dot{\theta}_4^2 + [-A \cos(2\theta_4 + & \quad (3.44) \\
\theta_5)]\dot{\theta}_5^2 + [2A \cos(2\theta_4 + \theta_5)]\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + b_3\dot{\delta}_3 + k_3\delta_3. &
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{array}{lll}
\alpha = m_3 l_{c3} & \mu = m_2 + m_3 & \Gamma = m_4 l_{c4} \\
\beta = m_3 l_{c3}^2 & \varphi = m_1 l_{c1} & E = m_5 l_4 \\
\gamma = m_2 l_{c2} & A = m_5 l_{c5} & N = m_4 + m_5. \\
\varepsilon = m_3 l_2 & B = m_5 l_{c5}^2 &
\end{array}$$

A continuación, se muestran los parámetros conocidos, los parámetros a estimar y las variables del sistema *HW*.

VARIABLE	DESCRIPCIÓN	Herman [18]	Zatsiorsky [22]
m_1	Masa <i>UB</i>	57.63	50.84334
m_2	Masa <i>Th</i> de <i>RL</i>	8.5	12.2936
m_3	Masa <i>Ca</i> de <i>RL</i>	5.185	4.8607
m_4	Masa <i>Th</i> de <i>LL</i>	8.5	12.2936
m_5	Masa <i>Ca</i> de <i>LL</i>	5.185	4.8607

Tabla 3.1: Masas. Las masas fueron calculadas tomando en cuenta la Tabla A.2 y la masa de un individuo de 1.83 m de estatura y 85 kg.

VARIABLE	DESCRIPCIÓN	VALOR
l_1	Longitud <i>UB</i>	0.81
l_2	Longitud <i>Th</i> de <i>RL</i>	0.54
l_3	Longitud <i>Ca</i> de <i>RL</i>	0.46
l_4	Longitud <i>Th</i> de <i>LL</i>	0.54
l_5	Longitud <i>Ca</i> de <i>LL</i>	0.46
l_{c1}	Longitud <i>UB</i>	0.45684
l_{c2}	Longitud <i>Th</i> de <i>RL</i>	0.23382
l_{c3}	Longitud <i>Ca</i> de <i>RL</i>	0.19918
l_{c4}	Longitud <i>Th</i> de <i>LL</i>	0.23382
l_{c5}	Longitud <i>Ca</i> de <i>LL</i>	0.19918

Tabla 3.2: Longitudes y centros de masa (eje longitudinal). Las longitudes fueron medidas directamente de un individuo voluntario de 1.83 m de estatura y 85 kg. Los centros de masa fueron calculados tomando en cuenta la Tabla A.3 y los datos del individuo.

VARIABLE	DESCRIPCIÓN	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
I_1	Inercia UB	k_2	Cte. Elástica, RL (mov. horizontal)
I_2	Inercia Th_{RL}	k_3	Cte. Elástica, LL (mov. horizontal)
I_3	Inercia CRL	b_2	Cte. de amortiguamiento RL (mov. horizontal)
I_4	Inercia Th de LL	b_3	Cte. de amortiguamiento RL (mov. horizontal)
I_5	Inercia Ca de LL	b_{1_x}	Cte. de amortiguamiento UB (mov. rot. eje X)
k_{1_x}	Cte. Elástica, UB (mov. rot. eje X)	b_{1_y}	Cte. de amortiguamiento UB (mov. rot. eje Y)
k_{1_y}	Cte. Elástica, UB (mov. rot. eje Y)	b_{1_z}	Cte. de amortiguamiento UB (mov. rot. eje Z)
k_{1_z}	Cte. Elástica, UB (mov. rot. eje Z)	$b_{1_z'}$	Cte. de amortiguamiento UB (mov. trasl. eje Z)
$k_{1_z'}$	Cte. Elástica, UB (mov. trasl. eje Z)		

Tabla 3.3: Parámetros a estimar en el Capítulo 5.

VARIABLE	DESCRIPCIÓN
$\dot{\theta}_{1_x}$	Velocidad angular UB en eje X (adelante/atrás)
$\dot{\theta}_{1_y}$	Velocidad angular UB en eje Y (lados)
$\dot{\theta}_{1_z}$	Velocidad angular UB en eje Z (giro)
$\dot{\theta}_2$	Velocidad angular Th de RL
$\dot{\theta}_3$	Velocidad angular Ca de RL
$\dot{\theta}_4$	Velocidad angular Th de LL
$\dot{\theta}_5$	Velocidad angular Ca de LL
$\dot{\delta}_1$	Velocidad traslacional UB (arriba/abajo)
$\dot{\delta}_2$	Velocidad traslacional RL
$\dot{\delta}_3$	Velocidad traslacional LL

Tabla 3.4: Variables del sistema HW .

3.3.3. Construcción del modelo dinámico AW

Ahora, esta misma metodología será utilizada para construir el modelo dinámico del sistema AW. Considere lo siguiente:

Como se describía anteriormente, la caminadora está formada por dos barras solidas en la parte delantera, que se unen a dos pedales por medio de una junta de revolución; además, estos pedales se encuentran sostenidos por una cuerda en la parte trasera, ver la **Figura 3.3a**. Las barras se encuentran unidas a una base, al igual que las cuerdas traseras; lo que hace que los pedales solo puedan moverse hacia adelante y hacia atrás formando un movimiento pendular.

Sin embargo, cada barra cuenta con movimiento independiente, es decir, que el mover solo una de ellas, no afecta el movimiento de la otra. Entonces, para modelar este sistema se supondrá, por cada lado, una barra con movimiento pendular conectada a una masa sujeta por una cuerda, como se muestra en la **Figura 3.3b**.

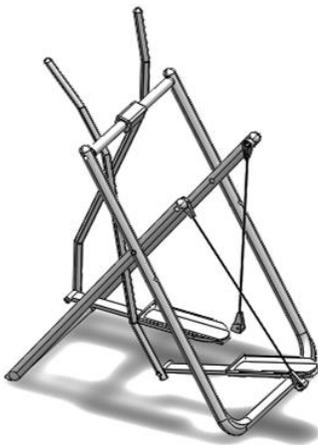


Figura 3.3a: Gráfico que representa la caminadora tipo esquiadora.

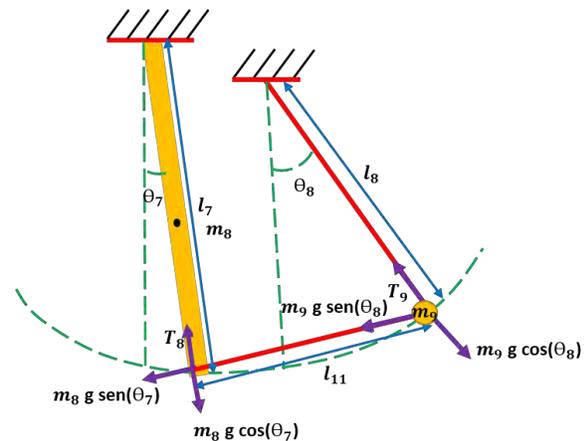


Figura 3.3b: Gráfico que muestra las variables de la caminadora tipo esquiadora.

En la siguiente tabla se muestran las variables que utilizaremos para modelar este sistema.

VARIABLE	DESCRIPCIÓN
m_6	Masa Barra
m_7	Masa <i>Th</i> de <i>RL</i>
m_8	Masa <i>Ca</i> de <i>RL</i>
m_9	Masa <i>Th</i> de <i>LL</i>
l_6	Longitud Barra derecha
l_7	Longitud cuerda del pedal derecho
l_8	Longitud <i>Ca</i> de <i>RL</i>
l_9	Longitud <i>Th</i> de <i>LL</i>
I_6	Inercia <i>UB</i>
I_7	Inercia <i>Th</i> de <i>RL</i>
$\dot{\theta}_6$	Velocidad angular <i>UB</i> en eje <i>Y</i> (adelante/atrás)
$\dot{\theta}_7$	Velocidad angular <i>UB</i> en eje <i>X</i> (lados)
$\dot{\theta}_8$	Velocidad angular <i>UB</i> en eje <i>Z</i> (giro)
$\dot{\theta}_9$	Velocidad angular <i>Th</i> de <i>RL</i>
f_{r1}	Fricción

Tabla 3.5: Variables correspondientes al modelo del sistema *AW*.

Paso 1. Calcular energía cinética de los componentes de *AW*, (barra y pedal).

Lado Izquierdo (*LS*)

$$K_{LS} = \frac{1}{2} I_6 \dot{\theta}_6^2 + \frac{1}{2} m_7 l_7^2 \dot{\theta}_7^2 \quad (3.45)$$

Lado Derecho (*RS*)

$$K_{RS} = \frac{1}{2} I_7 \dot{\theta}_8^2 + \frac{1}{2} m_9 l_9^2 \dot{\theta}_9^2 \quad (3.46)$$

Paso 2. Calcular energía potencial de los componentes de *AW*, (barra y pedal).

Consideremos que:

$$h_i = l_i - l_i \cos \theta_i \quad (3.47)$$

Lado Izquierdo (LS)

$$P_{LS} = m_6 gh_6 + m_7 gh_7 \quad (3.48)$$

$$P_{LS} = m_6 gl_6(1 - \cos(\theta_6)) + m_7 gl_7(1 - \cos(\theta_7)) \quad (3.49)$$

Lado Derecho (RS)

$$P_{RS} = m_8 gh_8 + m_9 gh_9 \quad (3.50)$$

$$P_{RS} = m_8 gl_8(1 - \cos(\theta_8)) + m_9 gl_9(1 - \cos(\theta_9)) \quad (3.51)$$

Paso 3. Calcular el Lagrangiano:

$$L_{AW} = K_{AW} - P_{AW}$$

donde $K_{AW} = K_{LS} + K_{RS}$, $P_{AW} = P_{LS} + P_{RS}$

$$\begin{aligned} L_{AW} = & \frac{1}{2} I_6 \dot{\theta}_6^2 + \frac{1}{2} m_7 l_7^2 \dot{\theta}_7^2 + \frac{1}{2} I_7 \dot{\theta}_8^2 + \frac{1}{2} m_9 l_9^2 \dot{\theta}_9^2 - m_6 gl_6(1 - \cos(\theta_6)) \\ & - m_7 gl_7(1 - \cos(\theta_7)) - m_8 gl_8(1 - \cos(\theta_8)) \\ & - m_9 gl_9(1 - \cos(\theta_9)) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Paso 4. Calcular las ecuaciones de $E - L$.

Para ello, definamos $F_{fi} = f_r \dot{\theta}_i$, la cual es la fuerza de fricción en las juntas de la caminadora.

$$T_{11} - f_{r1} \dot{\theta}_6 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_6} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_6} = I_6 \ddot{\theta}_6 + m_6 gl_6 \sin \theta_6 \quad (3.53)$$

$$T_{12} - f_{r2} \dot{\theta}_7 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_7} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_7} = m_7 l_7^2 \ddot{\theta}_7 + m_7 gl_7 \sin \theta_7 \quad (3.54)$$

$$T_{13} - f_{r3} \dot{\theta}_8 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_8} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_8} = I_7 \ddot{\theta}_8 + m_8 gl_8 \sin \theta_8 \quad (3.55)$$

$$T_{14} - f_{r4} \dot{\theta}_9 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_9} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_9} = m_9 l_9^2 \ddot{\theta}_9 + m_9 gl_9 \sin \theta_9 \quad (3.56)$$

3.4. Acoplamiento de los sistemas *HW* y *AW*

Las entradas en un sistema dinámico son los estímulos que el sistema recibe para precisamente, comportarse de manera dinámica a través del tiempo; ya sea que el sistema se encuentre en reposo y se le aplique una entrada para provocar el movimiento del sistema; o que se encuentre en equilibrio y se aplique una entrada para que salga del punto de equilibrio y observar su comportamiento ante esta perturbación. Hasta el momento se tienen dos sistemas desacoplados, *HW* y *AW*. A continuación se enlistan los supuestos bajo los cuales se establecen las ecuaciones que relacionan estos dos sistemas. El propósito de desarrollar este acoplamiento es que una vez calculado el torque de *AW*, éste represente las entradas del sistema *HW*, para poder llevar a cabo la identificación paramétrica en el Capítulo 5.

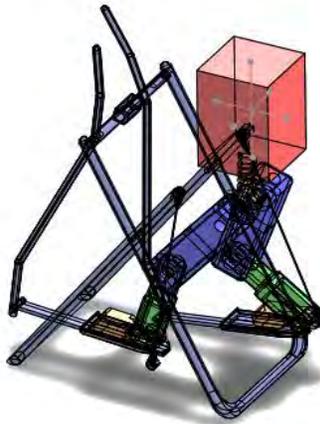


Figura 3.4: Sistema marcha humana *HW* y Sistema caminadora tipo esquiadora *AW* acoplados.

1. Las entradas de este sistema pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$\tau_k = u_k - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}$$

donde τ se refiere al torque en los segmentos con movimiento rotacional, D es la energía disipativa del sistema (como la fricción o los amortiguadores) y q_k variables correspondientes a la posición angular de los segmentos con movimiento rotacional.

2. Para el caso de los movimientos traslacionales, la expresión es similar a la anterior, pero en vez de τ se tiene F , que es la fuerza ejercida sobre el segmento con movimiento traslacional y en el caso de q_k la variable representa la posición longitudinal que se desplaza el CM del segmento durante este tipo de movimiento.
3. De forma general, para determinar el acoplamiento entre estos dos sistemas, se realizó nuevamente el planteamiento de las ecuaciones utilizando la metodología $E - L$; pero esta vez, utilizando relaciones lineales entre los ángulos que están relacionados de uno y otro sistema.
4. El segmento UB cuenta con cuatro ecuaciones que describen su dinámica. Las tres primeras corresponden a los movimientos rotacionales con respecto a los ejes coordenados X , Y y Z respectivamente. La cuarta ecuación es relativa al movimiento traslacional a lo largo del vertical Z . Para este caso, se consideró que el movimiento del CM de la cadera es del tamaño de una δ tal que el movimiento del segmento UB en cualquiera de los cuatro grados de libertad supuestos, no tiene un cambio significativo en el movimiento de los segmentos de la parte inferior del cuerpo.
5. Ahora bien, dado que el segmento UB ha sido considerado como un solo bloque que incluye cabeza-brazos-y-tórax, lo cual impide que haya una forma “clara” de representar las relaciones entre dicho segmento y la caminadora; ya que de forma física, estas relaciones están dadas por el efecto de los brazos en la caminadora, ya sea para conservar el equilibrio de todo el

cuerpo (contrarrestar el efecto del movimiento en las piernas) o para reducir/aumentar el torque en la parte inferior del cuerpo.

Por lo tanto, las ecuaciones que describen la dinámica del movimiento de este segmento serán representadas por una entrada u_k y un factor de amortiguamiento b_k donde k es el número relativo al GDL del sistema y $k = 0,1, \dots 4$.

Considerando los supuestos anteriores (1 – 4), las ecuaciones serían las siguientes:

$$u_1 = I_{1_{xx}} \ddot{\theta}_{1_x} + b_{1_x} \dot{\theta}_{1_x} + k_{1_x} \theta_{1_x} + m_1 g l_{c1} \sin(\theta_{1_x})$$

$$u_2 = I_{1_{yy}} \ddot{\theta}_{1_y} + b_{1_y} \dot{\theta}_{1_y} + k_{1_y} \theta_{1_y} + m_1 g l_{c1} \sin(\theta_{1_y})$$

$$u_3 - (\mathbf{f} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_5 + \mathbf{f} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_6) \dot{\theta}_{1_{z1}} = (I_{1_{zz}} + I_6 \mathbf{r}_5 + I_7 \mathbf{r}_6) \ddot{\theta}_{1_z} + b_{1_{z1}} \dot{\theta}_{1_{z1}} + k_{1_{z1}} \theta_{1_{z1}} + m_1 g l_{c1} \sin(\theta_{1_z})$$

$$u_4 - b_{1_{zz}} \dot{\delta}_{1z2} = m_1 \ddot{\delta}_1 + k_{1_{zz}} \delta_{1z2} + m_1 g$$

$$\text{donde } \theta_6 = r_5 \theta_{1_{z1}}, \theta_8 = r_6 \theta_{1_{z1}}$$

A continuación se describe el acoplamiento de la parte inferior del cuerpo humano con la caminadora. Este segmento cuenta con seis ecuaciones para describir la dinámica de su movimiento, tres de las cuales corresponden a la pierna derecha y otras tres a la izquierda. Estas corresponden a los movimientos rotacionales de los segmentos *Th* y *Ca*, y al movimiento longitudinal de la cadera

6. Para ello, observe que la cadera no se encuentra directamente acoplada a la caminadora, por lo cual, no se añadió ningún efecto adicional a esta ecuación. Sin embargo, los eslabones *Th* y *Ca* si están relacionados con el movimiento de las barras y pedales de la caminadora. La relación que se consideró para este caso también está dada por las siguientes relaciones lineales $\theta_6 = r_1 \theta_2$, $\theta_7 = r_2 \theta_3$, $\theta_8 = r_3 \theta_4$, $\theta_9 = r_4 \theta_5$.

Lo que resulta en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
u_5 = & [m_2(\delta_2 + l_{c2})^2 + m_3(\delta_2 + l_2)^2 + \beta - 2\alpha(\delta_2 + l_2) \cos(2\theta_2 - \theta_3) + I_2 + I_6 r_1^2] \ddot{\theta}_2 \\
& + [-\beta + \alpha(\delta_2 + l_2) \cos(2\theta_2 - \theta_3) + I_3] \ddot{\theta}_3 + [-\alpha \sin(2\theta_2 - \theta_3)] \ddot{\delta}_2 \\
& + [4\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\theta}_2^2 + [-4\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
& + [2m_2(\delta_2 + l_{c2}) + 2m_3(\delta_2 + l_2) - 2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2 \dot{\theta}_2 \\
& + [2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2 \dot{\theta}_3 + [\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} I_6 (r \dot{\theta}_2)^2 \\
& - \gamma g \sin(\theta_2) - \varepsilon g \sin(\theta_2) - \alpha g \sin(\theta_2 - \theta_3) - \mathbf{m}_6 \mathbf{g} l_6 \sin(r_1 \theta_2) \\
& + \mathbf{f}_{r1} r_1 \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_6 = & [-\beta + \alpha(\delta_2 + l_2) \cos(2\theta_2 - \theta_3) + I_3] \ddot{\theta}_2 + [\beta + I_3 + \mathbf{m}_7 l_7^2 r_2^2] \ddot{\theta}_3 \\
& + [\alpha \sin(2\theta_2 - \theta_3)] \ddot{\delta}_2 \\
& + [-2\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 - \theta_3) - \alpha(\delta_2 + l_2) \sin(\theta_3)] \dot{\theta}_2^2 \\
& + [2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2 \dot{\theta}_2 + [-2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2 \dot{\theta}_3 \\
& + [\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \alpha g \sin(\theta_2 - \theta_3) - \mathbf{m}_7 \mathbf{g} l_7 \sin(r_2 \theta_3) \\
& + \mathbf{f}_{r2} r_2 \dot{\theta}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_7 = & [-\alpha \sin(2\theta_2 + \theta_3)] \ddot{\theta}_2 + [\alpha \sin(2\theta_2 + \theta_3)] \ddot{\theta}_3 + [2(\mu)] \ddot{\delta}_2 \\
& + [-\alpha \cos(2\theta_2 + \theta_3) - (\mu)\delta_2 - \gamma - \varepsilon] \dot{\theta}_2^2 + [-\alpha \cos(2\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_2^2 \\
& + [2\alpha \cos(2\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + b_2 \dot{\delta}_2 - k_2 \delta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_8 = & [m_4(\delta_3 + l_{c4})^2 + m_4(\delta_3 + l_4)^2 + B - 2A(\delta_3 + l_4) \cos(2\theta_4 - \theta_5) + I_4 + I_7 r_3^2] \ddot{\theta}_4 \\
& + [-B + A(\delta_3 + l_4) \cos(2\theta_4 - \theta_5) + I_5] \ddot{\theta}_5 + [-A \sin(2\theta_4 - \theta_5)] \ddot{\delta}_3 \\
& + [4A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 - \theta_5)] \dot{\theta}_4^2 + [-4A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 + \theta_5)] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 \\
& + [2m_4(\delta_3 + l_{c4}) + 2m_5(\delta_3 + l_4) - 2A \cos(2\theta_4 - \theta_5)] \dot{\delta}_3 \dot{\theta}_4 \\
& + [2A \cos(2\theta_4 - \theta_5)] \dot{\delta}_3 \dot{\theta}_5 + [A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 + \theta_5)] \dot{\theta}_5^2 - \Gamma g \sin(\theta_4) \\
& - E g \sin(\theta_4) - A g \sin(\theta_4 - \theta_5) - \mathbf{m}_8 \mathbf{g} l_8 \sin(r_3 \theta_4) + \mathbf{f}_{r3} r_3 \dot{\theta}_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_9 = & [-B + A(\delta_3 + l_4) \cos(2\theta_4 - \theta_5) + I_5] \ddot{\theta}_4 + [B + I_5 + \mathbf{m}_9 l_9^2 r_4^2] \ddot{\theta}_5 \\
& + [A \sin(2\theta_4 - \theta_5)] \ddot{\delta}_3 \\
& + [-2A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 - \theta_5) - A(\delta_3 + l_4) \sin(\theta_5)] \dot{\theta}_4^2 \\
& + [2A \cos(2\theta_4 - \theta_5)] \dot{\delta}_3 \dot{\theta}_4 + [-2A \cos(2\theta_4 - \theta_5)] \dot{\delta}_3 \dot{\theta}_5 \\
& + [A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 - \theta_5)] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 - A g \sin(\theta_4 - \theta_5) - \mathbf{m}_9 \mathbf{g} l_9 \sin(r_4 \theta_5) \\
& + \mathbf{f}_{r4} r_4 \dot{\theta}_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{10} = & [-A \sin(2\theta_4 + \theta_5)] \ddot{\theta}_4 + [A \sin(2\theta_4 + \theta_5)] \ddot{\theta}_5 + [2(N)] \ddot{\delta}_3 \\
& + [-A \cos(2\theta_4 + \theta_5) - (N)\delta_3 - \Gamma - E] \dot{\theta}_4^2 + [-A \cos(2\theta_4 + \theta_5)] \dot{\theta}_4^2 \\
& + [2A \cos(2\theta_4 + \theta_5)] \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + b_3 \dot{\delta}_3 + k_3 \delta_3
\end{aligned}$$

Entonces, agrupando los términos, se obtiene el modelo de la forma:

$$U(q) = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q)\dot{q} + G(q) \quad (3.57)$$

3.5. Modelo en el espacio de estados

El análisis sobre las propiedades del sistema, sus puntos de equilibrio y la estabilidad de éstos, entre otros, suele realizarse a través del modelo en el espacio de estados. Sin embargo, los modelos matemáticos de sistemas físicos de dimensión finita no siempre son obtenidos directamente en esta forma. No obstante, su estructura puede ser modificada si se eligen cuidadosamente las variables de estado. A continuación se muestra como modificar la estructura de la ecuación (3.57), ya que el modelo en espacio de estados será útil para los capítulos posteriores.

Se le llama modelo en el espacio de estados de un sistema dinámico a aquel que está representado por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}\tag{3.58}$$

donde \dot{x}_i denota la derivada de x_i con respecto de la variable de tiempo t y u_1, u_2, \dots, u_p son variables de entradas especificadas. A las variables x_1, x_2, \dots, x_n se les llama variables de estado. Estas, representan la memoria del sistema dinámico, es decir, los “estados” pasados. Generalmente, se utiliza la notación vectorial para escribir las ecuaciones anteriores de forma compacta. Sean

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{bmatrix}\tag{3.59}$$

donde x es el vector de estados del sistema, u es la entrada que exita al sistema y $f(x)$ es el campo vectorial que gobierna la dinámica del sistema.

Si se reescriben las n ecuaciones diferenciales de primer orden como una ecuación n –dimensional vectorial se obtendrá la ecuación 3.60, la cual es llamada, ecuación de estado; en la que x se refiere al vector de estados y u al vector de entradas.

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.60)$$

(3.60) es el de un sistema autónomo o invariante en el tiempo. El comportamiento de un sistema autónomo es invariante a los cambios en el origen del tiempo, ya que el cambio de la variable tiempo t para $\tau = t \sim a$ no cambia el lado derecho de la ecuación de estado. En el caso contrario, el sistema es llamado no autónomo o variante en tiempo. El modelo presentado en este trabajo es el de un sistema autónomo, debido a que no hay un forzamiento externo que provoque el movimiento de la caminadora, y por lo tanto que haga que el individuo se mueva también.

Sea la ecuación (3.57), para representarla en el espacio de estados, considérese lo siguiente:

$$f(q) = U(q) - C(q, \dot{q})\dot{q} - D(q)\dot{q} - G(q)$$

Al hacer el cambio de variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 \\ x_2 &= \dot{q}_1 \\ x_3 &= q_2 \\ &\vdots \\ x_n &= q_m \end{aligned}$$

donde $m, n = 0, 1, \dots, 20$, y cuyas variables corresponden a:

$$\begin{array}{cccc}
x_1 = \theta_{1_x} & x_6 = \dot{\theta}_{1_z} & x_{11} = \theta_3 & x_{16} = \dot{\theta}_4 \\
x_2 = \dot{\theta}_{1_x} & x_7 = \delta_1 & x_{12} = \dot{\theta}_3 & x_{17} = \theta_5 \\
x_3 = \theta_{1_y} & x_8 = \dot{\delta}_1 & x_{13} = \delta_2 & x_{18} = \dot{\theta}_5 \\
x_4 = \dot{\theta}_{1_y} & x_9 = \theta_2 & x_{14} = \dot{\delta}_2 & x_{19} = \delta_3 \\
x_5 = \theta_{1_z} & x_{10} = \dot{\theta}_2 & x_{15} = \theta_4 & x_{20} = \dot{\delta}_3
\end{array}$$

se tiene:

$$M(x)\dot{x} = f(x).$$

Posteriormente, despejando \dot{x} , se tendrá al sistema en la forma clásica de ecuaciones de estado

$$\dot{x} = M^{-1}(x) \cdot f(x). \quad (3.62)$$

Para que un modelo matemático pueda predecir el estado futuro del sistema a partir de su estado actual en un tiempo t_0 , es necesario que el problema del valor inicial tenga una solución única.

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.63)$$

Ésta y otras propiedades con las que debe contar un modelo matemático que busca representar la dinámica de un sistema real serán presentadas y estudiadas en el capítulo siguiente. Además, se muestran los puntos de equilibrio del sistema y su estabilidad.

“Entre más se refieren a la realidad las leyes matemáticas, serán menos ciertas, en la medida que sean ciertas, no se referirán a la realidad”.

Albert Einstein

Capítulo 4.

ANÁLISIS DINÁMICO.

En el capítulo anterior fueron construidos los modelos de los sistemas HW y AW utilizando la metodología $E - L$. En este capítulo se tratan las propiedades fundamentales con las que el modelo de un sistema dinámico debe de cumplir para representar matemáticamente, desde la teoría de sistemas dinámicos y estabilidad, un sistema físico. Tales propiedades son existencia y unicidad de soluciones, dependencia continua de las condiciones iniciales, y dependencia continua de los parámetros.

Además de estas propiedades, se mostrará la existencia de los puntos de equilibrio del sistema y se analizará su estabilidad local. Para determinar la estabilidad, se propone una función de Lyapunov. Este capítulo está basado principalmente en la teoría presentada en [27].

Cabe mencionar que en capítulos anteriores se definió $\dot{x} = M^{-1}(x) \cdot f(x)$ como el modelo en ecuaciones de estado. Sin embargo, por simplicidad en este capítulo, se ha reescrito el modelo de la siguiente forma:

$$\dot{x} = M^{-1}(x) \cdot h(x) \quad (4.1)$$

Y $f(x)$ se ha definido como

$$f(x) = M^{-1}(x) \cdot h(x). \quad (4.2)$$

4.1. Características Preliminares del Modelo $E - L$

De la estructura obtenida por la metodología $E - L$, se tienen algunas de características propias del modelo:

$$U(q) = M(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathcal{D}(q)\dot{q} + G(q) \quad (4.3)$$

La matriz de masas e inercias con dominio $M(t, q) \in \mathfrak{R}^{10 \times 10}$, es una matriz simétrica $M(q) > 0 \Rightarrow \exists M(q)^{-1} > 0$, positiva definida $M(q) > 0$, y dependiente de la posición dada por q ; esto se debe a su relación directa con el cálculo de la energía cinética del sistema (4.4).

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (4.4)$$

Para esta matriz, existe un número positivo α tal que:

$$M(q) \geq \alpha I \quad \forall q \in \mathfrak{R}^n \quad (4.5)$$

donde I es la matriz identidad de igual dimensión que M . Además, la matriz $M(q)^{-1}$ existe y es positiva definida.

Una consecuencia de estas propiedades, y en particular del hecho de que $M(q)$ sea positiva definida, es que la función $V: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$, definida como

$$V(q, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (4.6)$$

Es positiva definida en \dot{q} . De hecho. Observe que con la definición anterior se tiene

$$V(q, \dot{q}) = 2K(q, \dot{q}) \quad (4.7)$$

donde $K(q, \dot{q})$ corresponde a la función de energía cinética del sistema.

La matriz que contiene información sobre las fuerzas de Coriolis y centrípeta tiene su dominio en $\mathcal{C}(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{10 \times 10}$. La matriz $\mathcal{C}(q, \dot{q})$ no puede ser única, pero el vector $\mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q}$ puede serlo. Si la matriz $\mathcal{C}(q, \dot{q})$ es evaluada considerando la velocidad de las juntas \dot{q} en cero, la matriz es cero para todo vector q

$$\mathcal{C}(q, 0) = 0 \quad \forall q \in \mathfrak{R}^n \quad (4.8)$$

Para todo vector $q, x, y, z \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ y para un escalar α se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(q, x)y &= \mathcal{C}(q, y)x \\ \mathcal{C}(q, z + \alpha x)y &= \mathcal{C}(q, z)y + \alpha \mathcal{C}(q, x)y \end{aligned} \quad (4.9)$$

El vector $\mathcal{C}(q, x)y$ puede ser expresado en la forma:

$$\mathcal{C}(q, x)y = \begin{bmatrix} x^T C_1(q)y \\ x^T C_2(q)y \\ \vdots \\ x^T C_n(q)y \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

donde $C_k(q)$ son matrices simétricas de dimensiones $n \times n$ para toda $k = 1, 2, \dots, n$; De hecho el ij -ésimo elemento $C_{ij}(q)$ de la matriz $C_k(q)$ corresponde a los símbolos de Christoffel:

$$C_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right] \quad (4.11)$$

La matriz $\mathcal{C}(q, \dot{q})$ está relacionada con la matriz de inercia $M(q)$ por la expresión:

$$x^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - \mathcal{C}(q, \dot{q}) \right] x = 0 \quad \forall q, \dot{q}, x \in \mathfrak{R}^{n \times 1} \quad (4.12)$$

De forma análoga, la matriz $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ es una matriz semi-simétrica, y también es cierto que

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T \quad (4.13)$$

La matriz de fuerzas disipativas tiene su dominio en $\mathcal{D}(t, q) \in \mathfrak{R}^{10 \times 10}$ y está acotada de la siguiente manera:

$$\|D\dot{q}\| \leq d_{max} \|\dot{q}\| \quad (4.14)$$

El vector de gravedad tiene su dominio en $G(t, q) \in \mathfrak{R}^{10 \times 1}$. Los términos de este vector solo dependen de la posición de los segmentos que componen el sistema. Y pueden estar relacionados con la velocidad del segmento \dot{q} de la siguiente forma:

$$\int_0^T g(q)^T \dot{q} dt = U(q(T)) - U(q(0)) \quad \forall T \in \mathfrak{R}_+ \quad (4.15)$$

El término gravitacional $g(q)$ está acotado solo si q es acotado:

$$\|g(q)\| \leq g_b \quad (4.16)$$

donde el término g_b es una constante escalar para el brazo de revolución y una función de q para el brazo que contiene juntas de revolución [15].

4.2. Propiedades fundamentales – Existencia y Unicidad

Dado un modelo matemático de un sistema, se espera que al realizar experimentos en el sistema físico, dado un estado inicial en el tiempo t_0 , el sistema evolucione, y cada uno de los estados esté definido en el tiempo futuro $t > t_0$. Más aún, para un sistema determinístico, se espera que, si es posible repetir el experimento bajo las

mismas condiciones, se pueda obtener exactamente la misma evolución de los estados durante el tiempo $t > t_0$.

En un modelo matemático que logra representar un sistema físico, se tiene el llamado “problema del valor inicial”, el cual a partir de un estado actual en un tiempo t_0 , el modelo puede predecir el estado futuro del sistema representado por:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.17)$$

donde (4.17) tiene solución y ésta es única.

Una solución de (4.17) en un intervalo $[t_0, t_1]$ se refiere a una función continua $x: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ de tal forma que \dot{x} y $\dot{x}(t) = f(x(t))$ están definidas para toda $t \in [t_0, t_1]$. Si $f(x)$ es continua en t y x , entonces la solución $x(t)$ será continuamente diferenciable. Se asume que $f(x)$ es continua en x , pero solo continua a pedazos en t , en cuyo caso, una solución $x(t)$ puede ser solamente continuamente diferenciable a pedazos. El supuesto de que $f(x)$ es continua a pedazos en t permite incluir el caso cuando $f(x)$ depende de una entrada variante en el tiempo, es decir, que puede experimentar cambios escalonados con respecto del tiempo.

La continuidad del lado derecho de la ecuación (4.17) no garantiza la unicidad de la solución, pero si garantiza que al menos “existe” una. La existencia y unicidad pueden ser aseguradas mediante la imposición de algunas restricciones sobre la función del lado derecho $f(x)$. Una restricción clave es la condición Lipschitz, en la cual $f(x)$ satisface la desigualdad (4.18).

Teorema 4.1 [27]. *(Existencia y Unicidad locales) Sea $f(x)$ continua a pedazos en t , y que satisfaga la condición de Lipschitz*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad (4.18)$$

$\forall x, y \in B = \{x \in R \mid \|x - x_0\| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces, existe alguna $\delta > 0$ tal que la ecuación de estado $\dot{x} = f(x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única sobre $[t_0, t_0 + \delta]$.

Una función que satisface (4.18), con constante Lipschitz positiva L , se dice ser Lipschitz en x . Además, para indicar el dominio en el cual se cumple esta condición, son utilizados los términos “localmente” y “globalmente”. Si f depende sólo de x , una función $f(x)$ se dice que es *localmente* Lipschitz en un dominio $D \subset R^n$, si cada punto de D tiene una vecindad D_0 tal que satisfaga la condición (4.18) para todos los puntos en D_0 con alguna constante Lipschitz L_0 .

Lema 4.1 [27]. Sea $f(x)$ continua en $[a, b] \times D$, para algún dominio $D \subset R^n$. Si $[\partial f / \partial x](x)$ existe y es continua en $[a, b] \times D$, entonces f es localmente Lipschitz en x en $[a, b] \times D$.

Por otro lado, una función $f(x)$ es *globalmente* Lipschitz si es Lipschitz en R^n .

Lema 4.2 [27]. Sea $f(x)$ continua en $[a, b] \times R^n$. Si $[\partial f / \partial x](x)$ existe y es continua en $[a, b] \times R^n$, entonces f es globalmente Lipschitz en x en $[a, b] \times R^n$ si y solo si $[\partial f / \partial x]$ es uniformemente acotada en $[a, b] \times R^n$.

Si $f: R \rightarrow R$, la condición Lipschitz puede ser escrita como

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L \tag{4.19}$$

De forma gráfica se puede observar que, los valores de $f(x)$ contra x formarán una línea recta cuyo valor absoluto de la pendiente de dos puntos de $f(x)$ no puede ser mayor a L . Entonces, cualquier función $f(x)$ que tenga una pendiente infinita, dejará de ser localmente Lipschitz en el punto en el que la pendiente se vuelva mayor a $|L|$.

Definición 4.1 Una función f es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto de (a, b) . Si, además,

$$f(-b) = f(b) \quad (4.20)$$

O

$$f(a+) = f(a) \quad (4.21)$$

Entonces f es continua en $(a, b]$ o $[a, b)$, respectivamente. Si f es continua en (a, b) y, se mantienen (4.20) y (4.21), entonces f es continua en $[a, b]$.

Teorema 4.2 [28]. Si f y g son continuas en un conjunto S , entonces también lo serán $f + g$, $f - g$, y fg . Además, f/g es continuo en cada x_0 en S tal que $g(x_0) \neq 0$.

Teorema 4.3 [28].

- a) Una función f es continua en x_0 si y solo si f está definida en un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0 y para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad (4.22)$$

Siempre que $|x - x_0| < \delta$.

- b) Una función f es continua por la derecha en x_0 si y solo si f está definida en un intervalo $[x_0, b)$ y para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que se mantiene para cualquier $x_0 \leq x < x_0 + \delta$.
- c) Una función f es continuas por la izquierda en x_0 si y solo si f está definida en un intervalo $(a, x_0]$ y para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que se mantiene para cualquier $x_0 - \delta < x \leq x_0$.

f es continua en x_0 si y solo si $f(x_0 -) = f(x_0 +) = f(x_0)$. O, equivalentemente, si y solo si es continua por la derecha y la izquierda en x_0 .

Donde se define lo siguiente:

$$f(x_0 -) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad y \quad f(x_0 +) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (4.23)$$

4.2.1. Existencia y Unicidad de la solución del sistema HW .

Para comprobar la existencia y unicidad local de la solución del sistema HW se utilizará el Lema 4.1, en conjunto con el Teorema 4.2 y la Definición 4.1. Entonces, se verificará que se cumple el Lema 4.1, es decir, que $f(x)$ y $[\partial f / \partial x](x)$ sean continuas en $[-180, 180] \times D$, para algún dominio $D \subset \mathfrak{R}^{20}$. Si esto se cumple, entonces f es localmente Lipschitz en $[-180, 180] \times D$.

Sea la ecuación (4.2), donde $M^{-1}(x) \in \mathfrak{R}^{20 \times 20}$, es una matriz simétrica, definida positiva y por lo tanto invertible⁴, y $h(x) \in \mathfrak{R}^{20 \times 1}$. Entonces, del Teorema 4.2, si se cumple que $M^{-1}(x)$ es continua y $h(x)$ es continua, también lo serán $M^{-1}(x) \cdot h(x)$ y por lo tanto $f(x)$.

Evaluando $f(x)$ en el intervalo $[-180, 180]$ vemos que además de que $f(x)$ es continua en cada punto de $(-180, 180)$, también se cumple que $f(180_-) = f(180)$ y $f(-180_+) = f(180)$, por lo tanto $f(x)$ es continua en $[-180, 180]$.

Además, $[\partial f / \partial x](x)$ existe y, evaluando la función en el intervalo de interés se obtiene que también es continua en cada punto dicho intervalo, y se cumple $f(180_-) = f(180)$ y $f(-180_+) = f(180)$; por lo que, $[\partial f / \partial x](x)$ es continua en $[-180, 180] \times D$

⁴ Es necesario que $M(t, x)$ sea invertible para que pueda ser multiplicada por $h(t, x)$. Para que una matriz sea invertible es necesario que su determinante sea diferente de cero, lo cual se cumple debido a que se trata de una matriz definida positiva.

Por lo tanto, utilizando el Lema 4.1, $f(x)$ es Lipschitz en $[-180,180] \times D$. Y consecuentemente, utilizando el Teorema 4.1., dado que $f(x)$ es continua en t , y además satisface la condición Lipschitz en $[-180,180] \times D$; *existe alguna $\delta > 0$ talque la ecuación de estado $\dot{x} = f(x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única sobre $[t_0, t_0 + \delta]$.*

4.2.2. Existencia y Unicidad de la solución del sistema AW .

En este caso es más sencillo darse cuenta que $f(x)$ es continua y que su derivada $[\partial f/\partial x](x)$ existe y es continuamente diferenciable en $[-180,180] \times D$. Utilizando el lema 4.1, $f(x)$ es Lipschitz en $[-180,180] \times D$. Y por lo tanto, podemos utilizar el Teorema 4.1. Sea $f(x)$ continua en t , y a demás satisface la condición Lipschitz en $[-180,180] \times D$. Entonces, *existe alguna $\delta > 0$ talque la ecuación de estado $\dot{x} = f(x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única sobre $[t_0, t_0 + \delta]$.*

4.2.3. Existencia y Unicidad de la solución del sistema $HW-AW$.

De forma similar a la comprobación de existencia y unicidad local para el sistema HW , se comprobó esta propiedad para el sistema acoplado $HW - AW$. Entonces, utilizando el Lema 4.1, si se cumple que $f_{HW-AW}(t, x)$ y $[\partial f_{HW-AW}/\partial x](t, x)$ sean continuas en $[-180, 180] \times D$, para algún dominio $D \subset \mathfrak{R}^{20}$. Entonces f_{HW-AW} es *localmente Lipschitz en $[-180, 180] \times D$.*

En las ecuaciones de acoplamiento, para la matriz $M_{HW-AW}^{-1}(x) \in \mathfrak{R}^{20 \times 20}$, se mantiene la propiedad de simetría. Además, la matriz sigue siendo definida positiva y por lo tanto invertible. Entonces, del Teorema 4.2, si se cumple que $M^{-1}(x)$ es continua y $h(x)$ es continua, también lo serán $M_{HW-AW}^{-1}(x) \cdot h_{HW-AW}(x)$ y por lo tanto $f_{HW-AW}(x)$. Evaluando $f_{HW-AW}(x)$ en el intervalo $[-180, 180]$ vemos que además de que $f_{HW-AW}(x)$ es continua en cada punto de $(-180,180)$, también se cumple que

$f_{HW-AW}(180_-) = f_{HW-AW}(180)$ y $f_{HW-AW}(-180_+) = f_{HW-AW}(180)$, por lo tanto $f_{HW-AW}(x)$ es continua en $[-180,180]$. Además, $[\partial f_{HW-AW}/\partial x](x)$ existe y es continua en cada punto dicho intervalo; también, se cumple $f_{HW-AW}(180_-) = f_{HW-AW}(180)$ y $f_{HW-AW}(-180_+) = f_{HW-AW}(180)$; por lo que, $[\partial f_{HW-AW}/\partial x](x)$ es continua en $[-180, 180] \times D$.

Por lo tanto, del Lema 4.1, $f_{HW-AW}(x)$ es Lipschitz en $[-180,180] \times D$. Y en consecuencia, dado que $f_{HW-AW}(x)$ es continua en t , y además satisface la condición Lipschitz en $[-180,180] \times D$; *existe alguna $\delta > 0$ tal que la ecuación de estado $\dot{x} = f_{HW-AW}(x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única sobre $[t_0, t_0 + \delta]$.*

4.3. Dependencia continua a condiciones iniciales y parámetros.

Un factor esencial para la validación de cualquier modelo matemático es la dependencia continua de sus soluciones en los datos del problema; ya que lo mínimo que se esperaría del modelo matemático es que arbitrariamente los errores pequeños en los datos no resulten en grandes errores en las soluciones obtenidas por el modelo.

Para que la solución de las ecuaciones de estado de un sistema como (4.17), sean de interés, deben depender continuamente del estado inicial x_0 , el tiempo inicial t_0 , y la función del lado derecho $f(x)$. La dependencia continua del tiempo inicial resulta obvia de la integral (el lector puede encontrar la demostración en **[Apéndice B]**).

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (4.24)$$

En cuanto a la dependencia continua del estado inicial x_0 y la función f . Sea $y(t)$ una solución de (4.17), con $y(t_0) = y_0$, y definida en un intervalo de tiempo compacto $[t_0, t_1]$. La solución dependerá continuamente de y_0 si, la solución empieza cerca de los puntos definidos en el mismo intervalo y permanece cerca uno

de otro en dicho intervalo. Expresado más precisamente: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda z_0 en la bola $\{x \in R^n \mid \|x - y\| < \delta\}$, la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ tiene una única solución $z(t)$ definida $[t_0, t_1]$, con $z(t_0) = z_0$, y satisface $\|z(t) - y(t)\| < \epsilon$ para toda $t \in [t_0, t_1]$.

La dependencia continua en la función del lado derecho f se define de manera similar, se asume que f depende continuamente de un conjunto de parámetros constantes; esto es, $f = f(t, x, \lambda)$ donde $\lambda \in R^p$. Los parámetros constantes podrían representar parámetros físicos del sistema, y el estudio de perturbación de estos parámetros representaría errores de modelado o cambios en los valores de los parámetros debido al envejecimiento del sistema. Sea $x(t, \lambda_0)$ la solución de $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$ definida en $[t_0, t_1]$, con $x(t_0, \lambda_0) = x_0$. Se dice que la solución depende continuamente de λ si para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier λ en bola $\{\lambda \in R^p \mid \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\}$, la ecuación $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ tiene una única solución $x(t, \lambda)$ definida en $[t_0, t_1]$ con $x(t_0, \lambda) = x_0$, y satisface $\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \epsilon$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Debido a las similitudes entre la dependencia continua de los estados iniciales y la dependencia continua en los parámetros, ambas propiedades pueden ser estudiadas de manera simultánea.

Teorema 4.4 [27]. Sea $f(x)$ Lipschitz en x en $[t_0, t_1] \times W$ con una constante Lipschitz L , donde $W \subset R^n$ es un conjunto abierto conexo. Sean $y(t)$ y $z(t)$ solución de

$$\dot{y} = f(y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (4.25)$$

Y

$$\dot{z} = f(z) + g(z), \quad z(t_0) = z_0 \quad (4.26)$$

Tal que $y(t), z(t) \in W$ para toda $t \in [t_0, t_1]$ y satisfacen (4.29) y (4.30). Suponga que

$$\|g(x)\| \leq \mu, \forall(x) \in [t_0, t_1] \times W \quad (4.27)$$

Para algún $\mu > 0$, y

$$\|y_0 - z_0\| \leq \gamma \quad (4.28)$$

Entonces,

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma \exp[L(t - t_0)] + \frac{\mu}{L} \{\exp[L(t - t_0)] - 1\} \quad (4.29)$$

$\forall t \in [t_0, t_1]$.

□

Con el Teorema anterior se puede demostrar el siguiente teorema sobre la continuidad de soluciones en términos de los estados iniciales y parámetros.

Teorema 4.5 [27]. Sea $f(t, x, \lambda)$ continua en (t, x, λ) y Lipschitz localmente en x (uniformemente en t y λ) en $[t_0, t_1] \times D \times \{|\lambda - \lambda_0| \leq c\}$, donde $D \subset R^n$ es un conjunto abierto conexo. Sea $y(t, \lambda_0)$ una solución de $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$ con $y(t_0, \lambda_0) = y_0 \in D$. Suponga $y(t, \lambda_0)$ está definida y pertenece a D para toda $t \in [t_0, t_1]$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si

$$\|z_0 - y_0\| < \delta \quad y \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta \quad (4.30)$$

Entonces hay una única solución $z(t, \lambda)$ de $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ definida en $[t_0, t_1]$ con $z(t_0, \lambda) = z_0$, y $z(t, \lambda)$ satisface

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (4.31)$$

Como se vio en la sección anterior, existe una única solución para cada uno de los sistemas HW y AW desacoplados, al igual que para el sistema acoplado $HW - AW$; a partir de una condición inicial $x(t_0) = x_0 \in D$, definida en un intervalo de tiempo

$[t_0, t_0 + \delta]$. Ahora bien, los estados del sistema acoplado $HW - AW$ pertenecen a las posiciones y velocidades de cada segmento del cuerpo humano que ha sido considerado en este trabajo; si se selecciona un punto como condición inicial, se asocia a él una solución del sistema definida en un intervalo de tiempo y cuyo valor en el primer instante coincide con el de la condición inicial que se ha establecido. Además, cualquier solución del sistema $HW - AW$ depende directamente de los valores nominales de los parámetros (θ_0) , sin embargo, es necesario garantizar que, aun y cuando existan variaciones en los parámetros tal que éstos sean muy cercanos a los nominales, la solución siga existiendo y este muy cerca de $x(t, \theta_0, x_0)$.

Entonces, sea f una función continua en (x, θ_0) y localmente Lipschitz en x . Sea $x(t, \theta_0)$ una solución de (4.17) con $x_0 = (t_0, \theta_0) \in D$. Suponga que $x(t, \theta_0)$ está definida y pertenece a D para todo $t \in [t_0, t_1]$. Entonces, dado $\epsilon \geq 0$, existe $\delta \geq 0$, tal que si $|\bar{x}_0 - x_0| \leq \delta \wedge |(\theta) - (\theta_0)| \leq \delta$ existe una única solución $\bar{x}(t, \theta)$ de (4.17) definida en $[t_0, t_1]$ con $\bar{x}(t_0, \theta) = \bar{x}_0$ tal que $\bar{x}(t_0, \theta)$ satisface:

$$|\bar{x}(t, \theta) - x(t, \theta_0)| \leq \epsilon \quad (4.32)$$

Para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Del Lema 1 se sabe que la solución f es continua, por tanto se puede definir el conjunto V como

$$V = \{(t, x) \in [t_0, t_1] \times D \mid |\bar{x} - x(t, \theta_0)| \leq \epsilon\} \quad (4.33)$$

Por otro lado, de la sección anterior, que f es Lipschitz en x definida en V con constante de Lipschitz real y constante L , entonces:

$$|f(x, \theta) - f(x, \theta_0)| \leq \alpha \quad (4.34)$$

Para todo $(t, x) \in V$ y para todo $|\theta - \theta_0| \leq \beta$. Finalmente por el Teorema (4.4), ϵ está dado por:

$$\epsilon = [L(t - t_0)] + \frac{\alpha}{L} \{\exp[L(t - t_0)] - 1\} \quad (4.35)$$

Cumpliendo estas condiciones se asegura que la solución $\bar{x}(t, \theta)$ evolucione en V durante el tiempo $[t_0, t_1]$.

4.4. Puntos de equilibrio

Un concepto importante al tratar con ecuaciones de estado es el concepto del punto de equilibrio. Un punto $x = x^*$ en el espacio de estados se dice ser un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(t, x)$ si tiene la propiedad de que cada vez que el estado del sistema comienza en x^* se mantendrá en x^* para todos los tiempos futuros. Para los sistemas autónomos, los puntos de equilibrio son las raíces de la ecuación

$$f(x^*; \theta_0) = 0 \quad (4.36)$$

Dado que el sistema con el que se está trabajando consta de 20 variables de estado, la información necesaria para conocer el estado del sistema en un instante consiste en el valor que toma cada una de las variables en tal instante.

Sea $f: D \rightarrow E$ el campo vectorial definido en (4.17). Entonces existe un único $x^* \in D$ tal que $\dot{x} = 0$, para alguna constante $(\theta_0) \in D \subset \mathfrak{R}^{20}$.

Se tiene que

$$\dot{x} = M^{-1}(t, x, \theta_0) \cdot h(t, x, \theta_0) \quad (4.37)$$

$$\dot{x} = f(t, x, \theta_0), \quad \text{con } \dot{x} = 0 \quad (4.38)$$

Donde h esta formado por las matrices de Coriolis y fuerzas centrípetas, la matriz de fuerzas Disipativas y el Vector de gravedad. Observe que, al suponer $\dot{x} = 0$, las matrices $M(t, x)$, $C(t, x)$ y $D(t, x)$ se anulan; en consecuencia, el punto de equilibrio dependerá solo del vector de gravedad.

Dado que hemos estado trabajando con los tres sistemas construidos hasta el momento, se presentan a continuación los puntos de equilibrio para cada caso, es decir, para el sistema HW , para el sistema AW y para el sistema acoplado $HW - AW$.

Puntos de equilibrio del sistema HW

Mediante la manipulación algebraica de $f(x^*) = 0$ se obtuvo que las componentes $x_i^* = 0$, $i = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 19$ y 20 . Las componentes x_1^* , x_3^* , x_5^* y x_7^* dependerán del valor de algunos parámetros, como lo son $m_1, l_{c1}, k_{1x}, k_{1y}, k_{1z1}, k_{1z2}$.
 $-k_{1x}/m_1gl_{c1} = \sin(x_1)/x_1$, $-k_{1y}/m_1gl_{c1} = \sin(x_3)/x_3$, $-k_{1z1}/m_1gl_{c1} = \sin(x_5)/x_5$,
 $-m_1 g/k_{1z2} = x_7$. Esto tiene sentido físico debido a que, las variables corresponden a la posición del segmento UB con respecto a los ejes X, Y y Z (*rotacional y traslacional*); por lo tanto suena razonable que la inclinación(es) en la que el segmento se encuentra en equilibrio dependa del valor de la constante elástica correspondiente al eje de giro, la masa, la gravedad y la ubicación del centro de masa de dicho segmento. Las constantes elásticas son algunas de las variables a identificar en este trabajo, cuyo valor se determinará en el siguiente capítulo.

Por otro lado, la componente $x_9^* = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, y x_{11}^* queda en función de x_9^* por medio de la siguiente relación $x_9^* - x_{11}^* = m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$, entonces: $x_{11}^* = (n - m)\pi$ con $n, m \in \mathbb{Z}$. De forma similar, la componente $x_{15}^* = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, y $x_{17}^* = (n - m)\pi$ con $n, m \in \mathbb{Z}$.

Se recordará que estas variables corresponden a Th y Ca de las piernas derecha e izquierda. El número de puntos de equilibrio para x_9^* y x_{11}^* es finito; más aún cuando

son descartadas las posibilidades que no cumplen las restricciones de las articulaciones del cuerpo humano. Considerándolas, se tiene que $x_9^* = 0$ y $x_{11}^* = 0, -\pi$. De igual forma, estas posibilidades son consideradas para x_{15}^* y x_{17}^* , debido a que estas variables cuentan con las mismas restricciones que las anteriores.

Puntos de equilibrio del sistema *AW*

Para el caso del sistema *AW*, los puntos de equilibrio son $x_{m+1} = 0$, con $m = 20, 21, \dots, 27$.

Puntos de equilibrio del sistema acoplado *HW – AW*

Nuevamente, mediante manipulación algebraica de $f(x^*) = 0$ se obtuvo que las componentes $x_{2i}^* = 0$, $i = 1, 2, \dots, 10$. Mientras que, las componentes x_1^* , x_3^* , x_5^* y x_7^* dependerán del valor de algunos parámetros, como lo son $m_1, l_{c1}, k_{1x}, k_{1y}, k_{1z1}, k_{1z2}, u_1, u_2, u_3, u_4$, para ellos se tienen las siguientes relaciones:

$$f_2(x^*) = 0 \Rightarrow x_1^* = (u_1 - m_1 g l_{c1} \sin(x_1)) / k_{1x}$$

$$f_4(x^*) = 0 \Rightarrow x_3^* = (u_2 - m_1 g l_{c1} \sin(x_3)) / k_{1y}$$

$$f_6(x^*) = 0 \Rightarrow x_5^* = (u_3 - m_1 g l_{c1} \sin(x_5)) / k_{1z1}$$

$$f_8(x^*) = 0 \Rightarrow x_7^* = \frac{u_4 - m_1 g}{k_{1z2}}$$

Por otro lado, para los puntos de equilibrio involucrados en los segmentos *Th* y *Ca* cuyas componentes son x_9^* , x_{11}^* , x_{13}^* , x_{15}^* , x_{17}^* y x_{19}^* ; se tienen las siguientes relaciones:

$$f_{10}(x^*) = 0 \Rightarrow x_9^* = \sin^{-1} \left(\frac{u_6 - u_5}{(\gamma + \varepsilon)} \right)$$

$$f_{12}(x^*) = 0 \Rightarrow x_{11}^* = \sin^{-1}\left(\frac{u_6 - u_5}{(\gamma + \varepsilon)}\right) - \sin^{-1}\left(-\frac{u_6}{\alpha g}\right)$$

$$f_{14}(x^*) = 0 \Rightarrow x_{13}^* = -\frac{u_7}{k_2}$$

$$f_{16}(x^*) = 0 \Rightarrow x_{15}^* = \sin^{-1}\left(\frac{u_9 - u_8}{(\Gamma + E)}\right)$$

$$f_{18}(x^*) = 0 \Rightarrow x_{17}^* = \sin^{-1}\left(\frac{u_9 - u_8}{(\Gamma + E)}\right) - \sin^{-1}\left(-\frac{u_9}{Ag}\right)$$

$$f_{20}(x^*) = 0 \Rightarrow x_{20}^* = -\frac{u_{10}}{k_3}$$

4.5. Estabilidad de los puntos de equilibrio (Lyapunov)

La estabilidad de los puntos de equilibrio usualmente es caracterizada en el sentido de Lyapunov. Un punto de equilibrio es estable si todas sus soluciones que empiezan en puntos cercanos, permanecen cercanas; de otra forma, es un punto de equilibrio inestable.

Considere el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(t) \tag{4.39}$$

donde $f: D \rightarrow R^n$ es un mapeo localmente Lipschitz en un dominio $D \subset R^n$ en R^n .

Suponga $x^* \in D$ es un punto de equilibrio de (4.39); esto es, $f(x^*) = 0$. Nuestro objetivo es caracterizar y estudiar la estabilidad de x^* . Por conveniencia, las definiciones y teoremas se establecen para el caso cuando el punto de equilibrio está en el origen de R^n ; que es $x^* = 0$. Como se sabe, cualquier punto de equilibrio puede ser trasladado al origen por medio de un cambio de variables.

Definición 4.2 El punto de equilibrio $x = 0$ de (4.43) es:

- Estable si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.40)$$

- *Inestable si no es estable.*
- *Asintóticamente estable si es estable y δ puede ser escogida tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.41)$$

Para demostrar que el origen es estable, entonces, se debe cuidar que para cualquier valor de ε , se pueda producir un valor de δ , posiblemente éste dependerá de ε , tal que una trayectoria que empiece en una vecindad δ del origen nunca deje la vecindad ε .

Lyapunov mostró que ciertas funciones pueden ser usadas para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio. Sea $V: D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable definida en un dominio $D \subset R^n$ que contiene el origen. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de 4.43, denotadas por $\dot{V}(x)$, está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned} \quad (4.42)$$

La derivada de V a lo largo de las trayectorias de un sistema es dependiente de las ecuaciones del sistema. Así, $\dot{V}(x)$ será diferente para sistemas diferentes. Si $\phi(t; x)$ es la solución de (4.43) que comenzó en un estado inicial x en un tiempo $t = 0$, entonces

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi(t; x)) \right|_{t=0} \quad (4.43)$$

Por lo tanto, si $\dot{V}(x)$ es negativa, V decrecerá a lo largo de la solución de (4.39).

Teorema 4.5 Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para (4.1) y $D \subset R^n$ un dominio que contiene a $x = 0$. Sea $V: D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \\ \dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D \end{aligned} \tag{4.44}$$

Entonces, $x = 0$ es estable. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\} \tag{4.45}$$

Entonces $x = 0$ es asintóticamente estable. **[Demostración en 28]**

Una función continuamente diferenciable $V(x)$ que satisface (4.44) y (4.45) es llamada función de Lyapunov. Una función $V(x)$ que satisface la condición (4.44) – que es, $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ para $x \neq 0$ – se dice ser definida positiva. Si satisface una condición más débil $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$, se dice que es semidefinida positiva. Una función $V(x)$ se dice ser negativa definida o negativa semidefinida si $-V(x)$ es positiva definida o positiva semidefinida, respectivamente. Si $V(x)$ no tiene un signo definido para alguno de estos cuatro casos, se dice que es indefinida. Con esta terminología, podríamos replantear el teorema de Lyapunov para decir que el origen es estable si existe una función continuamente diferenciable definida positiva $V(x)$ tal que $\dot{V}(x)$ sea semidefinida negativa, y será asintóticamente estable si $\dot{V}(x)$ es definida positiva.

Considérese el sistema HW , y estudiemos su estabilidad en el origen (sus puntos de equilibrio trasladados al origen). Una función candidata a función de Lyapunov es la función de energía

$$E = K_{UB} + K_{RL} + K_{LL} + P_{UB} + P_{RL} + P_{LL}$$

$$\begin{aligned}
V(x) = & \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_{1ij}^T [I_{1ij}] \dot{\theta}_{1ij} + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)x_{14}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{Th}^2 + \frac{1}{2}I_2x_{10}^2 + \frac{1}{2}m_3v_{Ca}^2 \\
& + \frac{1}{2}I_3(x_{10} + x_{12})^2 + \frac{1}{2}(m_4 + m_5)x_{20}^2 + \frac{1}{2}m_4v_{Th}^2 + \frac{1}{2}I_4x_{16}^2 + \frac{1}{2}m_5v_{Ca}^2 \\
& + \frac{1}{2}I_5(x_{16} + x_{18})^2 + m_1 gl_{c1} (\cos(\theta_{1x}) + \cos(\theta_{1y}) + \cos(\theta_{1z})) \\
& + m_1 gl_{c1}(3 - \cos(x_1) - \cos(x_3) - \cos(x_5)) + m_1 g(\delta_1) + \frac{1}{2}k_{1x}x_1^2 + \frac{1}{2}k_{1y}x_3^2 \\
& + \frac{1}{2}k_{1z1}x_5^2 + \frac{1}{2}k_{1z2}x_7^2 + \frac{1}{2}k_2x_{13}^2 + (m_2 gl_{c2} + m_3 gl_2)(1 - \cos(x_9)) \\
& + m_3 gl_{c3}(1 - \cos(x_{11} - x_9)) + \frac{1}{2}k_3x_{19}^2 + (m_4 gl_{c4} + m_5 gl_4)(1 - \cos(x_{15})) \\
& + m_5 gl_{c5}(1 - \cos(x_{17} - x_{15}))
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
v_{ThRL}^2 &= (x_{13} + l_{c2})^2 x_{10}^2 + x_{14}^2 \\
v_{CaRL}^2 &= [-(x_{13} + l_2)x_{10}\sin(x_9) + x_{14}\cos(x_9) - l_{c3}(x_{10} - x_{12})\sin(x_9 - x_{11})]^2 \\
&+ [(x_{13} + l_2)x_{10}\cos(x_9) + x_{14}\sin(x_9) - l_{c3}(x_{10} - x_{12})\cos(x_9 - x_{11})]^2
\end{aligned}$$

Claramente se cumple que $V(0) = 0$, y $V(x)$ es positiva definida sobre el dominio $-2\pi < x_i < 2\pi$ con $i = 1,3,5,9,11$. Ahora, considere los siguientes valores nominales:

Estatura (m): $H = 1.83$; **Masa Total (kg):** $W = 85$;

Masas segmentos (kg): $m_1 = 0.678 * W$; $m_2 = 0.1 * W$; $m_3 = 0.0465 * W + 0.0145 * W$; $m_4 = 0.1 * W$; $m_5 = 0.0465 * W + 0.0145 * W$

Longitudes (m): $l_1 = 0.81$; $l_2 = 0.54$; $l_3 = 0.48$; $l_4 = 0.54$; $l_5 = 0.48$

CM (m): $l_{c1} = 0.564 * l_1$; $l_{c2} = 0.433 * l_2$; $l_{c3} = 0.433 * l_3$; $l_{c4} = 0.433 * l_4$; $l_{c5} = 0.433 * l_5$

Gravedad (m/s²): $g = 9.81$;

Inercias: $I_{1xy} = 1$; $I_{1yz} = 1$; $I_{1xz} = 1$; $I_{1xx} = 1000$; $I_{1yy} = 10000$; $I_{1zz} = 1000$; $I_2 = 500$; $I_3 = 3$; $I_4 = 500$; $I_5 = 3$;

Constantes elásticas: $k_{1x} = 5$; $k_{1y} = 90$; $k_{1z1} = 0.01$; $k_{1z2} = 600$; $k_2 = 0.9$; $k_3 = 0.9$

Constantes de amortiguamiento: $b_{1x} = 0.06$; $b_{1y} = 0.07$; $b_{1z1} = 0.006$; $b_{1z2} = 30$; $b_2 = 0.9$; $b_3 = 0.9$.

La derivada de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema están dadas por (4.42) Dadas las dimensiones del modelo, es complicado analizar la derivada de la función $V(x)$ en función de los parámetros y las variables. Evaluando $\dot{V}(x)$, suponiendo los valores máximos y mínimos de los estados, resultado de la solución experimental de la cuenca de atracción de los puntos estables, resulta ser una función semidefinida negativa, debido a que $\dot{V}(0) = 0$, entonces, utilizando el Teorema 4.5, el sistema HW solo es estable en el origen, considerando los siguientes valores como máximos y mínimos para los estados.

Valores supuestos para los estados del sistema:

Máximos:

$$\begin{aligned} x_1 = 0.25, & \quad x_2 = 1.12, & \quad x_3 = 0.169, & \quad x_4 = 0.32, & \quad x_5 = 0.334, & \quad x_6 = 0.55, & \quad x_7 = 1, \\ x_8 = 1, & \quad x_9 = 0.7, & \quad x_{10} = 2.33, & \quad x_{11} = 0.8, & \quad x_{12} = 2.21, & \quad x_{13} = 0.16, & \quad x_{14} = 0.95, \\ x_{15} = 0.85, & \quad x_{16} = 2.12, & \quad x_{17} = 0.12, & \quad x_{18} = 2.55, & \quad x_{19} = 0.02, & \quad x_{20} = 0.92 \end{aligned}$$

Mínimos:

$$\begin{aligned} x_1 = -0.25, & \quad x_2 = -1.12, & \quad x_3 = -0.169, & \quad x_4 = -0.32, & \quad x_5 = -0.334, & \quad x_6 = -0.55, \\ x_7 = -1, & \quad x_8 = -1, & \quad x_9 = -0.7, & \quad x_{10} = -2.33, & \quad x_{11} = -0.8, & \quad x_{12} = -2.21, \\ x_{13} = -0.16, & \quad x_{14} = -0.95, & \quad x_{15} = -0.85, & \quad x_{16} = -2.12, & \quad x_{17} = -0.12, \\ x_{18} = -2.55, & \quad x_{19} = -0.02, & \quad x_{20} = -0.92 \end{aligned}$$

“Nunca estaré satisfecho hasta que pueda hacer un modelo mecánico de algo. Si puedo hacer un modelo mecánico, podré entenderlo. Mientras no pueda hacer un modelo mecánico no lo podré entender”.

Baron William Thomson Kelvin

Capítulo 5.

IDENTIFICACIÓN DE PARAMÉTRICA

En el capítulo anterior, se estudiaron las propiedades básicas para que el modelo que se ha presentado en este trabajo pueda ser de utilidad para representar el comportamiento de un sistema físico. Como se vio, una manera de construir un modelo es de forma analítica, basándose en hipótesis y leyes que rigen la naturaleza. Sin embargo, a veces este método suele no ser suficiente cuando se desconocen algunos de los parámetros; es entonces cuando se puede recurrir a la identificación paramétrica. En este capítulo se discutirá cómo determinar los valores de los parámetros que se desconocen del modelo propuesto. Para ello, será necesario obtener algunos datos por medio de experimentos, los cuales serán detallados en la sección 5.3.

5.1. Teoría

Se entiende por identificación paramétrica al conjunto de estudios, teorías y algoritmos que nos permiten obtener parámetros desconocidos de un modelo matemático de un sistema dinámico, de tal forma que represente las características del comportamiento de un sistema físico real. Es una ruta tanto matemática como gráfica que se basa directamente en la experimentación. Las señales de entrada y salida del sistema son registradas, para después, ser sometidas a un análisis de datos con la finalidad de obtener aquellos valores que hacen que la respuesta del modelo sea más cercana a la salida obtenida por los datos experimentales.

Las ecuaciones que se han construido hasta el momento, son definidas en términos de ciertos parámetros, tales como las masas de los eslabones, momentos de inercia, etc., los cuales deberán ser determinados para cada individuo en particular, con el propósito de, por ejemplo, simular el movimiento de los eslabones.

Uno de los métodos utilizados en la identificación paramétrica es por medio de mínimos cuadrados recursivos, con el cual es posible realizar aproximaciones a los valores de los parámetros en cada intervalo de tiempo. En este método, se determina un vector de valores candidatos que podrían ser cercanos a los valores reales (en ocasiones basados en cálculos teóricos o resultados previos), para después de forma iterativa, ir modificando dichos valores hasta que la respuesta del modelo coincida cercanamente con las mediciones de salida del sistema real (cumpliendo el criterio de minimización que se halla elegido). Debe enfatizarse que, a pesar de que una buena combinación de parámetros sea necesaria, no es una condición suficiente para garantizar una buena estimación paramétrica. Un ejemplo de esto es que, a pesar de que la mayor parte del tiempo los sistemas son deterministas, (i.e. los parámetros no siguen ningún modelo estocástico o regla), los parámetros pueden ser considerados como variables aleatorias, debido a que se encuentran contaminadas por el ruido de medición o ruido ambiental.

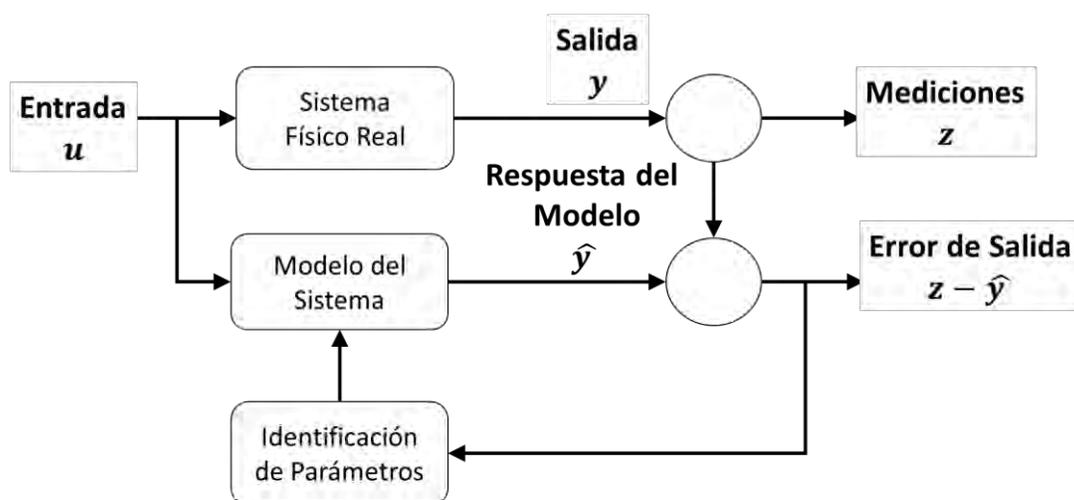


Figura 5.1: Diagrama de bloques sobre el procedimiento de Identificación [30].

En la **Figura 5.1** podemos observar la idea general sobre la identificación paramétrica. Se tiene un sistema dinámico, al cual se le puede aplicar una entrada u medible, y del cual se puede obtener una señal de salida y , también medible. Por otro lado, se tiene el modelo que representa la dinámica del sistema, del cual se obtiene la solución al ingresar las mismas señales de entrada que se utilizaron en el sistema real. Una vez que se tienen los datos de salida, tanto del sistema real, como del modelo simulado se calcula la diferencia entre ambas señales.

5.2. Método de mínimos cuadrados recursivos no lineales.

El método de mínimos cuadrados recursivos no lineales es comúnmente utilizado en la identificación paramétrica debido a que es aplicable tanto para sistemas lineales como para no lineales, y para sistemas con múltiples entradas.

Uno de los supuestos de éste método es que los parámetros del sistema no cambian rápidamente con el tiempo, asegurando la casi estacionariedad de la planta o los parámetros del proceso. Esto puede significar que la planta se asume casi estacionaria durante el periodo de medición; lo cual, no debe confundirse con el requisito de la dinámica en los datos de entrada-salida durante el período de experimentación para la estimación de paramétrica. Lo que significa que durante el periodo de medición debe haber una cierta actividad en el sistema.

La forma de definir un conjunto de ecuaciones es, considerar la función escalar $y = f(x)$ como la representación de varias aplicaciones de la misma función, es decir,

$$\begin{aligned}y_1 &= f(x_1) \\y_2 &= f(x_2) \\&\vdots = \vdots \\y_N &= f(x_N)\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde, $f(x): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, y $f(x)$ depende de un vector de n parámetros a los cuales denominaremos ϑ ⁵. Decimos entonces que una función $f(x)$ esta parametrizada por $\vartheta \in \mathfrak{R}^n$ y la función escalar puede ser representada de la siguiente forma:

$$y = f(x, \vartheta) \quad (5.3)$$

Entonces, el conjunto de ecuaciones (4.1) puede reescribirse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1, \vartheta) \\ y_2 &= f(x_2, \vartheta) \\ &\vdots \\ y_N &= f(x_N, \vartheta) \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde y_i son las i -ésimas observaciones de y , y $x_i = [x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}]^T$ son las i -ésimas observaciones de los n elementos del vector x .

Sea un proceso o sistema descrito por

$$z = h(\vartheta) + v \quad (5.5)$$

donde h es un vector conocido, no lineal, función/modelo valuada de dimensión m . Se elige un estimador para ϑ que minimice la suma de errores al cuadrado.

$$J \cong \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N v_k^2 = \frac{1}{2} (z - h(\vartheta))^T (z - h(\vartheta)) \quad (5.6)$$

donde J es la función objetivo y v los errores residuales al tiempo k .

⁵ Algunos autores utilizan el símbolo θ para referirse a los parámetros a estimar, sin embargo, en este trabajo se utiliza este símbolo para referirnos al valor de los ángulos que tiene cada segmento con respecto de su posición inicial. Para evitar confusiones, los parámetros a estimar serán referidos por el símbolo ϑ .

La minimización de J con respecto a ϑ es

$$\frac{\partial J}{\partial \vartheta} = -2[z - h(\hat{\vartheta})]^T \frac{\partial h(\hat{\vartheta})}{\partial \vartheta} = 0 \quad (5.7)$$

Observe que la ecuación anterior es un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. Para este tipo de sistemas, una forma cercana a la solución puede no existir. Esto significa que no podrá ser obtenida $\hat{\vartheta}$ explícitamente en términos del vector de observación sin recurrir a alguna aproximación numérica. De la ecuación anterior se obtiene

$$\left[\frac{\partial h(\hat{\vartheta})}{\partial \vartheta} \right]^T (z - h(\hat{\vartheta})) = 0 \quad (5.8)$$

El segundo término en la ecuación anterior es el error residual y la forma de la ecuación implica que el vector residual debe ser ortogonal a las columnas $\partial h / \partial \vartheta$. Un procedimiento iterativo para resolver de forma aproximada las ecuaciones anteriores es el que se describe a continuación. Se asume una suposición inicial o estimación ϑ^* para ϑ . Después, se expande $h(\vartheta)$ sobre ϑ^* via series de Taylor (o por el método de Newton-Gauss para hacer más eficiente la estructura del problema de mínimos cuadrados no lineales) para obtener

$$z = h(\vartheta^*) + \left\{ \frac{\partial h(\vartheta^*)}{\partial \vartheta} \right\} (\vartheta - \vartheta^*) + \text{terminos de orden mayor} + v \quad (5.9)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación de mediciones y usando algunos resultados de **[30]**

$$\begin{aligned} (\hat{\vartheta} - \vartheta^*) &= (H^T H)^{-1} H^T (z - h(\vartheta^*)) \\ \hat{\vartheta} &= \vartheta^* + (H^T H)^{-1} H^T (z - h(\vartheta^*)) \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde $H = \partial h(\vartheta^*) / \partial \vartheta$ en $\vartheta = \vartheta^*$.

Entonces, el algoritmo para obtener $\hat{\vartheta}$ de la ecuación (4.9) está dado por:

- i. Elija ϑ^* , la suposición inicial.
- ii. Linealice h con respecto ϑ^* y obtenga la matriz H .
- iii. Calcule el residuo $(z - h(\vartheta^*))$ y luego calcule $\hat{\vartheta}$.
- iv. Revise la condición de ortogonalidad: $H^T(z - h(\vartheta^*))|_{\vartheta=\vartheta^*} =$
valor de la condición de ortogonalidad = 0 .
- v. Si no se satisface la condición anterior, entonces reemplace ϑ^* por $\hat{\vartheta}$ y repita el procedimiento.
- vi. Finalice las iteraciones cuando la condición de ortogonalidad sea al menos satisfecha aproximadamente. Además, los residuos deben ser blancos como se describe a continuación.

El procedimiento anterior puede ser realizado por medio de paquetes computacionales como *MATLAB*, lo cual será detallado más adelante en este capítulo.

5.3. Diseño de experimentos para la identificación paramétrica.

El diseño de experimentos para la identificación paramétrica incluye varios aspectos a considerar, tales como decidir: que señales medir, cuando medirlas y qué señales manipular y como manipularlas. Además, incluye algunos aspectos más prácticos, como condicionar las señales antes de que éstas sean muestreadas, es decir, utilizar filtros para “limpiar” la señal. A continuación se describen las características de los experimentos.

5.3.1. Descripción del experimento

Situación de estudio: Sujeto realizando ejercicio en una caminadora tipo esquiadora intentando mantener una velocidad constante entre 4 y 5 km/hr.

Objetivo: Determinar los parámetros del sistema a los que no se tiene acceso de forma directa. Es decir, constantes elásticas, constantes de amortiguamiento e inercias de cada segmento.

Variables de diseño:

- ***Entradas:*** para este caso de estudio, la caminadora que se ha considerado, no posee ningún tipo de forzamiento, más que la dinámica que éste tipo de aparato permite (movimiento pendular) y la fricción en las juntas.
- El tamaño del paso se considerará como constante y será determinado de acuerdo a la velocidad mencionada con anterioridad y la estatura del sujeto. El origen de las entradas para este sistema son de tipo endógenas, es decir, son internas, debidas a la fuerza muscular en cada una de las extremidades consideradas, las cuales son caracterizadas por medio de los torques presentes en la caminadora. Por lo tanto, son calculadas de forma indirecta a través de la posición, la velocidad y la aceleración de las barras de la caminadora tipo esquiadora.
- ***Salidas:*** ángulos, velocidad y aceleración de cada uno de los segmentos del cuerpo.

Instrumentos de medición:

- Sensores X-bus Master (MTx)
- Caminadora-Esquiadora (AirToner) marca Nordika
- Pedometer Runtastic

Instrumentos auxiliares:

- Cinta métrica
- Bascula
- Cámara de Video Logitec
- Sensor IR Sharp

Procedimientos: Para este estudio se contó con la participación voluntaria de un sujeto de prueba de 1.83 m de estatura y 85 kg. Antes de comenzar la prueba, se recabaron algunos datos de somatometría acerca del individuo, los cuales aparecen en la **Tabla 5.1**. Esto debido a que estas mediciones son parte de los parámetros del modelo.

Fueron colocados 6 sensores de movimiento MTx en el sujeto **[Apéndice C]**, en los CM longitudinales de los segmentos que hemos nombrado como UB , Th_{RL} , Th_{LL} , Ca_{RL} , Ca_{LL} y uno más en la cadera. Además, fueron colocados 4 sensores en el sistema AW, en las barras frontales y pedales. La frecuencia de muestreo programada para la prueba fue de 10Hz.

La prueba consto de 2 repeticiones, cada una con una duración de 1 minuto, con una velocidad aproximada de entre 4 y 5 km/hr. La toma de los datos fue realizada a una frecuencia de 10Hz.

Datos:

Caminadora (AW)				
Segmento	Longitud (m)	Masa (kg)	Fricción	No. Sensor
Barra izquierda	1.35	1.6	0.57	323967
Pedal izquierdo	0.89	1.3	0.57	323894
Barra derecha	1.35	1.6	0.57	323961
Pedal derecho	0.89	1.3	0.57	323965

Tabla 5.1. Información sobre el sistema AW. Información obtenida directamente. En el caso de la fricción, se infiere tomando en cuenta el material de las barras de la caminadora.

Peso:	85 kg	Edad:	34 años	
Duración de cada prueba:	1 min	H (Estatura):	1.83 m	
		Número de pruebas:	2	
Segmento	Longitud (m)	CM (m)	Masa(kg)	No. Sensor
UB (Cabeza-Cadera)	0.81	0.468	57.63	00323962
Cadera	-	-	-	00323968

Lado Izquierdo				
Th (Muslo)	0.54	0.234	8.5	00323918
Ca (Pantorrilla)	0.46	0.199	5.185	00323966
Lado Derecho				
Th (Muslo)	0.54	0.234	8.5	00323964
Ca (Pantorrilla)	0.46	0.199	5.185	00323961

Tabla 5.2. Información sobre el sujeto de prueba. Las longitudes fueron medidas directamente. El CM y la masa fueron calculados en base a la estatura y peso del sujeto y las Tablas A.2 y A.3.

5.3.2. Algoritmo de identificación y obtención de parámetros

❖ *Paso 1. Obtener datos experimentales*

El primer paso para llevar a cabo la identificación paramétrica de un sistema dinámico es contar con una señal de referencia con la cual compararemos los resultados simulados. Para ello, fueron utilizados los sensores de movimiento MTx de la marca Xsens [**Apéndice C**], los cuales se colocaron en un individuo voluntario (**Tabla 5.2**), el cual realizó ejercicio en una caminadora tipo esquiadora (**Tabla 5.1**) durante 1 minuto, a una velocidad entre 4 y 5 km/hr.

A continuación se muestran algunas de las gráficas obtenidas de manera experimental para resaltar algunos puntos.

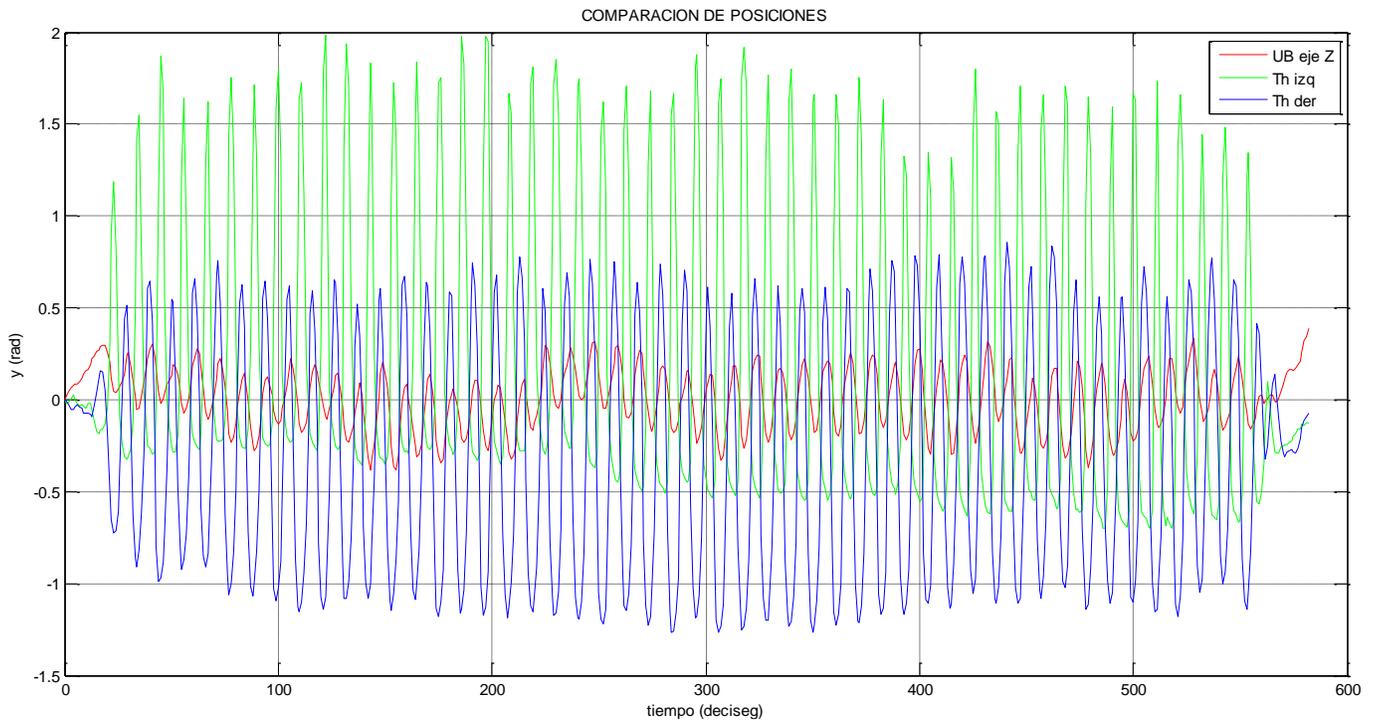


Figura 5.2: Gráfica comparativa entre las posiciones angulares de los segmentos UB , Th_{LL} y Th_{RL} .

En primer lugar, en la **Figura 5.2** podemos observar que los desplazamientos de los segmentos Th_{LL} y Th_{RL} son contrarios, es decir, mientras uno se desplaza hacia una dirección, el otro se desplaza en sentido opuesto. Adicional a esto, el lector puede observar que las magnitudes del segmento Th_{LL} son de 2 radianes o poco más, mientras que para el segmento Th_{RL} se encuentran entre los 1.5 o un poco más. Esto tiene sentido debido a que el aparato de ejercicio AW permite desplazamientos independientes de los miembros del lado izquierdo y del lado derecho. También se puede ver que en el caso del segmento Th_{LL} primero se tiene una tendencia hacia las magnitudes positivas, pero después de un lapso (aproximadamente en 250 deciseg.) tiende a ir hacia el centro. En cuanto al segmento UB podemos observar que aunque las magnitudes son más pequeñas (de máximo 0.5 radianes), tienden a seguir la misma frecuencia que el segmento Th_{RL} , lo cual nos lleva a inferir que el

giro del segmento UB con respecto del eje vertical Z mantiene una relación con el desplazamiento de los segmentos Th_{LL} y Th_{RL} en el eje Y (desplazamiento hacia adelante y hacia atrás).

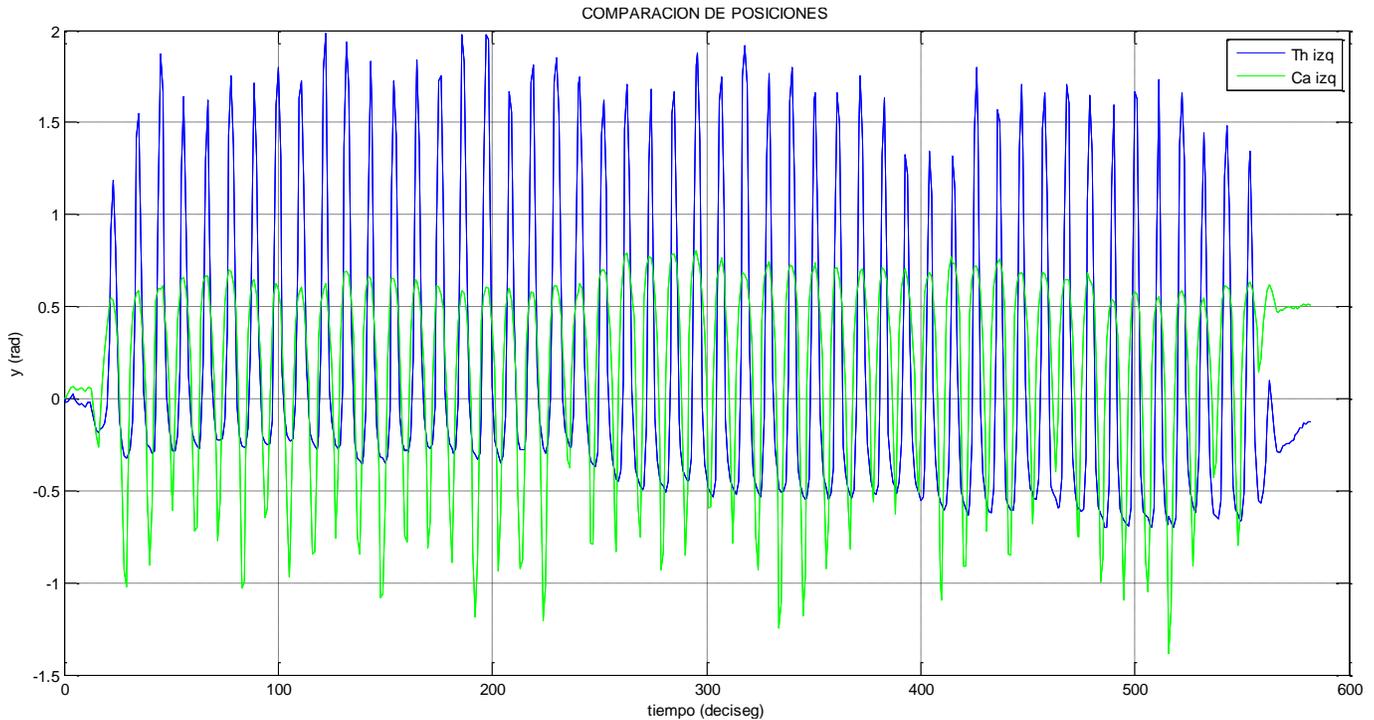


Figura 5.3: Gráfica comparativa entre las posiciones angulares de los segmentos Th_{LL} y Ca_{LL} .

En la **Figura 5.3** el lector puede observar que los desplazamientos de los segmentos Th_{LL} y Ca_{LL} van en el mismo sentido; sin embargo las magnitudes no son iguales para ambos. Podemos interpretar de estos resultados que el segmento Th_{LL} intenta mantener una misma amplitud a lo largo del experimento, y por otro lado, el segmento Ca_{LL} en ocasiones tiene desplazamientos largos y en ocasiones cortos.

En la **Figura 5.4** podemos ver claramente como un pie (el derecho) se desplaza más que el otro (el izquierdo), por lo cual la longitud de paso que recorre una pierna y la otra son distintas. De forma similar a lo que sucede en los segmentos Th_{LL} y Th_{RL} , mientras el segmento Ca_{LL} se desplaza hacia una dirección, el segmento Ca_{RL} se desplaza en dirección contraria.

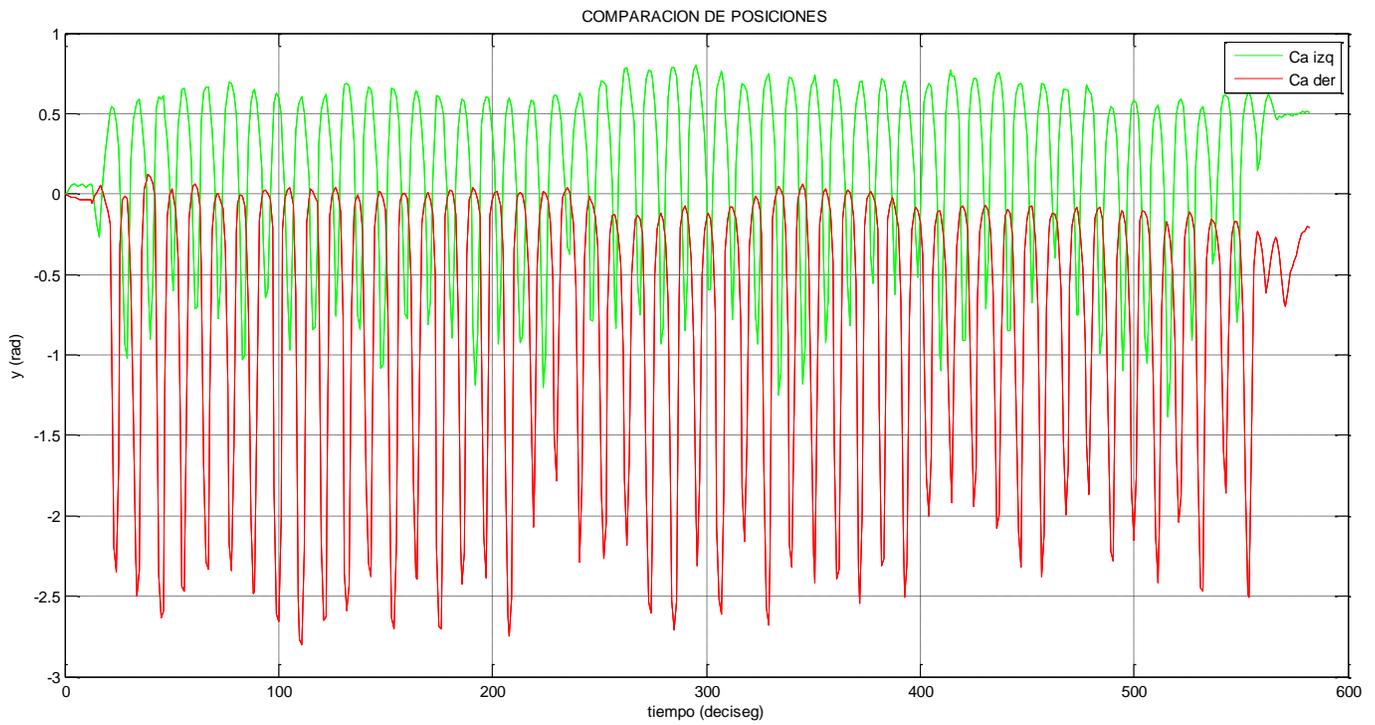


Figura 5.4: Gráfica comparativa entre las posiciones angulares de los segmentos Ca_{LL} y Ca_{RL} .

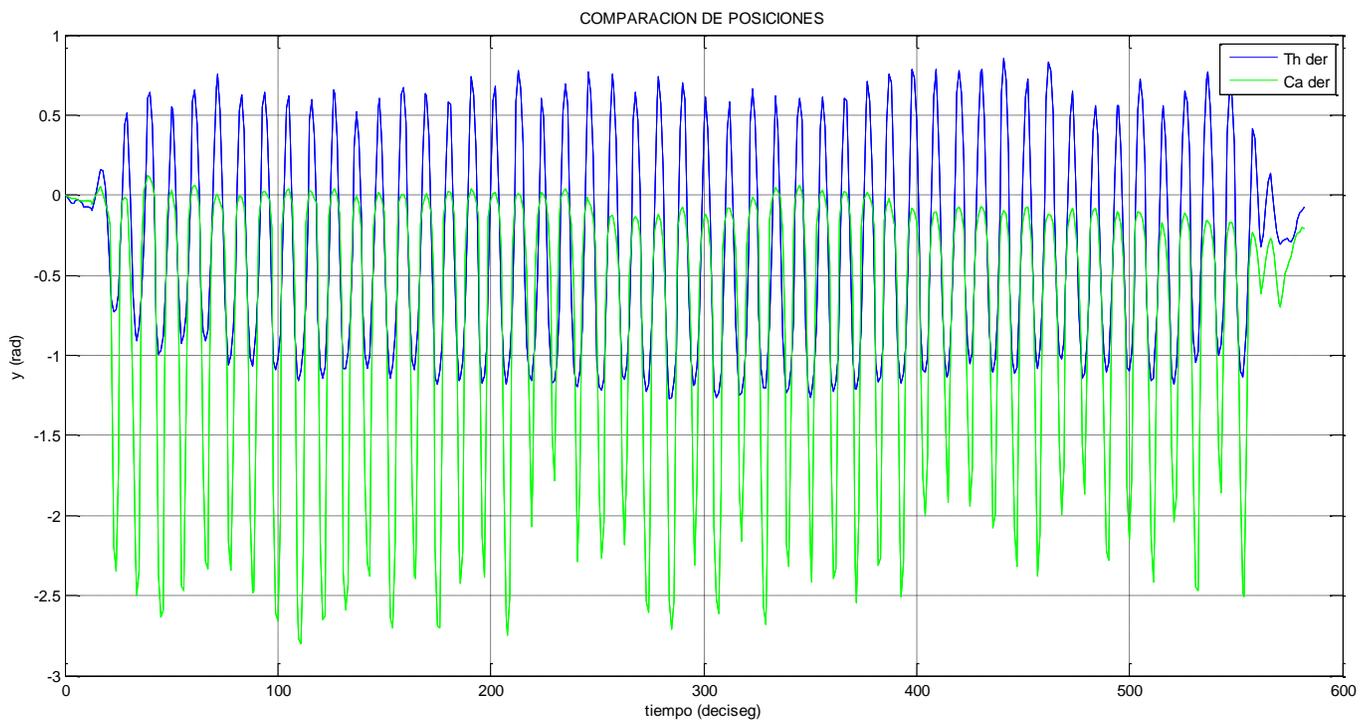


Figura 5.5: Gráfica comparativa entre las posiciones angulares de los segmentos Th_{RL} y Ca_{RL} .

En la **Figura 5.5** se muestra el comparativo entre las posiciones angulares de los segmentos correspondientes a la pierna derecha. Como ya se mencionó, la magnitud del desplazamiento del segmento $C a_{RL}$ es muy grande (aproximadamente de 2.5 radianes). Como es de esperarse, vemos también que ambos segmentos siguen la misma dirección de desplazamiento durante el experimento.

❖ **Paso 2. Calcular la solución del modelo**

Una vez que se cuenta con la respuesta de referencia (datos experimentales), asignaremos valores iniciales a los parámetros que queremos estimar. Estos valores iniciales pueden estar basados en datos obtenidos de la literatura, o en cálculos matemáticos que nos den valores k a lo que esperaríamos obtener después de realizar la identificación. Ya que se cuenta con este conjunto de datos y parámetros, se procede a calcular la solución del modelo matemático que se ha construido y hacer una comparación de cada uno de los estados (simulados) con los datos experimentales.

Para poder calcular una primera aproximación a la solución del modelo tenemos que suponer un primer valor para los parámetros a identificar. Para el cálculo del valor de las inercias se hicieron dos aproximaciones, una utilizando un método basado en estudios realizados en cadáveres [**Apéndice A.4**], y la otra basada en un modelo geométrico, suponiendo los segmentos como cilindros circulares [**Apéndice A.5**].

En los resultados mostrados en la Tabla 5.4 podemos ver que, aunque los valores obtenidos son distintos, en ambos cálculos se mantiene el mismo orden de magnitud.

Dado que para el valor de las constantes elásticas y de amortiguamiento no se encontró bibliografía donde se expusieran valores para estos parámetros, dado un sujeto con las características que ya hemos expuesto, se decidió asignar valores “pequeños” (del orden de 10^{-1}), e ir modificando el orden hasta obtener valores con una mejor aproximación.

	Muslo	Pantorrilla	Torso
longitud	0.54	0.46	0.57
p1	0.62	0.42	1.07
p2	0.62	0.28	0.95
p3	0.54	0.24	1.03
p	0.6	0.305	1
masa	8.5	5.185	57.63
diámetro	0.197352	0.133690	0.340591
k1	1.593	0.853	-
k2	8.12	5.73	-
c1	-	-	49.4
c2	-	-	55
c3	-	-	68.8
w1	-	-	0.340591
w2	-	-	0.302394
w3	-	-	0.327859
w	-	-	0.318309
d	-	-	0.318309

Tabla 5.3. Datos del sujeto de prueba para calcular el momento de inercia de los segmentos *Th*, *Ca* y *UB* en base a las ecuaciones mostrada sen el [Apéndice A.4].

$I_x = I_y$			
	Cadáveres	Geométrico	Diferencia
Muslo	0.516041021	0.227241052	0.288799969
Pantorrilla	0.053581084	0.097220821	-0.043639737
Torso I_x	1.612799952	1.978159198	-0.365359246
Torso I_y	1.580030937	1.978159198	-0.398128261
I_z			
Muslo	0.111484512	0.041382104	0.070102408
Pantorrilla	0.003395519	0.011583975	-0.008188456
Torso	0.610908072	0.835653897	-0.224745825

Tabla 5.4. Comparación de los valores de inercia obtenidos basados en los apéndices A.4 y A.5.

❖ **Paso 3. Interpolar**

Antes de comparar ambas respuestas (experimental y simulada), se debe asegurar que los puntos a comparar dentro de la función objetivo, correspondan a un mismo instante de tiempo.

❖ **Paso 4. Función objetivo**

Ya que el objetivo en este paso para la identificación paramétrica es encontrar el conjunto de parámetros que minimiza la función objetivo, se define ésta como la suma de los cuadrados de las desviaciones entre la respuesta observada (datos experimentales) y la parte funcional del modelo (simulaciones).

Nota: el cálculo debe ser tal que, el error sea mínimo para la respuesta de cada uno de los estados.

$$f(x) = \varepsilon(t, \vartheta_*) = \sum_{i=1}^n (y(t) - \hat{y}(t|\vartheta_*))^2 \quad (5.11)$$

Donde ε es la diferencia entre la respuesta real a lo largo de un periodo de tiempo t , y la respuesta calculada con el valor aproximado de los parámetros a estimar durante ese mismo lapso de tiempo.

❖ **Paso 5. Minimizar la función objetivo**

$$\min_x \|\varepsilon(t, \vartheta_*)\|_2^2 = \min_x \sqrt{(\varepsilon_1(t, \vartheta_*)^2 + \varepsilon_2(t, \vartheta_*)^2 + \dots + \varepsilon_n(t, \vartheta_*)^2)} \quad (5.12)$$

La obtención del conjunto de valores de los parámetros que hacen que la diferencia entre el sistema real y el simulado sea mínima, fue mediante el método de mínimos cuadrados no lineales. Para ello se utilizó la herramienta *LSQNONLIN* de *MATLAB* con el algoritmo de minimización '*TRUST REGION REFLECTIVE*'.

Para entender el enfoque de la región de confianza ('*TRUST REGION REFLECTIVE*'), considérese el problema de minimización sin restricciones, (es decir, los valores para

los parámetros no están acotados). Suponga que se está en un punto x del n –espacio, y se quiere mover de este a otro que tenga un menor valor en la función objetivo. La idea básica es aproximar f mediante una función q más simple, la cual razonablemente refleja el comportamiento de la función f en una vecindad N alrededor del punto x . Esta vecindad es la región de confianza. Un paso de prueba s es calculado minimizando (de manera aproximada) sobre N . Este es el subproblema de la región de confianza.

$$\min_s \{q(s), s \in N\} \quad (5.13)$$

El punto actual se actualiza para ser $x + s$ si $f(x + s) < f(x)$; de otra manera el punto actual permanece sin cambiar y N , la región de confianza, es escogida y el cálculo del paso de prueba se repite.

Las preguntas clave al definir un enfoque específico en la región de confianza para minimizar $f(x)$ son: la forma de elegir y calcular la aproximación q (definida en el punto actual x), la forma de elegir y modificar la región de confianza N , y la precisión para resolver el subproblema de la región de confianza.

En el método de región de confianza estándar, la aproximación cuadrática q es definida por los primeros dos términos de la aproximación de Taylor; la vecindad N es usualmente de forma esférica o elipsoidal. Entonces, el subproblema de la región de confianza suele expresarse de la siguiente manera:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} s^T H s + s^T g \text{ tal que } \|Ds\| \leq \Delta \right\} \quad (5.14)$$

Donde g es el gradiente de f en el valor actual x , H es la matriz Hessiana (la matriz simétrica de segundas derivadas), D es una matriz diagonal ajustada, Δ es un escalar positivo y $\|\cdot\|$ es la norma 2.

Existen diferentes estrategias de aproximación heurísticas basadas en la ecuación 5.14. El enfoque de aproximación seguido por el algoritmo de región de confianza utilizando en *MATLAB* es, restringir el subproblema de la región de confianza a un espacio S de dos dimensiones. Una vez que el subespacio S se ha calculado, el trabajo para resolver la ecuación 5.14 es trivial, incluso si se necesita información sobre los valores propios o vectores propios.

El subespacio bidimensional S se determina con la ayuda de un proceso de gradiente conjugado pre-condicionado descrito a continuación. Se define el espacio lineal S atravesado por s_1 y s_2 , donde s_1 está en la dirección del gradiente g , y s_2 esta en una dirección aproximada de Newton, es decir una solución a

$$H \cdot s_2 = -g \quad (5.15)$$

O una dirección de curvatura negativa.

$$s_2^T \cdot H \cdot s_2 < 0 \quad (5.16)$$

La justificación de elegir dicha S es forzar la convergencia global (a través de la dirección de pendiente máxima o dirección de curvatura negativa) y lograr la convergencia local más rápido.

Un bosquejo de la minimización sin restricciones usando este algoritmo es:

1. Formular el subproblema de la región de confianza bidimensional
2. Resolver 5.14 para determinar el paso de prueba s
3. Si $f(x + s) < f(x)$, entonces $x = x + s$
4. Ajustar Δ .

Estos cuatro pasos son repetidos por el algoritmo hasta la convergencia. La dimensión de la región de confianza Δ es ajustada de acuerdo con las reglas

estándar. En particular, se reduce si el paso de prueba no es aceptado, es decir, $f(x + s) \geq f(x)$.

Un caso especial importante para $f(x)$ es el problema de mínimos cuadrados no lineales

$$\min_x \sum_i f_i^2(x) = \min_x \|F(x)\|_2^2 \quad (5.17)$$

Donde $F(x)$ es una función vectorial valuada con componente i de $F(x)$ igual a $f_i(x)$.

El método básico usado para resolver el problema es el mismo que en el caso general descrito antes. Sin embargo, la estructura del problema de mínimos cuadrados no lineales es explotada para mejorar su eficiencia. En particular, una aproximación en la dirección Newton-Gauss, es decir, una solución s de

$$\min \|Js + F\|_2^2, \quad (5.18)$$

(donde J es el Jacobiano de $F(x)$), es utilizada para ayudar a definir el subespacio S bidimensional.

En cada iteración el método de gradientes precondicionados conjugados es utilizado para aproximadamente resolver la ecuación normal, es decir,

$$J^T J s = -J^T F \quad (5.19)$$

Aunque las ecuaciones normales no se forman de manera explícita.

❖ **Paso 6. Criterio de truncamiento**

Para saber cuándo detener la valoración de las iteraciones es necesario establecer un criterio de truncamiento del algoritmo, para el algoritmo utilizando se tiene el siguiente:

1. La función convergió a un mínimo
2. El cambio en x fue menor al de la tolerancia especificada
3. El cambio en el residuo fue menor al de la tolerancia especificada
4. Se excedió el número de iteraciones.
5. La función de salida terminó el algoritmo
6. El problema no es viable: las cotas inferior y superior no son consistentes
7. La línea de búsqueda no puede decrecer suficientemente el residuo a lo largo de la dirección de la búsqueda actual.

Si alguno de los criterios anteriores se satisface, entonces el algoritmo terminará y aparecerán los valores de los parámetros que hicieron que el criterio se cumpliera. De lo contrario, el algoritmo seguirá realizando las iteraciones correspondientes, volviendo al paso 2 con nuevos valores para los parámetros. En la sección de resultados se especifica cual fue el criterio de truncamiento para la obtención de los parámetros a identificar.

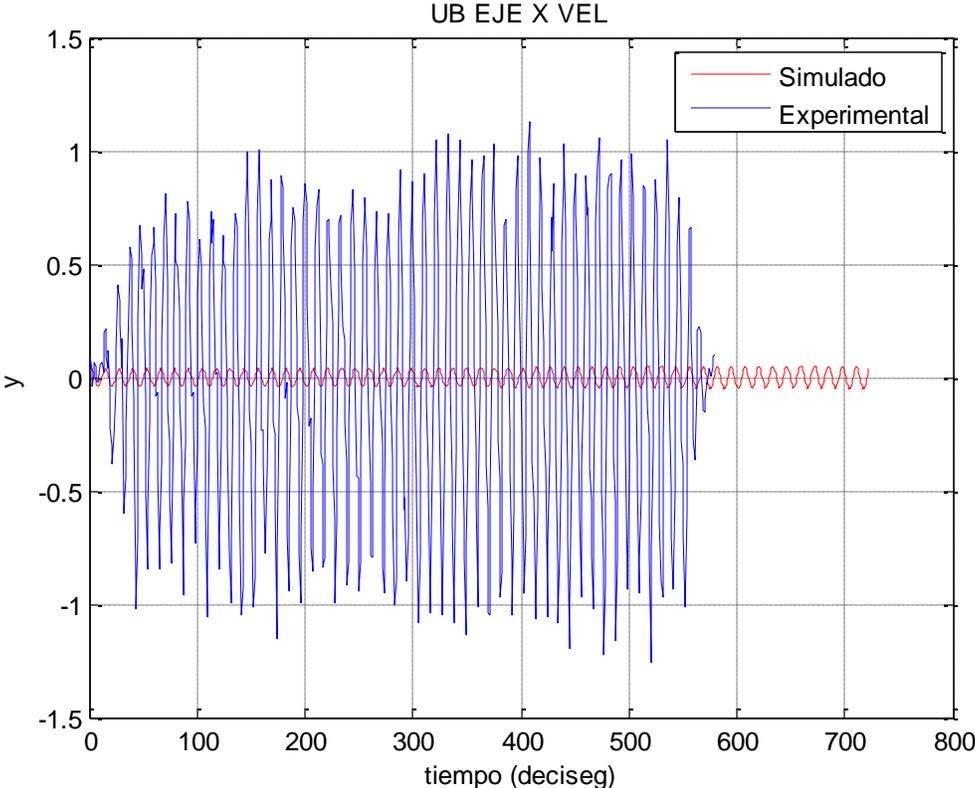
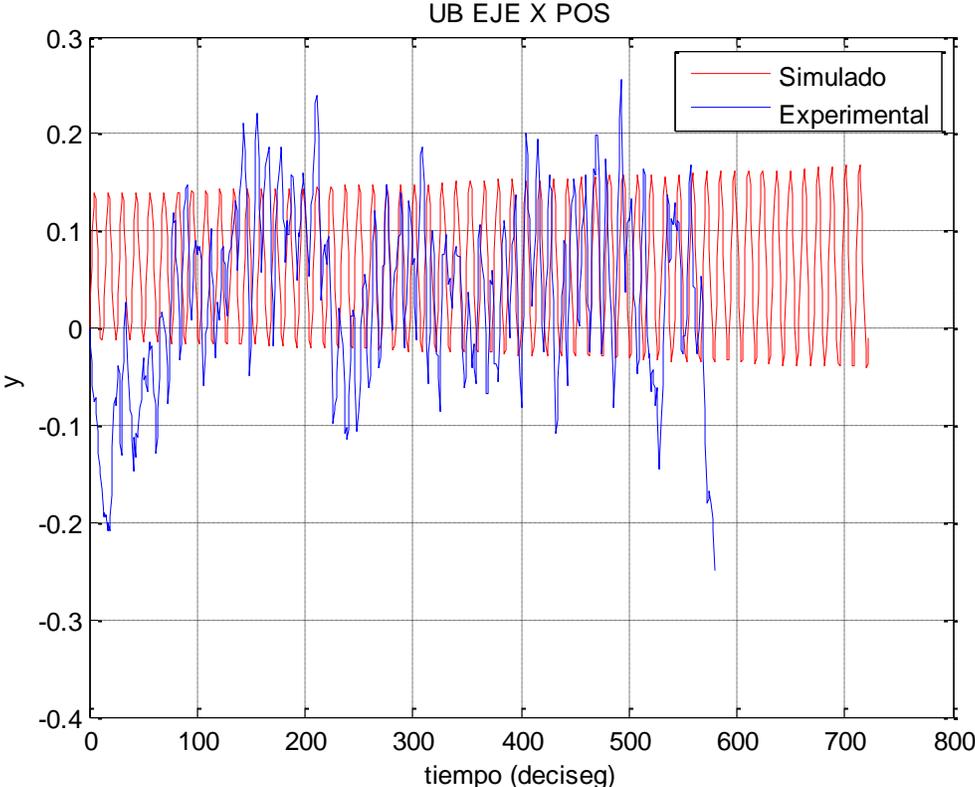
RESULTADOS

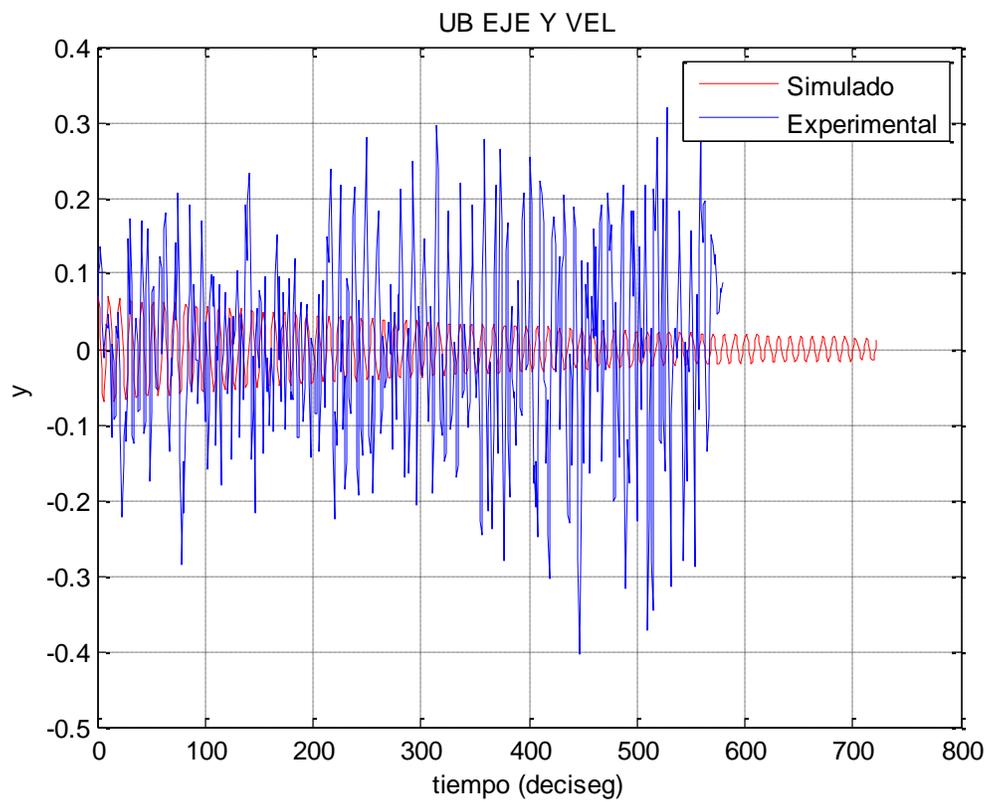
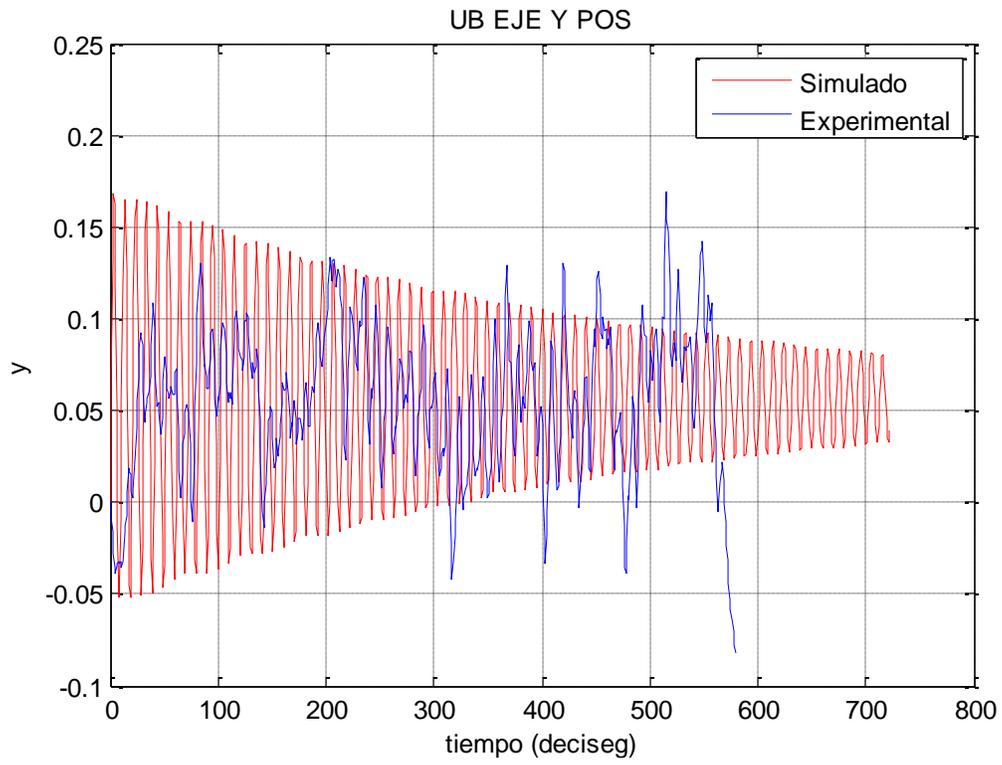
La **Tabla 5.3** muestra los valores que fueron tomados como primera estimación para los parámetros a identificar, en comparación con los valores obtenidos para los parámetros después de la identificación paramétrica.

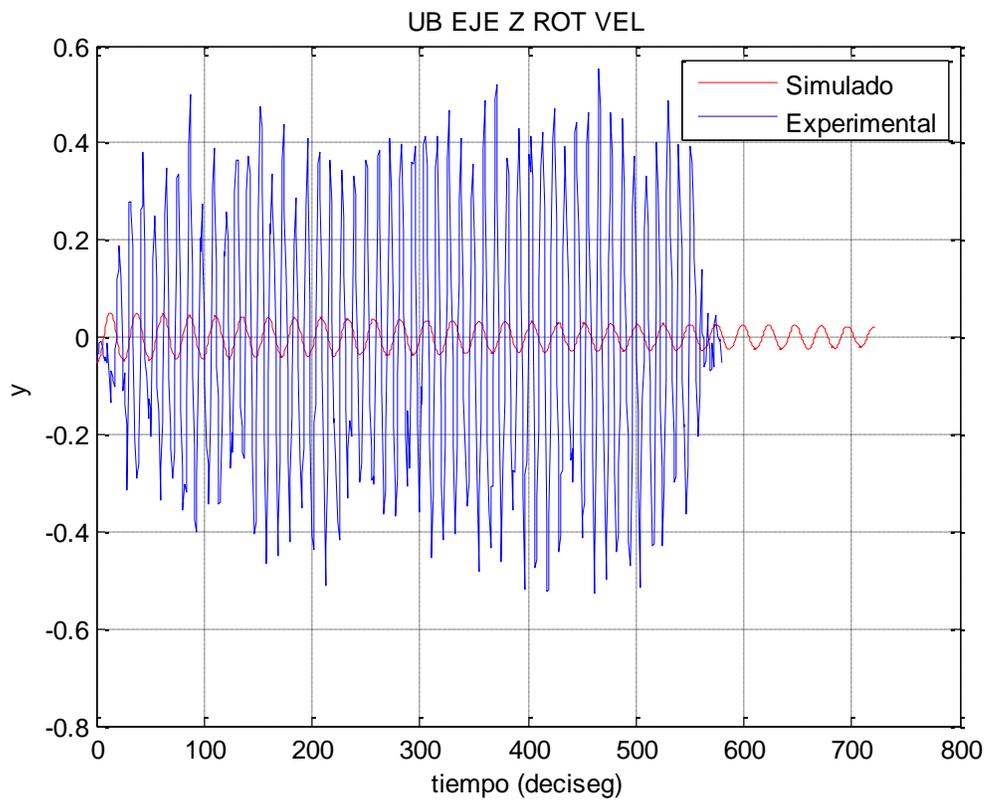
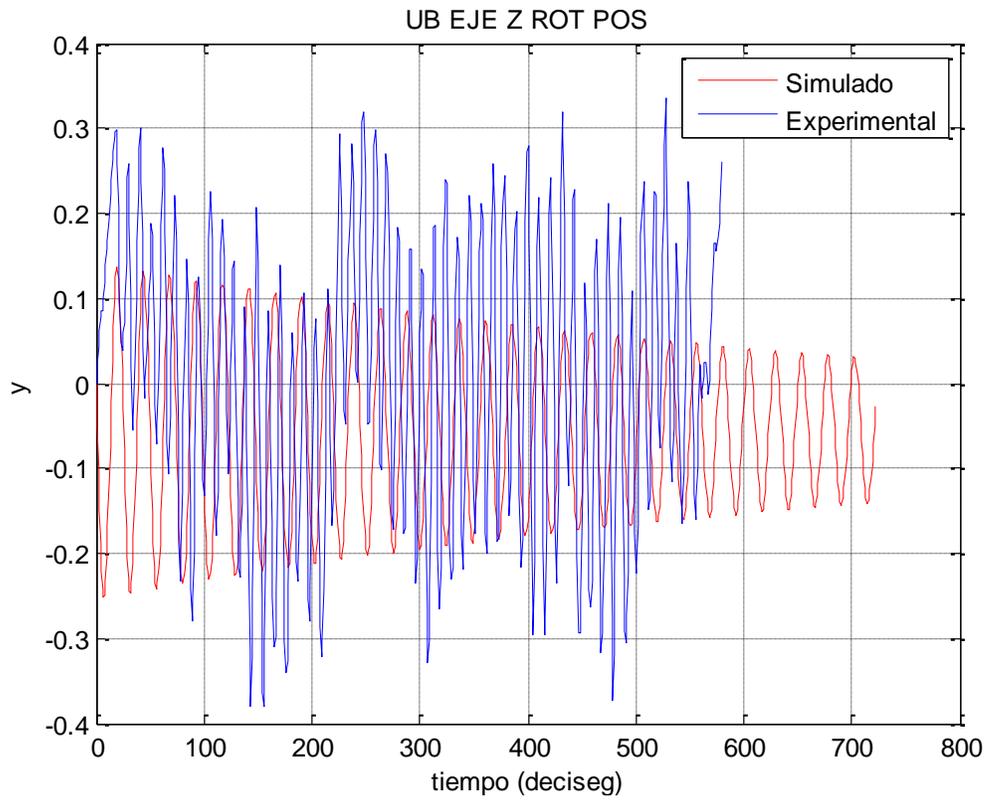
Parámetro	Valor Inicial	Valor identificado
k_{1x}	5	5
k_{1y}	90	89
k_{1z1}	0.01	0
k_{1z2}	600	1500
k_2	90	1
k_3	9000	1
b_{1x}	0.06	0
b_{1y}	0.07	12
b_{1z1}	0.006	2
b_{1z2}	30	70
b_2	0.090	1
b_3	90	1
I_{1xx}	1000	1000
I_{1yy}	10000	10001
I_{1zz}	1000	1000
I_2	540	500
I_3	10	3
I_4	540	500
I_5	10	3

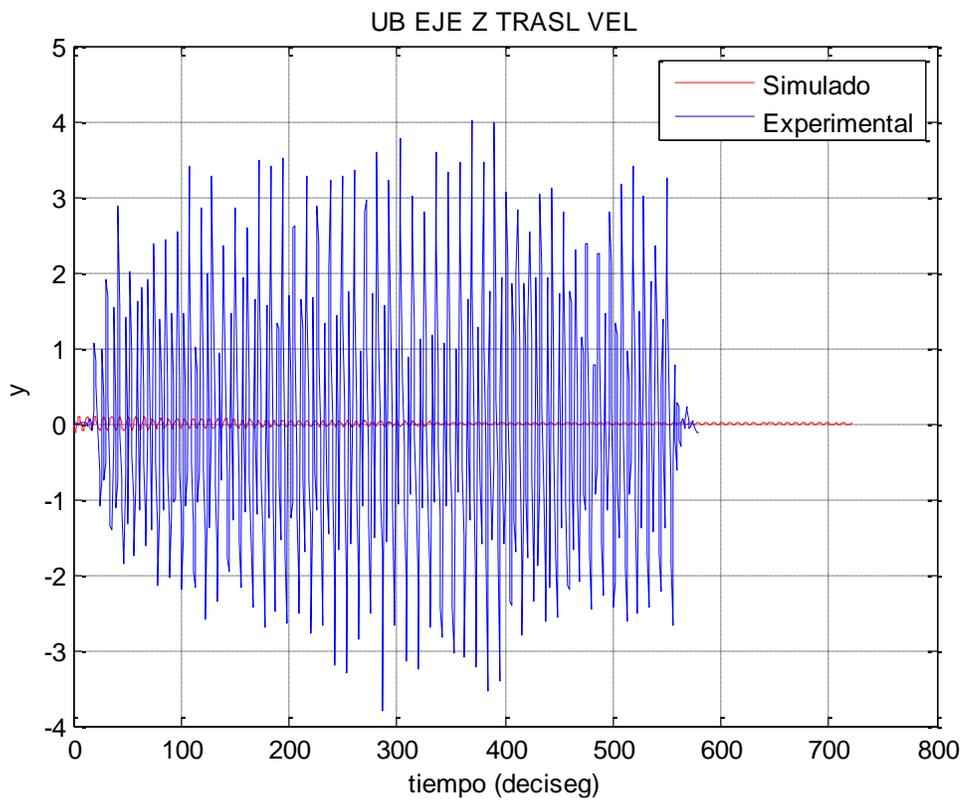
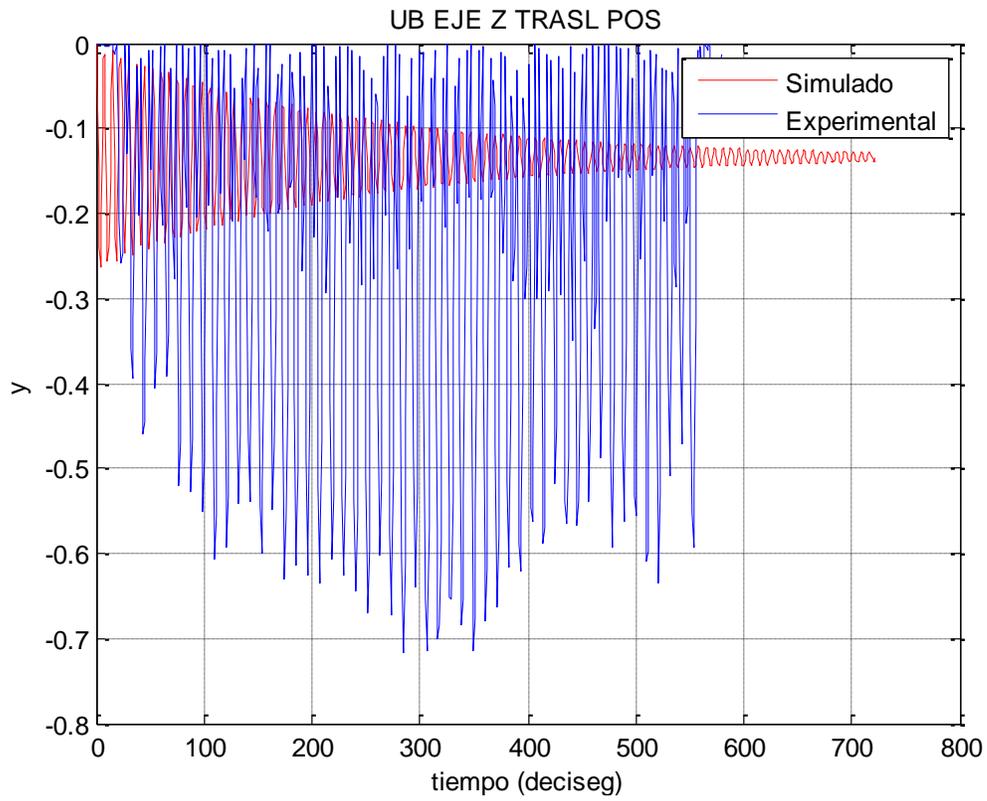
Tabla 5.3 Comparación entre la estimación inicial para los valores a identificar y el valor obtenido por medio del procedimiento de identificación paramétrica.

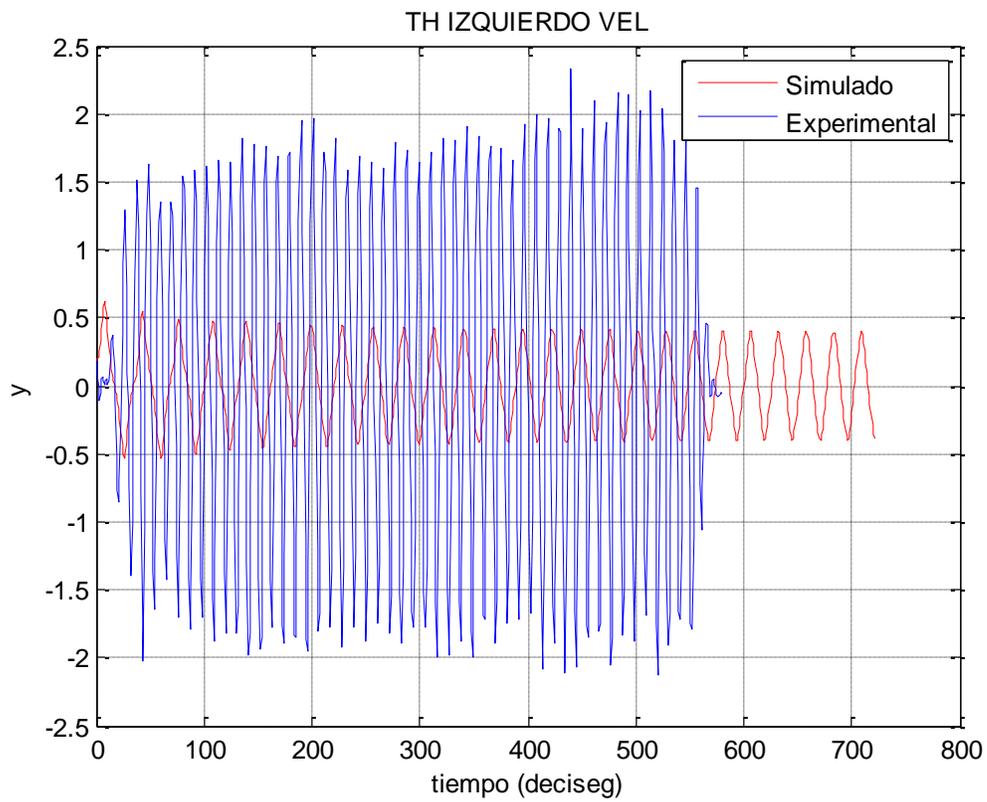
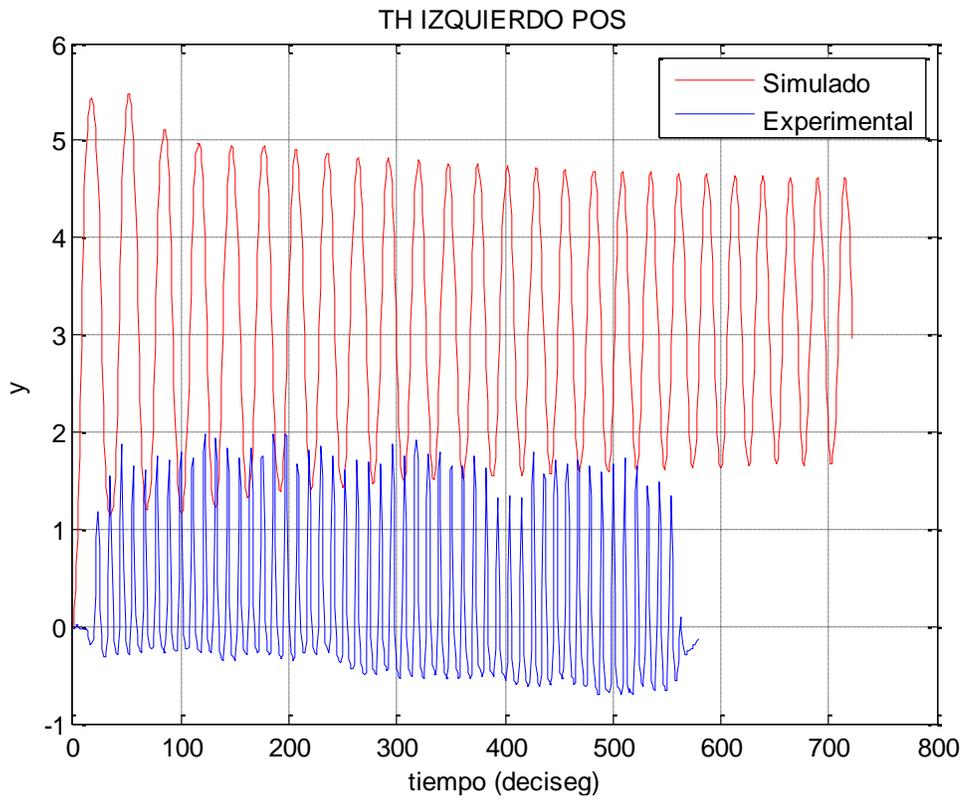
Graficas comparativas, simulaciones con valores de los parámetros identificados vs datos experimentales.

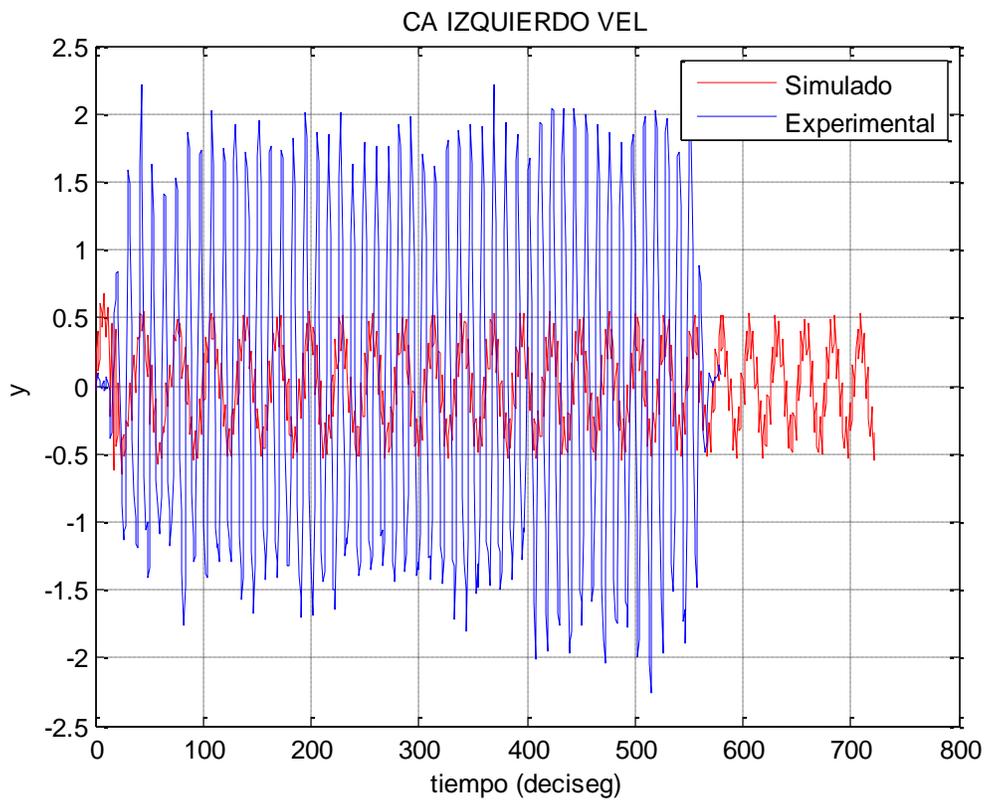
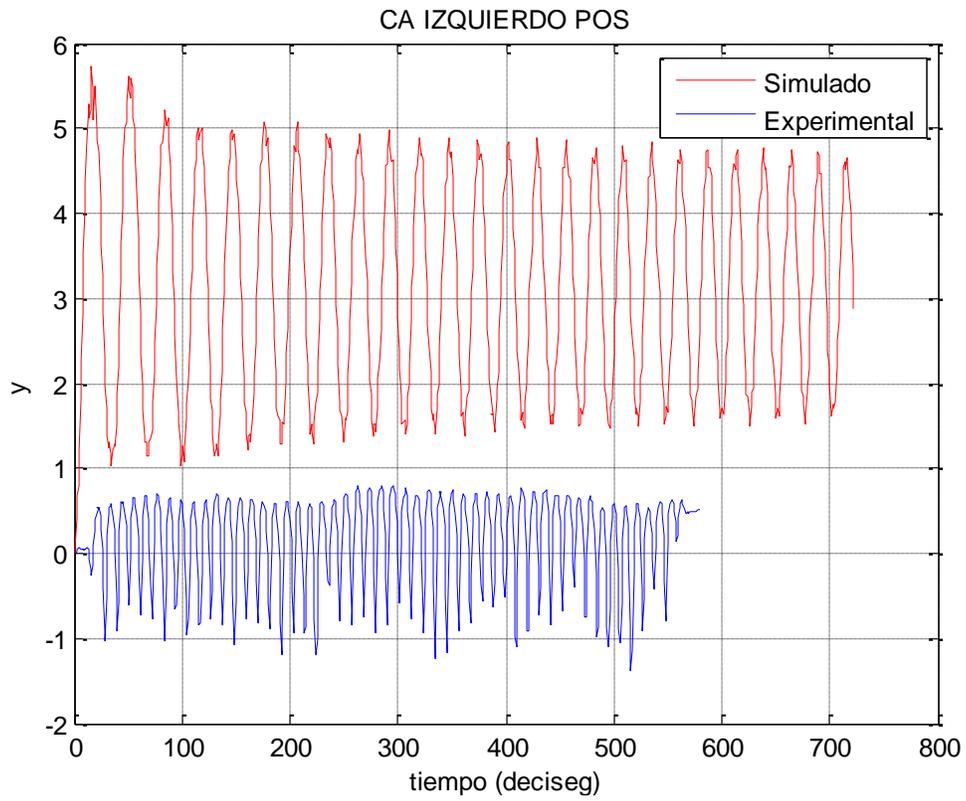


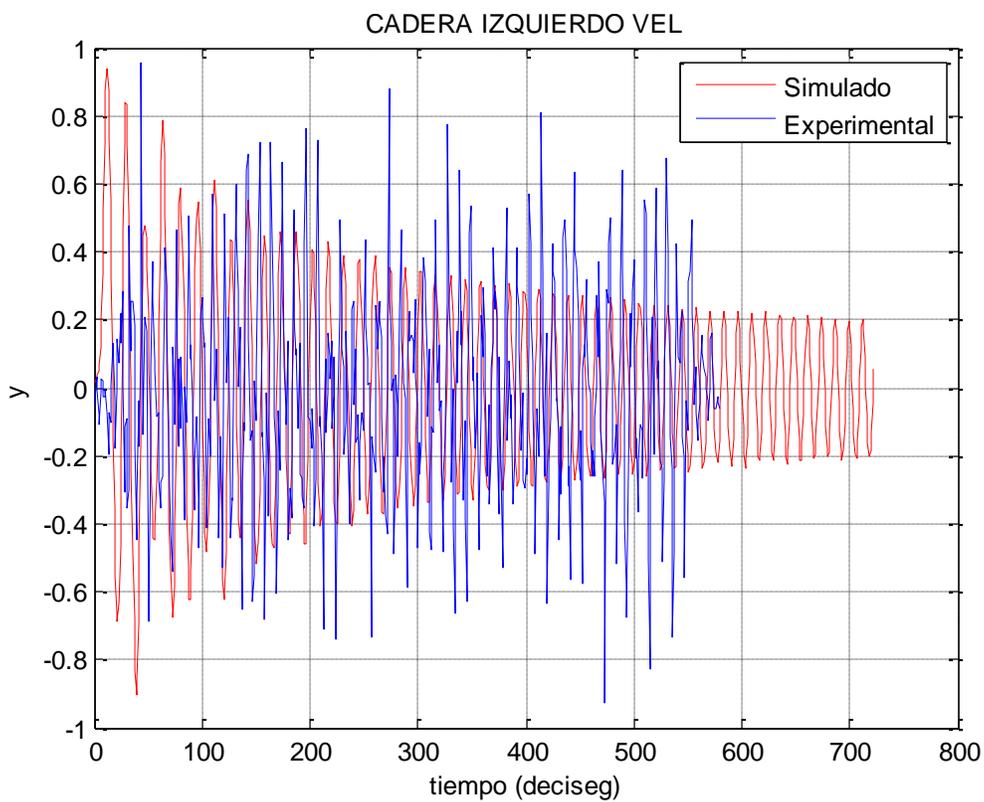
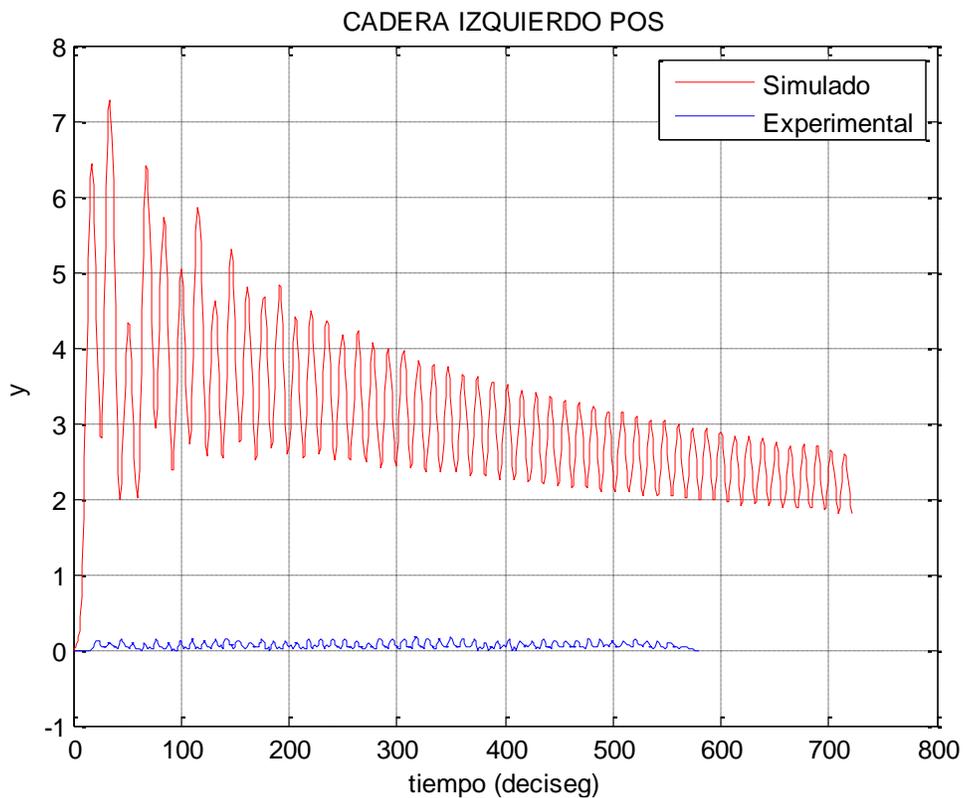












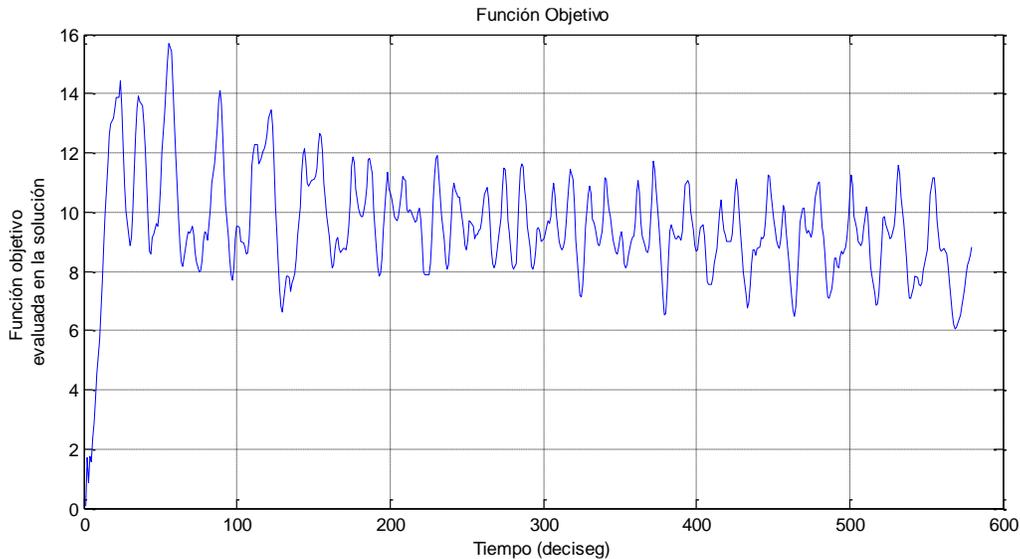


Figura 5.6 Gráfica de la función objetivo evaluada en la solución del modelo propuesto.

Norma del Residuo ²: 54500

Iteraciones: 13

Criterio de truncamiento: cambio en el valor de los parámetros menor a 1^6 (referencia especificada).

En la Figura 5.9 podemos observar que aunque parece que la función objetivo tiende hacia un mínimo, el criterio de truncamiento señala que no necesariamente se ha obtenido un conjunto de parámetros que hagan que la función objetivo llegue a un valor mínimo. El criterio de convergencia que se obtuvo indica que el cambio en la variación de los parámetros es menor a una tolerancia especificada, es decir, el paso considerado para la búsqueda de parámetros que entreguen una mejor respuesta es menor al valor determinado como límite. Sin embargo, aunque el valor de dicha tolerancia sea menor o mayor no necesariamente se podrá garantizar convergencia.

² El residuo es el valor de la función objetivo, evaluado para cada iteración (tiempo), mostrado como un vector. La Norma del residuo, es un número real positivo, calculado por la norma 2 del residuo, es decir, la suma de los cuadrados de la función objetivo evaluada para cada iteración.

Por un lado, el valor considerado para el paso pudo haber sido demasiado pequeño para desplazarse lo necesario hacia la respuesta experimental; incluso podría encontrarse muy cerca del valor de tolerancia, por lo cual el algoritmo realiza solo pocas iteraciones sin entregar la mejor combinación de valores para los parámetros a identificar. Debido a los resultados mostrados en las gráficas, se intuye que el problema de que los resultados no sean los esperados no necesariamente es debido al algoritmo de identificación si no a otras causas ajenas a él; tales como, ruido en la señal medida, errores en el modelado del sistema, incertidumbres paramétricas en los valores nominales no identificados, entre otros. De manera adicional a estos aspectos, también se debe considerar que el número de parámetros a identificar es muy grande, por lo cual la exigencia computacional es mayor.

“La fisiología científica tiene la tarea de determinar las funciones del cuerpo animal como consecuencia necesaria de sus condiciones elementales.”

Carl Friedrich Wilhelm Ludwig

Capítulo 6

ENERGÍA, CALOR Y TRABAJO MECÁNICO EN EL CUERPO HUMANO

Al inicio de la tesis se planteó que la motivación principal para obtener un modelo matemático sobre la marcha humana es, posteriormente relacionarlo con metabolización de carbohidratos. En la **Figura 1.1** se mostró un diagrama en el que se muestran algunos de los fenómenos involucrados en la transformación de la energía metabólica para la realización de trabajo externo. En este capítulo veremos brevemente de donde es obtenida la energía metabólica, y se plantearán algunas de las situaciones involucradas en la transformación de dicha energía, entre las cuales se destaca la pérdida de calor. En la sección 6.2 se discuten algunas definiciones de eficiencia y como se manifiestan en el desarrollo de las actividades deportivas de las personas. Finalmente en la sección 6.3 veremos el planteamiento de dos ejemplos, el primero de un péndulo simple y el segundo sobre un péndulo doble con efecto muscular en la articulación que une a los eslabones. Ambos ejemplos con la finalidad de comenzar a visualizar la manera de plantear las relaciones entre el uso de la energía metabólica para la locomoción de las extremidades.

6.1. Metabolismo del cuerpo humano: obtención, almacenamiento y uso de la energía.

Al igual que en los sistemas mecánicos, si nuestro cuerpo no cuenta con energía disponible, no podrá realizar ningún movimiento. El cuerpo humano toma la energía

que necesita principalmente de dos fuentes: el oxígeno y los alimentos; después de consumir alimentos, éstos son transformados en energía mediante un proceso llamado metabolismo.

El metabolismo del cuerpo humano es la suma de todos los procesos químicos realizados por las células con el fin de mantener vivo al cuerpo humano; por lo tanto, es el proceso a través del cual el cuerpo obtiene, almacena y utiliza la energía que necesita para vivir. En la **Figura 6.1** se muestra el flujo de energía hacia y desde el cuerpo humano; donde las fuentes de energía son oxígeno y alimentos, y las variables de salida son la pérdida de calor y el trabajo realizado.

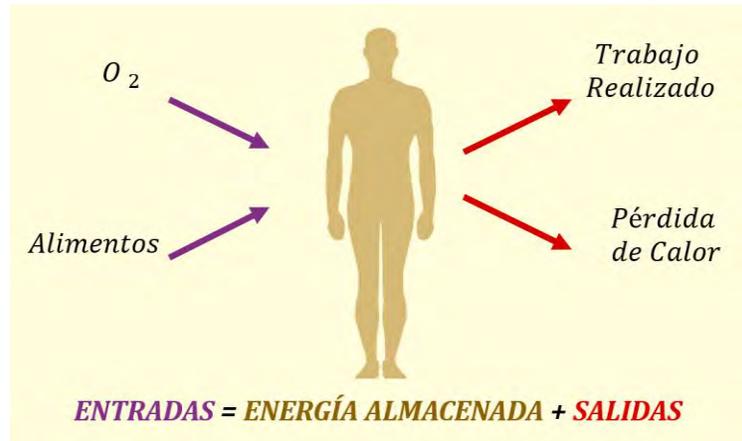


Figura 6.1 Flujo de energía: entradas y salidas del cuerpo

Principalmente, los alimentos que consumimos son utilizados para: operar nuestros órganos, mantener el cuerpo a una temperatura constante, realizar trabajo mecánico y como suministro de energía almacenada en forma de grasa para necesidades posteriores. El cuerpo humano oxida los alimentos que consume (carbohidratos, grasas y proteínas) en las células, para liberar grandes cantidades de energía.

Un concepto importante al discutir sobre la energía metabólica es, el valor calórico, el cual se refiere a la cantidad de energía disponible, y suele ser determinado en una bomba de calorimetría. Ésta, consta de paredes gruesas y en ella se determina

la entalpía (cantidad de energía absorbida) de combustión a volumen constante. La **Tabla 6.1** se muestra los valores calóricos promedio y equivalentes caloríficos de los tipos de “combustibles” básicos del cuerpo humano, también llamados macronutrientes.

Cabe mencionar que existe una diferencia significativa entre la cantidad de energía metabolizada que aportan los alimentos, y la cantidad de energía que realmente es utilizada por el organismo. La tasa de obtención de energía metabolizable (ME), $d(ME)/dt$, es la diferencia entre la tasa de consumo de energía alimentaria y la suma de las tasas de pérdida de energía en las heces, orina y gas combustible. Esta es la tasa actual a la cual la energía se pone a disposición del organismo.

Alimentos	Contenido Neto Calórico (kcal/g)	Energía de Bomba de Calorimetría (kcal/g)	Equivalente calorífico (kcal/L O₂)	Producción de CO₂ (kcal/L CO₂)	RER (L CO₂/L O₂)
carbohidratos	4.02	4.10	5.05	5.05	1.00
proteínas	4.20	5.65	4.46	5.57	0.80
grasas	7.00	7.10	4.86	7.25	0.67
etanol	8.98	9.45	4.74	6.67	0.71

Tabla 6.1 Cantidades de energía que aportan los diferentes macronutrientes al cuerpo humano [18].

$$\frac{d(ME)}{dt} = \text{Consumo} - \text{Pérdida de energía} \quad (6.1)$$

Es importante resaltar que el calor es el producto terminal de casi toda la energía liberada en el organismo, y que, solo un pequeño porcentaje del producto terminal de la energía es trabajo mecánico. Esto puede ser analizado con la primera ley de la termodinámica, la cual es sobre la conservación de la energía de cualquier proceso:

$$\Delta U = Q - W \quad (6.2)$$

donde ΔU es el cambio en la energía almacenada, Q es el flujo de calor al cuerpo, y W es el trabajo realizado por el cuerpo. La energía almacenada disminuye, $\Delta U < 0$, cuando el flujo de calor desde el cuerpo, $Q < 0$, y el trabajo realizado por el cuerpo, $W > 0$.

El flujo de calor incluye la producción de calor del metabolismo (Q_{met}) y la pérdida de calor (Q_{loss}) por radiación, convección, conducción, y evaporación. Podemos expresar $Q = Q_{met} + Q_{loss}$, donde la producción de calor metabólico Q_{met} es positivo y el flujo de calor del cuerpo Q_{loss} es negativo, entonces

$$\Delta U = Q_{met} + Q_{loss} - W \quad (6.3)$$

donde Q_{met} es llamada la tasa metabólica (TM).

En el estudio del metabolismo suelen estar implicadas tasas y por lo tanto lo anterior puede ser expresado por la siguiente ecuación

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ_{met}}{dt} + \frac{dQ_{loss}}{dt} - \frac{dW}{dt} \quad (6.4)$$

En esta expresión, se tiene que ser cuidadoso en el manejo de los signos. El cuerpo incrementa su energía con términos como dQ_{met}/dt que son positivos y pierde energía con términos como dQ_{loss}/dt que son negativos. La cantidad de calor que fluye desde el cuerpo es $-dQ_{loss}/dt$, la cual es una cantidad positiva.

Mientras TM se refiere a la rapidez con la que nuestro organismo metaboliza los alimentos, es decir, nos indica la cantidad de alimento que debemos consumir (según nuestro estilo de vida) para permanecer en condiciones sanas; la TMB (Tasa metabólica basal) es la cantidad mínima de energía que nuestro cuerpo necesita para vivir. La TMB está en función de la masa corporal, altura, género, entre otras;

suele ser determinada en condiciones de reposo, ayuno, sin alteraciones físicas o psíquicas y a temperatura ambiente.

La TM puede ser medida por medio de calorimetría indirecta, la cual mide la Tasa de Intercambio Respiratorio (TIR). La TIR se define como el número de moles de CO_2 producidos entre el número de moles de O_2 utilizados, y es una medida de la cantidad de dióxido de carbono que necesita ser liberado en la respiración con relación a la cantidad de oxígeno que el cuerpo necesita atraer por la respiración.

Con las mediciones de la TIR , es posible saber si se están metabolizando carbohidratos o grasas. Una $TIR = 1.0$ indica que solo se está utilizando glucógeno (carbohidratos). Cuando la $TIR = 0.71$ indica que solo se están utilizando grasas; y complementariamente un valor entre estos dos, indica un consumo de ambos macronutrientes. En esta aproximación se asume que no hay metabolización de proteínas, lo cual es falso cuando se está realizando ejercicio durante varias horas (aprox. 10% de la energía metabólica es obtenida de las proteínas).

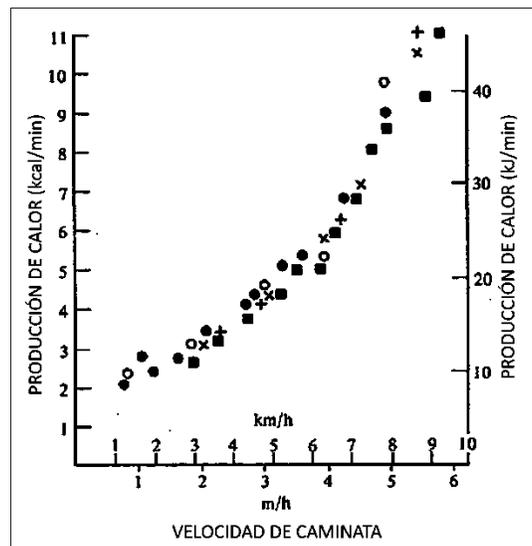


Figura 6.2 Producción de calor (necesidades metabólicas) de la caminata [18].

La tasa de consumo de O_2 , dVO_2/dt es igual al producto de la salida cardiaca y la diferencia en el contenido de oxígeno en arterias y venas, $p_a - p_v$:

$$\frac{dVO_2}{dt} = Q_t(p_a - p_v) \quad (6.5)$$

Esta tasa, aumenta linealmente con Q_t durante la realización del ejercicio aeróbico. En la siguiente grafica se muestra la relación entre la velocidad al caminar y la producción de calor.

6.2. Trabajo mecánico

En la primera ley de la termodinámica (6.7) se muestra que la energía almacenada puede ser utilizada para proveer calor o trabajo.

El trabajo mecánico es la fuerza que se aplica a un objeto \times la distancia que se le empuja o se tira del él; suele ser de dos tipos: positivo y negativo. Las contracciones musculares concéntricas hacen un trabajo (mecánico) positivo, esto es, cuando el momento muscular actúa en la misma dirección que la velocidad angular de la articulación. Por otro lado, las contracciones excéntricas hacen un trabajo negativo, es decir, cuando el momento muscular actúa en dirección contraria al movimiento de la articulación. Esto suele ocurrir cuando una fuerza externa, F_{ext} , actúa en el segmento de tal forma que se crea un momento mayor al que se produce en el músculo. Esta fuerza externa incluye la fuerza gravitacional y la fuerza de reacción con el suelo. Por ejemplo, cuando un individuo camina sobre el nivel del suelo, requerirá cantidades iguales trabajo positivo y negativo. Al caminar de subida sobre una pendiente requerirá un mayor trabajo positivo que negativo; y por el contrario, al caminar cuesta abajo utilizará relativamente un mayor trabajo negativo.

Existen diferentes tipos de eficiencia, para efectos de este trabajo definiremos eficiencia ϵ , como la tasa de trabajo mecánico hecho dividido por la tasa metabólica.

La única fuente de generación de energía mecánica en el cuerpo humano son los músculos, los cuales son también el principal sitio de absorción de energía. La

energía metabólica es convertida en energía mecánica en los tendones, y la eficiencia metabólica depende de las condiciones de cada músculo, el estado metabólico (grado de fatiga), la dieta, y cualquier trastorno metabólico que pudiera tener el individuo. A esta conversión de energía se le suele llamar la eficiencia muscular o metabólica y se define como sigue:

$$\begin{aligned} & \textit{Eficiencia Muscular (metabólica)} \\ & = \frac{\sum \textit{trabajo mecánico realizado por todos los músculos}}{\textit{trabajo metabólico de los músculos}} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Sin embargo, tal eficiencia se vuelve imposible de calcular al no tener conocimiento del trabajo que realiza cada uno de los músculos, además, el hecho de aislar la energía metabólica de ellos es muy complicado. Por lo tanto, es necesario calcular la eficiencia en base al trabajo realizado por cada uno de los segmentos y corregir el costo metabólico restando la eficiencia de los gastos generales de energía que no están asociados con el trabajo mecánico real realizado. De esta forma, podemos definir a la eficiencia mecánica de cada segmento como:

$$\begin{aligned} & \textit{Eficiencia mecánica} \\ & = \frac{\textit{trabajo mecánico} + \textit{interna externa}}{\textit{costo metabólico} - \textit{costo metabólico de descanso}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

El costo metabólico al estar en una bicicleta en estado de descanso, por ejemplo, sería el costo asociado con estar solamente sentado sobre la bicicleta. Una modificación adicional es la eficiencia del trabajo, que se define como:

$$\begin{aligned} & \textit{Eficiencia del trabajo} \\ & = \frac{\textit{trabajo mecánico externo}}{\textit{costo metabólico} - \textit{costo metabólico} - \textit{trabajo cero}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Cabe resaltar que en todos los cálculos de eficiencia descritos, hay cantidades variables de trabajo positivo y negativo. Además, el costo metabólico de trabajo positivo supera en un mismo nivel al trabajo negativo. Sin embargo, el trabajo negativo no es despreciable en la mayoría de las actividades. Pensando en el

ejemplo anterior, podemos evitar el problema que implican los cálculos con trabajo positivo y negativo con la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} \text{Costo metabólico} \\ &= \text{Costo metabólico (trabajo positivo)} \\ &+ \text{Costo metabólico (trabajo negativo)} \end{aligned} \quad (6.9)$$

O

$$\text{Costo metabólico} = \frac{\text{Trabajo positivo}}{\eta_+} + \frac{\text{Trabajo negativo}}{\eta_-} \quad (6.10)$$

donde η_+ y η_- son las eficiencias del trabajo positivo y negativo, respectivamente.

En la **Tabla 6.2** se muestra que la eficiencia rara vez excede el 20%, y muy frecuentemente suele ser menor a este porcentaje. El balance de energía viene con la producción de calor. Esto significa que entre el 80%-100% del producto final del metabolismo es calor; y por lo general, este número suele ser muy cercano a 100%.

Actividad	Eficiencia (%)
Ciclismo (plano)	24-34
Ciclismo (cuesta arriba)	19
Patinaje sobre hielo	11
Remo	10-20
Escaladora	23
Natación (estilo libre)	2.9 -7.4
Caminata (horizontal)	20-35
Caminata (inclinación)	21-43

Tabla 6.2 Eficiencias del trabajo mecánico [18].

6.3. Potencia

La potencia es la tasa de trabajo, es decir la rapidez con la que se realiza el trabajo. Por lo tanto, para calcular el trabajo realizado, debemos integrar la energía durante

un período de tiempo determinado. El trabajo realizado por un músculo durante un período de t_1 a t_2 es:

$$W_m = \int_{t_1}^{t_2} P_m dt \quad J \quad (6.11)$$

El lector puede darse cuenta que un factor importante al utilizar la ecuación anterior es saber el momento exacto cuando P_m invierte polaridades, ya que ésta está afectada por el valor total del trabajo negativo y el valor total del trabajo positivo realizado durante el evento.

Para determinar el valor del trabajo positivo y del trabajo negativo que realiza un individuo es necesario utilizar algunos de los conceptos vistos en el Capítulo 3. En dicho estudio la metodología $E - L$, la cual se basa en el balance de energías. Recordando, en el cálculo de la energía cinética, la velocidad es un término que se encuentra elevado al cuadrado, entonces, su valor será siempre positivo. Por lo tanto, el nivel más bajo de energía cinética es cero, lo cual sucede cuando el cuerpo está en reposo. Por otro lado, la energía potencial se debe a la fuerza de gravedad, lo que hace que aumente su valor la altura del segmento por encima de la superficie de referencia también aumente. En la **Figura 6.3** podemos ver qué pasa cuando un péndulo simple “ideal” (sin fricción) se pone en movimiento.

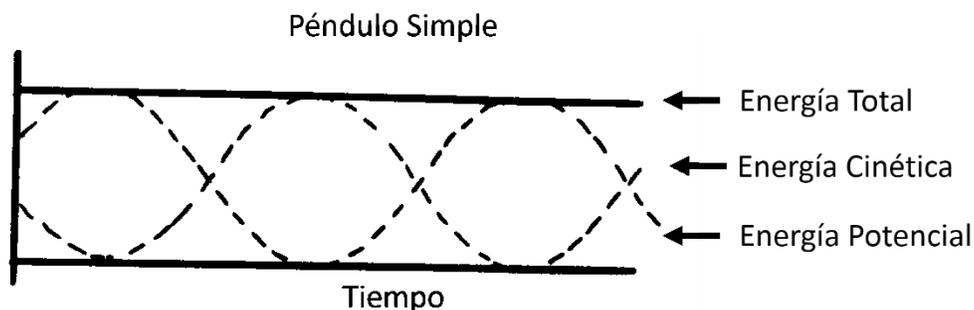


Figura 6.3 Intercambio de energía cinética y potencial durante el balanceo de un péndulo sin fricción [20].

Como vemos, la energía total permanecería constante a lo largo del tiempo en presencia de grandes cambios de energía potencial y energía cinética. Ahora, considérese un caso más aproximado al que se planteó en este trabajo, el caso de un sistema de segmentos múltiples. A medida que son agregados más segmentos para el cálculo de la energía total del cuerpo, nos limitamos a sumar las energías de cada uno de los segmentos de éste en cada punto en el tiempo [20]. Por lo tanto, la energía total del cuerpo E_b en un momento dado es:

$$E_b = \sum_{i=1}^B E_{si} \quad J \quad (6.12)$$

donde E_{si} es la energía total del i -ésimo segmento en ese punto en el tiempo B es el número de segmentos corporales.

Las energías de segmentos individuales cambian continuamente con el tiempo, por lo que no es raro que la suma de estas energías también cambie con el tiempo. Sin embargo, la interpretación de los cambios en E_b debe hacerse con precaución cuando se considera la transferencia de energía potencial entre segmentos y el número de productores y absorbedores de energía en cada una de las articulaciones.

Para una situación más cercana a la realidad, considere ahora un sistema muscular simple, representado por una masa con movimiento pendular, en el que hay un par de músculos antagónicos, con masas m_1 y m_2 . Entre ambos segmentos existe una articulación simple. Como se muestra en la **Figura 6.4**, en t_1 , el segmento está girando hacia uno de los lados. Entre t_1 , y t_2 el intercambio de energía en el péndulo toma lugar y la energía total permanece constante. Sin embargo, entre t_2 y t_3 , la masa m_2 provoca un aumento en las energías cinética y potencial del segmento. Esto hace que haya un incremento en la energía total de la extremidad. Entre t_3 y t_4 , los músculos están inactivos, y la energía total permanece constante en el nivel más alto. En t_4 , hay una contracción muscular de m_1 para reducir la

velocidad del segmento. La energía disipada por el segmento es absorbida por m_1 , lo cual se traduce en un trabajo negativo realizado por el músculo, debido al alargamiento durante la contracción. Por lo tanto, en t_5 el segmento tiene una energía total más baja que en el instante t_4 .

En resumen, se puede decir que, cuando los músculos realizan un trabajo positivo, la energía total aumenta. Por el contrario, cuando los músculos ejecutan un trabajo negativo, la energía total disminuye. Aunque en la realidad este análisis es más complicado.

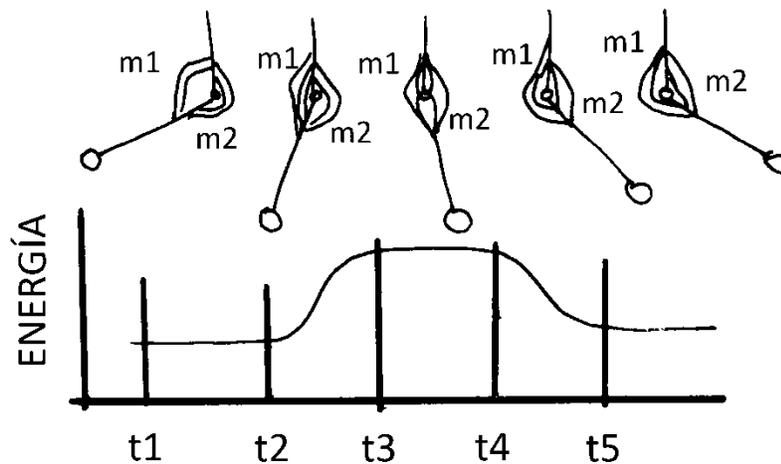


Figura 6.4 Sistema muscular con movimiento pendular [20].

Este último planteamiento pretende ser una propuesta para analizar lo que sucede cuando caminamos. Como se vio en los capítulos anteriores, de la construcción del modelo mediante la metodología $E - L$, una vez que se conocen los parámetros del individuo, y las trayectorias de movimiento de sus extremidades, podemos realizar un cálculo aproximado sobre la energía total utilizada. Después, analizando determinados movimientos bajo condiciones controladas se podrá estudiar si existe algún tipo de relación entre los parámetros específicos del sujeto, los movimientos que está realizando y la utilización de la energía obtenida de una fuente concreta (por ejemplo, determinar el número de calorías ingeridas y el grupo de macronutrientes al que pertenecen).

“La idea teórica... no se plantea separadamente e independientemente de la experiencia; ni puede derivarse un procedimiento puramente lógico a partir de la experiencia. Se produce por un acto creativo. Una vez que una idea teórica ha sido adquirida, uno tiene que aferrarse rápidamente a ella hasta que lo lleve a una conclusión insostenible.”

Albert Einstein

Capítulo 7

CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

7.1. Conclusiones y Discusiones

La contribución principal de este trabajo ha sido realizar un modelo matemático que represente la dinámica de la locomoción humana, en un caso específico, como una aproximación a la marcha humana. El caso específico consiste en la realización de ejercicio físico de un individuo sobre una caminadora tipo esquiadora; de forma tal que, posteriormente, por medio de la identificación paramétrica se obtienen algunos de los parámetros que no son posibles de medir directamente del individuo. A lo largo de este trabajo se han discutido las diferencias y similitudes entre la marcha humana y la realización de actividad física en una caminadora tipo esquiadora como aproximación al movimiento realizado durante la marcha misma. A continuación se resumen algunas de estas observaciones.

Por un lado, se tiene que en la caminadora tipo esquiadora un individuo puede balancear las extremidades inferiores en vaivén y de forma alternada; sin embargo, difiere de la definición de caminata por que no existe una sucesión de apoyo bipodal y unipodal. Mientras se realiza ejercicio en el *AW*, ambos pies permanecen sobre los pedales, y dado que los pedales del *AW* permiten un movimiento independiente para cada lado, el individuo debe mantener un apoyo bipodal para mantener el ritmo durante el ejercicio. Otra de las diferencias es que, al no haber alternancia entre

apoyo bipodal y unipodal, tampoco hay un impacto debido al levantamiento de la extremidad que hemos denominado Ca . En relación a un menor impacto al utilizar la AW , también se tiene una menor flexión la articulación que corresponde a las rodillas, de hecho, debido a la configuración del AW , el individuo puede intentar mantener fija la articulación como si su pierna estuviera formada solo por un eslabón. Sin embargo, el uso del AW permitió que el modelo pudiera ser restringido respecto al número de grados de libertad, que los desplazamientos, rangos de movimiento pudieran ser limitados y además, que pudieran ser empleados algunos supuestos.

Uno de estos supuestos es que al considerar el menor número de eslabones se puede construir modelo basado en la metodología $E - L$ que al mismo tiempo capture una aproximación a la dinámica de la marcha humana, durante la utilización del AW . Por lo que fueron considerados solo 5 eslabones para representar al cuerpo humano, entre los cuales uno de ellos, el segmento UB , involucra de manera indirecta el efecto de los brazos. La hipótesis bajo la cual se decidió incluir los brazos en el segmento UB fue que al estar colocadas las manos en el AW no tendrían una influencia considerable al momento de realizar el ejercicio (siempre y cuando el principal esfuerzo se realizará en las extremidades inferiores). Sin embargo, el efecto de tratar de contrarrestar el movimiento de las piernas con el movimiento de UB se reflejaría en el desplazamiento angular en torno a los tres ejes del plano coordinado considerado en el modelo. Se puede decir que la hipótesis de estos supuestos fue verificada ya que, como evidencia experimental, en las gráficas obtenidas por los datos de medición el desplazamiento angular tiene menor magnitud a las correspondientes sobre las extremidades inferiores. Sobre este aspecto, podría analizarse si dichas mediciones son atribuibles a ruido en las mediciones o en verdad tienen magnitud considerable en el análisis del movimiento.

En cuanto a la metodología utilizada para construir el modelo, E-L cuenta con una estructura compacta y en la cual se puede visualizar más fácilmente la distribución de los parámetros que afectan la dinámica de la marcha humana. Además, de que

ésta metodología requiere un menor número de operaciones algebraicas para llegar a su estructura característica. Estos hechos se pudieron comprobar al utilizar esta metodología. El uso de esta metodología tuvo efecto en el análisis dinámico del modelo propuesto, debido a que algunas de las propiedades propias de la forma compacta de $E - L$ se mantuvieron y pudieron ser utilizadas para comprobar la existencia y unicidad de soluciones y la dependencia continua a las condiciones iniciales y parámetros. Respecto de lo observado en la obtención de los puntos de equilibrio se vio que, al considerar únicamente al sistema HW , los puntos de equilibrio de UB dependen del valor de la constante elástica, la masa y la longitud del segmento, en relación a la posición que se quiera mantener. En cuanto a los puntos de equilibrio de las extremidades inferiores, estos solo dependen de los estados, de forma similar a lo que ocurre con un péndulo simple. Por otro lado, al considerar los sistemas acoplados, los puntos de equilibrio para UB también dependerán de la entrada (torque y energía disipada) que se entregue al segmento. De forma similar, para los segmentos inferiores, sus puntos de equilibrio dependerán de las entradas y algunos de sus parámetros, entre los cuales están las masas, las longitudes, entre otras. Además, dado que para el planteamiento de las ecuaciones se utilizó un balance de energía y, que la función de Lyapunov suele estar basada en la función de energía, se utilizó el planteamiento del modelo dinámico para proponer la función de Lyapunov, y verificar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Un aspecto observado en los resultados obtenidos de los sensores MTx durante la prueba de ejercicio en el AW fue que, el individuo desplazaba más la pierna derecha que la izquierda. Este hecho sugiere que aún en casos sin patología diagnosticada o trauma evidente la marcha humana es asimétrica. Los datos se pueden observar en las **Figuras 5.4** y **5.5** donde, sobre todo el segmento Ca presenta una mayor magnitud de desplazamiento. Además, de que debido a que la caminadora no cuenta con ningún actuador que induzca o controle la velocidad del individuo al utilizarla, el individuo debe intentar mantener un mismo ritmo y una misma longitud de paso para conservar la velocidad indicada. Estos aspectos también se pueden

observar en las gráficas presentadas en el Capítulo 5, ya que los datos no se encuentran uniformes a lo largo del tiempo, como se había supuesto para el planteamiento del modelo matemático.

Los aspectos mencionados anteriormente influyeron en que los resultados obtenidos del proceso de identificación paramétrica no reflejaran la minimización de la función objetivo. De las gráficas mostradas en el Capítulo 5, en la sección de resultados, podemos mencionar lo siguiente: por una parte las gráficas muestran el diseño del experimento quizás no fue el más adecuado para las condiciones supuestas por el modelo. Es decir, en las gráficas experimentales se aprecia una variación en la amplitud del desplazamiento, además de una disminución y aumento de la velocidad de los segmentos, lo cual no estaba contemplado en las hipótesis para construir el modelo. En trabajos futuros las hipótesis deben incluir este caso.

Otro punto importante a mencionar es que, como también se mostró en el Capítulo 5, el valor inicial estimado para el proceso de identificación, por ejemplo para el caso de las constantes de inercia tienen una magnitud muy diferente a los valores entregados por el algoritmo de identificación. Esto también puede deberse a que las condiciones del experimento no fueron las más convenientes y/o que algunos de los parámetros nominales no fueran correctos. Es decir, los resultados sugieren que al no estar instrumentado el experimento para regular la rapidez y amplitud del paso, esta variación indujera diferencias significativas entre los valores iniciales de los parámetros y su identificación.

Finalmente, al comparar las respuestas del modelo en contraste a las obtenidas de forma experimental, está claro que se debe tener cuidado al momento de diseñar el experimento para validar un modelo, y tratar de eliminar la mayor cantidad de incertidumbres posibles. Si se tiene conocimiento de algún fenómeno no controlado durante el experimento, éste tendrá que ser caracterizarlo como una perturbación al sistema, para evitar que se tengan resultados desfavorables. Sin embargo, observando solo la respuesta del modelo, dados ciertos parámetros y condiciones

iniciales si se observaron comportamientos esperados según el planteamiento y las suposiciones iniciales. Es decir, pequeños cambios (en cuanto a desplazamiento y velocidad) en cuanto al movimiento del segmento *UB* respecto a sus 4 GDL, al igual que para el movimiento longitudinal de las extremidades inferiores. También se observó que, el modelo responde de forma adecuada a los cambios paramétricos de las constantes elásticas y de amortiguamiento, debido a que al aumentar la constante elástica, la frecuencia de oscilación del segmento aumentaba, y al aumentar la constante de amortiguamiento, las oscilaciones tendían a estabilizarse en un tiempo mayor. Estas circunstancias contrapuestas permiten concluir que las hipótesis y planteamiento del modelo son apropiados pero las condiciones de identificación deben ser mejoradas para reducir el efecto de incertidumbres, ruido de medición y valor inicial de los parámetros. Es posible que estos efectos sobre la identificación paramétrica sean reducidos mediante optimización, por ejemplo, basada en algoritmos evolutivos u otros.

7.2. Trabajo a futuro

A partir de esta tesis se desprenden varios cuestionamientos e hipótesis que podrían ser considerados en trabajos futuros. Uno de ellos es considerar un modelo con un menor número de grados de libertad podría dirigirnos a obtener mejores conclusiones sobre la dinámica del individuo durante el experimento. Además, sería deseable modificar el diseño del experimento con el propósito de reducir las incertidumbres, ruido de medición y valor inicial de los parámetros.

Cabe mencionar que a la par de este trabajo se tuvo la oportunidad de participar en un estudio experimental con personal militar. Dicho estudio cuenta con la participación de 28 voluntarios divididos en dos rangos de edades (20 a 25 y 34 a 40 años). El estudio fue planteado para realizarse en dos fases. La primera fase ya fue realizada y consistió en obtener información sobre los voluntarios en situación de reposo, para lo cual se realizó una prueba de tolerancia a la glucosa. Esta prueba es realizada de forma habitual en individuos con tendencia a desarrollar diabetes;

consiste en la toma de una muestras sanguínea, cada 30 minutos durante 2 horas. El individuo en cuestión debía encontrarse en ayuno mínimo de 8 horas, después debía ingerir una bebida glucosada y, posteriormente se obtendrían las muestras sanguíneas. De estas muestras se obtuvo información sobre el nivel de glucosa en sangre para cada individuo con las cuales se realizó una curva de tolerancia a la glucosa, para analizar cómo se metaboliza la glucosa a lo largo del tiempo después de beberla.

A 17 de los individuos voluntarios se les insertó un sensor que mide los niveles de glucosa en el líquido intersticial de manera continua, dando lecturas cada 5 minutos, lo cual permite que se tenga más información sobre la prueba de tolerancia a la glucosa, adicional a las muestras sanguíneas. Además de lo anterior, también fueron tomadas algunas medidas antropométricas (longitud y perímetro de las extremidades, peso y estatura) en todos los individuos voluntarios.

Como siguiente paso, se planea realizar nuevamente la prueba de tolerancia a la glucosa, solo que a diferencia de la primera fase, esta vez será en situación de ejercicio en una caminadora de banda a una velocidad constante, entre 4 y 5 km/hr (dependerá de la resistencia física del individuo). De igual forma, a algunos de los individuos se les colocará el sensor continuo de glucosa. Además, se realizarán mediciones sobre el consumo de oxígeno tanto en reposo como durante la realización de la caminata (ejercicio) y, mediciones de temperatura y humedad ambientales.

Con el análisis de la información que se logre obtener de este experimento se espera que se pueda comenzar a establecer relaciones entre el movimiento cinético (mediante el modelo propuesto en este trabajo realizando las modificaciones que sean necesarias) durante la caminata (sobre caminadora de banda) y la metabolización de carbohidratos en individuos sanos, lo cual fue mencionado como parte de la motivación de esta tesis.

Una vez obtenidos resultados de la investigación relacionados con el movimiento cinético y metabolización de carbohidratos durante la caminata sería deseable estudiar otros aspectos involucrados en estas dos actividades. Uno de ellos es, la temperatura corporal.

Al inicio del proyecto se propuso el uso de una cámara termográfica para obtener información sobre la temperatura de diferentes partes del cuerpo del individuo voluntario durante las pruebas; sin embargo, durante los primeros experimentos se encontraron varios inconvenientes. Uno de ellos fue el error de precisión propio de la cámara, el cual se encuentra en $\pm 2^{\circ}\text{C}$ o $\pm 2\%$, lo cual parece ser considerable debido a que la temperatura corporal suele variar entre 35.5°C (en frío extremo) y 40°C (durante el ejercicio intenso) [17]. Sin embargo, existen estudios, como [33] y [36], en los que pese a que el rango de temperaturas en el cuerpo humano es muy corto, se utiliza equipo con error de precisión de $\pm 2^{\circ}\text{C}$ o $\pm 2\%$. Cabe mencionar que el artículo estudia la relación entre la temperatura corporal y la activación muscular durante el incremento en el ciclo de ejercicio, mientras que en el segundo se realiza una evaluación mediante termografía infrarroja sobre los cambios en la temperatura de la piel durante la hipoglucemia en pacientes con diabetes tipo 1; los cuales tienen relación con esta tesis. Sin embargo, en [34] se expone un estudio realizado para comparar la confiabilidad y validez entre el uso de termistores telemétricos y una cámara termográfica durante la realización de ejercicio. En dicho estudio se concluye que a pesar de que las cámaras termográficas suelen ser muy útiles para la medición estática de la temperatura corporal, no son recomendadas para estudios que impliquen el monitoreo en vivo durante el ejercicio; a diferencia de los termistores telemétricos, los cuales ofrecen una medición alternativa válida y confiable sobre la temperatura corporal en situación de ejercicio. La temperatura corporal en los seres humanos es un caso de estudio complejo, debido a que está influenciado por diversos factores que afectan, tanto las mediciones, como la situación que se desea estudiar. En [35] se estudian estos factores (para los casos en los que se implementa una cámara termográfica) y se menciona que, además de ser demasiados, es imposible tratar de controlarlos todos. Sin embargo,

profundizar en el conocimiento de ellos, ayudaría a evitar su influencia en los estudios que involucren esta tecnología, o por lo menos, saber que tan importantes son, y garantizar la veracidad de las conclusiones que pudieran surgir de este tipo de estudios.

La temperatura corporal complementaría “el estudio básico” de la caminata humana acoplada al proceso de metabolización de carbohidratos. Sin embargo, como se vio en el Capítulo 6, existen otros aspectos que podrían estar relacionados con la caracterización de la metabolización de carbohidratos, como es el estar sometido a condiciones de estrés controlado. Algunas de estas condiciones podrían ser, diferentes temperaturas ambientales y niveles de humedad, distintos niveles de esfuerzo (mayor velocidad, modificación en la inclinación de la caminadora de banda, peso adicional en las extremidades, entre otros), estrés visual y auditivo, etcétera. Referente a este diferente tipo de escenarios se deberá contar con instrumentación adicional con la que se pueda obtener datos sobre las diferentes entradas y salidas de nuestro sistema de estudio, el cuerpo humano. Algunos de los equipos en los que se ha pensado añadir al estudio se encuentran: equipos de realidad virtual, electromiógrafos y electrocardiógrafos. El conjunto de los aspectos mencionados en el trabajo pendiente y el trabajo a futuro no solo contribuiría en el estudio de las relaciones entre la marcha humana y la metabolización de carbohidratos, también ayudaría a contar con mayor información estadística sobre la población mexicana, la cual es difícil o imposible de encontrar debido a la escasez de estudios de este tipo.

Apéndices

En esta sección se presenta información adicional a lo presentado en los capítulos anteriores. En el **apéndice A** aparecen varias tablas con datos para calcular las medidas de los segmentos corporales con respecto a la altura y/o masa totales. Estas han sido tomadas de varias fuentes bibliográficas. En el **apéndice B**, se encuentran algunos preliminares matemáticos que complementan la información presentada en el capítulo 4 de esta tesis, el cual trata sobre el análisis dinámico del sistema. En el **apéndice C** aparecen algunos de los datos del equipo que se utilizó durante los experimentos relativos a la estimación paramétrica, discutida en el capítulo 5. Además, en el **apéndice D** se muestran las gráficas de los valores obtenidos de forma experimental.

Apéndice

A

A. REFERENCIAS SOBRE PARÁMETROS CORPORALES DEL SER HUMANO.

A.1. Longitud de los segmentos corporales

Segmento	Longitud segmento/Altura H
Altura de la cabeza	0.130
Altura cuello	0.052
Ancho de hombro	0.259
Brazo superior	0.186
Brazo inferior	0.146
Mano	0.108
Ancho torso	0.174
Ancho cadera/separación piernas	0.191
Pierna superior (muslo)	0.245
Pierna inferior (pantorrilla)	0.246
Tobillo a debajo del pie	0.039
Ancho pie	0.055
Longitud pie	0.152

Tabla A.1. Longitudes de los segmentos corporales [18].

A.2. Masa, densidad y centro de masa de los segmentos corporales

Segmento	Masa del segmento/Masa total	Densidad de masa
Mano	0.006	1.160
Antebrazo	0.016	1.130
Brazo superior	0.028	1.070
Antebrazo y mano	0.022	1.140
Brazo Total	0.050	1.110
Pie	0.015	1.100
Pierna parte inferior (pantorrilla)	0.047	1.090
Pierna parte superior (muslo)	0.100	1.050
Pie y pierna inferior	0.061	1.090
Pierna Total	0.161	1.060
Cabeza y cuello	0.081	1.110
Torso	0.497	1.030

Tabla A.2. Masas y densidades de masa de los segmentos corporales [18].

Segmento	Centro de masa	
	proximal	distal
Mano	0.506	0.494
Antebrazo	0.430	0.570
Brazo superior	0.436	0.564
Antebrazo y mano	0.682	0.318
Brazo Total	0.530	0.470
Pie	0.500	0.500
Pierna inferior (pantorrilla)	0.433	0.567
Pierna superior (muslo)	0.433	0.670
Pie y pierna inferior	0.606	30.394
Pierna Total	0.447	0.553
Cabeza y cuello	1.000	-
Torso	0.500	0.500

Tabla A.3. Distancia del centro de masa desde cualquier terminación del segmento, normalizada por la longitud del segmento [18].

Segmento	Ecuación	Coefficiente de correlación	Error estándar kg
Pie	$Y = 0.259 + 0.01X$	0.66	0.107
Pantorrilla	$Y = 0.141 + 0.041X$	0.86	0.226
Muslo	$Y = -0.799 + 0.153X$	0.89	0.717
Mano	$Y = 0.109 + 0.0046X$	0.58	0.060
Antebrazo	$Y = 0.165 + 0.0139X$	0.78	0.102
Brazo parte superior	$Y = -0.142 + 0.029X$	0.83	0.178
Cabeza y cuello	$Y = 3.243 + 0.024X$	0.57	0.327
Parte superior del torso	$Y = -0.078 + 0.161X$	0.78	1.176
Parte media del torso	$Y = -2.222 + 0.194X$	0.82	1.268
Parte inferior del torso	$Y = -0.348 + 0.117X$	0.71	1.051

Tabla A.4. Ecuaciones de regresión para la predicción de la masa de los segmentos corporales, a partir de la masa total corporal (X,kg) de un hombre adulto (estudio realizado en población rusa) [22].

Segmento	Peso (N)	Localización del CoM (%)	Extremo proximal del segmento
Cabeza	$0.032 F_w + 18.70$	66.3	Vertex
Torso	$0.532 F_w - 6.93$	52.2	C1
Brazo parte superior	$0.22 F_w + 4.76$	50.7	Articulación hombro
Antebrazo	$0.013 F_w + 2.41$	41.7	Articulación codo
Mano	$0.005 F_w + 0.75$	51.5	Articulación muñeca
Muslo	$0.127 F_w - 14.82$	39.8	Articulación cadera
Pantorrilla	$0.044 F_w - 1.75$	41.3	Articulación rodilla
Pie	$0.009 F_w + 2.48$	40.0	Talón

Tabla A.5. Ecuaciones de regresión para la predicción de la masa y localización del centro de masa de los segmentos corporales, a partir de la masa total corporal (F_w ,kg) (datos obtenidos de cadáveres) [21].

A.3. Radios de giro segmentos corporales

Segmento	Radio de giro con respecto a		
	CoM	proximal	distal
Mano	0.297	0.587	0.577
Antebrazo	0.303	0.526	0.647
Brazo superior	0.322	0.542	0.645
Antebrazo y mano	0.468	0.827	0.565
Brazo Total	0.368	0.645	0.596
Pie	0.475	0.690	0.690
Pierna inferior (pantorrilla)	0.302	0.528	0.643
Pierna superior (muslo)	0.323	0.540	0.653
Pie y pierna inferior	0.416	0.735	0.672
Pierna Total	0.326	0.560	0.650
Cabeza y cuello	0.495	0.116	-

Tabla A.6. Radio de giro de un segmento, con respecto al centro de masa y cualquiera de sus terminaciones, normalizado por la longitud del segmento [28].

A.4. Momentos de inercia de los segmentos corporales (Cadáveres)

Ecuaciones basadas en la longitud l y un perímetro promedio p . Para los segmentos con tres perímetros, el perímetro promedio p es calculado como $p = (p_1 + 2p_2 + p_3)/4$; para la mano, $p = (p_1 + p_2)/2$; para la cabeza, $p = p_1$.

Para el torso, el ancho promedio es calculado como $w = (w_1 + 2w_2 + w_3)/4$. Los ejes principales de inercia x, y y z están alineados con los ejes anatómicos, anteroposterior medio lateral y longitudinal, correspondientemente.

Dado que los momentos de inercia con respecto de los ejes anteroposterior y medio lateral están cerca de los segmentos corporales diferentes al torso, son reemplazados por el momento de inercia transversal, $I_t = I_x = I_y$. Para estos segmentos, fueron desarrolladas las siguientes ecuaciones de regresión:

$$I_z = k_1 p^4 h$$

$$I_t = \frac{1}{2} I_z + k_2 p^2 h^3$$

Donde las mediciones lineales están en metros y los momentos de inercia están en $kg \cdot m^2$. Los valores para k_1 y k_2 están dados en la **Tabla A.7**, y las dimensiones anatómicas usadas en las ecuaciones son descritas en la **Tabla A.8**. Para el torso, los momentos de inercia segmentales están dados por:

$$I_x = dwh(c_2 w^2 + c_3 h^2)$$

$$I_y = dwh(c_1 d^2 + c_3 h^2)$$

$$I_z = dwh(c_1 d^2 + c_2 w^2)$$

Donde d es el promedio de la profundidad calculada como $d = (p - 2w)/(\pi - 2)$. Los valores de los coeficientes son $c_1 = 49.4$, $c_2 = 55.0$ y $c_3 = 68.8$.

Segmento	k_1	k_2
Cabeza	0.701	2.33
Brazo parte superior	0.979	6.11
Brazo parte inferior	0.810	4.98
Mano	1.309	7.68
Muslo	1.593	8.12
Pantorrilla	0.853	5.73
Pie	1.001	3.72

Tabla A.7. Valores de los coeficientes k_1 y k_2 para los segmentos corporales diferentes del torso [22].

Segmento	Variable	Definición
Cabeza	h p_1	Longitud: barbilla al vértice Perímetro: arriba de la oreja
Torso	h p_1, w_1 p_2, w_2 p_3, w_3	Longitud: Trocánter al acromion Perímetro, ancho: pezón Perímetro, ancho: ombligo Perímetro, ancho: cadera
Brazo parte superior	h p_1 p_2 p_3	Longitud: centro del hombro al centro del codo Perímetro: debajo de la axila Perímetro: máximo Perímetro: codo
Brazo parte inferior	h p_1 p_2 p_3	Longitud: centro del codo al centro de la cadera Perímetro: codo Perímetro: máximo Perímetro: muñeca
Mano	h p_1 p_2	Longitud: centro de la mano a la punta del dedo medio Perímetro: muñeca Perímetro: articulación metacarpo-falangeal
Muslo	h p_1 p_2 p_3	Longitud: centro de la cadera a rodilla (centro) Perímetro: bajo el glúteo Perímetro: muslo medio Perímetro: rodilla
Pantorrilla	h p_1 p_2 p_3	Longitud: centro de la rodilla a centro de tobillo Perímetro: rodilla Perímetro: máximo Perímetro: mínimo cerca de tobillo
Pie	h p_1 p_2 p_3	Longitud: talón al dedo del pie Perímetro: mínimo cerca de tobillo Perímetro: arco Perímetro: bola

Tabla A.8. Dimensiones anatómicas utilizadas por las ecuaciones de regresión no lineal en el cálculo del momento de inercia segmental [22].

A.5. Estimación del momento inercial a partir de modelos geométricos.

Cuerpo	Masa	Centro de masa, h_c	Principal momento de inercia
Cilindro circular	$\rho \cdot \pi r^2 h$	$h/2$	$I_x = I_y = m \frac{1}{12} (3r^2 + h^2)$ $I_z = \frac{1}{2} m r^2$
Cilindro elíptico	$\rho \cdot \pi a b h$	$h/2$	$I_x = \frac{1}{4} m a^2 + \frac{1}{12} m h^2$ $I_y = \frac{1}{4} m b^2 + \frac{1}{12} m h^2$ $I_z = \frac{1}{4} m (a^2 + b^2)$

Tabla A.9. Ecuaciones para la obtención de propiedades inerciales basadas en modelos geométricos¹ [20].

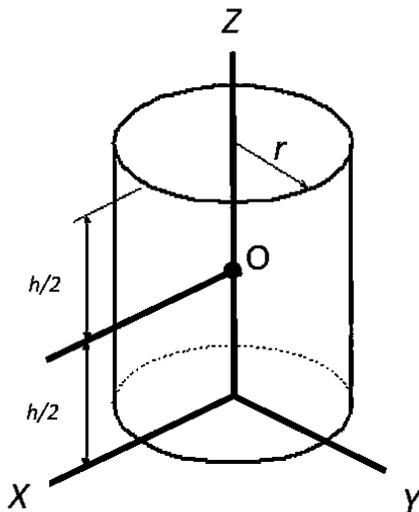


Figura A.9.1. Cilindro circular

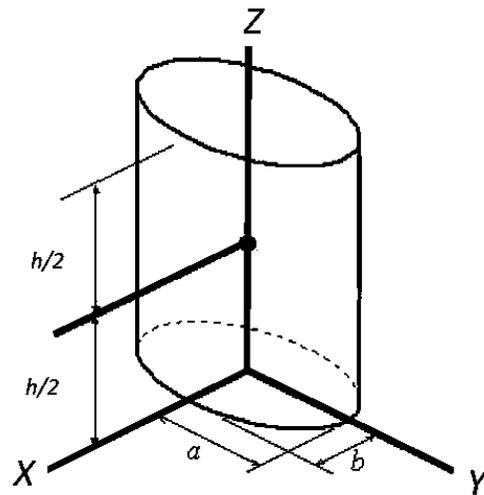


Figura A.9.2. Cilindro elíptico

A.6. Propiedades inerciales de los segmentos corporales (in vivo)

¹ **Notas.** ρ es la densidad del segmento. Para encontrar la masa de un sólido, su volumen es multiplicado por la densidad ρ . La localización del CoM está indicada desde el extremo proximal, esto es, el extremo con el área más grande.

Coefficientes de regresión múltiple para ecuaciones para estimar las propiedades inerciales de los segmentos corporales de un individuo masculino, a partir de la masa y el peso conocidos.

Las ecuaciones son de la forma $y = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2$, donde X_1 es el peso del cuerpo en kilogramos, X_2 es la altura corporal en centímetros, y Y es una característica masa-inercial. R es un coeficiente múltiple de correlación; σ es el error estándar. Durante las mediciones de altura, los sujetos permanecieron erguidos, talones juntos, la cabeza estaba en el plano Frankfort.

Las Tablas **A.10 a A.14 muestran los coeficientes de regresión múltiple para estimar las propiedades inerciales de los segmentos corporales de un individuo masculino, una vez que se conocen la masa y la altura [22].**

Segmento	B_0	B_1	B_2	R	σ
Pie	-0.829	0.0077	0.0073	0.702	0.101
Pantorrilla	-1.592	0.0362	0.0121	0.872	0.219
Muslo	-2.649	0.1463	0.0137	0.891	0.721
Mano	-0.1165	0.0036	0.00175	0.516	0.063
Antebrazo	0.3185	0.01445	-0.00114	0.786	0.101
Brazo parte superior	0.25	0.03012	-0.0027	0.837	0.178
Cabeza y cuello	1.296	0.0171	0.0143	0.591	0.322
Parte superior del torso	8.2144	0.1862	-0.0584	0.798	1.142
Parte media del torso	7.181	0.2234	-0.0663	0.828	1.238
Parte inferior del torso	-7.498	0.0976	0.04896	0.743	1.020

Tabla A.10. Masa de los segmentos (*kg*).

El CoM es medicio desde los siguientes puntos antropométricos: pie-la punta del segundo dedo del pie; pantorrilla-tibia; muslo-iliospinale; mano-tercer datyilion; antebrazo-styilion; brazo parte superior-raiale; cabeza-vertex; torso parte superior- cervical; torso parte media- xiphion; torso parte inferior- omphalion.

Segmento	B_0	B_1	B_2	R	σ
Pie	3.767	0.065	0.033	0.530	1.1
Pantorrilla	-6.05	-0.039	0.142	0.510	1.25
Muslo	-2.42	0.038	0.135	0.600	1.31
Mano	4.11	0.026	0.033	0.383	1.12
Antebrazo	0.192	-0.028	0.093	0.371	1.14
Brazo parte superior	1.67	0.03	0.054	0.368	1.4
Cabeza y cuello	8.357	-0.0025	0.023	0.288	0.69
Parte superior del torso	3.32	0.0076	0.047	0.258	1.19
Parte media del torso	1.398	0.0058	0.045	0.437	1.18
Parte inferior del torso	1.182	0.0018	0.0434	0.320	1.0

Tabla A.11. Posición del CoM a lo largo del eje longitudinal (cm).

Segmento	B_0	B_1	B_2	R	σ
Pie	-100	0.480	0.626	0.75	6.8
Pantorrilla	-1105	4.59	6.63	0.85	48.6
Muslo	-3557	31.7	18.61	0.84	248
Mano	-19.5	0.17	0.116	0.50	3.7
Antebrazo	-64	0.95	0.34	0.71	10.2
Brazo parte superior	-250.7	1.56	1.512	0.62	27.6
Cabeza y cuello	-78	1.171	1.519	0.40	42.5
Parte superior del torso	81.2	36.73	-5.97	0.73	297
Parte media del torso	618.5	39.8	-12.87	0.81	237
Parte inferior del torso	-1.568	12	7.741	0.69	156

Tabla A.12. Momento de inercia con respecto al eje anteroposterior ($kg \cdot cm^2$).

Segmento	B_0	B_1	B_2	R	σ
Pie	-97.09	0.414	0.614	0.77	5.77
Pantorrilla	-1.152	4.594	6.815	0.85	49
Muslo	-3.690	32.02	19.24	0.85	244
Mano	-13.68	0.088	0.092	0.43	2.7
Antebrazo	-67.9	0.855	0.376	0.71	9.6
Brazo parte superior	-232	1.525	1.343	0.62	26.6
Cabeza y cuello	-112	1.43	1.73	0.49	40
Parte superior del torso	367	18.3	-5.73	0.66	171
Parte media del torso	263	26.7	-8.0	0.78	175
Parte inferior del torso	-934	11.8	3.44	0.73	117

Tabla A.13. Momento de inercia con respecto al eje mediolateral ($kg \cdot cm^2$)

Segmento	B_0	B_1	B_2	R	σ
Pie	-15.48	0.144	0.088	0.355	2.7
Pantorrilla	-70.5	1.134	0.3	0.74	2.2
Muslo	-13.5	11.3	-2.28	0.89	49
Mano	-6.26	0.0762	0.0347	0.43	1.8
Antebrazo	5.66	0.306	-0.088	0.66	2.9
Brazo parte superior	-16.9	0.662	0.0435	0.44	12.5
Cabeza y cuello	61.6	1.72	0.0814	0.42	35.6
Parte superior del torso	561	36.03	-9.98	0.81	212
Parte media del torso	1501	43.14	-19.8	0.87	188
Parte inferior del torso	-775	14.7	1.685	0.78	116

Tabla A.14. Momento de inercia con respecto al eje longitudinal ($kg \cdot cm^2$).

Apéndice
B

B.1. Modelo matemático HW

$$U(t, q) = M(t, q)\ddot{q} + \mathcal{C}(t, q)\dot{q} + \mathcal{D}(t, q)\dot{q} + G(t, q)$$

Donde:

$$M_{11} = I_{1xx}$$

$$M_{22} = I_{1yy}$$

$$M_{33} = I_{1zz}$$

$$M_{44} = m_1$$

$$M_{55} = m_2(\delta_2 + l_{c2})^2 + m_3(\delta_2 + l_2)^2 + \beta - 2\alpha(\delta_2 + l_2) \cos(2\theta_2 - \theta_3) + I_2$$

$$M_{56} = -\beta + \alpha(\delta_2 + l_2) \cos(2\theta_2 - \theta_3) + I_3$$

$$M_{57} = -\alpha \sin(2\theta_2 - \theta_3)$$

$$M_{66} = \beta + I_3$$

$$M_{67} = \alpha \sin(2\theta_2 - \theta_3)$$

$$M_{77} = 2(\mu)$$

$$M_{88} = m_4(\delta_3 + l_{c4})^2 + m_5(\delta_3 + l_4)^2 + \beta - 2A(\delta_3 + l_4) \cos(2\theta_4 - \theta_5) + I_4$$

$$M_{89} = -B + A(\delta_3 + l_4) \cos(2\theta_4 - \theta_5) + I_5$$

$$M_{80} = -A \sin(2\theta_4 - \theta_5)$$

$$M_{99} = B + I_5$$

$$M_{90} = A \sin(2\theta_4 - \theta_5)$$

$$M_{00} = 2(N)$$

$$C_{55} = [4\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\theta}_2 + [-4\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_3 \\ + [2m_2(\delta_2 + l_{c2}) + 2m_3(\delta_2 + l_2) - 2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)] \dot{\delta}_2$$

$$C_{56} = [\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_3 + [2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\delta}_2$$

$$C_{65} = [-2\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 - \theta_3) - \alpha(\delta_2 + l_2) \sin(\theta_3)]\dot{\theta}_2 \\ + [\alpha(\delta_2 + l_2) \sin(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\theta}_3 + [2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\delta}_2$$

$$\begin{aligned}
C_{66} &= [-2\alpha \cos(2\theta_2 - \theta_3)]\dot{\delta}_2 \\
C_{75} &= [-\alpha \cos(2\theta_2 + \theta_3) - (\mu)\delta_2 - \gamma - \varepsilon]\dot{\theta}_2 + [2\alpha \cos(2\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_3 \\
C_{76} &= [-\alpha \cos(2\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_3 \\
C_{88} &= [4A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\theta}_4 + [-4A(\delta_4 + l_4) \sin(2\theta_4 + \theta_5)]\dot{\theta}_5 \\
&\quad + [2m_4(\delta_4 + l_{c4}) + 2m_5(\delta_4 + l_4) - 2A\cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_3 \\
C_{89} &= [A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 + \theta_5)]\dot{\theta}_5 + [2A \cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_4 \\
C_{98} &= [-2A(\delta_3 + l_4) \sin(2\theta_4 - \theta_5) - A(\delta_3 + l_4) \sin(\theta_5)]\dot{\theta}_4 \\
&\quad + [A(\delta_4 + l_4) \sin(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\theta}_5 + [2A \cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_3 \\
C_{99} &= [-2A \cos(2\theta_4 - \theta_5)]\dot{\delta}_3 \\
C_{08} &= [-A \cos(2\theta_4 + \theta_5) - (N)\delta_3 - \Gamma - E]\dot{\theta}_5 + [2A \cos(2\theta_4 + \theta_5)]\dot{\theta}_5 \\
C_{09} &= [-A \cos(2\theta_4 + \theta_5)]\dot{\theta}_5 \\
D_{11} &= b_{1_x} \\
D_{22} &= b_{1_y} \\
D_{33} &= b_{1_{z1}} \\
D_{44} &= b_{1_{z2}} \\
D_{66} &= b_2 \\
D_{00} &= b_3 \\
G_1 &= k_{1_x}\theta_{1_x} + m_1gl_{c1} \sin(\theta_{1_x}) \\
G_2 &= k_{1_y}\theta_{1_y} + m_1gl_{c1} \sin(\theta_{1_y}) \\
G_3 &= k_{1_{z1}}\theta_{1_{z1}} + m_1gl_{c1} \sin(\theta_{1_z}) \\
G_4 &= k_{1_{z2}}\delta_{1_{z2}} + m_1g \\
G_5 &= -\gamma g \sin(\theta_2) - \varepsilon g \sin(\theta_2) - \alpha g \sin(\theta_2 - \theta_3) \\
G_6 &= -\alpha g \sin(\theta_2 - \theta_3) \\
G_7 &= k_2\delta_2 \\
G_8 &= -\Gamma g \sin(\theta_4) - E g \sin(\theta_4) - A g \sin(\theta_4 - \theta_5) \\
G_9 &= -A g \sin(\theta_4 - \theta_5) \\
G_{10} &= k_3\delta_3
\end{aligned}$$

$$\alpha = m_3 l_{c3}$$

$$\beta = m_3 l_{c3}^2$$

$$\gamma = m_2 l_{c2}$$

$$\varepsilon = m_3 l_2$$

$$\mu = m_2 + m_3$$

$$\varphi = m_1 l_{c1}$$

$$A = m_5 l_{c5}$$

$$B = m_5 l_{c5}^2$$

$$\Gamma = m_4 l_{c4}$$

$$E = m_5 l_4$$

$$N = m_4 + m_5$$

B.2. Preliminares matemáticos

Dependencia continua del tiempo inicial.

La dependencia continua del tiempo inicial resulta de la integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Sean $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ y $y(t) = x_0 + \int_{t'_0}^t f(s, y(s)) ds$

Donde $t'_0 \geq t_0$. Entonces

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t'_0} f(s, x(s)) ds + \int_{t'_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds$$

Además, se tienen $\|f(s, x(s))\| \leq M$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, y $\|f(s, y) - f(s, x)\| \leq L\|x - y\|$. Por lo tanto

$$\|x(t) - y(t)\| \leq M(t'_0 - t_0) + \int_{t'_0}^t L\|x(s) - y(s)\| ds$$

Por la desigualdad de Grownwall-Bellman

$$||x(t) - y(t)|| \leq M(t'_0 - t_0)e^{L(t-t'_0)}$$

Y por consiguiente, sobre cualquier intervalo compacto de tiempo, se tiene

$$||x(t) - y(t)|| \leq K(t'_0 - t_0)$$

Concluyendo así la dependencia continúa del tiempo inicial.

■

Traslación del punto de equilibrio al origen

Dado que los puntos de equilibrio del modelo en cuestión, son tales que $x^* \neq 0$, se considera el cambio de variables $\zeta = x - x^*$. La derivada de ζ esta dada por

$$\dot{\zeta} = \dot{x} = f(x) = f(\zeta + x^*) \stackrel{\text{def}}{=} g(\zeta), \quad \text{donde } g(0) = 0$$

En la nueva variable ζ , el sistema tiene un equilibrio en el origen. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, se asume que $f(x)$ satisface $f(0) = 0$ y se estudiará la estabilidad del origen en $x = 0$.

Apéndice
C

C.1. Localización de los sensores de movimiento.

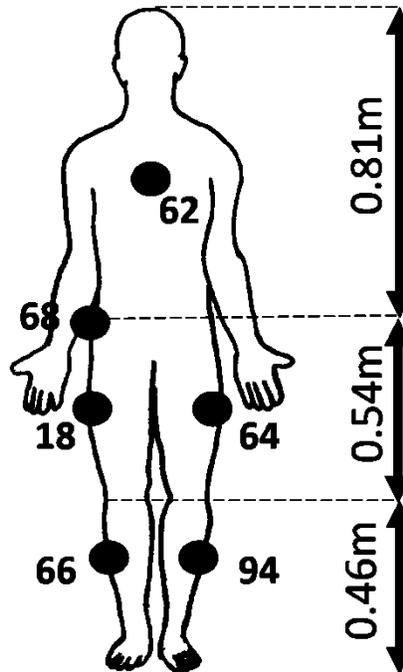


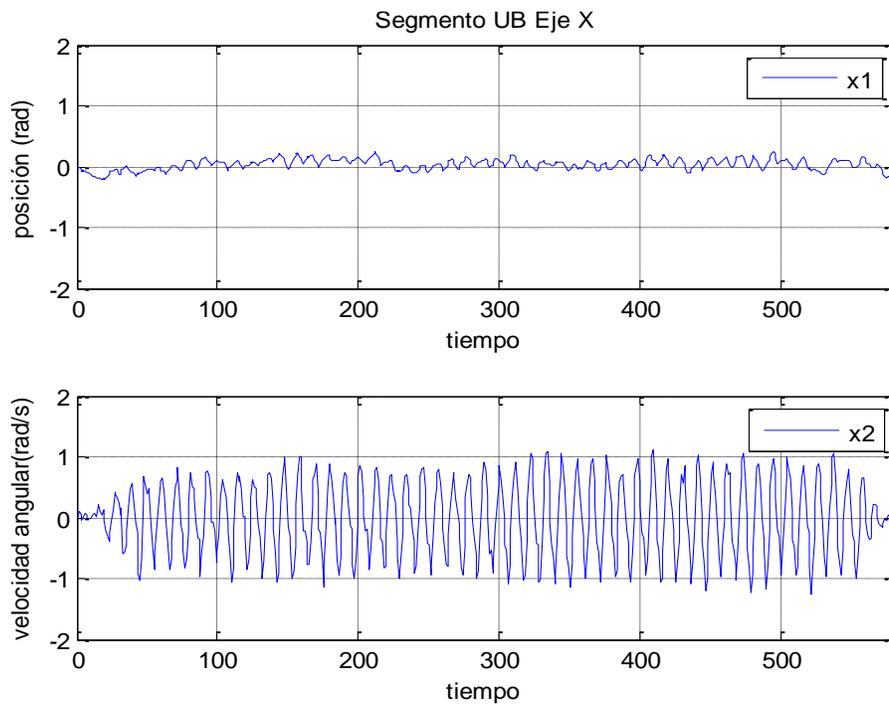
Figura C.1 Localización de los sensores (CM)

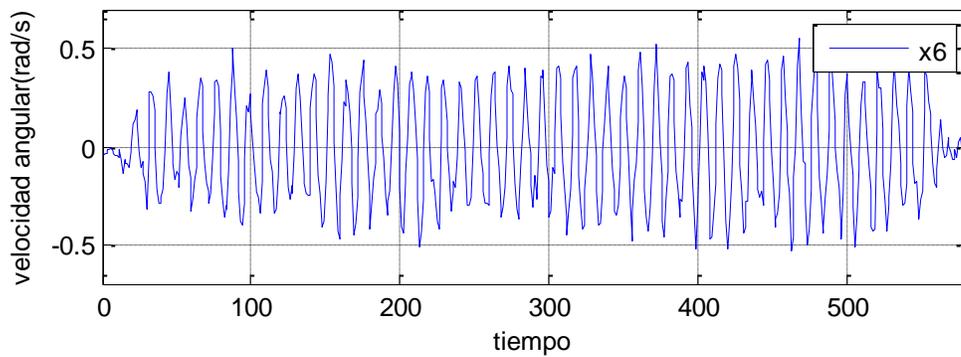
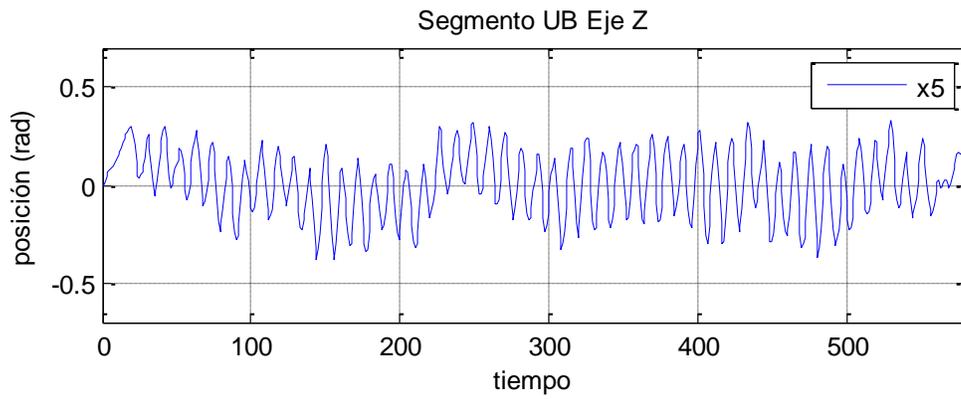
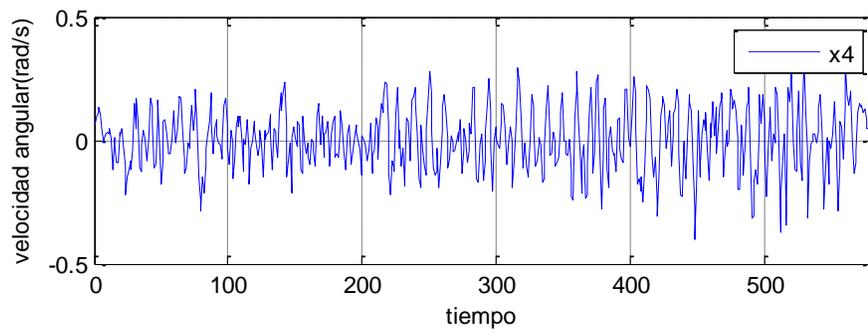
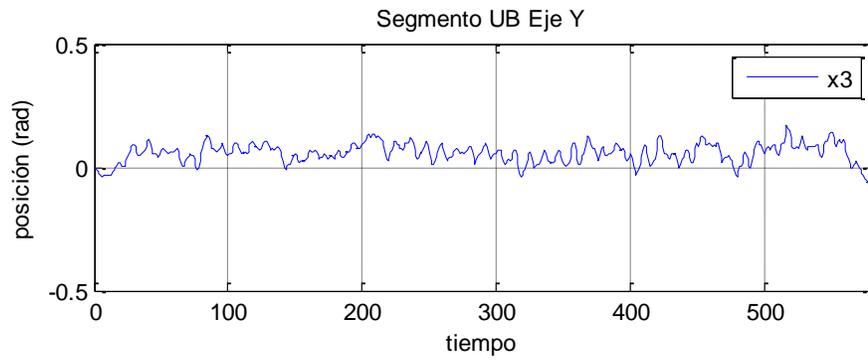
El MTx es un instrumento inercial miniatura utilizado para sensar la orientación. Este sensor proporciona una orientación 3D sin desviación, al igual que datos cinemáticos: aceleración 3D, tasa de giro 3D (giroscopio), y el campo magnético de la Tierra 3D. Una de las aplicaciones más comunes de este instrumento es para medir la orientación de los segmentos del cuerpo humano.

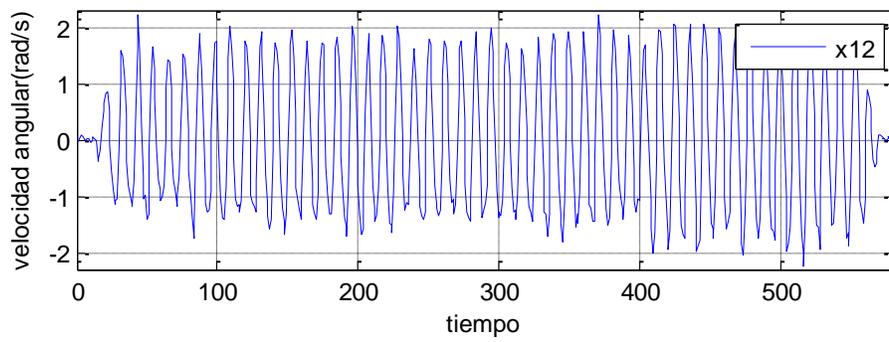
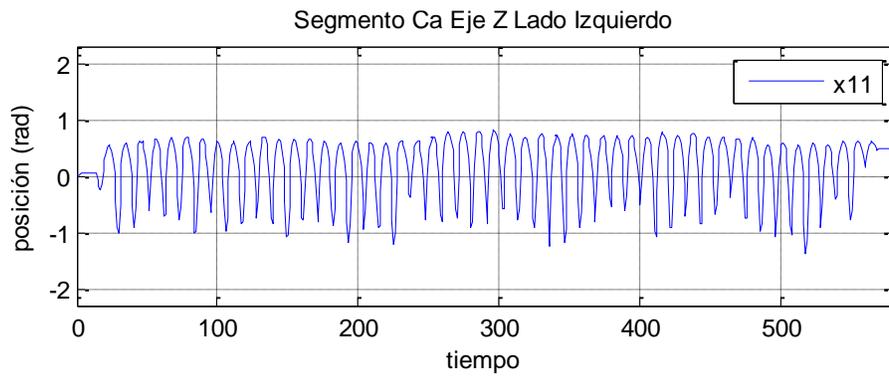
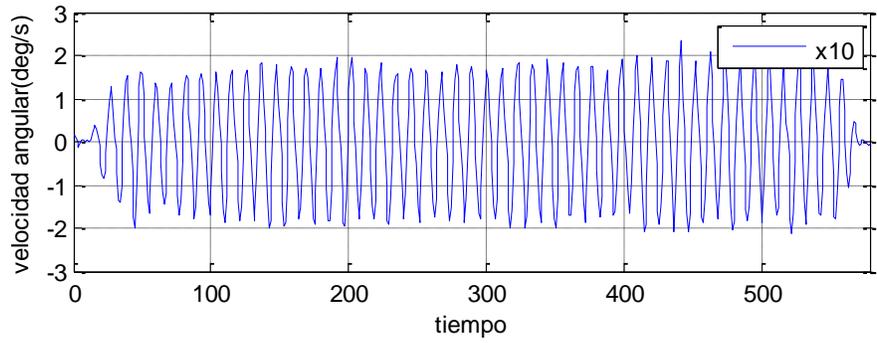
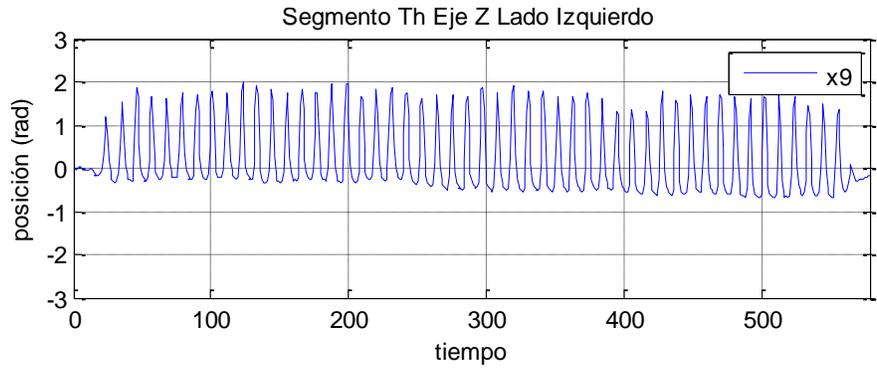
La orientación del MTx es calculada por el filtro de Kalman de Xsens para una orientación a través de 3 grados de libertad (3GDL). www.xsens.com.

Apéndice
D

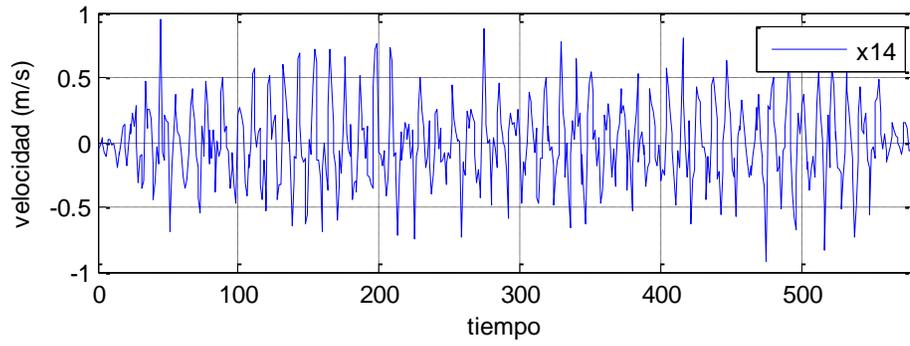
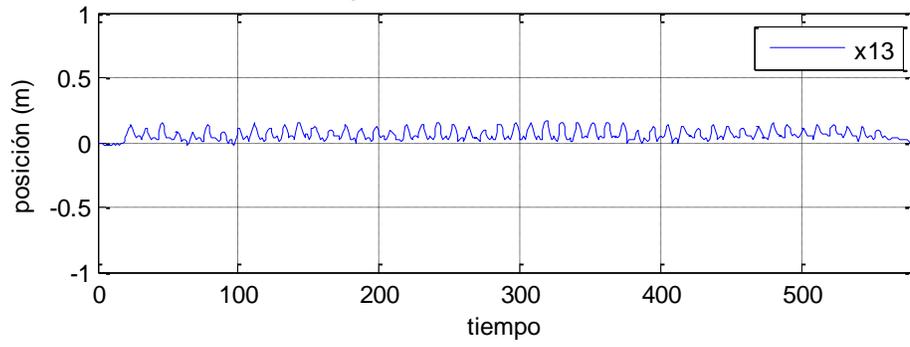
D.1. Graficas de los datos experimentales.



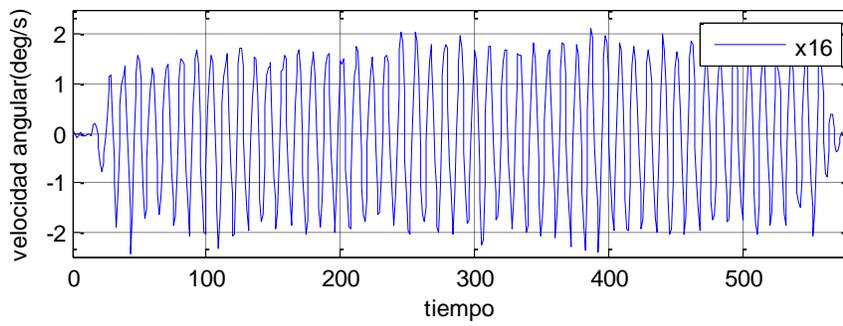
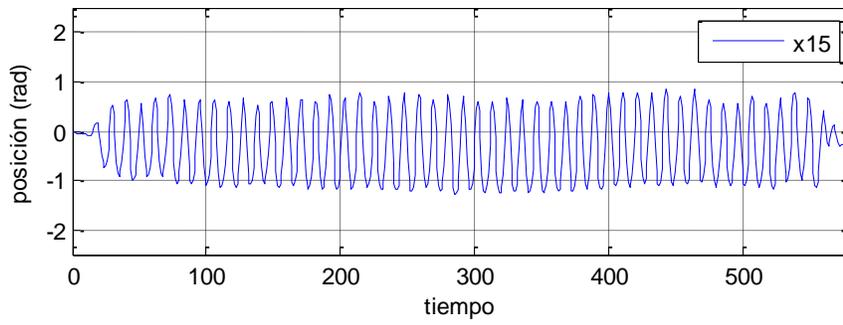




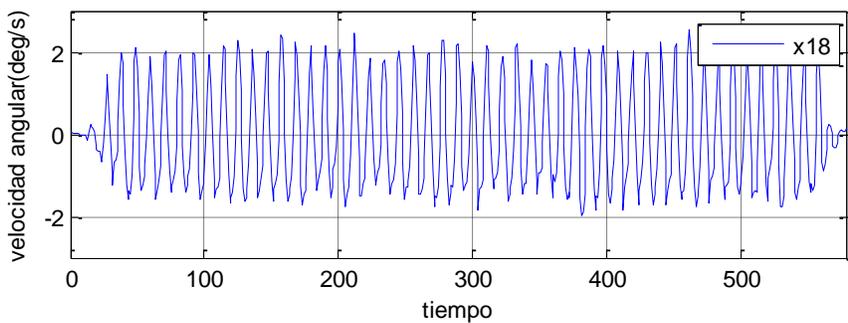
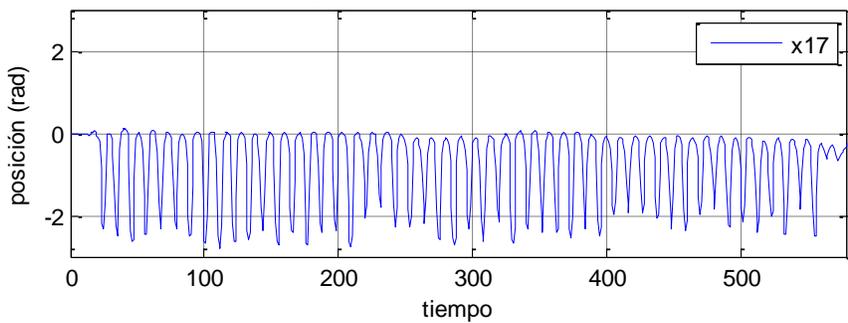
Segmento Th Eje X Lado Izquierdo



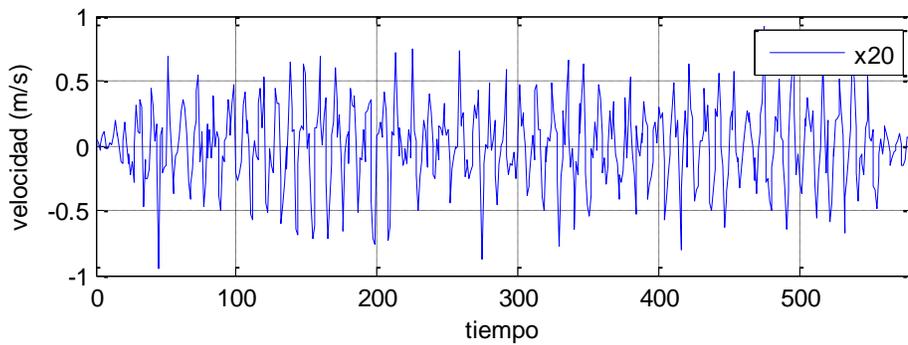
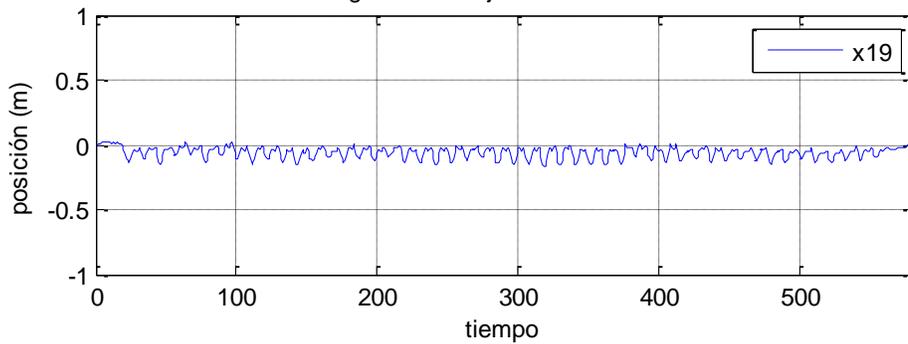
Segmento Th Eje Z Lado Derecho



Segmento Ca Eje Z Lado Derecho



Segmento Th Eje X Lado Derecho



Bibliografía

- [1] H. Goldstein, C. Poole y J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley.
- [2] S. Widnall, «Lecture L20 -Energy Methods: Lagrange's Equations,» MIT OpenCourseWare, 2009.
- [3] C. Ferrario y A. Passerini, «Transformation properties of the Lagrange function,» *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 30, nº 3, p. 3306, 2008.
- [4] L. E. Contreras Bravo, «Modelamiento de la marcha humana por medio de gráficos de unión,» *Con-ciencias*, nº 16, vol.2, pp. 26-42, 2005.
- [5] R. McNeill Alexander, «Simple Models of Human Locomotion,» *Journal of Theoretical Medicine*, vol. 2, pp. 129-135, 1996.
- [6] A. Seyfarth, H. Geyer, M. G.unther y R. Blickhan, «A movement criterion for running,» *Journal of Biomechanics*, vol. 35, pp. 649-655, 2002.
- [7] D. R. Peterson y R. S. Adrezin, *BIODYNAMICS: A LAGRANGIAN APPROACH*, Connecticut: McGraw-Hill, 2004.
- [8] D. Knudson, *Fundamentals of Biomechanics*, USA: Springer, 2007.
- [9] S. P. Ayodeji y M. K. Adeyeri, «Development and Performance Evaluation of a Leg and Arm Exercise Machine,» *Canadian Journal on Computing in Mathematics, Natural Sciences, Engineering and Medicine*, vol. 4, nº 2, pp. 146-152, 2013.
- [10] K. M. Knutzen, W. L. McLaughlin, A. J. Lawson, B. S. Row y L. Tyson Martin, «Influence of Ramp Position on Joint Biomechanics During Elliptical Trainer Exercise,» *The Open Sports Sciences Journal*, vol. 3, pp. 165-177, 2010.
- [11] S. M. Bruijn, O. G. Meijer, P. J. Beek y J. H. van Dieën, «The effects of arm swing on human gait stability,» *The Journal of Experimental Biology*, vol. 213, pp. 3945-3952, 2010.
- [12] T. Jurcevic Lulic y O. Muftic, «Trajectory of the human body mass centre during walking at different speed,» *International Design Conference*, pp. 797-802, 2002.
- [13] V. Zatsiorsky y V. & C. L. Seluyanov, «Methods of determining mass-inertial characteristics of human body segments,» *Contemporary Problems of Biomechanics*, pp. 272-291, 1990.
- [14] P. DeLeva, «Adjustments to Zatsiorsky-Seluyanov's segment inertia parameters,» *Journal of Biomechanics*, vol. 29, nº 9, pp. 1223-1230, 1996.
- [15] M. W. Spong, , S. Hutchinson y M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, Wiley, 2006.
- [16] M. Arasa Gil, *Manual de nutrición deportiva*, Barcelona, España: Paidotribo, 2005.
- [17] A. C. Guyton y J. E. Hall, *Fisiología médica*, Decimoprimera ed., Elsevier, 2006.

- [18] I. P. Herman, *Physics of the human body*, New York, New York: Springer, 2007.
- [19] H. Kimura, K. Tsuchiya, A. Ishiguro y H. Witte, *Adaptive motion of animals and machines*, Hirakawa Kogyosha, Japan: Springer, 2006.
- [20] D. A. Winter, *Biomechanics and motor control of human movement*, Waterloo, Ontario, Canada: Wiley, 2009.
- [21] R. M. Enoka, *Neuromechanics of human movement*, United States of America: Human Kinetics, 2008.
- [22] V. M. Zatsiorsky, *Kinetics of human motion*, United States of America: Human Kinetics, 2002.
- [23] T. P. Andriacchi y E. J. Alexander, «Studies of human locomotion: past, present and future,» *Journal of Biomechanics*, vol. 33, nº 10, pp. 1217-1224, 2000.
- [24] D. T. Greenwood, *Classical dynamics*, Mineola, N.Y.: Dover publications, 1997.
- [25] L. Ljung, *System Identification*, Upper Sadle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1999.
- [26] R. Ortega, A. Loría, P. J. Nicklasson y H. Sira-Ramírez, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*, London: Springer, 1998.
- [27] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, Upper Sannle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [28] W. F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, San Antonio, TX, USA: Library of Congress Cataloging-in-PublicationData, 2003.
- [29] R. Kelly, V. Santibáñez Davila y A. Loría, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, London: Springer, 2005.
- [30] J. Raol, G. Girija y J. Singh, *Modelling and parameter estimation of dynamic systems*, London: The Institution of Electrical Engineers, 2004.
- [31] A. D. Lewis, «Lagrangian Mechanics, Dynamics and Control,» 03 Abril 2003. [En línea]. Available: <http://caos.fs.usb.ve/libros/Mechanics/Lagrangian%20Mechanics,%20Dynamics%20&%20Control-Andrew%20-%20D.%20Lewis.pdf>. [Último acceso: 2015].
- [32] H. Essén, «Average angular velocity,» *European Journal of Physics*, nº 14, pp. 201-205, 1992.
- [33] J. I. P. Quesada, F. P. Carpes, R. R. Bini, R. S. Palmer, P. Pérez-Soriano y R. M. Cibrián Ortiz de Anda, «Relationship between skin temperature and muscle activation during incremental cycle exercise,» *Journal of Thermal Biology*, vol. 48, pp. 28-35, 2014.
- [34] C. James, A. Richardson, P. Watt y N. Maxwell, «Reliability and validity of skin temperature measurement by telemetry thermistors and a thermal camera during exercise in the heat,» *Journal of Thermal Biology*, vol. 45, pp. 141-149, 2014.

- [35] I. Fernández-Cuevas, J. C. Bouzas Marins, L. J. Arnáiz, P. M. Gómez Carmona, S. Piñonosa Cano, M. Á. García-Concepción y M. Sillero-Quintana, «Classification of factors influencing the use of infrared thermography in humans: A review,» *Infrared Physics & Technology*, vol. 71, pp. 28-55, 2014.
- [36] A.-S. Sejling, K. H. Lange, C. S. Frandsen, S. S. Diemar, L. Tarnow, J. Faber, J. J. Holst, B. Hartmann, L. Hilsted, T. W. Kjaer, C. B. Juhl, B. Thorsteinsson y U. Pedersen-Bjergaard, «Infrared thermographic assessment of changes in skin temperature during hypoglycaemia in patients with type 1 diabetes,» *Diabetologia*, vol. 58, pp. 1898-1906, 2015.
- [37] S. J. Park, S. C. Park, J. H. Kim y C.-B. Kim, «Biomechanical parameters on body segments of Korean adults,» *International Journal of Industrial Ergonomics*, vol. 23, pp. 23-31, 1997.
- [38] R. Contini, «Body Segments Parameters, Part II,» *Artificial Limbs*, vol. 16, pp. 1-19, 1972.
- [39] W. Dempster, W. Gabel y W. L. Felts, «The anthropometry of manual work space for the seated subjects,» *Am. J. Phys. Anthropol.*, vol. 17, pp. 289-317, 1959.
- [40] T. McGeer, «Passive Dynamic Walking,» *The International Journal of Robotics Research*, vol. 9, nº 2, 1990.
- [41] N. Özkaya, M. Nordin, D. Goldsheyder y D. Leger, *Fundamentals of Biomechanics*, New York: Springer, 2012.
- [42] F. E. Zajac, R. R. Neptune y S. A. Kautz, «Biomechanics and muscle coordination of human walking. Part II: Lessons from dynamical simulations and clinical implications,» *Gait & Posture*, vol. 17, pp. 1-17, 2003.
- [43] F. E. Zajac, R. R. Neptune y S. A. Kautz, «Biomechanics and muscle coordination of human walking. Part I: Introduction to concepts, power transfer, dynamics and simulations,» *Gait & Posture*, vol. 16, pp. 215-232, 2002.
- [44] M. Garcia, A. Chatterjee, A. Ruina y M. Coleman, «The simplest walking model: stability, complexity, and scaling,» *ASME Journal of Biomechanical Engineering*, 1998.
- [45] S. H. Collins, *Dynamic Walking Principles Applied to Human Gait*, Michigan: The University of Michigan, 2008.
- [46] F. C. Anderson y M. G. Pandy, «Dynamic Optimization of Human Walking,» *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 123, pp. 381-390, 2001.
- [47] D. R. Peterson y R. S. Adrezin, *Biodynamics: a lagrangian approach*, Connecticut: McGraw-Hill, 2004.
- [48] R. Blickhan, «The spring-mass model for running and hopping,» *Journal of Biomechanics*, vol. 22, nº 11/12, pp. 1217-1227, 1989.
- [49] R. Drillis y R. Contini, «Body Segment Parameters,» New York University, School of Engineering and Science, New York, 1996.

- [50] L. F. Vargas Tamayo, L. E. Contreras Bravo y Ó. Mayorga Torres, «Modelamiento de la marcha humana mediante herramientas de simulación dinámica,» *Con-ciencia*, nº 21, pp. 74-82, 2007.
- [51] J. C. Cruz Ardila y J. M. Ramírez Escarpeta, «Modelo matemático y herramienta de simulación de exoesqueleto activo de cinco segmentos,» *Revista Científica Guillermo de Ocklam*, vol. 10, nº 2, pp. 93-105, 2012.
- [52] A. Seyfarth, H. Geyer, M. Günther y R. Blickhan, «A movement criterion for running,» *Journal of Biomechanics*, vol. 35, pp. 649-655, 2002.
- [53] T. McGeer, «Passive Walking with Knees,» *IEEE*, pp. 1640-1645, 1990.
- [54] C. Rustin, «Physiological modelling and dynamic simulation of human walking,» *Universite de Mons, Faculte Polytechnique, Belgium*, 2010.