INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

ESTUDIO SOBRE LOS SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES CONTRACTIVAS

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

PRESENTA:

Jorge Salazar Morales

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Eric Campos Cantón

México, San Luis Potosí, S.L.P., Abril de 2018

IPICYT

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis ***"Estudio sobre los sistemas iterados de funciones contractivas"*** presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Jorge Salazar Morales** y aprobada el doce de abril del dos mil dieciocho por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Eric Campos Cantón
Director de la tesis

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
Jurando en el Examen

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
Jurando en el Examen

Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del doctor Eric Campos Cantón.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología **No. 588737** y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 027 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 12 días del mes de abril del año 2018, se reunió a las 11:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	**Presidente**	**IPICYT**
Dr. Eric Campos Cantón	**Secretario**	**IPICYT**
Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	**Sinodal**	**IPICYT**

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Jorge Salazar Morales

sobre la Tesis intitulada:

Estudio sobre los sistemas iterados de funciones contractivas

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Eric Campos Cantón

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 12:05 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 12 días del mes de abril de 2018.

Dr. Horacio Flores Zúñiga
Secretario Académico

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.
IPICYT
SECRETARIA ACADEMICA

Dedicatoria

A mis padres...

Agradecimientos

1. A mi asesor el Dr. Eric Campos Cantón, por su gran apoyo y disponibilidad....

2. A mi maestro el Dr. David Antonio Lizárraga Navarro por haberme impartido su curso de Topología, por sus enseñanzas, por funjir como mi revisor de tesis, por sus constantes aportaciones y por su gran apoyo en mi formación de posgrado. MUCHAS GRACIAS...

3. Al Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada por su gran apoyo y disponibilidad, por haber funjido como mi revisor de tesis y por sus constantes aportaciones. MUCHAS GRACIAS....

4. A la División de Matemáticas Aplicadas y al Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A.C.

5. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haberme otorgado la beca.

Contenido

Resumen

Puesto que una tarea importante en geometría fractal es el estudio de los conjuntos invariantes compactos y sus propiedades, con ese fin se han desarrollado teorías bien fundamentadas acerca de estos conjuntos. Un conjunto invariante compacto comunmente se le conoce como conjunto *fractal*. En 1975, B. Mandelbrot fue el primero en dar una definición a estos conjuntos. Y los define de la manera siguiente: Un conjunto fractal es un conjunto no vacío que es autosimilar y cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede a su dimensión topológica [1]. Posteriormente en 1981, J.E. Hutchinson fue el primer matemático en plantear una teoría para estudiar estos conjuntos en $\mathbb{R}^n$, a los que el llamó estrictamente autosimilares, introduciendo con ello el concepto de sistema iterado de funciones [22]. Posterior a él, M.F. Barnsley generaliza las teorías de J.E. Hutchinson y hacia 1998 populariza el concepto de sistema iterado de funciones [9]. A partir de esto, el Teorema de Existencia y Unicidad para conjuntos fractales propuesto por M.F. Barnsley ha sido objeto de estudio. En esta tesis presentamos el caso especial de la construcción de un conjunto invariante compacto por medio de iteraciones de orden fraccionario, así como una proposición y establecemos cuatro proposiciones entorno a la construcción de sistemas iterados de funciones, y las condiciones a estos sistemas para que los conjuntos invariantes compactos asociados a estas clases de SIF's presenten la autosemejanza topológica.

Estudio sobre los sistemas iterados de funciones contractivas

PALABRAS CLAVE: autosimilitud, sistema iterado de funciones, autosemejanza topológica, iteración de orden fraccionario.

Abstract

Since an important task in fractal geometry is the study of compact invariant sets and their properties, to that end well-founded theories about these sets have been developed. A compact invariant set is commonly referred to as a fractal set. In 1975, B. Mandelbrot was the first to give a definition to these sets. And it defines it as follows: A fractal set is a non-empty set that is self-similar and whose Hausdorff-Besicovitch dimension exceeds it's topological dimension [1]. Subsequently in 1981, J.E. Hutchinson was the first mathematician to propose a theory to study these sets in $\mathbb{R}^n$, which he call strictly self-similar, thus introducing the concept of iterated system of functions [22]. After the, M.F. Barnsley generalizes the theories of J.E. Hutchinson and towards 1998 popularizes the concept of iterated system of functions [9]. Starting from this, the existence and uniqueness theorem of M.F. Barnsley has been the subject of study. In this thesis we present the special case of the construction of a compact invariant set by means of fractional order iterations, as well as a proposition and we establish four propositions surrounding the construction of iterated systems of functions, and the conditions to these systems so that the associated compact invariant sets to these classes of SIF's present the topological self-similarity.

Study on contractive iterated function systems

KEYWORDS: self-similarity, iterated function system, topological self-similarity, fractional order iteration.

CAPÍTULO 1

Introducción

Fractal es una palabra acuñada por B. Mandelbrot para reunir bajo un sólo nombre una gran familia de objetos que han tenido un papel histórico en el desarrollo de la matemática [1]. Una gran revolución en las ideas separa la matemática clásica del siglo XIX de la matemática moderna del siglo XX. La matemática clásica está enraizada en las estructuras regulares de la geometría de Euclides y en la evolución continua característica de la dinámica de Newton. La matemática moderna empezó con la teoría de conjuntos de Cantor y la curva de Peano que llena el plano. Desde el punto de vista histórico, la revolución se produjo al descubrirse estructuras matemáticas que no encajaban en los patrones de Euclides y Newton. Estas nuevas estructuras fueron consideradas patológicas como galería de monstruos. Los matemáticos creadores de esos monstruos les concedían importancia por cuanto mostraban que el mundo de la matemática tiene una riqueza de posibilidades que va mucho más allá de las estructuras sencillas que veían en la naturaleza. No obstante, la geometría fractal es una nueva rama nacida tardíamente de la crisis de la matemática que comenzó cuando a duBois Raymond (1875) le llamó la atención una función continua y no diferenciable construida por Weierstrass. Dicha crisis duró aproximadamente hasta 1925, siendo los principales actores Cantor, Peano, Lebesque y Hausdorff. Además de Besicovitch, Bolzano, Kock, Osgood, Sierpinski y Urysohn los que trascendieron principalmente.

Es importante remarcar que durante la crisis que va de 1875 a 1925, los matemáticos se dieron cuenta de que no era posible una comprensión correcta de lo irregular y lo fragmentado (así como de lo regular y lo conexo) si se define la dimensión como número de coordenadas. El primero en emprender un análisis riguroso fue Cantor en su carta a Dedekind, fechada el 20 de junio de 1877. Le siguió Peano, y los pasos finales datan de 1920.

El hecho de que los fractales elementales sean dimensionalmente discordantes nos sirve como motivación para dar contenido matemático al concepto ahora intuitivo de fractal.

Nos concentraremos en dos definiciones que asignan, a cada conjunto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, y con independencia de lo patológico que sea, un número real que por razones intuitivas y formales merece ser llamado su dimensión. La más intuitiva de dichas definiciones es la dimensión topológica según Brouwer, Lebesque, Menger y Urysohn. La denotaremos a lo largo de esta tesis por dim_T. La segunda definición fué formulada por Hausdorff (1919) y Besicovitch le dió la forma final y la denotaremos por dim_{HB}.

Siempre que uno trabaja en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, tanto dim_T como dim_{HB} toman valores comprendidos entre 0 y n. Pero aquí se acaban las analogías. Mientras dim_T es siempre un entero, dim_{HB} no tiene por qué serlo. Así, ambas dimensiones no tienen por qué coincidir; sólo están sujetas a la desigualdad de Szpilrajn $dim_{HB} \geq dim_T$. [1].

De lo anterior, según Mandelbrot define así: *Un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica* [1].

Luego, los conjuntos con dim_{HB} no entera son fractales . Así, por ejemplo, el conjunto de Cantor es un fractal ya que $dim_{HB} = \dfrac{\log 2}{\log 3} = 0{,}6309... > 0$, mientras que su $dim_T = 0$. Sin embargo, algunos fractales pueden tener valores de dim_{HB} enteros, aunque en esta tesis no los consideraremos. Un hecho sorprendente de que dim_{HB} no tenga que ser necesariamente un entero merece ser reflejado en esta terminología. Si uno usa el término fracción en sentido amplio, como sinónimo de número real no entero, algunos de los valores de dim_{HB} son fraccionarios; así pues, a menudo se llama dimensión fraccionaria la dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Ahora bien, dim_{HB} puede tomar valores enteros (menores que n pero estrictamente mayores que dim_T). Diremos que dim_{HB} es una dimensión fractal. Las diferencias en la dimensión fractal reflejan diferencias de forma en un aspecto no topológico, que Mandelbrot propone llamar forma fractal. La mayoría de los problemas realmente interesantes combinan aspectos fractales y topológicos de una manera cada vez más sutil. Obsérvese que, en el caso de la topología, la definición de la propia disciplina y la de dim_T se fueron refinando en paralelo, mientras que el concepto de dim_{HB} es anterior en más de medio siglo al presente estudio sobre la forma fractal. Y a propósito, como se ha dado el nombre de Felix Hausdorff a una cierta clase de espacios topológicos, la denominación generalmente dada a dim_{HB}, dimensión de Hausdorff, podría sonar a dimensión de un espacio de Hausdorff, lo cuál podría sugerir que se trata de un concepto topológico, y no es así en lo absoluto. He aquí, pues, otra razón para definir la denominación de dimensión fractal. En efecto, la geometría fractal como tal data de 1975, pero muchos de sus útiles conceptos son anteriores a Mandelbrot. Mediante esas piedras antiguas encajadas en una estructura recién construida, la geometría fractal pudo tomar prestada una base excepcionalmente rigurosa, y pronto planteó preguntas nuevas y compulsivas en el terreno de la matemática.

1.0.1. Estado del Arte

En este punto se hace una revisión de los trabajos publicados que han marcado los inicios del estudio de esta clase de conjuntos, denominados conjuntos fractales.

En 1975, B. Mandelbrot fue el primero en proponer y publicar en su libro La Geometría Fractal de la Naturaleza [1], una definición de estos conjuntos, y los define de la manera siguiente: Un conjunto fractal es un conjunto no vacío que es autosimilar y cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede a su dimensión topológica . Posteriormente en 1981, J.E. Hutchinson fue el primero en plantear una teoría muy formal y bien fundamentada de lo que él llamó conjuntos estrictamente autosimilares, y lo hizo a partir de la definición propuesta por B. Mandelbrot y el conjunto de Cantor, la cual presentó en su artículo Fractals and Self Similarity [22]. Sin embargo, las teorías de J.E. Hutchinson acerca de los conjuntos estrictamente autosimilares eran para conjuntos definidos en $\mathbb{R}^n$. En 1985, M. Hata en su artículo *On the Structure of Self Similar Sets* investigó propiedades topológicas del único conjunto compacto K tal que $K = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(K)$, donde cada f_λ es una contracción débil de un espacio métrico completo y Λ es finito ó $\Lambda = \mathbb{N}$, proponiendo así una nueva definición de conjunto autosimilar y generalizando algunos de los resultados de J.E. Hutchinson.

Después en 1988, M.F. Barnsley y S. Demko publicaron en su libro *Fractals Everywhere* [9] una generalización del método de J.E. Hutchinson, mientras este último utilizaba semejanzas contractivas, M.F. Barnsley permite cualquier tipo de funciones contractivas, ampliando notablemente la cantidad de conjuntos fractales que se pueden obtener con el método. Estos conjuntos fractales que amplían el de los conjuntos estrictamente autosimilares, no tiene todas las propiedades geométricas y de medida que tienen estos últimos.

En 1990, K.J. Falconer estudió y publicó en su libro Fractal Geometry [10] diversos conjuntos fractales como ejemplos de conjuntos autosimilares, adoptando la definición dada por J.E. Hutchinson y trabajando aproximadamente desde el mismo punto de vista de este último.

Por su parte, M.F. Barnsley y S. Demko [9] formalizaron una aproximación a los conjuntos fractales autosimilares, a los que M.F. Barnsley llamo atractores de SIF's. Posterior en 1991, C. Bandt y K. Keller en su artículo *Self Similar Sets 2. A Simple Approach to the Topological Structure of Fractals* presentaron una descripción de la topología de ciertos conjuntos autosimilares y consideraron propiedades de ramificación y conexidad. En 1992, F. Takeo en su artículo *Self Similar Sets and Quotient Sets of Infinite Sequences*, estudió la estructura de conjuntos autosimilares que son invariantes con respecto a dos contracciones sobre $\mathbb{R}^n$. En 1993, G.B. Lewellen en su artículo *Self Similarity* definió un conjunto autosimilar como un conjunto compacto que es la unión de sus imagenes bajo los miembros de una colección de contracciones, indizadas por un conjunto compacto Λ, extendiendo el trabajo de J.E. Hutchinson, M.F. Barnsley y M. Hata, en cuanto la colección de contracciones que actuan puede ser o no contable.

En 1993, A. Kameyama en su artículo *Self Similar Sets from the Topological Point of View* estudió propiedades topológicas de los conjuntos autosimilares, trabajando con la definición de M.F. Barnsley.

Sin embargo, las definiciones anteriores de la noción de autosemejanza están restringidas al contexto de los espacios métricos. En 1994, W.J. Charatonik y A. Dilks en su artículo *On self-homeomorphic spaces* [21] investigaron espacios topológicos en los cuales se puede encontrar, en todo abierto no vacío, una imagen homeomórfica del espacio total. Presentaron el concepto de Autosemejanza Topológica con el cual se pretende estudiar el concepto de Autosemejanza en el contexto más amplio de los espacios topológicos.

Aunque ejemplos de conjuntos autosemejantes (o autosimilares) son conocidos desde hace mucho tiempo, al parecer es sólo recientemente que se hacen intentos para establecer una base teórica, formal y sistemática acerca de ellos.

Lo anterior motiva las siguientes preguntas:

¿Es posible establecer nuevos métodos para construir SIF's?, ¿Podemos cambiar las iteraciones de orden entero por iteraciones de orden fraccionario para tener convergencia al punto límite?.

Es importante resaltar, que aún faltan aspectos importantes por investigar acerca del Teorema de Existencia y Unicidad de los Fractales de M.F. Barnsley, tales como asociar otros teoremas del punto fijo a su demostración. En este trabajo contribuimos a dicha investigación, y realizamos un estudio acerca de las iteraciones de orden fraccionario y su aplicación en fractales, así como el estudio de nuevos métodos para generar sistemas iterados de funciones y algunas condiciones para la autosemejanza topológica.

1.0.2. Justificación e Hipótesis

En años recientes el Teorema de Existencia y Unicidad de los Fractales de M.F. Barnsley ha sido objeto de estudio, sin embargo las investigaciones realizadas a dicho teorema sólo se hacen asociando teoremas de punto fijo a su demostración, lo que implica el uso de iteraciones de orden entero. Por otro lado, en [9] sólo se presenta un método para generar sistemas iterados de funciones.

Basado en lo anterior, en este trabajo de tesis tomamos como hipótesis el Teorema de Existencia y Unicidad de los Fractales de M.F. Barnsley [9], y otros trabajos de autosemejanza topológica desarrollados por W.J. Charatonik y A. Dilks [21], y las nociones de cocientes topológicos presentados en [19] y [20].

Los sistemas iterados de orden fraccionario de funciones contractivas son una alternativa para la generación de conjuntos invariantes compactos (fractales) que presentan además de existencia, unicidad.

1.0.3. Objetivo de la Tesis

Basado en lo anterior, en este trabajo de tesis nos planteamos el siguiente objetivo:

Realizar la construcción de un conjunto invariante compacto obtenido de un SIF por medio de iteraciones de orden fraccionario, así como condiciones que garanticen existencia y unicidad para este tipo de proceso iterativo. Establecer además, nuevos métodos para la construcción de ciertas clases de sistemas iterados de funciones, y algunas condiciones de estos sistemas para que los conjuntos invariantes compactos correspondientes presenten la autosemejanza topológica en el sentido de W.J. Charatonik y A. Dilks.

1.0.4. Esquema de la Tesis

En este capítulo 1 se ha dado una breve introducción y motivación al tema, se presenta además el estado del arte de los conjuntos fractales, así como también la justificación e hipótesis, el objetivo principal y el esquema de la tesis. En el capítulo 2 se presentan algunos de los conceptos y resultados fundamentales de la Teoría de Espacios Métricos. En el capítulo 3 se introducen algunos de los conceptos y nociones básicas de la Teoría de Fractales, que serán de utilidad durante el resto de la tesis. En el capítulo 4 presentamos el concepto de Sistema Iterado de Funciones y abordamos el Teorema de Existencia y Unicidad para Conjuntos Fractales propuesto por M.F. Barnsley. En el capítulo 5 presentamos el concepto de Autosemejanza Topológica propuesto por W.J. Charatonik y A. Dilks para espacios topológicos. El trabajo de investigación se encuentra en el capítulo 6. Y finalizamos con la conclusión y el trabajo a futuro en el capítulo 7.

CAPÍTULO 2

Conceptos Básicos

En esta sección se presentan algunos de los conceptos, y resultados fundamentales de la Teoría de Espacios Métricos, con la finalidad de entregar las herramientas necesarias para comprender el trabajo que se ha venido realizado en el campo de la Geometría Fractal.

2.1. Conjuntos y Funciones

Comencemos con los siguientes conceptos básicos útiles, necesarios para el estudio de la Teoría de Espacios Métricos.

Definición 1. ***Conjunto*** *[7]. Un conjunto es una colección de objetos bien definida.*

Denotaremos los conjuntos por letras mayúsculas, y sus elementos por letras minúsculas. La proposición "p es elemento de A", la denotaremos de manera usual $p \in A$. Existen dos maneras esencialmente de especificar un conjunto particular. Una manera si esto es posible, es listando sus elementos, i.e., separando sus elementos por comas y encerrándolos con llaves. La otra manera es indicando las propiedades que caracterizan a los elementos del conjunto.

Definición 2. ***Igualdad de Conjuntos*** *[2]. Sean A y B conjuntos. $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.*

Definición 3. ***Subconjunto*** *[2]. Sean A y B conjuntos. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.*

Definición 4. ***Conjunto Potencia*** *[2]. Sea A un conjunto. Entonces el conjunto de todos los subconjuntos de A, denotado por $\mathbb{P}(A)$ es llamado el conjunto potencia de A. En símbolos: $\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$.*

Definición 5. ***Par Ordenado*** *[7]. $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.*

Otro concepto importante es el de producto cartesiano, el cual se obtiene mediante una operación entre dos conjuntos.

Definición 6. ***Producto Cartesiano*** *[7]. Sean A y B conjuntos. El producto cartesiano de A con B, denotado por $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados con primer elemento en A y segundo elemento en B. En símbolos:*

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

El producto cartesiano de dos conjuntos cualesquiera A y B, es un nuevo conjunto identificado como $A \times B$.

Definición 7. ***Relación*** *[2]. Sean A y B conjuntos. Una relación de A en B es un subconjunto de $A \times B$. Si R es una relación de A en B y $(a, b) \in R$, denotamos esto por aRb. El dominio de R (denotado por $Dom(R)$) es el conjunto de todos los primeros elementos de R. En símbolos:*

$$Dom(R) = \{a : (a, b) \in R\} = \{a : aRb\}.$$

La imagen de R (denotada por $Im(R)$) es el conjunto de todos los segundos elementos de R. En símbolos:

$$Im(R) = \{b : (a, b) \in R\} = \{b : aRb\}.$$

Nótese que $Dom(R) \subseteq A$ y $Im(R) \subseteq B$.

El siguiente concepto nos será de utilidad en la sección 4.2, cuando hablemos de la relación que existe entre los sistemas iterados de funciones y su correspondiente espacio de códigos asociado.

Definición 8. ***Relación de Equivalencia*** *[2]. Sea R una relación sobre un conjunto A. Entonces decimos:*

a) R es Reflexiva $\Leftrightarrow (\forall a \in A)(aRa)$.

b) R es Simétrica $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(aRb \Rightarrow bRa)$.

c) R es Transitiva $\Leftrightarrow (\forall a, b, c \in A)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$.

Decimos que R es una Relación de Equivalencia si es Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

Definición 9. *[7]. Sea A un conjunto no vacío. Una partición del conjunto A es una familia de subconjuntos disjuntos no vacíos de A cuya unión es todo A.*

Definición 10. *[2]. Sea R una relación de equivalencia definida sobre un conjunto no vacío A. Sea $x \in A$. La clase de equivalencia de x módulo R, denotada por $[x]_R$ (o algunas veces x/R), es el conjunto de todos los elementos de A que están R-relacionados con x. En símbolos:*

$$[x]_R = \{y \in A : yRx\}.$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia de A es denotado por $[A]_R$ (o algunas veces A/R) y es llamado A módulo R. En símbolos:

$$[A]_R = \{[x]_R : x \in A\}.$$

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas, sin duda es el siguiente.

Definición 11. ***Función*** *[2]. Sea f una relación de A en B. Entonces f es una función de A en B (Denotada por $f : A \longrightarrow B$, leída como "f es una función de A en B") si y sólo si*

a) $Dom(f) = A$.

b) $(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)(((x, y) \in f) \wedge ((x, z) \in f) \Rightarrow y = z)$.

Definición 12. *[2]. Sea $f : A \longrightarrow B$. Entonces*

a) Decimos que f es uno-uno (o f es una inyección)$\Leftrightarrow (\forall w, z \in A)(f(w) = f(z) \Rightarrow w = z)$.

b) Decimos que f es sobre (o f es surjección)$\Leftrightarrow Im(f) = B$.

c) Decimos que f es una correspondencia uno-uno (o una biyección) si f es uno-uno y sobre.

Definición 13. *[2]. Sea $f : A \longrightarrow B$. Si $C \subseteq A$ entonces definimos $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$. Si $D \subseteq B$ entonces $f^{-1}(D) = \{x : f(x) \in D\}$. $f(C)$ es llamada imagen de C y $f^{-1}(D)$ es llamada la preimagen de D.*

Definición 14. ***Conjunto Finito*** *[3]. Sean A un conjunto y $I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. A es finito con n elementos si existe una función biyectiva de A en I_n. En símbolos:*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\sharp(A) = n \Leftrightarrow (\exists f : A \xrightarrow{\sim} I_n)(I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\})).$$

2.2. Espacios Métricos, Sucesiones, y Sucesiones de Cauchy

Antes de pasar a la Teoría de Fractales, es necesario mostrar algunos de los conceptos básicos sobre Espacios Métricos, cuya comprensión es vital. Aunque en un principio puedan parecer excesivamente abstractos, se verá su utilidad a la hora de conformar una base teórica sólida para la Geometría Fractal.

Definición 15. ***Espacio Métrico*** *[8]. Un espacio métrico es un par de la forma (X, d), donde X es un conjunto no vacío de objetos que llamaremos puntos, y d es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (llamada métrica o distancia definida en el espacio) que satisface los dos siguientes axiomas:*

1) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 16. ***Isometría*** *[3]. Un espacio métrico (X, d) es isométrico a un espacio métrico (Y, e) si existe una biyección $f : X \to Y$ que preserva las distancias, i.e., para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = e(f(x), f(y))$.*

Definición 17. ***Traslación*** *[9]. Una traslación en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es una isometría caracterizada por un vector $\overrightarrow{u}$, tal que para cada $p \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ se le hace corresponder otro $p' \in \mathbb{R}^n$, que satisface:*

$$\begin{cases} T_{\overrightarrow{u}}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p \mapsto p' = T(p) = p + \overrightarrow{u} \end{cases} \quad \overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{u}$$

Las traslaciones pueden entenderse como funciones que generan movimientos directos sin cambios de orientación, las cuales mantienen el tamaño de los conjuntos o funciones que son trasladados.

Definición 18. ***Sucesión*** *[3]. Sea X un conjunto no vacío. Una sucesión en X es una función $s : \mathbb{N} \to X$.*

Puesto que el orden en que se escriben los elementos o términos de la sucesión es importante, entonces el recorrido se puede pensar más como un conjunto ordenado, por lo que usaremos la siguiente notación. $s := (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o simplemente $s := (s_n)_n$.

Definición 19. ***Sucesión Convergente*** *[3]. Sea (X, d) un espacio métrico y $(s_n)_n$ una sucesión en X. Diremos que $(s_n)_n$ converge si y sólo si existe $S \in X$, tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $d(s_n, S) < \varepsilon$. S se llama límite de la sucesión, y lo denotaremos $\lim_{n\to\infty}(s_n)_n := S$ ó $(s_n)_n \to S$. Si la sucesión converge a $S \in X$, se dice que la sucesión es convergente en X; en caso contrario diremos que no converge en X, o que es divergente.*

Un resultado clásico en análisis es el siguiente:

Teorema 1. ***Unicidad del límite*** *[4]. Si $(s_n)_n$ es una sucesión convergente en un espacio métrico (X, d), entonces $(s_n)_n$ converge para un único punto límite.*

Demostración. Sean $a, b \in X$. Supongamos que $(s_n)_n \to a$ y $(s_n)_n \to b$ con $a \neq b$. Luego, $d(a, b) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{d(a,b)}{2}$. Por otro lado,

$$(s_n)_n \to a \Rightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})(n \geq N_1 \Rightarrow d(s_n, a) < \varepsilon) \text{ y}$$

$$(s_n)_n \to b \Rightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N})(n \geq N_2 \Rightarrow d(s_n, b) < \varepsilon).$$

Sea $n = \max\{N_1, N_2\}$. Para todo $n \geq N$ se sigue que $0 < d(a, b) \leq d(a, s_n) + d(s_n, b) < \frac{d(a,b)}{2} + \frac{d(a,b)}{2}$, lo cual es un absurdo. $\square$

Otro concepto importante que será de utilidad es el siguiente:

Definición 20. ***Subsucesión*** *[4]. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X. Sea $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función creciente (i.e., $n_1 < n_2 \Rightarrow k(n_1) < k(n_2)$). La función compuesta $x \circ k : \mathbb{N} \to X$ se llama una subsucesión de $(x_n)_n$.*

Analicemos un poco esta definición: se tiene

$$\mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{x} X$$

$$n \mapsto k_n \mapsto x_{k_n}$$

De esta manera $x \circ k$ es una sucesión en X cuyos términos son extraídos de la sucesión original $(x_n)_n$, pero no extraídos de cualquier manera, dado que la condición $n_1 < n_2$ significa que de $(x_n)_n$ se van tomando términos $x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_m}, ...$ pero conservan el orden.

Ilustremos los conceptos anteriores mediante el siguiente teorema.

Teorema 2. *[4]. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Entonces $(x_n)_n \to L$ si y sólo si toda subsucesión de $(x_n)_n$ también converge a L.*

Demostración. Supongamos que $(x_n)_n$ es una sucesión en (X, d) y $(x_{k_n})_n \to L$ es una subsucesión de $(x_n)_n$. Luego, $(x_n)_n \to L$, pues la sucesión completa es subsucesión de sí misma. Recíprocamente. Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que $(x_n)_n \to L$ y $(x_{k_n})_n$ es una subsucesión de $(x_n)_n$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $d(x_n, L) < \varepsilon$. En particular, para cada $k_n > N$ se tendrá $d(x_{k_n}, L) < \varepsilon$. $\square$

Cuando en una sucesión convergente en un espacio métrico ocurre que al ir avanzando en sus términos, estos se van acercando cada vez más entre sí, se dice que esta es una sucesión de Cauchy. Formalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 21. ***Sucesión de Cauchy*** *[7]. Sea (X, d) un espacio métrico y $(s_n)_n$ una sucesión en X. Diremos que $(s_n)_n$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq N$ implica $d(s_m, s_n) < \varepsilon$.*

Teorema 3. *[5]. Sea (X, d) un espacio métrico y $(s_n)_n$ una sucesión convergente en X. Entonces $(s_n)_n$ es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que $(s_n)_n$ es una sucesión convergente en X y que L es el límite de dicha sucesión. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $d(s_n, L) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sean m, n. Supongamos que $m, n \geq N$. Luego, $d(s_n, s_m) \leq d(s_n, L) + d(s_m, L) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Hemos demostrado entonces que, en cualquier espacio métrico toda sucesión convergente es de Cauchy, pero lo recíproco no se cumple. Sin embargo, si existen espacios métricos en los cuales toda sucesión de Cauchy es convergente, y serán precisamente estos espacios los que nos van a interesar.

Definición 22. ***Espacio Métrico Completo*** *[7]. Diremos que un espacio métrico (X, d) es completo, si toda sucesión de Cauchy en X converge en X.*

Ejemplo 1. *[4]. Algunos ejemplos clásicos de espacios métricos completos son $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n$, con la métrica Euclidiana.*

2.3. Bola, Adherencia y Conjuntos Abiertos, Cerrados, Acotados, y Compactos

Nuestro próximo objetivo es citar ciertas propiedades topológicas de un espacio métrico, así llamadas porque sólo dependen de una familia de subconjuntos del espacio que recibe el nombre de topología. De esta manera catalogamos las posiciones relativas que puede tener un punto con respecto a un subconjunto de un espacio métrico.

Definición 23. ***Bola*** *[3]. Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Se define la bola de centro a y radio r, denotada $B_r^d(a)$ ó $B_d(a; r)$, por $B_r^d(a) := B_d(a; r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$.*

Definición 24. ***Punto Adherente*** *[3]. Sea (X, d) un espacio métrico, $S \subseteq X$ y $x \in X$. Diremos que x es un punto de adherencia de S (o punto adherente a S) si existe una sucesión $(s_n)_n$ en S tal que $(s_n)_n \to x$.*

Definición 25. ***Adherencia de un Conjunto*** *[4]. El conjunto de todos los puntos de adherencia de un conjunto S se llama la adherencia o clausura de S; se denota por $\bar{S}$ ó $adh(S)$.*

Ejemplo 2. *[4]. Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, $(3, 4)$, $\{\frac{1}{2}\}$ y $\{7\}$. Luego, $\overline{(3, 4) \cup \{\frac{1}{2}\} \cup \{7\}} = [3, 4] \cup \{\frac{1}{2}\} \cup \{7\}$.*

Es importante mencionar también que la adherencia de un conjunto se puede analizar con el concepto de bola. Citemos el siguiente teorema:

Teorema 4. *[4]. Sea (X, d) un espacio métrico, $S \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \bar{S}$ si y sólo si toda bola con centro en x intersecta a S. En símbolos: $x \in \bar{S} \Leftrightarrow (\forall r > 0)(B_r^d(x) \cap S \neq \emptyset)$.*

Demostración. Por hipótesis, existe una sucesión $(s_n)_n$ en S tal que $(s_n)_n \to x$. Sea $r > 0$. Dado que $(s_n)_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow d(s_n, x) < r$, i.e., $n \geq N \Rightarrow s_n \in B_r^d(x)$. Luego, $n \geq N \Rightarrow s_n \in B_r^d(x) \cap S$. Finalmente. Sea $r_n = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $s_n \in B_{\frac{1}{n}}^d(x) \cap S$, i.e., $(s_n)_n$ es una sucesión en S y $d(s_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ de modo que $(s_n)_n \to x$, por tanto $x \in \bar{S}$. □

En [4] se tiene el siguiente resultado (para una prueba de este lema consultar la referencia).

Lema 1. *[4]. Sea (X, d) un espacio métrico. Para todo $S \subseteq X$ se cumple $S \subseteq \bar{S}$.*

Otro concepto fundamental es el siguiente:

Definición 26. ***Conjunto Cerrado*** *[3]. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Diremos que S es cerrado si $S = \bar{S}$.*

Ejemplo 3. *[4]. Dada una bola $B_d(a; r)$ en un espacio métrico (X, d), se define la bola cerrada $\bar{B}_d(a; r)$ por $\bar{B}_d(a; r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$. $\bar{B}_d(a; r)$ es en efecto un conjunto cerrado, ya que si x es un punto adherente de $\bar{B}_d(a; r)$ entonces existe una sucesión $(a_n)_n$ de puntos de $\bar{B}_d(a; r)$ tal que $(a_n)_n \to x$; probemos que $x \in \bar{B}_d(a; r)$. Supongamos que $d(x, a) > r$. Luego, para $\varepsilon = d(x, a) - r > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow d(x, a_n) < \varepsilon$. Por tanto $N \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x, a) \leq d(x, a_n) + d(a_n, a) < \varepsilon + r$, de donde $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual es un absurdo. De esta manera $d(x, a) \leq r$, luego $x \in \bar{B}_d(a; r)$.*

Enunciemos un teorema que garantiza que en un espacio métrico completo, los subespacios que heredan la completez son exactamente los subespacios cerrados.

Teorema 5. *[4]. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $S \subseteq X$. S es cerrado si y sólo si S es completo.*

Demostración. Supongamos que $(s_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en S. Debemos probar que $(s_n)_n$ converge en S. Luego, $(s_n)_n$ converge en X ya que X es completo, i.e., existe $x \in X$ tal que $(s_n)_n \to x$. Así $x \in \bar{S} = S$ (S es cerrado), de modo que $(s_n)_n$ converge en S. Para probar que S es cerrado, basta probar que $\bar{S} \subseteq S$. Sea $x \in \bar{S}$. Luego, existe una sucesión $(s_n)_n$ en S tal que $(s_n)_n \to x$. Dado que $(s_n)_n$ es convergente, se sigue que es de Cauchy, y como S es completo, entonces $(s_n)_n$ converge en S, i.e., existe $s \in S$ tal que $(s_n)_n \to s$. Se sigue por el teorema de unicidad del límite $x = s$, y por tanto $x \in S$. □

Usando el concepto de bola definiremos la noción de conjunto abierto, el cual a su vez proporciona formas alternativas de caracterizar conceptos ya definidos como el de conjunto cerrado o como el de conjunto compacto.

Definición 27. ***Conjunto Abierto*** *[3]. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Diremos que S es abierto si para todo elemento $s \in S$ existe una bola que contiene a s y que está contenida en S. En símbolos, S es abierto $\Leftrightarrow (\forall s \in S)(\exists B : BBola)(s \in B \subseteq S)$. Si para el punto s existe una bola B tal que $s \in B \subseteq S$, se dice que s es un punto interior de S. El conjunto de todos los puntos interiores de S se llama el interior de S y se denota como S°.*

Definición 28. ***Conjunto Acotado*** *[3]. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Diremos que S es acotado si existen $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $S \subseteq B_d(a; r)$.*

En otras palabras, S es acotado si es posible encerrarlo dentro de alguna bola. Un resultado de [4] que será de utilidad es el siguiente (para una prueba de este lema consultar la referencia).

Lema 2. *[4]. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. S está contenido en una bola si y sólo si está contenido en la unión de un número finito de bolas.*

Definición 29. *[4]. Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{F} = \{S_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{F}$ es un recubrimiento (o cubierta) de X o que $\mathcal{F}$ recubre a X si $X \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i$; diremos que $\mathcal{F}$ es un recubrimiento abierto (o cubierta abierta) de X, si es un recubrimiento de X y cada S_i es un conjunto abierto.*

Ahora, si $\{S_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento (abierto) de X, entonces llamaremos subrecubrimiento (abierto) a cualquier subfamilia de $\{S_i\}_{i\in I}$ que también recubra a X.

Es importante señalar que de la familia de los conjuntos cerrados en un espacio métrico, son de principal interés aquellos que cumplen la propiedad de ser compactos, propiedad que definiremos a continuación.

Definición 30. ***Compacto*** *[5]. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Se dice que S es un conjunto compacto si todo recubrimiento abierto de S contiene un subrecubrimiento finito.*

Otra manera para definir un conjunto compacto, es la siguiente:

Definición 31. ***Compacto*** *[5]. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Diremos que S es compacto, si toda sucesión en S admite una subsucesión convergente en S.*

Ejemplo 4. *[5]. George Cantor (1845-1918) fue un matemático alemán de la Universidad de Halle, fue el fundador de lo que se conoce hoy en día como teoría de conjuntos. El conjunto de Cantor fue publicado en 1883, dicho conjunto juega un papel importante en varias ramas de las matemáticas. Para la construcción de dicho conjunto, se procede de la siguiente manera:*

Sea E_0 el intervalo $[0, 1]$. Separemos el segmento $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y sea E_1 la unión de los intervalos $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$. Separemos los tercios centrales de estos intervalos, y sea E_2 la unión de los intervalos $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$, $[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$.

Continuando de este modo, obtenemos una sucesión de conjuntos compactos E_n, tales que

a) $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \cdots$;

b) E_n es la unión de 2^n intervalos, cada uno de longitud 3^{-n}.

El conjunto $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ recibe el nombre de conjunto de Cantor.

Definamos ahora lo que es un conjunto totalmente acotado.

Definición 32. *[4]. Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Diremos que S es totalmente acotado si para todo $\varepsilon > 0$, existe una ε-red que recubre a S.*

Entenderemos por una ε-red un número finito de bolas de radio ε. En [4] se tiene el siguiente resultado (para una prueba de este teorema consultar la referencia).

Teorema 6. *[4]. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $S \subseteq X$. Entonces S es compacto si y sólo si S es cerrado y totalmente acotado.*

Definición 33. *[12] . Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$, A es acotado y no vacío. Se define el diámetro de A por $|A| := sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$.*

Obsérvese que como A está acotado y es no vacío, entonces el conjunto $\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$ es un conjunto de números reales, no vacío y acotado superiormente, de modo que la definición anterior está bien formulada.

2.4. Funciones Continuas, Contractivas, y el Teorema del Punto Fijo de Banach

Daremos a continuación una de las definiciones más importantes de la matemática, que es de utilidad no sólo en la geometría fractal, sino en muchas otras áreas.

Definición 34. *[4]. Sean (X, d) y (Y, e) espacios métricos, $f : (X, d) \to (Y, e)$ con $a, x \in X$. Diremos que f es continua en a, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $e(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Diremos que f es continua en X (o simplemente continua) si f es continua en a para todo $a \in X$.*

Si f no es continua en a, se dice que es discontinua en a. Sin embargo, la continuidad se puede caracterizar en términos de bolas y conjuntos abiertos.

Teorema 7. *[5]. Una función f de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, e) es continua en (X, d) si y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto en (X, d) para todo conjunto abierto V en (Y, e).*

Demostración. Supongamos que f es continua en X y que V es un conjunto abierto en Y. Debemos probar que todo punto de $f^{-1}(V)$ es un punto interior de $f^{-1}(V)$. Para ello, sea $p \in X$. Supongamos que $f(p) \in V$. Como V es abierto, existe un $\varepsilon > 0$, tal que $y \in V$ si $e(f(p), y) < \varepsilon$, y como f es continua en p, existe $\delta > 0$, tal que $e(f(x), f(p)) < \varepsilon$ si $d(x, p) < \delta$. Así pues, $x \in f^{-1}(V)$ en cuanto $d(x, p) < \delta$. Recíprocamente, supongamos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo conjunto abierto V en Y. Sean $p \in X$, $\varepsilon > 0$ y V el conjunto de todo $y \in Y$ tal que $e(y, f(p)) < \varepsilon$. V será abierto; por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto, y, por tanto, existe un $\delta > 0$, tal que $x \in f^{-1}(V)$ en cuanto $d(p, x) < \delta$. Pero si $x \in f^{-1}(V)$, se sigue que $f(x) \in V$, de modo que $e(f(x), f(p)) < \varepsilon$. $\square$

Teorema 8. *[5]. Supongamos que f es una función continua de un espacio métrico compacto (X, d) en un espacio métrico (Y, e). Entonces $f(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea V_α un recubrimiento abierto de $f(X)$. Como f es continua, por el teorema 7, todos los conjuntos $f^{-1}(V_\alpha)$ son abiertos. Dado que X es compacto, existe un número finito de índices, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$. Como $f(f^{-1}(E)) = E$, para todo $E \subseteq Y$, se sigue que, $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i}) \Rightarrow f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$. $\square$

Teorema 9. *[5]. Sea (X, d) un espacio métrico; entonces la unión finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.*

Demostración. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n conjuntos compactos en (X, d). Supongamos que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Sea $\mathcal{R}$ un recubrimiento abierto de A. Debemos probar que de $\mathcal{R}$, se puede extraer un subrecubrimiento abierto finito $\mathcal{S}$ de A. Dado que $\mathcal{R}$ un recubrimiento abierto de A, y para cada i, $1 \leq i \leq n$, $A_i \subseteq A$, también $\mathcal{R}$ es un recubrimiento abierto de A_i. Además, dado que A_i es compacto, se puede extraer de $\mathcal{R}$ un subrecubrimiento abierto finito S_i para A_i. Luego, $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ es un subrecubrimiento abierto finito de $\mathcal{R}$ para A. $\square$

Es claro que la continuidad de una función depende no sólo de la forma como está definida la función, sino también de las métricas, tanto en el dominio como en el codominio de la función. Además, la continuidad de una función definida entre espacios métricos también se puede analizar en términos de convergencia de sucesiones.

Teorema 10. *[4]. Sea $f:(X,d)\to(Y,e)$. f es continua en a si y sólo si $(x_n)_n\to a$ implica $(f(x_n))_n\to f(a)$, para cada sucesión $(x_n)_n$ en X y $a\in X$.*

Demostración. Supongamos que f es continua en a y $(x_n)_n\to a$. Debemos probar que $(f(x_n))_n\to f(a)$. Sea $\varepsilon>0$. De la continuidad de f en a, existe $\delta>0$ tal que $d(x_n,a)<\delta\Rightarrow e(f(x_n),f(a))<\varepsilon$. Dado que $(x_n)_n\to a$, para $\delta>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq N\Rightarrow d(x_n,a)<\delta$, lo cual implica a su vez que $e(f(x_n),f(a))<\varepsilon$. Luego, $(f(x_n))_n\to f(a)$. Recíprocamente, sea $\varepsilon>0$. Supongamos que no existe $\delta>0$ tal que $f(B_d(a;\delta))\subseteq B_e(f(a);\varepsilon)$. Luego, para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $f(B_d(a;\frac{1}{n}))\nsubseteq B_e(f(a);\varepsilon)$, de modo que para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $x_n\in B_d(a;\frac{1}{n})$ tal que $f(x_n)\notin B_e(f(a);\varepsilon)$, i.e., $d(x_n;a)<\frac{1}{n}\Rightarrow e(f(x_n),f(a))\geq\varepsilon$. Así, $(x_n)_n\to a$ pero $(f(x_n))_n\not\to f(a)$. $\square$

Para efectos de construir conjuntos fractales será de gran importancia la siguiente definición:

Definición 35. *Contracción de Banach* *[6]. Sea (X,d) un espacio métrico completo y $f:(X,d)\to(X,d)$. Diremos que f es una contracción de Banach si existe $r\in\mathbb{R}$, $0\leq r<1$ tal que para cualesquiera $x,y\in X$ se tiene $d(f(x),f(y))\leq rd(x,y)$. En tal caso la constante r se llama factor de contracción de f.*

Ejemplo 5. *[4]. Toda función constante definida en un espacio métrico es una contracción. Sea (X,d) un espacio métrico con $x_0\in X$, donde x_0 es fijo y sea $f:(X,d)\to(X,d)$. Definamos $f(x)=x_0$ para todo $x\in X$. Sea $y\in X$. Luego, $d(f(x),f(y))=d(x_0,x_0)=0<rd(x,y)$ para todo $0\leq r<1$.*

Teorema 11. *[4]. Toda contracción es continua.*

Demostración. Sea (X,d) un espacio métrico. Supongamos que $f:(X,d)\to(X,d)$ es una función contractiva, $a\in X$, y $\varepsilon>0$. Debemos encontrar algún $\delta>0$ tal que para $x\in X$, $d(x,a)<\delta\Rightarrow d(f(x),f(a))<\varepsilon$. Dado que f es una función contractiva, existe $r\in\mathbb{R}$ tal que $0\leq r<1$ para el cual $d(f(x),f(y))\leq rd(x,y)$. Si $r=0$, se tendría que $d(f(x),f(y))=0$ para $x,y\in X$. Luego, $f(x)=f(y)$ para $x,y\in X$, i.e., f es una función constante, y por tanto continua. Sea $r>0$. Supongamos que $\delta=\frac{\varepsilon}{r}$. Luego, $d(x,a)<\delta=\frac{\varepsilon}{r}\Rightarrow d(f(x),f(a))\leq rd(x,a)<r*\frac{\varepsilon}{r}=\varepsilon$. $\square$

Definición 36. *[9]. Sea $f:X\to X$. Un punto $x_0\in X$ se llama punto fijo de f si satisface $f(x_0)=x_0$.*

Definición 37. *[11]. Sean X un conjunto no vacío, $n\in\mathbb{N}$ y $f:X\to X$ una función. Se define el iterado n-ésimo $f^{\circ n}$ de f mediante $f^0=id_X$ donde id_X es la función identidad en X y $f^{\circ(n+1)}=f(f^{\circ n})$ (la composición). De manera análoga, se define la n-ésima iteración de orden fraccionario $f^{\circ\frac{1}{n}}$ de f como $\underbrace{f^{\circ\frac{1}{n}}(f^{\circ\frac{1}{n}}(\cdots f^{\circ\frac{1}{n}}(x)\cdots))}_{n\ veces}=f(x)$.*

En 1922, el matemático polaco Banach, probó un teorema que aseguraba las condiciones apropiadas para la existencia y unicidad del punto fijo, su resultado fué llamado el Teorema del Punto fijo o Principio de Contracción de Banach. Se trata además, de un resultado muy útil en muchas áreas de las matemáticas, el cual, va a garantizar la existencia y unicidad de cada conjunto fractal por medio de un sistema iterado de funciones.

Teorema 12. ***El Teorema del Punto Fijo de Banach*** *[6]. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : (X, d) \to (X, d)$ una contracción. Entonces f tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Además, para cualquier $x \in X$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(x) = p$.*

Para conocer un poco más acerca del teorema del punto fijo de Banach y los diferentes tipos de funciones contractivas se sugiere consultar [6].

CAPÍTULO 3

Introducción a la Teoría de Fractales

En 1890, Peano construyó una curva continua que pasa por todos los puntos del cuadrado unitario $[0,1]^2$. Era el primer ejemplo de una curva que llena un espacio. Años más tarde Hilbert ideó una curva con idéntica propiedad pero de más sencilla elaboración. Otro ejemplo es el del matemático Helge Von Koch en 1904, cuya construcción consiste en tomar un segmento y dividirlo en tres partes iguales, suplantando la parte central por los dos segmentos que junto a dicha parte formarían un triángulo equilátero. El proceso se repite infinitas veces con los cuatro segmentos resultantes.

A finales del siglo pasado, el matemático Charles Hermite tildaba de *plaga lamentable*, la fascinación que otros matemáticos sentían por determinadas curvas que desafiaban los cimientos de la geometría de la época. Muchos como él consideraban como patológicas aquel tipo de curvas, desentendiéndose de sus insólitas propiedades. Uno de aquellos denominados monstruos geométricos era el conjunto de Cantor.

Las ideas de Poincaré fueron extendidas más tarde fundamentalmente por dos matemáticos también franceses, Gaston Julia y Pierre Fatou, hacia 1918. Se trabajó mucho en este campo durante varios años, pero el estudio quedó congelado en los años 20. El estudio fue renovado a partir de 1974 por el Dr. Mandelbrot de la Universidad de Yale, quien es considerado el padre de la geometría fractal. Esta rama de la matemática se enmarca en las áreas del análisis matemático, la geometría, la topología y las matemáticas aplicadas. En honor a él, uno de los conjuntos que el investigó lleva su nombre. Otros matemáticos, como Douady, Hubbard y Sullivan trabajaron también en esta área explorando más las matemáticas que sus aplicaciones. Desde la década del 70, este campo ha estado en la vanguardia de los matemáticos contemporáneos.

3.1. Medida de Hausdorff, Dimensión de Hausdorff-Besicovitch, y Dimensión Topológica

De la amplia variedad de definiciones acerca de la dimensión fractal en uso, la definición de Hausdorff-Besicovitch, basada en una construcción de Carathéodory, es la más antigua, y probablemente la más importante. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch tiene la ventaja de estar definida para cualquier conjunto, y es matemáticamente conveniente, ya que se basa en las medidas, que son relativamente fáciles de manipular. Una desventaja importante es que en muchos casos es difícil de calcular o estimar por métodos computacionales. Sin embargo, para la comprensión de las matemáticas de los fractales, la familiaridad con la medida de Hausdorff y la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es esencial. La idea de definir medidas usando cubiertas de conjuntos fué introducida por Carathéodory (1914). Hausdorff (1919) usó este método para definir las medidas que ahora llevan su nombre.

Comencemos con un espacio métrico (X, d) y $F \subseteq X$, consideremos además un número real positivo s como el candidato para la dimensión de F, la medida externa s-dimensional de Hausdorff de F, es la medida externa definida a partir del Método II (para un estudio más detallado de esto, se sugiere revisar [12]) por la función conjunto $\mathbf{c}(A) = (|A|)^s$. La restricción a los conjuntos medibles es llamada la medida s-dimensional de Hausdorff-Besicovitch. Recordemos que el Método I (para un estudio más detallado de estos métodos, se sugiere revisar [12]) da una construcción más explícita: Sea $\delta > 0$ (presumiblemente muy pequeño) y $\{A_i\}$ una δ-cubierta de F, i.e., $F \subseteq \bigcup_i A_i$ con $0 <|A_i|\leq \delta$, para cada A_i se define

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) := \inf\{\sum_i |A_i|^s\} \tag{3.1}$$

De este modo nos fijamos en todas las cubiertas de F por conjuntos de diámetro en la mayor parte δ, y tratamos de minimizar la suma de las potencias de los i-ésimos diámetros. Como δ decrece, la clase de cubiertas permisibles de F en (3.1) es reducida. Por lo tanto, el ínfimo de $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ aumenta, y así se acerca a un límite cuando $\delta \to 0$.

Comencemos con la siguiente definición:

Definición 38. ***Medida de Hausdorff*** *[10]. Llamamos a*

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F) \tag{3.2}$$

la medida de Hausdorff s-dimensional de F.

Este límite existe para cualquier subconjunto F de $\mathbb{R}^n$, aunque el valor límite puede ser (usualmente es) 0 o ∞.

Algunos resultados interesantes acerca de la medida de Hausdorff son los siguientes:

Proposición 1. *[10]. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$ entonces $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$. Donde $\lambda F = \{\lambda x \colon x \in F\}$, i.e., el conjunto F varia por un factor λ.*

Demostración. Sea $\{U_i\}$ una δ-cubierta de F. Dado que $\lambda > 0$, se sigue que $\{\lambda U_i\}$ es una $\lambda\delta$-cubierta de F. Luego, para $\lambda \geq 1$, se sigue que $\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \sum_i |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_i |U_i|^s \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(F)$, ya que esto se cumple para cualquier δ-cubierta $\{U_i\}$ de F, haciendo $\delta \to 0$, se sigue que $\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$. Por otro lado, para $0 < \lambda \leq 1$, se sigue que $\mathcal{H}^s_{\frac{1}{\lambda}*\delta}(\frac{1}{\lambda} * \lambda F) \leq \sum_i |\frac{1}{\lambda} * U_i|^s = (\frac{1}{\lambda})^s \sum_i |U_i|^s \leq (\frac{1}{\lambda})^s \mathcal{H}^s_\delta(\lambda F)$, haciendo $\delta \to 0$, se sigue que $\mathcal{H}^s(F) \leq \frac{1}{\lambda^s} \mathcal{H}^s(\lambda F)$. $\square$

Proposición 2. *[10]. Sean $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : F \to \mathbb{R}^m$ un mapeo tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \tag{3.3}$$

con $x, y \in F$ para constantes $c > 0$ y $\alpha > 0$, entonces para cada $s > 0$ se tiene $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$.

Demostración. Sea $\{U_i\}$ una δ-cubierta de F. Sea $\varepsilon = c\delta^\alpha$. Luego, $\{f(F \cap U_i)\}$ es una ε-cubierta de $f(F)$, i.e., $|f(F \cap U_i)| \leq c|U_i|^\alpha$. Por lo tanto $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_i |U_i|^s$, se sigue que $\mathcal{H}_\varepsilon^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s_\delta(F)$. Haciendo $\delta \to 0$ y $\varepsilon \to 0$, se tiene $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$. $\square$

Retomando (3.1), para cualquier conjunto dado F y $0 < \delta < 1$, $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ es no creciente con s, así por (3.2), $\mathcal{H}^s(F)$ es también no creciente. De hecho, algo más fuerte es cierto: si $t > s$ y $\{U_i\}$ es una δ-cubierta de F, tenemos $\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$, así considerando el ínfimo $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(F)$. Por otro lado, haciendo $\delta \to 0$ vemos que si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ entonces $\mathcal{H}^t(F) = 0$ para $t > s$.

El valor crítico anterior es llamado la dimensión de Hausdorff-Besicovitch de F, y la denotaremos como $dim_{HB}(F)$.

De lo anterior, se tiene la siguiente definición:

Definición 39. ***Dimensión de Hausdorff-Besicovitch*** *[10]. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Se define la dimensión de Hausdorff-Besicovitch de F como $dim_{HB}(F) := \text{ínf}\{s \colon \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \colon \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$.*

Proposición 3. *[10]. Sean $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : F \to \mathbb{R}^m$ un mapeo tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ con $x, y \in F$ para constantes $c > 0$ y $\alpha > 0$, entonces $dim_{HB}(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha} dim_{HB} F$.*

Demostración. Supongamos que $s \in \mathbb{R}_{>0}$ y $s > dim_{HB} F$. Por la proposición 2, $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F) = 0$, i.e., $dim_{HB}(f(F)) \leq \dfrac{s}{\alpha}$ para todo $s > dim_{HB} F$. $\square$

Cabe señalar, que otras definiciones acerca de dimensión son de uso generalizado, es importante además mencionar que no todas las definiciones de dimensión son de aplicación general, sólo algunas describen clases particulares de conjuntos.

Proporcionemos los siguientes conceptos básicos.

Definición 40. ***Topología*** *[15] . Sea X un conjunto. Una Topología $\mathcal{T}_X$ sobre X es un subconjunto de $\mathbb{P}(X)$ tal que:*

1) $\emptyset \in \mathcal{T}_X$ *y* $X \in \mathcal{T}_X$*.*

2) La unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}_X$ *es un elemento de* $\mathcal{T}_X$*.*

3) $(\forall U, V \in \mathcal{T}_X)(U \cap V \in \mathcal{T}_X)$*.*

A los elementos de $\mathcal{T}_X$ *se les llama abiertos.*

Definición 41. ***Espacio Topológico*** *[15]. Un espacio topológico es un par* $(X, \mathcal{T}_X)$*, donde* X *es un conjunto y* $\mathcal{T}_X$ *es una topología sobre* X*.*

Usualmente escribiremos por simplicidad X *es un espacio topológico*, cuando no haya confusión de que $\mathcal{T}_X$ es una topología sobre X.

Definición 42. *[7]. Sea* X *un espacio topológico y* $x \in X$*. Decimos que* N *es una vecindad de* x *si existe* $G \in \mathcal{T}_X$ *tal que* $x \in G \subseteq N$*. Decimos que* x *es un punto interior de* N *si* N *es una vecindad de* x*.*

Así, $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si U es una vecindad de x para todo $x \in U$; si esto es verdadero, existe para cada $x \in U$ un conjunto abierto G_x con $x \in G_x \subseteq U$, también $U = \bigcup_{x \in U} G_x$ es abierto.

Definición 43. *[7]. Sea* X *un espacio topológico. Un subconjunto* F *de* X *se llama cerrado si su complemento* $F^C = X \backslash F$ *es abierto.*

Definición 44. *[3]. Sean* X *un espacio topológico, y* $K \subseteq X$*. Se dice que* K *es compacto si para toda cubierta abierta de* K *se puede extraer una subcubierta abierta finita.*

Un concepto de los más importantes en topología es el siguiente:

Definición 45. ***Homeomorfismo*** *[3]. Dados* X *y* Y *espacios topológicos, se dice que* $f : X \longrightarrow Y$ *es un homeomorfismo si y sólo si* f *es biyectiva y bicontinua (i.e.,* $f \in C^0$ *y* $f^{-1} \in C^0$*). En tal caso, si* $\exists f : X \xrightarrow{\sim} Y$*,* X *y* Y *se dicen ser homeomorfos, y se denota* $X \cong Y$*.*

Definición 46. ***Autosimilitud*** *[23]. Un conjunto autosimilar* T *es un conjunto compacto no vacío en un espacio métrico completo* X *con* $T = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(T)$*, donde* $f_1, \ldots, f_m$ *son funciones contractivas en* X*.*

Definición 47. *[15]. Un refinamiento de una cubierta* E *es otra cubierta* E'*, tal que cada* $V \subseteq E'$ *está contenido en algún* $U \subseteq E$*.*

Definición 48. ***Dimensión Topológica*** *[15]. Un espacio topológico* X *tiene dimensión topológica d, si cada cubierta* E *tiene un refinamiento* E'*, para la cual, cada punto* $x \in X$ *está contenido en a lo más* $d + 1$ *subconjuntos de* E'*. Además, d es el entero más pequeño con esta propiedad.*

Dado un conjunto A, denotaremos su dimensión topológica por $dim_T(A)$.

3.2. Topología Cociente

Presentemos los conceptos básicos siguientes.

Definición 49. *[7]. Sean X y Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. La función f se dice que es una función cociente siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X. En símbolos:*

$$f : X \to Y \textit{ es una función cociente} \Leftrightarrow (\forall U \subseteq Y)(U \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X)(Im(f) = Y)$$

Esta condición es más fuerte que la de continuidad, algunos la llaman continuidad fuerte. Una condición equivalente es requerir que un subconjunto A de Y sea cerrado en Y si y sólo si $f^{-1}(A)$ es cerrado en X.

Dos clases especiales de funciones cociente son las funciones abiertas y las funciones cerradas.

Definición 50. *[3]. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Se dice que f es una función abierta si para cada conjunto abierto U de X, el conjunto $f(U)$ es abierto en Y.*

Definición 51. *[3]. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Se dice que f es una función cerrada si para cada conjunto cerrado A de X, el conjunto $f(A)$ es cerrado en Y.*

Se sigue inmediatamente de la definición que si $f : X \to Y$ es una función continua sobreyectiva que es abierta o cerrada, entonces f es una función cociente.

Mostremos como la noción de función cociente se puede usar para construir una topología sobre un conjunto.

Definición 52. ***Topología Cociente*** *[7]. Si X es un espacio topológico, A un conjunto no vacío y $f : X \to A$ es una función sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología τ_A sobre A relativa a la cual f es una función cociente; se denomina topología cociente inducida por f.*

La topología τ_A está definida, por supuesto, reuniendo aquellos $U \subseteq A$ tales que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Definición 53. ***Espacio Cociente*** *[7]. Sea X un espacio topológico y X^* una partición de X. Sea $f : X \to X^*$ la función sobreyectiva que lleva cada punto de X al elemento de X^* que lo contiene. En la topología cociente inducida por f, el espacio X^* se denomina espacio cociente de X.*

Dado X^*, hay una relación de equivalencia sobre X en la que los elementos de X^* son clases de equivalencia. Podemos pensar en X^* como obtenido al identificar cada par de puntos equivalentes. Por este motivo, el espacio cociente X^* es llamado a menudo espacio de identificación, o espacio de descomposición del espacio X.

Podemos describir la topología de X^* de otra manera. Un subconjunto U de X^* es una colección de clases de equivalencia, y el conjunto $f^{-1}(U)$ es la unión de las clases de equivalencia que pertenecen a U. Así, el conjunto abierto característico de X^* es una colección de clases de equivalencia cuya unión es un conjunto abierto de X.

Examinemos los conceptos previos mediante el siguiente teorema, el cual nos será de utilidad cuando hablemos de la autosemejanza topológica.

Teorema 13. *[7]. Sean X, Y y Z espacios topológicos. Sea $p : X \to Y$ una función cociente y $g : X \to Z$ una función que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ con $y \in Y$. Entonces g induce una función $f : Y \to Z$ tal que $f \circ p = g$. La función inducida f es continua si y sólo si g es continua; f es una función cociente si y sólo si g es una función cociente.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $y \in Y$. Por hipótesis g es constante sobre $p^{-1}(\{y\})$. Luego, $g(p^{-1}(\{y\}))$ es un conjunto unipuntual en Z. Sea $f(y) = g(p^{-1}(\{y\}))$. Sea $f : Y \to Z$. Supongamos que para cada $x \in X$, $f(p(x))) = g(x)$. Si f es continua, entonces $g = f \circ p$ es continua. Recíprocamente, supongamos que g es continua. Sea $V \in \mathcal{T}_Z$. Luego, $g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. Pero $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$; dado que p es una función cociente, se sigue que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_Y$. De aquí, f es continua. Si f es una función cociente, entonces g es la composición de dos funciones cociente y es así una función cociente. Recíprocamente, supongamos que g es una función cociente. Puesto que g es sobreyectiva, también lo es f. Sea $V \subseteq Z$. Probemos que $V \in \mathcal{T}_Z$ si $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_Y$. De la continuidad de p, $p^{-1}(f^{-1}(V)) \in \mathcal{T}_X$. Dado que $p^{-1}(f^{-1}(V)) = g^{-1}(V)$, $g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. Finalmente, como g es una función cociente, $V \in \mathcal{T}_Z$. $\square$.

A manera de proposición presentamos las curvas de Peano.

Proposición 4. *[7]. Existe una función continua y sobreyectiva $f : ([0,1], \tau_{us}) \to ([0,1]^2, \tau_{us})$. (topología usual)*

3.3. El Espacio $(\mathcal{H}(X), h)$ donde viven los Fractales

Pasemos ahora al espacio métrico $(\mathcal{H}(X), h)$, llamado por M.F. Barnsley (ver [9]) uno de los pioneros en el estudio de la geometría fractal, como el espacio donde viven los fractales.

Ahora presentamos la definición dada por B. Mandelbrot.

Definición 54. ***Conjunto Fractal*** *[1]. Sea A un conjunto no vacío. Se dice que A es un conjunto fractal, si es autosemejante (autosimilar) y si su dimensión Hausdorff-Besicovitch excede a su dimensión Topológica.*

Definición 55. ***Espacio de Hausdorff*** *[17]. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Denotemos por $\mathcal{H}(X)$ la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X, i.e., $\mathcal{H}(X) := \{K \subseteq X \mid K\, es\ compacto,\ K \neq \emptyset\}$.*

Es importante señalar que en geometría fractal, el uso del término espacio de Hausdorff es para hacer referencia a la familia $\mathcal{H}(X)$. Es un concepto muy distinto al que estamos familiarizados con el espacio topológico de Hausdorff en topología.

Una característica importante en $\mathcal{H}(X)$ es que la continuidad preserva la compacidad, es decir:

Teorema 14. *[9]. Sean (X, d) y (Y, m) espacios métricos y $f : (X, d) \to (Y, m)$ continua. Si $K \in \mathcal{H}(X)$ entonces $f(K) \in \mathcal{H}(Y)$.*

Demostración. Supongamos que $K \in \mathcal{H}(X)$ y $(y_n)_n$ es una sucesión en $f(K)$. Debemos probar que $(y_n)_n$ admite una subsucesión convergente en $f(K)$. Sea $f(K) = \{y \in Y \mid y = f(k), k \in K\}$. Supongamos que $y_n = f(k_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para algún $k_n \in K$. Sea $(k_n)_n$ una sucesión en K. De la compacidad de K, existe una subsucesión $(k_{n_t})_t$ de $(k_n)_n$ tal que $(k_{n_t})_t \to k$ para un $k \in K$. Luego, $(f(k_{n_t}))_t$ es una subsucesión de $(y_n)_n$, y por la continuidad de f, se sigue que $(f(k_{n_t}))_t \to f(k) \in f(K)$. $\square$

Observemos que los elementos de $\mathcal{H}(X)$ no son sencillos o elementales, dado que cada elemento es a su vez un conjunto. Analicemos esto por etapas, para poder definir una métrica en el conjunto $\mathcal{H}(X)$.

Definición 56. ***Distancia de un Punto a un Conjunto Compacto*** *[9]. Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $K \in \mathcal{H}(X)$. Se define la distancia del punto a al conjunto K, denotada como $\hat{d}(a, K)$, por $\hat{d}(a, K) := \min\{d(a, x) | x \in K\}$.*

Proposición 5. *[9]. El mínimo de la definición anterior siempre existe.*

Demostración. Sea $f : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supongamos que $f(x) = d(a, x)$, $a \in X$ y $x \in K$. Veamos que f es continua. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de f, $-d(x, y) \leq d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y)$. Luego, $|f(x) - f(y)|= |d(x, a) - d(y, a)|\leq d(x, y)$, y basta entonces tomar $0 < \delta \leq \varepsilon$ para obtener la continuidad de f.
Sea $S = \{d(a, x)|x \in K\} = \{f(x)|x \in K\}$. Dado que $K \neq \emptyset$, $S \neq \emptyset$. Por definición de f,

$S \subseteq \mathbb{R}$ y S es acotado inferiormente. Luego, existe $P \in \mathbb{R}$, tal que $P = \text{ínf}\, S$. Como P es la máxima cota inferior de S, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in K$ tal que $f(y_n) < P + \frac{1}{n}$, y se tiene que $-\frac{1}{n} < 0 \leq f(y_n) - P < \frac{1}{n}$, i.e., $|f(y_n) - P| < \frac{1}{n}$, de lo cual se deduce que $\text{lím}_{n\to\infty} f(y_n) = P$ (3. 4). De la compacidad de K, existe una subsucesión $(y_{k_n})_n$ de $(y_n)_n$, tal que $\text{lím}_{n\to\infty} y_{k_n} = \hat{y}$ para algún $\hat{y} \in K$. Luego, $f(\text{lím}_{n\to\infty} y_{k_n}) = f(\hat{y})$ y por el teorema 10, f es continua. Pero $(f(y_{k_n}))_n$ es una subsucesión de $(f(y_n))_n$, se sigue por el teorema 2 y por (3. 4) que $P = f(\hat{y})$, i.e., P es el mínimo de S. $\square$

Definición 57. ***Distancia de Compacto a Compacto*** *[9]. Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Se define la distancia del conjunto A al conjunto B, denotada como $\tilde{d}(A, B)$, por $\tilde{d}(A, B) := \text{máx}\{\hat{d}(a, B) | a \in A\}$. En otras palabras, $\tilde{d}(A, B) = \text{máx}\{\text{mín}\{d(a, b) | b \in B\} | a \in A\}$.*

Aclaremos que $\tilde{d}$ no es métrica, ya que en general no se cumple $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(B, A)$.

Ejemplo 6. *[8]. Sea el espacio métrico $(\mathbb{R}, d_u)$ (la métrica euclidiana), $A = [0, 1]$ y $B = [0, 2]$. Luego, $\tilde{d}([0, 1], [0, 2]) = 0 \neq 1 = \tilde{d}([0, 2], [0, 1])$.*

Para que la definición anterior quede bien establecida, tenemos que demostrar la siguiente proposición:

Proposición 6. *[9]. El máximo de la definición anterior siempre existe.*

Demostración. Sea $f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supongamos que $f(x) = \hat{d}(x, B)$, $x \in A$ y $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Por la proposición 5, $f(x)$ siempre existe. Veamos que f es continua. Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos $|f(x) - f(y)| = |\hat{d}(x, B) - \hat{d}(y, B)| = |d(x, b_1) - d(y, b_2)|$ para algunos $b_1, b_2 \in B$, i.e., $\hat{d}(x, B) = d(x, b_1)$ y $\hat{d}(y, B) = d(y, b_2)$. Por lo tanto, $d(x, b_1) \leq d(x, b_2) \leq d(x, y) + d(y, b_2)$ y $d(y, b_2) \leq d(y, b_1) \leq d(y, x) + d(x, b_1)$. De las desigualdades anteriores $-d(x, y) \leq d(x, b_1) - d(y, b_2) \leq d(x, y)$, i.e., $|d(x, b_1) - d(y, b_2)| \leq d(x, y)$, y basta entonces tomar $0 < \delta \leq \varepsilon$ para obtener la continuidad de f.
Sea $S = \{\hat{d}(x, B) | x \in A\}$. Dado que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, $S \neq \emptyset$. Por definición de f, $S \subseteq \mathbb{R}$. Además, como $f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es continua y A es compacto, $f(A)$ es compacto. Pero $f(A) = S$, luego S es compacto y por lo tanto acotado. Luego, por el axioma del supremo, existe $P \in \mathbb{R}$ tal que $P = sup\, S$. Queremos probar que P es el máximo de S. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in A$ tal que $P - \frac{1}{n} < f(y_n)$, luego $-\frac{1}{n} < 0 \leq P - f(y_n) < \frac{1}{n}$, i.e., $|P - f(y_n)| < \frac{1}{n}$, y por tanto $\text{lím}_{n\to\infty} f(y_n) = P$ (3. 5). Supongamos que $(y_n)_n$ es una sucesión en A. De la compacidad de A, existe una subsucesión $(y_{k_n})_n$ de $(y_n)_n$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} y_n = \hat{a}$ para algún $\hat{a} \in A$. Luego, $f(\text{lím}_{n\to\infty} y_n) = f(\hat{a})$, y de la continuidad de f, $\text{lím}_{n\to\infty} f(y_{k_n}) = f(\hat{a})$. Por (3. 5) y el teorema 2, se sigue que $P = f(\hat{a})$, i.e., P es el máximo de S. $\square$

Lema 3. *[8]. Si $A, B \in \mathcal{H}(X)$ y $A \subseteq B$, entonces $\tilde{d}(A, B) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $A, B \in \mathcal{H}(X)$ y $A \subseteq B$. Luego, $\tilde{d}(A, B) = \text{máx}\{\hat{d}(a, B) | a \in A\} = \hat{d}(a_0, B)$ para algún $a_0 \in A \subseteq B$, i.e., $\tilde{d}(A, B) = \text{mín}\{d(a_0, b) | b \in B\}$. Dado que $a_0 \in B$, se sigue que $\text{mín}\{d(a_0, b) | b \in B\} = 0$. $\square$

Un concepto importante en la teoría de fractales es el siguiente:

Definición 58. *[8],[9]. Supongamos que $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Se define $h(A, B)$ como $h(A, B) := \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$.*

El objetivo ahora es probar que h define una métrica en $\mathcal{H}(X)$, para esto necesitamos algunos resultados previos.

Lema 4. *[9]. Sean $S \subseteq \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, k constante, entonces $\min\{k+s|s \in S\} = k+\min S$.*

Demostración. Supongamos que $k \in \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$ y $H = \{k + s|s \in S\}$. Luego, $k + \min S \in H$. Sea $k + s \in H$. Como $s \in S$ se tiene que $\min S \leq s$, por lo tanto $k + \min S \leq k + s$, i.e., $k + \min S = \min H$. $\square$

Lema 5. *[9]. Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, tales que cumplen las desigualdades $a \leq b + c$ y $d \leq e + f$, entonces $\max\{a, d\} \leq \max\{b, e\} + \max\{c, f\}$.*

Demostración. Supongamos que $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ y $\max\{a, d\} = a$. Luego, $\max\{a, d\} = a \leq b+c \leq \max\{b, e\}+\max\{c, f\}$. De forma análoga, supongamos ahora que $\max\{a, d\} = d$. Luego, $\max\{a, d\} = d \leq e + f \leq \max\{b, e\} + \max\{c, f\}$. $\square$

Lema 6. *[9]. Sean $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$, $a \in A$ y $c \in C$ (a y c fijos). Entonces $\min\{d(a, b)|b \in B\} \leq \min\{d(a, c) + d(c, b)|b \in B\}$.*

Demostración. Sean $b_0, b_1 \in B$. Supongamos que $d(a, c) + d(c, b_0) = \min\{d(a, c) + d(c, b)|b \in B\}$ y $d(a, b_1) = \min\{d(a, b)|b \in B\}$. Luego, $d(a, b_1) \leq d(a, b_0) \leq d(a, c) + d(c, b_0)$. $\square$

Lema 7. *[9]. Si $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ entonces $\tilde{d}(A, B) \leq \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B)$.*

Demostración. Sean $a \in A$ y $c \in C$. Luego, $\hat{d}(a, B) = \min\{d(a, b)|b \in B\} \leq \min\{d(a, c) + d(c, b)|b \in B\} \leq d(a, c) + \min\{d(c, b)|b \in B\}$. Por otro lado, supongamos ahora que $c_0 \in C$ y $\hat{d}(a, C) = d(a, c_0)$. Luego, $\hat{d}(a, B) \leq d(a, c_0) + \min\{d(c_0, b)|b \in B\} \leq \hat{d}(a, C) + \max\{\min\{d(c, b)|b \in B\}|c \in C\} = \hat{d}(a, C) + \tilde{d}(C, B)$. Finalmente, supongamos que $a = a_0$ y $\hat{d}(a_0, B) = \tilde{d}(A, B)$. Luego, $\tilde{d}(A, B) \leq \hat{d}(a_0, C) + \tilde{d}(C, B) \leq \max\{\hat{d}(a, C)|a \in A\} + \tilde{d}(C, B) = \tilde{d}(A, C) + \tilde{d}(C, B)$. $\square$

Lema 8. *[8]. h es una métrica sobre $\mathcal{H}(X)$.*

Demostración. Probemos la propiedad (1) de la definición 15. Supongamos que $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $a_0 \in A$ y $h(A, B) = 0$. Luego, $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(B, A) = 0$. Lo cual implica que existe $a_1 \in A$ tal que $\hat{d}(a_1, B) = 0$. Por otra parte, $\hat{d}(a_0, B) \leq \hat{d}(a_1, B) = 0$; en consecuencia, $\hat{d}(a_0, B) = 0$, luego, existe $b_0 \in B$ tal que $\hat{d}(a_0, B) = d(a_0, b_0) = 0$, i.e., $a_0 = b_0$. Se sigue que $a_0 \in B$.
Supongamos ahora que $b_0 \in B$ y $h(A, B) = 0$. Luego, $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(B, A) = 0$. Lo cual implica que existe $b_1 \in B$ tal que $\hat{d}(b_1, A) = 0$. Por otra parte, $\hat{d}(b_0, A) \leq \hat{d}(b_1, A) = 0$; en consecuencia, $\hat{d}(b_0, A) = 0$, luego, existe $a_0 \in A$ tal que $\hat{d}(b_0, A) = d(b_0, a_0) = 0$, i.e., $b_0 = a_0$. Se sigue que $b_0 \in A$.
Supongamos que $a \in A$ y $h(A, B) = \tilde{d}(A, B)$. Luego, para cada $a \in A$, $\hat{d}(a, B) = \min\{d(a, b)|b \in B\} = 0$, pues $A \subseteq B$, i.e., $\tilde{d}(A, B) = \max\{0\} = 0$. Por otro lado, sea $b \in B$. Supongamos ahora que $h(A, B) = \tilde{d}(B, A)$. Luego, para cada $b \in B$, $\hat{d}(b, A) =$

$\min\{d(b,a)|a \in A\} = 0$, pues $B \subseteq A$, i.e., $\tilde{d}(B,A) = \max\{0\} = 0$.
Probemos la propiedad (2) de la definición 15. Supongamos que $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. Por el lema 7, $\tilde{d}(A,B) \leq \tilde{d}(A,C) + \tilde{d}(C,B)$ y $\tilde{d}(B,A) \leq \tilde{d}(B,C) + \tilde{d}(C,A)$. Finalmente, por el lema 5, $\max\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\} \leq \max\{\tilde{d}(A,C), \tilde{d}(C,A)\} + \max\{\tilde{d}(C,B), \tilde{d}(B,C)\}$. $\square$

Definición 59. ***Métrica de Hausdorff*** *[9]. Llamaremos al espacio métrico $(\mathcal{H}(X), h)$ el espacio donde viven los fractales. La métrica h se llama métrica de Hausdorff.*

Probemos algunos de los resultados más interesantes de $(\mathcal{H}(X), h)$.

3.4. La Completez del Espacio $(\mathcal{H}(X), h)$

En esta sección probaremos que la completez de (X, d) implica la completez de $(\mathcal{H}(X), h)$. Para lo cual se deben establecer algunos conceptos y resultados previos.

Definición 60. ***Nube*** *[8]. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \in \mathcal{H}(X)$, y $\varepsilon > 0$. Se define la nube de centro en A y radio ε, denotada $N(A, \varepsilon)$, como $N(A, \varepsilon) := \{x \in X | \hat{d}(x, A) < \varepsilon\}$.*

Un resultado inmediato referente a nubes es el siguiente:

Lema 9. *[8]. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $h(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq N(B, \varepsilon)$ y $B \subseteq N(A, \varepsilon)$.*

Demostración. Debemos probar $\tilde{d}(A,B) < \varepsilon \Longleftrightarrow A \subseteq N(B,\varepsilon)$ y $\tilde{d}(B,A) < \varepsilon \Longleftrightarrow B \subseteq N(A,\varepsilon)$. Supongamos que $\tilde{d}(A,B) < \varepsilon$. Luego, $\max\{\hat{d}(a,B)|a \in A\} < \varepsilon$, i.e., $\hat{d}(a,B) < \varepsilon$ para todo $a \in A$ y $A \subseteq N(B,\varepsilon)$. Recíprocamente. Sea $a \in A$. Supongamos ahora que $A \subseteq N(B,\varepsilon)$. Luego, $\hat{d}(a,B) < \varepsilon$. Por otro lado, sea $a_0 \in A$. Supongamos que $\hat{d}(a_0,B) = \tilde{d}(A,B)$. Luego, $\tilde{d}(A,B) < \varepsilon$. Finalmente. Supongamos que $\tilde{d}(B,A) < \varepsilon$. Luego, $\max\{\hat{d}(b,A)|b \in B\} < \varepsilon$, i.e., $\hat{d}(b,A) < \varepsilon$ para todo $b \in B$ y $B \subseteq N(A,\varepsilon)$. Recíprocamente. Sea $b \in B$. Supongamos ahora que $B \subseteq N(A,\varepsilon)$. Luego, $\hat{d}(b,A) < \varepsilon$. Sea $b_0 \in B$. Supongamos que $\hat{d}(b_0,A) = \tilde{d}(B,A)$. Luego, $\tilde{d}(B,A) < \varepsilon$. $\square$

Definición 61. *[8]. Sean (X, d) un espacio métrico, $A \in \mathcal{H}(X)$, y $\varepsilon > 0$. Se define la nube cerrada de centro en A y radio ε, denotada $\bar{N}(A,\varepsilon)$, como $\bar{N}(A,\varepsilon) := \{x \in X | \hat{d}(x,A) \leq \varepsilon\}$. En otras palabras $\bar{N}(A,\varepsilon) := \{x \in X | (\exists a \in A)(d(a,x) \leq \varepsilon)\}$.*

Un resultado inmediato para nubes cerradas es el siguiente:

Lema 10. *[8]. Sean $A \in \mathcal{H}(X)$ y $\varepsilon > 0$. El conjunto $\bar{N}(A,\varepsilon)$ es cerrado.*

Demostración. Probemos que $(\bar{N}(A,\varepsilon))^c$ es abierto. Sea $y \in (\bar{N}(A,\varepsilon))^c$. Luego, $\hat{d}(y,A) > \varepsilon$. Sea $a_0 \in A$. Supongamos que $\hat{d}(y,A) = d(y,a_0)$. Veamos que $B(y;\delta) \subseteq (\bar{N}(A,\varepsilon))^c$, donde $\delta = d(y,a_0) - \varepsilon > 0$. Sea $z \in B(y;\delta)$. Debemos probar que $d(z,a) > \varepsilon$ para todo $a \in A$. Sea $a \in A$. Luego, $d(y,a_0) \leq d(y,a) \leq d(y,z) + d(z,a) < \delta + d(z,a) = d(y,a_0) - \varepsilon + d(z,a)$. $\square$

Un resultado para nubes cerradas análogo al lema 9 es el siguiente:

Lema 11. *[8]. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $h(A,B) \leq \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq \bar{N}(B,\varepsilon)$ y $B \subseteq \bar{N}(A,\varepsilon)$.*

Una herramienta que nos será de utilidad en la demostración del teorema principal de esta sección, es el siguiente lema:

Lema 12. ***Lema de Extensión*** *[9]. Sean $(A_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(X),h)$ y $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de naturales. Suponga que $\{x_{n_j} \in A_{n_j} \mid j \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Cauchy en (X,d). Entonces existe una sucesión de Cauchy $\{\tilde{x}_n \in A_n | n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Se construye la sucesión $(\tilde{x}_n)_n$ de la siguiente manera: Para cada $n \in \{1,2,...,n_1-1\}$ escogemos $\tilde{x}_n \in A_n$ tal que $\hat{d}(x_{n_1},A_n) = d(x_{n_1},\tilde{x}_n)$. Análogamente, para cada $j \in \{2,3,...\}$ y cada $n_{j-1} < n < n_j$ se escoge $\tilde{x}_n \in A_n$ tal que $\hat{d}(x_{n_j},A_n) = d(x_{n_j},\tilde{x}_n)$ con $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Probemos que $(\tilde{x}_n)_n$ así definida es la sucesión buscada. Así, $(\tilde{x}_n)_n$ es una extensión de $(x_{n_j})_j$ y $\tilde{x}_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos que $(\tilde{x}_n)_n$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_{n_j})_j$ es de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k, n_j \geq N_1 \Rightarrow d(x_{n_k},x_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Además, como $(A_n)_n$ es de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n_j \geq N_2 \Rightarrow h(A_m,A_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}$. La última desigualdad significa, según el lema 9 que $A_m \subseteq N(A_{n_j},\frac{\varepsilon}{3})$ y $A_{n_j} \subseteq N(A_m,\frac{\varepsilon}{3})$. Luego, para $m, n_j \geq N_2 \Rightarrow x_{n_j} \in N(A_m,\frac{\varepsilon}{3})$, i.e., $\hat{d}(x_{n_j},A_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Análogamente, $n, n_k \geq N_1 \Rightarrow d(x_{n_k},\tilde{x}_n) < \frac{\varepsilon}{3}$. Basta entonces tomar $N = \max\{N_1,N_2\}$ y se tendrá, $n,m \geq N \Rightarrow d(\tilde{x}_m,\tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m,x_{n_j}) + d(x_{n_j},x_{n_k}) + d(x_{n_k},\tilde{x}_n) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. $\square$

El teorema principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 15. *[9]. Sea (X,d) un espacio métrico. $(\mathcal{H}(X),h)$ es completo si y sólo si (X,d) es completo. Además, si $(A_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(X),h)$ y $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, entonces A se puede caracterizar así $A := \{x \in X |$ existe una sucesión $(x_n)_n$ en X, tal que $(x_n)_n \to x$ y $x_n \in A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $(A_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(X),h)$. Definamos $A := \{x \in X |$ existe una sucesión $(x_n)_n$ en X, tal que $(x_n)_n \to x$ y $x_n \in A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

a) Probemos que $A \neq \emptyset$. Para esto basta probar que existe una sucesión de Cauchy $(a_n)_n$ en A con $a_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De la completez de X, se sigue que $(a_n)_n \to a$ para algún $a \in X$, y por tanto $a \in A$. Como $(A_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, podemos escoger una sucesión creciente de naturales $N_1 < N_2 < ... < N_n < ...$ tales que $h(A_m,A_n) < \frac{1}{2^i}$, para todo $m, n \geq N_i$, $i \in \mathbb{N}$.
Sea $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Luego, $h(A_{N_1},A_{N_2}) < \frac{1}{2} \Rightarrow A_{N_1} \subseteq N(A_{N_2},\frac{1}{2})$, i.e., $\hat{d}(x_{N_1},A_{N_2}) < \frac{1}{2}$, lo que a su vez implica que existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1},x_{N_2}) < \frac{1}{2}$. Dado que $h(A_{N_2},A_{N_3}) < \frac{1}{2^2} \Rightarrow A_{N_2} \subseteq N(A_{N_3},\frac{1}{2^2})$, se sigue que $\hat{d}(x_{N_2},A_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$, y así sucesivamente se tiene una sucesión $(x_{N_i})_i$ con $x_{N_i} \in A_{N_i}$ tal que $d(x_{N_i},x_{N_{i+1}}) < \frac{1}{2^i}$. Sea $N_m \leq N_n$. Luego, $d(x_{N_m},x_{N_n}) \leq d(x_{N_m},x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}},x_{N_{m+2}}) + ... + d(x_{N_{n-1}},x_{N_n}) < \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$ tiende a 0 cuando n,m tienden a ∞.
De esta manera, $(x_{N_i})_i$ es una sucesión de Cauchy, y por el lema de extensión existe

una sucesión de Cauchy $(\tilde{x}_n)_n$ tal que $\tilde{x}_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\tilde{x}_{N_i} = x_{N_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como X es completo, existe $x \in X$ tal que $(\tilde{x}_n)_n \to x$ de modo que $x \in A$, i.e., $A \neq \emptyset$.

b) Probaremos ahora que A es cerrado. Sea $(a_i)_i$ una sucesión de elementos de A tal que $(a_i)_i \to a$. Probemos que $a \in A$. Como cada $a_i \in A$, entonces para cada i existe una sucesión $(x_n^i)_n$ con $x_n^i \in A_n$ para todo n y $(x_n^i)_n \to a_i$. i.e.,

$$
\begin{array}{rcl}
(x_n^1)_n = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, \ldots) & \to & a_1 \\
(x_n^2)_n = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2, \ldots) & \to & a_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & & \\
(x_n^i)_n = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i, \ldots) & \to & a_i \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & & \\
(x_n^{N_k})_n = (x_1^{N_k}, x_2^{N_k}, \ldots, x_n^{N_k}, \ldots) & \to & a_{N_k} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & & \downarrow \\
& & a
\end{array}
$$

Dado que $(a_i)_i \to a$, podemos encontrar una sucesión creciente de naturales $N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$ tal que para cada k, $d(a_{N_k}, a) < \frac{1}{k}$. Dado que $(x_n^{N_k})_n \to a_{N_k}$, para k existe m_k tal que $d(x_{m_k}^{N_k}, a_{N_k}) < \frac{1}{k}$. Luego, $d(x_{m_k}^{N_k}, a) \leq d(x_{m_k}^{N_k}, a_{N_k}) + d(a_{N_k}, a) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$ tiende a 0 cuando k tiende a ∞. Notemos que $y_{m_k} = x_{m_k}^{N_k}$. Luego, para cada k, $y_{m_k} \in A_{m_k}$, y además $(y_{m_k})_k \to a$, i.e., $(y_{m_k})_k$ es de Cauchy. Nuevamente, por el lema de extensión obtenemos una sucesión de Cauchy $(\tilde{y}_m)_m$ tal que para todo m, $\tilde{y}_m \in A_m$ con $\tilde{y}_{m_k} = y_{m_k}$. Por la completez de X, $(\tilde{y}_m)_m$ debe ser convergente, y dado que su subsucesión $(y_{m_k})_k$ converge a a, entonces $(\tilde{y}_m)_m \to a$.

c) Sea $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow A \subseteq \bar{N}(A_n, \varepsilon)$. Dado que $(A_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq N \Rightarrow h(A_m, A_n) \leq \varepsilon$, i.e., $A_m \subseteq \bar{N}(A_n, \varepsilon)$. Sea $a \in A$. Luego, existe una sucesión $(a_i)_i$ tal que $a_i \in A_i$ y $(a_i)_i \to a$. Supongamos que N es suficientemente grande para que $m \geq N \Rightarrow d(a_m, a) < \varepsilon$. Luego, $a_m \in \bar{N}(A_n, \varepsilon)$, pues $A_m \subseteq \bar{N}(A_n, \varepsilon)$. De esta manera $(a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots)$ es una sucesión en $\bar{N}(A_n, \varepsilon)$ que converge en a, i.e., $a \in \overline{\bar{N}(A_n, \varepsilon)} = \bar{N}(A_n, \varepsilon)$.

d) Probemos ahora que A es compacto. Supongamos que A no es totalmente acotado. Entonces existe algún $\varepsilon > 0$ para el cual no existe una ε-red que recubra a A. Sea $x_1 \in A$. Luego,

$$A \not\subseteq B(x_1, \varepsilon) \Rightarrow (\exists x_2 \in A)(d(x_1, x_2) \geq \varepsilon),$$

$$A \not\subseteq B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon) \Rightarrow (\exists x_3 \in A)((d(x_3,x_1) \geq \varepsilon) \wedge (d(x_3,x_2) \geq \varepsilon)),$$

$$\vdots$$

Se construye de esta manera una sucesión $(x_i)_i$ de elementos de A tal que para todo $i \neq j$, $d(x_i,x_j) \geq \varepsilon$. Ahora bien, por (c) existe un n suficientemente grande tal que $A \subseteq \bar{N}(A_n, \frac{\varepsilon}{3})$. Entonces para cada x_i, existe $y_i \in A_n$ tal que $d(x_i,y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Como A_n es compacto, existe una subsucesión $(y_{n_i})_i$ de $(y_n)_n$ convergente en A_n. Por tanto $(y_{n_i})_i$ es de Cauchy, así que es posible encontrar y_{n_i}, y_{n_j} tales que $d(y_{n_i},y_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Luego, $d(x_{n_i},x_{n_j}) \leq d(x_{n_i},y_{n_i}) + d(y_{n_i},x_{n_j}) \leq d(x_{n_i},y_{n_i}) + d(y_{n_i},y_{n_j}) + d(y_{n_j},x_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Lo cual contradice la forma como fue construida $(x_n)_n$. De esta manera A es totalmente acotado, y puesto que en (b) se demostró que es cerrado, se concluye que A es compacto.

e) Probaremos ahora que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Sea $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow A_n \subseteq \bar{N}(A,\varepsilon)$. Esto será suficiente teniendo en cuenta (c) y el lema 11. Por (c) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m,n \geq N \Rightarrow h(A_m,A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces para $m,n \geq N \Rightarrow A_m \subseteq \bar{N}(A_n,\frac{\varepsilon}{2})$. Probemos que $n \geq N \Rightarrow A_n \subseteq \bar{N}(A,\varepsilon)$. Sea $y \in A_n$. Luego, existe una sucesión creciente de naturales $N < N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$ tal que $m,n \geq N_j \Rightarrow A_m \subseteq \bar{N}(A_n,\frac{\varepsilon}{2^{j+1}})$. Entonces $A_n \subseteq \bar{N}(A_{N_1},\frac{\varepsilon}{2})$. Como $y \in A_n$, existe $x_{N_1} \in A_{N_1}$ tal que $d(y,x_{N_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x_{N_1} \in A_{N_1}$, existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1},x_{N_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$. De esta manera continuamos y se encuentra una sucesión $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3}, \ldots$ tal que $x_{N_j} \in A_{N_j}$ y $d(x_{N_j},x_{N_{j+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Luego, $d(y,x_{N_j}) \leq d(y,x_{N_1}) + d(x_{N_1},x_{N_2}) + \cdots + d(x_{N_{j-1}},x_{N_j}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^j} < \varepsilon$, para todo j. Además, $(x_{N_j})_j$ es una sucesión de Cauchy, luego, $(x_{N_j})_j \to x$ para algún x. Esto implica que $x \in A$. Veamos que $d(y,x) \leq \varepsilon$. Supongamos que $d(y,x) > \varepsilon$. Luego, $d(y,x) - \varepsilon > 0$ y dado que $(x_{N_j})_j \to x$, existe $M > 0$ tal que $N_j > M$ implica $d(x_{N_j},x) < d(y,x) - \varepsilon$, de donde $\varepsilon < d(y,x) - d(x_{N_j},x) \leq d(y,x_{N_j}) + d(x_{N_j},x) - d(x_{N_j},x) = d(y,x_{N_j}) < \varepsilon$. Así, $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $d(y,x) \leq \varepsilon$, y puesto que $x \in A$ se concluye que $y \in \bar{N}(A,\varepsilon)$, luego $A_n \subseteq \bar{N}(A,\varepsilon)$.

($\Leftarrow$) Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en (X,d). Como cada conjunto unitario $\{x_n\}$ es un compacto no vacío, entonces $(\{x_n\})_n$ es una sucesión en $\mathcal{H}(X)$. Sean $\{x_n\},\{x_m\} \in \mathcal{H}(X)$. Luego, $h(\{x_n\},\{x_m\}) = \tilde{d}(\{x_n\},\{x_m\}) = \hat{d}(x_n,\{x_m\}) = d(x_n,x_m)$, de modo que $(\{x_n\})_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$. Por hipótesis, $(\{x_n\})_n \to K$ para algún $K \in \mathcal{H}(X)$. Veamos que K es un conjunto unitario. Sean $a,b \in K$ y $\varepsilon > 0$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow h(K,\{x_n\}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Observemos que $\tilde{d}(K,\{x_n\}) = \max\{\hat{d}(y,\{x_n\}) | y \in K\} = \max\{d(y,x_n) | y \in K\}$. Ahora bien, para $n \geq N$ se tendrá $d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(b,x_n) \leq 2\max\{d(y,x_n)|y \in K\} = 2\tilde{d}(K,\{x_n\}) \leq 2h(K,\{x_n\}) < 2 * \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. De esta manera, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $d(a,b) < \varepsilon$, lo que implica $a = b$ y $K = \{a\}$. Por tanto, $d(x_n,a) = h(\{x_n\},\{a\}) = h(\{x_n\},K)$ se puede hacer tan pequeña como se quiera, i.e., $(x_n)_n \to a$. $\square$

Finalizaremos esta sección con algunos lemas interesantes, los cuales nos serán de utilidad en el capítulo 4 para garantizar el buen funcionamiento de los sistemas iterados de funciones.

Lema 13. *[8]. Sean (X,d) un espacio métrico y $f:(X,d)\to(X,d)$ una función contractiva. Definimos la función $\hat{f}:(\mathcal{H}(X),h)\to(\mathcal{H}(X),h)$ por $\hat{f}(K)=f(K)$ con $K\in\mathcal{H}(X)$. Entonces $\hat{f}$ es una función contractiva en $(\mathcal{H}(X),h)$, con el mismo factor de contracción de f.*

Demostración. Por el teorema 14, $\hat{f}$ está bien definida. Dado que f es una función contractiva, existe $r\in[0,1)$ tal que para todo $x,y\in X$ se cumple $d(f(x),f(y))\leq rd(x,y)$. Sean $A,B\in\mathcal{H}(X)$. Luego, $h(\hat{f}(A),\hat{f}(B))=h(f(A),f(B))=\text{máx}\{\tilde{d}(f(A), f(B)),\tilde{d}(f(B),f(A))\}$. Supongamos que $h(f(A),f(B))=\tilde{d}(f(A),f(B))=\text{máx}\{\text{mín}\{ d(f(a),f(b))|a\in A\}|b\in B\}\leq\text{máx}\{\text{mín}\{rd(a,b)|a\in A\}|b\in B\}$. Finalmente, $h(\hat{f}(A), \hat{f}(B))\leq r\,\text{máx}\{\text{mín}\{d(a,b)|a\in A\}|b\in B\}=r\tilde{d}(A,B)\leq r\ max\{\tilde{d}(A,B),\tilde{d}(B,A)\}= rh(A,B)$. $\square$.

Lema 14. *[9]. Sean $A,B,C\in\mathcal{H}(X)$. Entonces $\tilde{d}(A\cup B,C)=\text{máx}\{\tilde{d}(A,C),\tilde{d}(B,C)\}$.*

Demostración. Sean $A,B,C\in\mathcal{H}(X)$. Luego, $\tilde{d}(A\cup B,C)=\text{máx}\{\hat{d}(x,C)|x\in A\cup B\}=\text{máx}\{\hat{d}(x,C)|x\in A\vee x\in B\}=\text{máx}\{\text{máx}\{\hat{d}(x,C)|x\in A\},\text{máx}\{\hat{d}(x,C)|x\in B\}\}=\text{máx}\{\tilde{d}(A,C),\tilde{d}(B,C)\}$. $\square$

Lema 15. *[9]. Sean $A,B,C,D\in\mathcal{H}(X)$. Entonces $h(A\cup B,C\cup D)\leq\text{máx}\{h(A,C),h(B,D)\}$.*

Demostración. Sean $A,B,C,D\in\mathcal{H}(X)$. Por el lema 7, $\tilde{d}(A,C\cup D)\leq\tilde{d}(A,C)+\tilde{d}(C,C\cup D)$. Dado que $C\subseteq C\cup D$, por el lema 3, $\tilde{d}(C,C\cup D)=0$, i.e., $\tilde{d}(A,C\cup D)\leq\tilde{d}(A,C)$.

De forma análoga,

$$\tilde{d}(B,C\cup D)\leq\tilde{d}(B,D)+\tilde{d}(D,C\cup D)\Rightarrow\tilde{d}(B,C\cup D)\leq\tilde{d}(B,D),$$

$$\tilde{d}(C,A\cup B)\leq\tilde{d}(C,A)+\tilde{d}(A,A\cup B)\Rightarrow\tilde{d}(C,A\cup B)\leq\tilde{d}(C,A)\text{ y}$$

$$\tilde{d}(D,A\cup B)\leq\tilde{d}(D,B)+\tilde{d}(B,A\cup B)\Rightarrow\tilde{d}(D,A\cup B)\leq\tilde{d}(D,B).$$

Por la definición de h, el lema 14 y las desigualdades anteriores, se sigue que $h(A\cup B,C\cup D)=\text{máx}\{\tilde{d}(A\cup B,C\cup D),\tilde{d}(C\cup D,A\cup B)\}=\text{máx}\{\text{máx}\{\tilde{d}(A,C\cup D),\tilde{d}(B,C\cup D)\},\text{máx}\{\tilde{d}(C,A\cup B),\tilde{d}(D,A\cup B)\}\}=\text{máx}\{\tilde{d}(A,C\cup D),\tilde{d}(B,C\cup D),\tilde{d}(C,A\cup B),\tilde{d}(D,A\cup B)\}\leq\text{máx}\{\tilde{d}(A,C),\tilde{d}(B,D),\tilde{d}(C,A),\tilde{d}(D,B)\}=\text{máx}\{\text{máx}\{\tilde{d}(A,C),\tilde{d}(C,A)\},\text{máx}\{ \tilde{d}(B,D),\tilde{d}(D,B)\}\}=\text{máx}\{h(A,C),h(B,D)\}$. $\square$

Lema 16. *[9]. Sean (X,d) un espacio métrico y $f_i:(X,d)\to(X,d)$ una función contractiva, $i=1,2,\ldots,n$ con $n\in\mathbb{N}$, n fijo. Si se define $F:(\mathcal{H}(X),h)\to(\mathcal{H}(X),h)$ como $F(K):=\bigcup_{i=1}^{n}f_i(K)$ entonces F es una función contractiva.*

Demostración. Por los Teoremas 11, 9 y 14, F está bien definida. Para probar que F es una función contractiva basta considerar el caso de $N=2$ (luego se aplica inducción matemática). Dado que f_1 y f_2 son funciones contractivas, existen $r_1,r_2\in[0,1)$ tales que para todo $x,y\in X$ se cumple $d(f_1(x),f_1(y))\leq r_1d(x,y)$ y $d(f_2(x),f_2(y))\leq r_2d(x,y)$. Sean $A,B\in\mathcal{H}(X)$. Por los lemas 13 y 15, $h(F(A),F(B))=h(f_1(A)\cup f_2(A),f_1(B)\cup f_2(B))\leq\text{máx}\{h(f_1(A),f_1(B)),h(f_2(A),f_2(B))\}\leq\text{máx}\{r_1h(A,B),r_2h(A,B)\}\leq r\,\text{máx}\{h(A,B),h(A,B)\}=rh(A,B)$, donde $r=\text{máx}\{r_1,r_2\}$. $\square$

CAPÍTULO 4

Sistemas Iterados de Funciones

La palabra *fractal*, ha evolucionado durante los últimos años, B. Mandelbrot fué el primero en usar esta palabra para describir conjuntos con propiedades fuera de lo común, como tener una dimensión no entera o ser autosemejantes, entre otras; actualmente los fractales se pueden considerar como atractores de SIF.

Comenzamos esta sección presentando el concepto de sistema iterado de funciones, abordaremos además el resultado principal de la geometría fractal, el teorema de existencia y unicidad para conjuntos fractales, de M. F. Barnsley.

4.1. Sistema Iterado de Funciones SIF, el Atractor de un SIF

Comencemos con los siguientes conceptos básicos.

Definición 62. ***SIF*** *[10]. Un Sistema Iterado de Funciones (SIF) es una estructura de la forma* $\{(X, d) : f_1, f_2, ..., f_n\}$ *donde* (X, d) *es un espacio métrico completo y cada* $f_i : (X, d) \to (X, d)$ *con* $i = 1, ..., n$ *es una función contractiva en* (X, d).

Definición 63. ***Atractor*** *[10]. Sea* $K \subseteq X$ *un conjunto compacto no vacío. Llamamos a* K *un conjunto invariante o atractor para el (SIF)* $\{(X, d) : f_1, f_2, ..., f_n\}$ *si* $K = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(K)$.

Algunas veces se le llama conjunto atractor para distinguirlo de otro tipo de atractores. Citemos ahora el teorema de M.F. Barnsley, el cual garantiza la existencia y unicidad de lo que llamaremos el atractor de un SIF.

Teorema 16. ***Teorema de Existencia y Unicidad de los Fractales*** *[12]. Sea* (X, d) *un espacio métrico completo. Supongamos que* $\{(X, d) : f_1, f_2, ..., f_n\}$ *es un Sistema Iterado de Funciones con sus respectivas contracciones* $r_1, ..., r_n$. *Entonces existe un único conjunto compacto invariante para el Sistema Iterado de Funciones.*

Demostración. Dado que (X, d) es un espacio métrico completo, por el teorema 15 $(\mathcal{H}(X), h)$ es también un espacio métrico completo. Sea $F : (\mathcal{H}(X), h) \to (\mathcal{H}(X), h)$ definida por $F(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A)$. Supongamos que $A \in (\mathcal{H}(X), h)$. Por definición de $\mathcal{H}(X)$,

A es un conjunto compacto no vacío. Se sigue por el teorema 9 que $F(A)$ también es un conjunto compacto. Luego, por el lema 16 se sigue que F es una función contractiva. Sea $r = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$. Dado que $r_1, ..., r_n$ son parámetros de contracción, $r < 1$. Queremos probar que $h(F(A), F(B)) \leq rh(A, B)$. Sea $q > h(A, B)$. Supongamos que $x \in F(A)$. Luego, $x = f_i(x^*)$ para algún i y algún $x^* \in A$. Ya que $q > h(A, B)$, existe $y^* \in B$ con $d(x^*, y^*) < q$, i.e., $y = f_i(y^*) \in F(B)$ satisface $d(x, y) = r_i d(x^*, y^*) < rq$. Esto es verdad para todo $x \in F(A)$, también $F(A)$ esta contenido en la rq-vecindad de $F(B)$. Similarmente, $F(B)$ esta contenido en la rq-vecindad de $F(A)$. Por lo tanto, $h(F(A), F(B)) \leq rq$. Esto es verdadero para todo $q > h(A, B)$, también tenemos que $h(F(A), F(B)) \leq rh(A, B)$. Por lo tanto, tenemos una función contractiva F definida en un espacio métrico completo $(\mathcal{H}(X), h)$. Por el teorema del punto fijo de Banach, F tiene un único punto fijo. □

Presentemos un ejemplo para ilustrar el teorema anterior.

Ejemplo 7. *[12]. Sea el SIF* $\{(\mathbb{R}, |\cdot|) : f_1, f_2\}$ *donde* $f_1(x) = \dfrac{1}{3}x$ *y* $f_2(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

En este caso $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}(\mathbb{R})$ está definida por $F(K) := f_1(K) \cup f_2(K)$ con $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$.

Sea $C_0 = [0, 1]$. Luego,

$C_1 = F(C_0) = f_1([0, 1]) \cup f_2([0, 1]) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

$C_2 = F(C_1) = f_1([0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]) \cup f_2([0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

$$\vdots$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n =$ conjunto de Cantor.

Algunos resultados clásicos que garantizan la existencia de conjuntos invariantes compactos son presentados por S. Hayashi [13] obtenidos como puntos fijos de Tarski.

Definición 64. ***Autosemejanza*** *[12]. Se dice que un conjunto es autosemejante si es el atractor de un SIF.*

Algunas veces se usa el término de atractor en conexión con un SIF, que es simplemente un conjunto finito de funciones actuando en un espacio métrico completo (X, d).

Presentemos algunos ejemplos de sistemas iterados de funciones.

Ejemplo 8. *[9]. En el plano complejo el atractor del SIF* $\{\mathbb{C} : f_1(z) = \frac{1}{2}z,\ f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2},\ f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i\}$ *es llamado el triángulo de Sierpinski.*

Ejemplo 9. *[9]. En el plano complejo el atractor del SIF* $\{\mathbb{C} : f_1(z) = \frac{1}{3}z,\ f_2(z) = \frac{1}{3}ze^{i\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3},\ f_3(z) = \frac{1}{3}ze^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i,\ f_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\}$ *es llamado la curva de Koch.*

Ejemplo 10. *[12]. En el plano complejo el atractor del SIF* $\{\mathbb{C} : f_1(z) = \frac{1}{3}z,\ f_2(z) = \frac{1}{3}z+\frac{1}{3},\ f_3(z) = \frac{1}{3}z+\frac{2}{3},\ f_4(z) = \frac{1}{3}z+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i,\ f_5(z) = \frac{1}{3}z+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i,\ f_6(z) = \frac{1}{3}z+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i,\ f_7(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}i,\ f_8(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}i\}$ *se llama la carpeta de Sierpinski.*

Según B. Mandelbrot, un objeto es autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferente escala y hasta estar ligeramente deformadas.

Es importante señalar que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch presenta el inconveniente de ser muy poco práctica al momento de ser utilizada. Es por ello que habitualmente se recurre a otro concepto de dimensión: La dimensión de similitud, basada en la propiedad de autosimilitud de los fractales.

En general, si tomamos un conjunto de dimensión D, podemos descomponerlo en N réplicas de sí mismo reducidas en un factor de escala r, y tendríamos que $Nr^D = C$, donde C es constante.

Definición 65. *[16]. Un conjunto S es autosimilar si puede ser dividido en N subconjuntos congruentes, cuando cada uno se aumenta por un factor constante M que produce todo el conjunto S. La dimensión fractal de un conjunto autosimilar S está dada por* $D = \frac{logN}{logM}$.

Formalmente, presentemos el concepto de dimensión de similaridad, propiedad de los sistemas iterados de funciones.

Definición 66. *[12]. El valor de autosimilitud de una lista de parámetros de contracción $r_1, \ldots, r_n$ es el número positivo D que satisface* $r_1^D + r_2^D + \ldots + r_n^D = 1$.

Citemos una manera importante de construir funciones contractivas en $(\mathcal{H}(X), h)$.

Definición 67. ***Transformación y Conjunto de Condensación*** *[12]. Sean (X, d) un espacio métrico y $C \in \mathcal{H}(X)$. Definimos $f_0 : (\mathcal{H}(X), h) \to (\mathcal{H}(X), h)$ por $f_0(K) := C$ con $K \in \mathcal{H}(X)$. Se dice entonces que f_0 es una transformación de condensación, y C se llama conjunto de condensación asociado.*

Observemos de la definición anterior que f_0 simplemente es una función constante de $(\mathcal{H}(X), h)$ en $(\mathcal{H}(X), h)$, además es una función contractiva, con parámetro de contracción 0, cuyo punto fijo es el conjunto de condensación C.

Definición 68. *[9]. Sean $\{(X, d) : f_1, \ldots, f_n\}$ un SIF y $f_0 : (\mathcal{H}(X), h) \to (\mathcal{H}(X), h)$ una transformación de condensación. Llamamos a $\{(X, d) : f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ un SIF con condensación.*

Observemos que la única diferencia entre un SIF y un SIF con condensación, es la presencia en este último de una función contractiva diferente de las otras del SIF, sin embargo, el SIF con condensación puede funcionar igual que los otros y generar también una sucesión convergente de compactos.

4.2. Función de Direccionamiento

A. Kameyama fué el primero en considerar a los conjuntos invariantes compactos como espacios cociente (ver [14]), introduciendo con ello el uso de una función especial. En esta sección presentamos el concepto de función de direccionamiento, esta función permitirá asociar a cada punto del atractor de un SIF un código, es decir, un elemento del espacio de códigos.

Presentemos los siguientes conceptos básicos.

Definición 69. ***El Espacio de Códigos*** *[12]. Sean $n \in \mathbb{N}$ con n fijo y $\sum = \{1, 2, \ldots, n\}$. Se define el espacio de códigos denotado por $\sum^{\mathbb{N}}$ como $\sum^{\mathbb{N}} := \{\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots | \alpha_i \in \sum$ con $i \in \mathbb{N}\}$. Los elementos de $\sum^{\mathbb{N}}$ reciben el nombre de códigos o palabras semi-infinitas sobre el alfabeto $\sum$.*

A la luz de la definición anterior, tenemos que los elementos de $\sum^{\mathbb{N}}$ son sucesiones $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$, donde cada $\alpha_i = \alpha(i) \in \sum$, y se denotará $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$. Denotaremos $\sum^*$ al conjunto de los códigos finitos sobre el alfabeto, incluyendo el código $\lambda = \emptyset$; si $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m$ entonces el código semi-infinito $\overline{\alpha}$ será $\overline{\alpha} = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots$.

Es posible además definir un orden sobre $\sum^*$ de la siguiente manera: Dados $\alpha, \beta \in \sum^*$, $\alpha \leq \beta$ sólo si $\beta = \alpha\gamma$ para algún $\gamma \in \sum^*$, aquí $\alpha\gamma$ es la concatenación de los dos códigos, más aún dados $\alpha \in \sum^*$ y $\beta \in \sum^{\mathbb{N}}$ diremos que $\alpha \leq \beta$ sólo si $\beta = \alpha\gamma$ para algún $\gamma \in \sum^{\mathbb{N}}$. Además, si $\alpha \in \sum^*$ entonces $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m$, y $|\alpha| = m$ es la longitud del código finito.

Primeramente veamos como el atractor de un SIF determina un espacio de códigos, en términos del número de funciones contractivas.

Definición 70. ***El Espacio de Códigos asociado a un SIF*** *[8]. Dado un SIF $\{(X, d) : f_1, \ldots, f_n\}$. El espacio de códigos asociado al SIF está definido como el espacio métrico $(\sum^{\mathbb{N}}, d_c)$, donde $\sum^{\mathbb{N}}$ representa el espacio de códigos en n símbolos $\{1, 2, \ldots, n\}$, con la métrica d_c dada por $d_c(\omega, \sigma) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\omega_j - \sigma_j|}{(n+1)^j}$ para todo $\omega, \sigma \in \sum$.*

A manera de lema presentamos el siguiente resultado (Para consultar la demostración ver la referencia).

Lema 17. *[17]. $(\sum^{\mathbb{N}}, d_c)$ es un espacio métrico compacto.*

Las siguientes proposiciones exhiben algunas propiedades topológicas importantes del espacio de códigos.

Proposición 7. *[17]. Sean $\alpha, \beta \in \sum^{\mathbb{N}}$. Entonces $d_c(\alpha, \beta) < \frac{1}{(n+1)^k}$ si y sólo si $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$.*

Demostración. ($\Leftarrow$). Sean $\alpha, \beta \in \sum^{\mathbb{N}}$. Observemos que si $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$, entonces

$$d_c(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i-\beta_i|}{(n+1)^i} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|\alpha_i-\beta_i|}{(n+1)^i} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)^i} = \frac{n-1}{n(n+1)^k}$$

Esto es, $d_c(\alpha,\beta) < \frac{1}{(n+1)^k}$. $(\Rightarrow)$. Supongamos que existe $1 \leq i_0 \leq k$ tal que $\alpha_{i_0} \neq \beta_{i_0}$, entonces se tiene $d_c(\alpha,\beta) \geq \frac{|\alpha_{i_0}-\beta_{i_0}|}{(n+1)^{i_0}}$. Además obsérvese que $1 \leq |\alpha_{i_0} - \beta_{i_0}| \leq n$, donde $d_c(\alpha,\beta) \geq \frac{1}{(n+1)^{i_0}} \geq \frac{1}{(n+1)^k}$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1,\ldots,k$. $\square$

Proposición 8. *[17]. Sea $\alpha^k = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ un código finito de k componentes, entonces el conjunto $[\alpha^k] = \{\beta \in \sum^{\mathbb{N}} \mid \beta_i = \alpha_i,\ i = 1,\ldots,k\}$ es abierto en el espacio $\sum^{\mathbb{N}}$. Se denotará $\sum^{(k)}$ al subconjunto de $\sum^*$ formado por los códigos de k componentes.*

Demostración. Sea $\beta \in [\alpha^k]$. Se demostrará que la bola $B_{d_c}(\beta, \frac{1}{(n+1)^{k+1}})$ está contenida en $[\alpha^k]$, para ello tomemos $\delta \in B_{d_c}(\beta, \frac{1}{(n+1)^{k+1}})$. Por la proposición anterior, $\beta_i = \delta_i$ para todo $i = 1,\ldots,k+1$, puesto que $\beta \in [\alpha^k]$ entonces $\delta \in [\alpha^k]$, i.e., $B_{d_c}(\beta, \frac{1}{(n+1)^{k+1}}) \subseteq [\alpha^k]$. $\square$

A manera de lema presentamos el siguiente resultado (Para consultar la demostración ver la referencia).

Lema 18. *[17]. El espacio de códigos es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Nuestro siguiente paso es la construcción de una función continua ϕ del espacio de códigos asociado a un SIF, sobre el atractor del SIF. Esto se sigue de formalizar nuestra noción de dirección. En el orden de hacer esta construcción necesitamos dos lemas. El primer lema nos dice que si tenemos un SIF, y si estamos únicamente interesados en saber como el SIF actúa en relación a un subconjunto compacto fijo de X, entonces podemos tratar al SIF como si estuviera definido en un espacio métrico compacto.

Lema 19. *[9]. Sean $\{(X,d) : f_1,\ldots,f_n\}$ un SIF y $K \in \mathcal{H}(X)$. Entonces existe $\tilde{K} \in \mathcal{H}(X)$ tal que $K \subseteq \tilde{K}$ y para cada $i = 1,\ldots,n$, $f_i : \tilde{K} \to \tilde{K}$. En otras palabras, $\{(\tilde{K},d) : f_1,\ldots,f_n\}$ es un SIF cuyo conjunto subyacente es un compacto.*

Demostración. Para construir $\tilde{K}$ consideremos el SIF con condensación $\{(X,d) : f_0, f_1,\ldots,f_n\}$, donde la función f_0 es la función de condensación determinada por K, i.e., $f_0(B) := K$ con $B \in \mathcal{H}(X)$. Por el teorema 16, existe el atractor de este SIF con condensación, i.e., existe el punto fijo $\tilde{K}$ de la función contractiva $F_0 : (\mathcal{H}(X),h) \to (\mathcal{H}(X),h)$ definida como $F_0(B) := f_0(B) \cup f_1(B) \cup \ldots \cup f_n(B) = K \cup F(B)$, donde $F(B) = f_1(B) \cup \ldots \cup f_n(B)$. Claramente $\tilde{K}$ es compacto y además cumple $F_0(\tilde{K}) = \tilde{K}$, i.e., $K \cup F(\tilde{K}) = \tilde{K}$, de donde $K \subseteq \tilde{K}$ y $F(\tilde{K}) \subseteq \tilde{K}$, i.e., $f_i : \tilde{K} \to \tilde{K}$ para $i = 1,\ldots,n$. $\square$

El siguiente lema constituye el primer paso que une el espacio de códigos con el atractor de un SIF, mediante una cierta función ϕ, la cual mapea el producto cartesiano del espacio $\sum^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times X$ sobre X. Tomando ciertos limites, en el siguiente teorema podemos eliminar la dependencia en n y X para proporcionar la conexión entre $\sum^{\mathbb{N}}$ y X.

Lema 20. *[9]. Sea* $\{(X,d) : f_1,\ldots,f_n\}$ *un SIF con factor de contracción* λ *(i.e.,* $\lambda = \text{máx}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$*), donde* λ_i *es el factor de contracción de* f_i*, para* $i = 1,\ldots,n$*. Sea* $\sum^{\mathbb{N}}$ *el espacio de códigos asociado al SIF.*

Sea

$$\phi : \sum^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times X \to X$$

definida por

$$\phi(\alpha, j, x) := f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \ldots \circ f_{\alpha_j}(x).$$

Sea $K \in \mathcal{H}(X)$*. Entonces existe una constante* D *tal que*

$$d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, j, x_2)) \leq D\lambda^{\text{mín}\{m,j\}},$$

con $\alpha \in \sum^{\mathbb{N}}$*,* $m, j \in \mathbb{N}$ *y* $x_1, x_2 \in K$*.*

Demostración. Sean α, m, j, x_1 y x_2 como se definen en el lema. Se construye $\tilde{K}$ como en el lema 19, de manera que cada $f_i : \tilde{K} \to \tilde{K}$. Supongamos que $m < j$. Luego, $\phi(\alpha, j, x_2) = f_{\alpha_1} \circ \ldots \circ f_{\alpha_m} \circ f_{\alpha_{m+1}} \circ \ldots \circ f_{\alpha_j}(x_2) = \phi(\alpha, m, x_3)$ con $x_3 = f_{\alpha_{m+1}} \circ \ldots \circ f_{\alpha_j}(x_2)$. De modo que $d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, j, x_2)) = d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, m, x_3)) = d(f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \ldots \circ f_{\alpha_m}(x_1), f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \ldots \circ f_{\alpha_m}(x_3)) \leq \lambda^m d(x_1, x_3) \leq \lambda^m D$, donde $D = \text{máx}\{d(x,y) | \ x, y \in \tilde{K}\}$; D existe puesto que $\tilde{K}$ es compacto. □

Establecidas las herramientas necesarias, podemos abordar la función que nos interesa.

Teorema 17. ***La función*** φ ***o la función de direccionamiento*** *[8]. Sea* $\{(X,d) : f_1,\ldots,f_n\}$ *un SIF y* A *su atractor. Sea* $\sum^{\mathbb{N}}$ *el espacio de códigos asociado al SIF. Para cada* $\alpha \in \sum^{\mathbb{N}}$*,* $m \in \mathbb{N}$ *y* $x \in X$*, sea* $\varphi(\alpha) := \text{lím}_{m\to\infty} \phi(\alpha, m, x)$*. Entonces* $\varphi(\alpha)$ *siempre existe, pertenece a* A*, es independiente de* x*, y la función*

$$\varphi : \sum^{\mathbb{N}} \to A$$

$$\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$$

es continua y sobre.

Demostración. Sean $x \in X$ y $K \in \mathcal{H}(X)$ tales que $x \in K$. Se construye $\tilde{K}$ como en el lema 19. Sabemos que el atractor A se puede obtener como

$$A = \text{lím}_{m\to\infty} W^{\circ m}(K).$$

Observemos que

$$\phi(\alpha, 1, x) = f_{\alpha_1}(x) \in W(K),$$

$$\phi(\alpha, 2, x) = f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2}(x) \in W^{\circ 2}(K),$$

$$\vdots$$

$$\phi(\alpha, m, x) = f_{\alpha_1} \circ \ldots \circ f_{\alpha_m}(x) \in W^{\circ m}(K),$$

$$\vdots$$

Por el lema 20, la sucesión $(\phi(\alpha, m, x))_m$ es de Cauchy en $(\tilde{K}, d)$, que es un espacio métrico completo, y por el teorema 16, podemos afirmar que dicha sucesión converge a un elemento del atractor A, i.e., $\lim_{m\to\infty} \phi(\alpha, m, x) \in A$.

Veamos que φ es continua. Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^{n_0} D < \varepsilon$, ($\lambda$ es el factor de contracción del SIF y D es el diámetro de $\tilde{K}$). Para $\alpha, \beta \in \sum^{\mathbb{N}}$ que cumplan $d_c(\alpha, \beta) < \frac{1}{(n+1)^{n_0+1}} = \delta > 0$, se tiene $(n+1)^{n_0+1}[\sum_{i=1}^{n_0} \frac{|\alpha_i-\beta_i|}{(n+1)^i} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{|\alpha_i-\beta_i|}{(n+1)^i}] < 1$, $\sum_{i=1}^{n_0} |\alpha_i - \beta_i|(n+1)^{n_0+1-i} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |\alpha_i - \beta_i|(n+1)^{n_0+1-i} < 1$. Luego, $t = 0$ de modo que $\alpha_i = \beta_i$, con $i = 1, ..., n_0$ (i.e., α y β coiciden en sus primeras n_0 cifras).

Para $j \geq n_0$ se tiene que $\lambda^j \leq \lambda^{n_0}$, por lo tanto, si $x_1, x_2 \in \tilde{K}$,

$$d(\phi(\alpha, j, x_1), \phi(\beta, j, x_2)) = d(f_{\alpha_1} \circ \ldots \circ f_{\alpha_j}(x_1), f_{\beta_1} \circ \ldots \circ f_{\beta_j}(x_2)) =$$
$$d(\phi(\alpha, j, x_1), \phi(\alpha, j, x_2)) \leq \lambda^j D \leq \lambda^{n_0} D < \varepsilon,$$

y tomando el límite cuando $j \to \infty$, $d(\lim_{j\to\infty} \phi(\alpha, j, x_1), \lim_{j\to\infty} \phi(\beta, j, x_2)) < \varepsilon$, luego $d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) < \varepsilon$. Así, φ es continua.

Sólo falta probar que φ es sobre. Sea $a \in A$. Claramente $\{x\} \in \mathcal{H}(X)$ para cualquier $x \in X$, de modo que

$$A = \lim_{m\to\infty} W^{\circ m}(\{x\}).$$

Considere la sucesión de compactos

$W(\{x\}) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$,

$W^{\circ 2}(\{x\}) =$
$\{f_1 \circ f_1(x), \ldots, f_1 \circ f_m(x), f_2 \circ f_1(x), \ldots, f_2 \circ f_n(x), \ldots f_n \circ f_1(x), \ldots, f_n \circ f_n(x)\}$,

$\vdots$

$W^{\circ m}(\{x\}) = \{f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \ldots \circ f_{\alpha_m}(x) | \alpha_i \in \{1, \ldots, n\},\ 1 \leq i \leq m\}$

$\vdots$

Como $W^{\circ m}(\{x\})$ es convergente, se sigue que es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(X), h)$; por el teorema 15, existe una sucesión $(a_m)_m$ tal que $(a_m)_m \to a$ y $a_m \in W^{\circ m}(\{x\})$ con $m \in \mathbb{N}$. Así, para cada m, $a_m = f_{\alpha_1^m} \circ f_{\alpha_2^m} \circ \ldots \circ f_{\alpha_m^m}(x)$.

Se determina entonces una sucesión de códigos $(\alpha^m)_m$ donde $\alpha^m = (\alpha_j^m)_j$. Como $\sum^{\mathbb{N}}$ es compacto, $(\alpha^m)_m$ admite una subsucesión convergente, supongamos que $(\alpha^{k_m})_m \to \alpha$ con $\alpha \in \sum^{\mathbb{N}}$. Por la última convergencia, los segmentos iniciales de los códigos α^{k_m} coincidentes con los de α, se van haciendo cada vez más largos, de modo que

$$d(\phi(\alpha, m, x), \phi(\alpha^{k_m}, m, x)) \leq \lambda^{t(m)} D,$$

donde

$$t(n) = \sharp\{r \in \mathbb{N} |\ \alpha_k^{k_m} = \alpha_k,\ 1 \leq k \leq r\}.$$

Tomando el límite en los dos lados de la desigualdad, se obtiene

$$\lim_{m \to \infty} \phi(\alpha, m, x) = \lim_{m \to \infty} \phi(\alpha^{k_m}, m, x),$$

$$\varphi(\alpha) = \lim_{m \to \infty} f_{\alpha_1^{k_m}} \circ \ldots \circ f_{\alpha_m^{k_m}}(x) = \lim_{m \to \infty} a_{k_m} = a. \ \square$$

De esta manera, para cada punto del atractor de un SIF podemos ahora definir lo que llamaremos una dirección del punto.

Definición 71. ***Función de Direccionamiento*** *[8]. Sea* $\{(X, d) : f_1, \ldots, f_n\}$ *un SIF con su espacio de códigos asociado* $\sum^{\mathbb{N}}$*. Sea* $\varphi : \sum^{\mathbb{N}} \to A$ *la función continua que va del espacio de códigos sobre el atractor del SIF, construida en el teorema anterior. Sea* $a \in A$*. Llamaremos una dirección o código de* a*, a cualquier elemento del conjunto* $\varphi^{-1}(a) := \{\alpha \in \sum^{\mathbb{N}} | \varphi(\alpha) = a\}$*. Este conjunto es llamado el conjunto de las direcciones de* a*. La función* φ *recibe el nombre de función de direccionamiento.*

CAPÍTULO 5

Autosemejanza Topológica

5.1. Concepto de Autosemejanza Topológica

En esta sección presentamos la definición de autosemejanza topológica propuesta por W. J. Charatonik y A. Dilks [21], las definiciones que hemos presentado en las secciones anteriores acerca de la noción de autosemejanza, están restringidas al contexto de los espacios métricos. W. J. Charatonik y A. Dilks propusieron la siguiente definición, con la que se pretende estudiar el concepto en el contexto de los espacios topológicos.

En lo que sigue entenderemos que autosemejanza significa autosemejanza topológica.

Definición 72. *[19]. Un espacio topológico X se dirá autosemejante topológicamente, si todo abierto no vacío de X contiene un subespacio homeomorfo a X. En símbolos:*

$$X \textit{ es autosemejante topológicamente} \Leftrightarrow (\forall P \in \mathcal{T}_X)(\exists R \subseteq P)(P \neq \emptyset)(R \cong X).$$

Con la definición anterior de autosemejanza, es posible encontrar conjuntos autosemejantes que no son necesariamente atractores de SIF's (ver [17]).

Definición 73. *[17]. Sean $\{(X, d) : f_1, \ldots, f_n\}$ un SIF y $\sum^{\mathbb{N}}$ su espacio de códigos asociado. Se define la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\sum^{\mathbb{N}}$ como $\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \varphi(\beta) = \varphi(\alpha)$.*

Considerando el espacio de códigos como espacio topológico, tenemos que los abiertos básicos son conjuntos donde todos los códigos empiezan por un mismo código finito $\alpha_1 \ldots \alpha_k$; de esta manera podemos clasificar estos conjuntos en ciertos niveles, de acuerdo con la longitud del código finito con que se caractericen los elementos de dichos conjuntos. El nivel cero sería todo el espacio de códigos; el primer nivel estaría formado por los abiertos básicos cuyos códigos coinciden todos en la primera componente; el segundo nivel estaría formado por los abiertos básicos cuyos códigos coinciden todos en la primera y segunda componente; así sucesivamente. La relación $\sim$ identifica de cierta manera, códigos de un abierto básico con códigos de otro en un mismo nivel, en el sentido de que podemos encontrar dos códigos diferentes, salvo si $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ que pertenecen a abiertos básicos diferentes del mismo nivel y están relacionados.

Teorema 18. *[17]. Sea $\{(X, d) : f_1, \ldots, f_n\}$ un SIF, A su atractor y $\sum^{\mathbb{N}}$ su espacio de códigos asociado, entonces A es homeomorfo al espacio cociente $\sum^{\mathbb{N}} / \sim$.*

Demostración. Bajo las hipótesis del teorema, tomemos φ como la función de dirección y definamos la función

$$\tilde{\varphi} : \sum^{\mathbb{N}} / \sim \rightarrow A$$

como sigue:

$$\tilde{\varphi}([\alpha]) = \varphi(\alpha)$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{\mathbb{N}} \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\Sigma^{\mathbb{N}}/\sim \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \mathrm{A}
\end{tikzcd}$$

Puesto que φ es continua y sobreyectiva, y p es la proyección natural es suficiente demostrar que φ es una función cociente para mostrar que $\tilde{\varphi}$ es un homeomorfismo. Veamos que φ es una función cociente, para ello demostraremos que es cerrada. Sea $V \subseteq \sum^{\mathbb{N}}$ un conjunto cerrado. Puesto que $\sum^{\mathbb{N}}$ es compacto, se sigue que V también lo es, luego $\varphi(V)$ es compacto ya que φ es continua. Por otro lado, dado que A es Hausdorff se concluye que $\varphi(V)$ es cerrado. $\square$

El teorema anterior sumado al hecho que el espacio de códigos es homeomorfo al conjunto de Cantor, permite afirmar que todo atractor de un SIF es un cociente topológico del conjunto de Cantor.

5.2. Cocientes Topológicos

Presentemos la siguiente definición, en la cual se precisan cuatro tipos distintos de cocientes del espacio de Cantor.

Definición 74. *[19]. Sea X un espacio topológico,*

i) X se dirá un espacio autosimilar simbólico si X es homeomorfo a un cociente $\sum^{\mathbb{N}} / \sim$ de Cantor que satisface:

$$(\forall x, y \in \sum^{\mathbb{N}})(\forall i \in \sum)(x \sim y \Rightarrow ix \sim iy)$$

A una relación que satisfaga esta propiedad la llamaremos una relación de congruencia.

ii) X se dirá un espacio de cancelación si X es homeomorfo a un cociente $\sum^{\mathbb{N}} / \sim$ de Cantor que satisface:

$$(\forall x, y \in \textstyle\sum^{\mathbb{N}})(\forall i \in \textstyle\sum)(ix \sim iy \Rightarrow x \sim y)$$

A una relación que satisfaga esta propiedad la llamaremos cancelativa.

iii) X se dirá un espacio cuasiinvariante si X es homeomorfo a un cociente $\sum^{\mathbb{N}} / \sim$ de Cantor que satisface:

$$(\forall x, y \in \textstyle\sum^{\mathbb{N}})(\forall i \in \textstyle\sum)(x \sim y \Leftrightarrow ix \sim iy)$$

A una relación que satisfaga esta propiedad (es decir que sea simultáneamente de congruencia y cancelativa) la llamaremos una relación de invarianza.

iv) X se dirá un factor o espacio invariante si X es cuasiinvariante y de hausdorff, o equivalentemente si X es cuasiinvariante y $\sim$ es cerrada (es decir $\sim$ es un cerrado del espacio producto $\sum^{\mathbb{N}} \times \sum^{\mathbb{N}}$).

A los factores invariantes se les conoce también como factores o espacios invariantemente autosemejantes. Observemos de la definición anterior, que todo espacio invariante es cuasiinvariante, y a su vez todo espacio cuasiinvariante es autosimilar simbólico y de cancelación.

Proposición 9. *[19]. El atractor de un SIF es un espacio autosimilar simbólico. Además, si las contracciones del SIF son inyectivas entonces el atractor es un factor invariante.*

Demostración. Sean A el atractor de un SIF $\{(X, d) : f_1, \ldots, f_n\}$, $\sum^{\mathbb{N}}$ el espacio de códigos asociado al SIF y $\varphi : \sum^{\mathbb{N}} \to A$ la función definida en el teorema 17. Por el teorema 18, $A \cong \sum^{\mathbb{N}} / \sim$, donde la relación $\sim$ está definida por $x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$.

Sean $x, y \in \sum^{\mathbb{N}}$ e $i \in \sum$. Supongamos que $x \sim y$. Luego,

$$x \sim y \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \text{lím}_{m\to\infty} f_{x_1} \circ \ldots \circ f_{x_m}(p) = \text{lím}_{m\to\infty} f_{y_1} \circ \ldots \circ f_{y_m}(p)$$

$$\Rightarrow f_i(\text{lím}_{m\to\infty} f_{x_1} \circ \ldots \circ f_{x_m}(p)) = f_i(\text{lím}_{m\to\infty} f_{y_1} \circ \ldots \circ f_{y_m}(p))$$

$$\Rightarrow \text{lím}_{m\to\infty} f_i \circ f_{x_1} \circ \ldots \circ f_{x_m}(p) = \text{lím}_{m\to\infty} f_i \circ f_{y_1} \circ \ldots \circ f_{y_m}(p)$$

$$\Rightarrow \varphi(ix) = \varphi(iy)$$

$$\Rightarrow ix \sim iy.$$

Sean cada una de las f_k funciones inyectivas. Supongamos que $ix \sim iy$. Luego,

$$ix \sim iy \Rightarrow \varphi(ix) = \varphi(iy)$$

$$\Rightarrow \text{lím}_{m\to\infty} f_i \circ f_{x_1} \circ \ldots \circ f_{x_m}(p) = \text{lím}_{m\to\infty} f_i \circ f_{y_1} \circ \ldots \circ f_{y_m}(p)$$

$$\Rightarrow f_i(\text{lím}_{m\to\infty} f_{x_1} \circ \ldots \circ f_{x_m}(p)) = f_i(\text{lím}_{m\to\infty} f_{y_1} \circ \ldots \circ f_{y_m}(p))$$

$$\Rightarrow \text{lím}_{m\to\infty} f_{x_1} \circ \ldots \circ f_{x_m}(p) = \text{lím}_{m\to\infty} f_{y_1} \circ \ldots \circ f_{y_m}(p)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

$$\Rightarrow x \sim y.$$

Por ser A el atractor de un SIF, $A \in (\mathcal{H}(X), h)$, i.e., A es de Hausdorff. $\square$

Recordemos que $\sum$ es un espacio finito discreto y $\sum^*$ denota al conjunto de todas las palabras finitas sobre el alfabeto $\sum$.

Teorema 19. *[17]. Todo factor invariante es autosemejante.*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{\mathbb{N}} \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "g"] & \Sigma^{\mathbb{N}}/\sim \arrow[d, "\tilde{g}"'] \\
{[\sigma)} \arrow[r, "p_*"] & p\left([\sigma)\right)
\end{tikzcd}$$

Demostración. El diagrama conmutativo que aparece arriba resume la idea de la demostración. Sea X un factor invariante, es decir $X \cong \sum^{\mathbb{N}} / \sim$, donde $\sum^{\mathbb{N}} / \sim$ es de Hausdorff y para todo $i \in \sum$, $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow i\alpha \sim i\beta$. Sean U un abierto no vacío de $\sum^{\mathbb{N}} / \sim$ y $p : \sum^{\mathbb{N}} \to \sum^{\mathbb{N}} / \sim$ tal que $p(\alpha) = [\alpha]$. Luego, $p^{-1}(U)$ es un abierto no vacío de $\sum^{\mathbb{N}}$, y por la autosemejanza de este último existe $\sigma \in \sum^*$ tal que el subespacio $[\sigma)$ de todos los códigos que empiezan por σ, está contenido en $p^{-1}(U)$ y es homeomorfo a $\sum^{\mathbb{N}}$ bajo el homeomorfismo $g : \sum^{\mathbb{N}} \to [\sigma)$ definido por $g(x) := \sigma x$. Se tiene que $p([\sigma)) \subseteq U$, luego basta mostrar que $p([\sigma)) \cong \sum^{\mathbb{N}} / \sim$. Sea $\tilde{g} : \sum^{\mathbb{N}} / \sim \to p([\sigma))$ definida por $\tilde{g}([x]) := [g(x)]$. Veamos que $\tilde{g}$ está bien definida y es inyectiva. Sean $x, y \in \sum^{\mathbb{N}}$. Si $x \sim y$ entonces $\tilde{g}([x]) = [g(x)] = [\sigma x] = [\sigma y] = \tilde{g}([y])$ pues $\sim$ es de congruencia, luego $\tilde{g}$ está bien definida; ahora si $\tilde{g}([x]) = \tilde{g}([y])$ se tiene $[\sigma x] = [\sigma y]$ lo que implica $x \sim y$ y $[x] = [y]$, pues $x \sim y$ es cancelativa, de aquí $\tilde{g}$ es inyectiva. Para ver que $\tilde{g}$ es sobreyectiva consideremos $y \in p([\sigma))$. Luego, existe $x \in [\sigma)$ tal que $y = [x] = [\sigma x'] = [g(x')] = \tilde{g}([x'])$. Si p_* denota la restricción de p a $[\sigma)$ entonces se verifica $p_* \circ g = \tilde{g} \circ p$, y dado que p_* y g son continuas, $\tilde{g} \circ p$ es continua. Dado que p es una función cociente, $\tilde{g}$ es continua. Finalmente, como $\sum^{\mathbb{N}} / \sim$ es compacto y $p([\sigma))$ es de Hausdorff, se sigue que $\tilde{g}$ es un homeomorfismo. $\square$

CAPÍTULO 6

Sobre Iteraciones de Orden Fraccionario y Conjuntos Invariantes Compactos

En este capítulo se establece una proposición acerca de las iteraciones de orden fraccionario y su aplicación en conjuntos invariantes compactos, así como un ejemplo. Establecemos además cuatro nuevas proposiciones entorno a la construcción de ciertas clases de sistemas iterados de funciones, y algunas condiciones de estos sistemas para que los conjuntos invariantes compactos correspondientes presenten la autosemejanza topológica en el sentido de W.J. Charatonik y A. Dilks.

Proposición 10. *Sea el SIF $\{(X, d) : f\}$. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ las iteraciones de orden fraccionario de f denotadas por $f^{\circ\frac{1}{n}}$ son funciones contractivas de Banach.*

$$(i.e., \underbrace{f^{\circ\frac{1}{n}}(f^{\circ\frac{1}{n}}(\cdots f^{\circ\frac{1}{n}}(x)\cdots))}_{n\ veces} = f(x))$$

Sean $\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}} : (\mathcal{H}(X), h) \to (\mathcal{H}(X), h)$ dadas por $\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\zeta) = f^{\circ\frac{1}{n}}(\zeta)$ con $\zeta \in \mathcal{H}(X)$.

Para $\lambda_0 \in \mathcal{H}(X)$, consideremos

$$\lambda_1 = \hat{f}(\lambda_0);$$

$$\lambda_2 = \hat{f}^{\circ\frac{1}{2}}(\lambda_1) = \hat{f}^{\circ\frac{1}{2}}(\hat{f}(\lambda_0));$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\lambda_n = \hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\lambda_{n-1}) = \hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots \hat{f}(\lambda_0)\cdots));$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Entonces $(\zeta, \hat{f}(\zeta), \hat{f}^{\circ\frac{1}{2}}(\hat{f}(\zeta)), \hat{f}^{\circ\frac{1}{3}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{2}}(\hat{f}(\zeta))), \ldots)$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(X), h)$, además existe un único conjunto invariante compacto A en $(\mathcal{H}(X), h)$ correspondiente al SIF anterior obtenido por iteraciones de orden fraccionario de la forma

$$A = \text{lím}_{n\mapsto\infty} \hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots \hat{f}(\lambda_0)\cdots)).$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}} : (\mathcal{H}(X), h) \to (\mathcal{H}(X), h)$ las contracciones inducidas por las iteraciones de orden fraccionario de f en el espacio de los fractales de M. F. Barnsley dadas por $\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\zeta) = f^{\circ\frac{1}{n}}(\zeta)$ con $\zeta \in \mathcal{H}(X)$. Como cada $\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}$ es contractiva, se sigue que cada una es continua. Dado que la imagen continua de un conjunto compacto es un compacto, se sigue que $\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\zeta) \in \mathcal{H}(X)$. De lo anterior, $\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots)) \in \mathcal{H}(X)$. Se sigue que $(\zeta, \hat{f}(\zeta), \hat{f}^{\circ\frac{1}{2}}(\hat{f}(\zeta)), \hat{f}^{\circ\frac{1}{3}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{2}}(\hat{f}(\zeta))), \ldots)$ está bien definida en $\mathcal{H}(X)$. Probemos que la sucesión anterior es de Cauchy. Sean $\varepsilon > 0$ y $\prod_{i=1}^{n} r_i$ el parámetro de contracción de $\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}} \circ \hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}} \circ \cdots \circ \hat{f}$, donde r_i es el parámetro de contracción de $\hat{f}^{\circ\frac{1}{i}}$. Como $\prod_{i=1}^{n} r_i < 1$, podemos escoger $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $(\prod_{i=1}^{n} r_i)^n < \delta$ donde $\delta < 1$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n < m$ y $n, m > N$. Luego, $h(\hat{f}^{\circ\frac{1}{m}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{m-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots)), \hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots))) = \text{máx}_{x\in\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots\hat{f}(\zeta)\cdots))} \hat{d}(x, \hat{f}^{\circ\frac{1}{m}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{m-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots)))$. Pero esto debe ser más pequeño que el diámetro de $\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots))$ definido por $diam(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots) = \text{máx}_{x,y\in\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots\hat{f}(\zeta)\cdots))} d(x,y)$. Tenemos que $diam(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots) \leq (\prod_{i=1}^{n} r_i)^n * diam(\zeta)$. Escogiendo N tal que $(\prod_{i=1}^{n} r_i)^N * diam(\zeta) < \varepsilon$ garantizamos que $h(\hat{f}^{\circ\frac{1}{m}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{m-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots)), \hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots))) = \text{máx}_{x\in\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots\hat{f}(\zeta)\cdots))} \hat{d}(x, \hat{f}^{\circ\frac{1}{m}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{m-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots))) \leq (\prod_{i=1}^{n} r_i)^N * diam(\zeta) < \varepsilon$ porque todas las distancias consideradas por el máximo son menores que $diam(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots)))$. Como la sucesión anterior es de Cauchy y $(\mathcal{H}(X), h)$ es completo, se sigue que tiene un limite en $\mathcal{H}(X)$. i.e., existe $\zeta^* \in \mathcal{H}(X)$ tal que $\text{lím}_{n\mapsto\infty} \hat{f}^{\circ\frac{1}{n}}(\hat{f}^{\circ\frac{1}{n-1}}(\cdots \hat{f}(\zeta)\cdots)) = \zeta^*$, se sigue por la unicidad del limite que ζ^* es único. □

Ejemplo Principal

Sea $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x$. Probemos que $f(x)$ es una función contractiva de Banach. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Luego, $|f(x_1) - f(x_2)| = |\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2| = |\frac{1}{2}(x_1 - x_2)| = |\frac{1}{2}||x_1 - x_2| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$.

De lo anterior, $\{(\mathbb{R}, |.|) : f(x) = \frac{1}{2}x\}$ es un SIF.

Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos las iteraciones de orden fraccionario de f.

$$\vdots$$

$$f^{\circ\frac{1}{n}}(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}x; \text{ i.e., } \underbrace{f^{\circ\frac{1}{n}}(f^{\circ\frac{1}{n}}(\cdots f^{\circ\frac{1}{n}}(x)\cdots))}_{n\ veces} = f(x)$$

$$\vdots$$

Probemos que las iteraciones de orden fraccionario de f son funciones contractivas de Banach. Procederemos por inducción. Verifiquemos para $n = 1$. $f^{\circ\frac{1}{1}}(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{1}}}x = \frac{1}{2}x =$

$f(x)$. Supongamos que se cumple para $n = j$. i.e., $f^{\circ \frac{1}{j}}(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{j}}}x$ es una función contractiva de Banach. Probemos que se cumple para $n = j+1$. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Luego, $|f^{\circ \frac{1}{j+1}}(x_1) - f^{\circ \frac{1}{j+1}}(x_2)| = |\frac{1}{2^{\frac{1}{j+1}}}x_1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{j+1}}}x_2| = |\frac{1}{2^{\frac{1}{j+1}}}(x_1 - x_2)| = |\frac{1}{2^{\frac{1}{j+1}}}||x_1 - x_2|$. Probemos que $|\frac{1}{2^{\frac{1}{j+1}}}| < 1$. Supongamos que $|\frac{1}{2^{\frac{1}{j+1}}}| \geq 1$. Luego, $\frac{|1|}{|2^{\frac{1}{j+1}}|} \geq 1$, i.e., $|1| \geq |2^{\frac{1}{j+1}}|$. Por otro lado, $|1| \geq |2^{\frac{1}{j+1}}|$ si y sólo si $1 \geq 2^{\frac{1}{j+1}} \cdot 2^{\frac{1}{j+1}}$. Por hipótesis de inducción $|\frac{1}{2^{\frac{1}{j}}}| < 1$, o bien $\frac{|1|}{|2^{\frac{1}{j}}|} < 1$, i.e., $|1| < |2^{\frac{1}{j}}|$. Además, $|1| < |2^{\frac{1}{j}}|$ si y sólo si $1 < 2^{\frac{1}{j}} \cdot 2^{\frac{1}{j}}$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Luego, $2^{\frac{1}{j+1}} = a$ si y sólo si $a^{j+1} = 2$ y $2^{\frac{1}{j}} = b$ si y sólo si $b^j = 2$. Finalmente, $1 \geq a \cdot a$ implica $\frac{1}{a} \geq a$, o bien $(\frac{1}{a})^{j+1} \geq a^{j+1}$, i.e., $\frac{1}{a^{j+1}} \geq a^{j+1}$, así $\frac{1}{b^j} \geq a^{j+1}$, se sigue que $\frac{1}{2} \geq 2$ lo cual es una contradicción.

Para $n \in \mathbb{N}$, sean $\hat{f}^{\circ \frac{1}{n}} : (\mathcal{H}(\mathbb{R}), h) \to (\mathcal{H}(\mathbb{R}), h)$ las contracciones inducidas por las iteraciones de orden fraccionario de f en el espacio de los fractales de M. F. Barnsley dadas por $\hat{f}^{\circ \frac{1}{n}}(\zeta) = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\zeta$ con $\zeta \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$.

Por la proposición anterior, $(\zeta, \hat{f}(\zeta), \hat{f}^{\circ \frac{1}{2}}(\hat{f}(\zeta)), \hat{f}^{\circ \frac{1}{3}}(\hat{f}^{\circ \frac{1}{2}}(\hat{f}(\zeta))), \ldots)$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(\mathbb{R}), h)$.

Sea $\lambda_0 = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Por el Teorema de Heine-Borel $[0, 1]$ es compacto en $\mathbb{R}$. De lo anterior, $\lambda_0 = [0, 1] \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$.

Luego,

$$\lambda_1 = \hat{f}(\lambda_0) = [0, \tfrac{1}{2}];$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\lambda_n = \hat{f}^{\circ \frac{1}{n}}(\lambda_{n-1}) = [0, \frac{1}{2^{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})}}];$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Probemos por inducción que $\lambda_n = \hat{f}^{\circ \frac{1}{n}}(\lambda_{n-1}) = [0, \frac{1}{2^{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})}}]$. Verifiquemos que se cumple para $n = 1$. $\lambda_1 = \hat{f}(\lambda_0) = [0, \frac{1}{2}]$. Supongamos que se cumple para $n = j$. i.e., $\lambda_j = \hat{f}^{\circ \frac{1}{j}}(\lambda_{j-1}) = [0, \frac{1}{2^{(\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i})}}]$. Probemos que se cumple para $n = j+1$. $\lambda_{j+1} = \hat{f}^{\circ \frac{1}{j+1}}(\lambda_j) = \frac{1}{2^{\frac{1}{j+1}}} \cdot [0, \frac{1}{2^{(\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i})}}] = [0, \frac{1}{2^{(\sum_{i=1}^{j+1} \frac{1}{i})}}]$.

Luego, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{2^{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})}}]$. Finalmente, el conjunto invariante compacto obtenido del SIF anterior por medio de iteraciones de orden fraccionario está dado por $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{2^{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})}}]$.

Presentemos algunas proposiciones nuevas para la geometría fractal.

Proposición 11. *Sean* $f_1 : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *una función contractiva de Banach (métrica euclidiana) y* $T_k : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $k \in \mathbb{N}$. *Si* $T_k(x) = f_1(x \pm ka)$ *con* $x, a \in \mathbb{R}^n$ *entonces* $\{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) : f_1, T_1, \ldots, T_k\}$ *para un k fijo es un SIF.*

Demostración. Debemos probar que $\{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) : f_1, T_1, \ldots, T_k\}$ para $k \in \mathbb{N}$ con k fijo es un SIF. Es suficiente probar que $T_1, \ldots, T_k$ son funciones contractivas de Banach. Procederemos por inducción. Verifiquemos que para $k = 1$, T_1 es una función contractiva de Banach. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $T_1(x) = f_1(x \pm a)$. Luego, $\|T_1(x_1) - T_1(x_2)\| =\|f_1(x_1 \pm a) - f_1(x_2 \pm a)\|$. Dado que f_1 es una función contractiva de Banach, existe $r_1 \in [0, 1)$ tal que $\|f_1(x_1 \pm a) - f_1(x_2 \pm a)\| \leq r_1\|x_1 \pm a - (x_2 \pm a)\| = r_1\|x_1 \pm a - x_2 - (\pm a)\| = r_1\|x_1 - x_2\|$. De lo anterior, $\|T_1(x_1) - T_1(x_2)\| \leq r_1\|x_1 - x_2\|$. Supongamos que se cumple para $k = p$. Probemos que para $k = p + 1$, $T_{p+1}(x) = f_1(x \pm (p + 1)a)$ es una función contractiva de Banach. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $T_{p+1}(x) = f_1(x \pm (p + 1)a)$. Luego, $\|T_{p+1}(x_1)-T_{p+1}(x_2)\| =\|f_1(x_1\pm(p+1)a)-f_1(x_2\pm(p+1)a)\|$. Dado que f_1 es una función contractiva de Banach, existe $r_1 \in [0, 1)$ tal que $\|f_1(x_1 \pm (p+1)a) - f_1(x_2 \pm (p+1)a)\| \leq r_1\|x_1 \pm (p+1)a - (x_2 \pm (p+1)a)\| = r_1\|x_1 \pm (p+1)a - x_2 - (\pm(p+1)a)\| = r_1\|x_1 - x_2\|$. De lo anterior, $\|T_{p+1}(x_1) - T_{p+1}(x_2)\| \leq r_1\|x_1 - x_2\|$. □

Proposición 12. *Sea* $f_1 : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *una función contractiva de Banach (métrica euclidiana) y* $T^*_k : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $k \in \mathbb{N}$. *Si* $T^*_k(x) = f_1(x) \pm ka$ *con* $x, a \in \mathbb{R}^n$ *entonces* $\{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) : f_1, T^*_1, \ldots, T^*_k\}$ *para un k fijo es un SIF.*

Demostración. Debemos probar que $\{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) : f_1, T^*_1, \ldots, T^*_k\}$ para $k \in \mathbb{N}$ con k fijo es un SIF. Es suficiente probar que $T^*_1, \ldots, T^*_k$ son funciones contractivas de Banach. Procederemos por inducción. Verifiquemos que para $k = 1$, T^*_1 es una función contractiva de Banach. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $T^*_1(x) = f_1(x) \pm a$. Luego, $\|T^*_1(x_1) - T^*_1(x_2)\| = \|f_1(x_1) \pm a - (f_1(x_2) \pm a)\| =\|f_1(x_1) \pm a - f_1(x_2) - (\pm a)\| =\|f_1(x_1) - f_1(x_2)\|$. Dado que f_1 es una función contractiva de Banach, existe $r^*_1 \in [0, 1)$ tal que $\|f_1(x_1) - f_1(x_2)\| \leq r^*_1\|x_1 - x_2\|$. De lo anterior, $\|T^*_1(x_1) - T^*_1(x_2)\| \leq r_1\|x_1 - x_2\|$. Supongamos que se cumple para $k = p$. Debemos probar que para $k = p + 1$, $T^*_{p+1}(x) = f_1(x) \pm (p + 1)a$ es una función contractiva de Banach. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y $T^*_{p+1}(x) = f_1(x) \pm (p + 1)a$. Luego, $\|T^*_{p+1}(x_1) - T^*_{p+1}(x_2)\| =\|f_1(x_1) \pm (p+1)a - (f_1(x_2) \pm (p+1)a)\| =\|f_1(x_1) \pm (p+1)a - f_1(x_2) - (\pm(p+1)a)\| =\|f_1(x_1) - f_1(x_2)\|$. Dado que f_1 es una función contractiva de Banach, existe $r^*_1 \in [0, 1)$ tal que $\|f_1(x_1) - f_1(x_2)\| \leq r^*_1\|x_1 - x_2\|$. De lo anterior, $\|T^*_{p+1}(x_1) - T^*_{p+1}(x_2)\| \leq r^*_1\|x_1 - x_2\|$. □

Presentemos ahora condiciones para que los conjuntos invariantes compactos obtenidos por las proposiciones 11 y 12, sean autosemejanzantes topológicamente en el sentido de W.J. Charatonik y A. Dilks.

Proposición 13. *Sea el SIF* $\{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) : f_1, T_1, \ldots, T_k\}$. *Si* f_1 *es una función inyectiva y* $T_k(x) = f_1(x \pm ka)$, $k \in \mathbb{N}$ *con* $x, a \in \mathbb{R}^n$ *entonces el SIF* $\{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) : f_1, T_1, \ldots, T_k\}$ *para un k fijo es un SIF de funciones inyectivas.*

Demostración. Es suficiente probar que $T_1, \ldots, T_k$ para $k \in \mathbb{N}$ pero fijo son funciones inyectivas. Procedemos por inducción. Verifiquemos que se cumple para $k = 1$. Sean $w, z \in \mathbb{R}^n$. Sean $T_1(w) = f_1(w \pm a)$ y $T_1(z) = f_1(z \pm a)$. Supongamos que $T_1(w) = T_1(z)$, i.e., $f_1(w \pm a) = f_1(z \pm a)$. Dado que f_1 es inyectiva, $w \pm a = z \pm a$, i.e., $w = z$. Supongamos que se cumple para $k = p$. Probemos que se cumple para $k = p+1$. Sean $w, z \in \mathbb{R}^n$. Sean $T_{p+1}(w) = f_{p+1}(w \pm (p+1)a)$ y $T_{p+1}(z) = f_{p+1}(z \pm (p+1)a)$. Supongamos que $T_{p+1}(w) = T_{p+1}(z)$, i.e., $f_{p+1}(w \pm (p+1)a) = f_{p+1}(z \pm (p+1)a)$. Dado que f_1 es una función inyectiva, se sigue que $w \pm (p+1)a = z \pm (p+1)a$, i.e., $w = z$. □

Proposición 14. *Sea el SIF* $\{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) : f_1, T_1^*, \ldots, T_k^*\}$. *Si* f_1 *es una funcion inyectiva y* $T_k^*(x) = f_1(x) \pm ka$, $k \in \mathbb{N}$ *con* $x, a \in \mathbb{R}^n$ *entonces el SIF* $\{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) : f_1, T_1^*, \ldots, T_k^*\}$ *para un k fijo es un SIF de funciones inyectivas.*

Demostración. Es suficiente probar que $T_1^*, \ldots, T_k^*$ para $k \in \mathbb{N}$ pero fijo son funciones inyectivas. Procederemos por inducción. Verifiquemos que se cumple para $k = 1$. Sean $w, z \in \mathbb{R}^n$. Sean $T_1^*(w) = f_1(w) \pm a$ y $T_1^*(z) = f_1(z) \pm a$. Supongamos que $T_1^*(w) = T_1^*(z)$. Luego, $f_1(w) \pm a = f_1(z) \pm a$, i.e., $f_1(w) = f_1(z)$. Dado que f_1 es una función inyectiva, $w = z$. Supongamos que se cumple para $k = p$. Probemos que se cumple para $k = p+1$. Sean $w, z \in \mathbb{R}^n$. Sean $T_{p+1}^*(w) = f_1(w) \pm (p+1)a$ y $T_{p+1}^*(z) = f_1(z) \pm (p+1)a$. Supongamos que $T_{p+1}^*(w) = T_{p+1}^*(z)$. Luego, $f_1(w) \pm (p+1)a = f_1(z) \pm (p+1)a$, así $f_1(w) \pm pa \pm a = f_1(z) \pm pa \pm a$, i.e., $f_1(w) = f_1(z)$. Dado que f_1 es una función inyectiva, $w = z$. □

Que los conjuntos invariantes compactos sean autosemejantes topológicamente, nos permite conocer más acerca de estos conjuntos con respecto a otras clasificaciones de espacios topologicos ver [20].

CAPÍTULO 7

Conclusión y Trabajo a Futuro

7.1. Conclusión

M.F. Barnsley en [9], presenta un teorema que garantiza la existencia y unicidad del conjunto invariante compacto correspondiente a un sistema iterado de funciones. En este trabajo abordamos el estudio de las iteraciones de orden fraccionario y su aplicación en los conjuntos invariantes compactos.

Como conclusiones tenemos lo siguiente:

- Se presenta el caso especial de la construcción de un conjunto invariante compacto haciendo uso de iteraciones de orden fraccionario, así como una proposición que garantiza existencia y unicidad con este método iterativo.

- Se establecen cuatro nuevas proposiciones que nos permitan bajo ciertas hipótesis, generar determinadas clases de sistemas iterados de funciones, formados por funciones contractivas de Banach definidas en el espacio métrico completo $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, (métrica euclidiana), y se proporcionan condiciones a los SIF's obtenidos con estas proposiciones para que los conjuntos invariantes compactos correspondientes sean autosemejantes topológicamente.

- En general, los conjuntos invariantes compactos son una clase muy restrictiva de conjuntos, los cuales tienen muchas propiedades métrico topológicas, además la obtención de estos conjuntos mediante el teorema de existencia y unicidad de los fractales de M.F. Barnsley es un proceso complejo, debido a la naturaleza del proceso iterativo.

- Finalmente, este trabajo de tesis muestra que el estudio de las iteraciones de orden fraccionario es una herramienta de gran utilidad en la investigación de los sistemas iterados de funciones si es tratada cuidadosamente.

7.2. Trabajo a Futuro

Como trabajo a futuro tenemos lo siguiente:

- Buscar métodos para generar funciones contractivas, que garanticen siempre la existencia y unicidad del conjunto invariante compacto asociado al SIF formado con esas funciones contractivas en particular, por medio del teorema de existencia y unicidad de los fractales de M.F. Barnsley.

- Asociar otros teoremas de punto fijo en la demostración del teorema de existencia y unicidad de los conjuntos fractales de M.F. Barnsley.

APÉNDICE A

Autosimilitud según Hutchinson

Uno de los pilares de la geometría fractal fue la noción de autosemejanza propuesta por J.E. Hutchinson [22], que presentó en su artículo “Fractals and self similarity”, desarrolló una teoría muy formal y bien fundamentada de los que el llamó conjuntos estrictamente autosimilares. Demostró que dado $S = \{S_1, \ldots, S_N\}$, un conjunto finito de funciones contractivas sobre un espacio métrico completo (esto es lo que más adelante M. F. Barnsley [9] denominó un sistema iterado de funciones, SIF), existe un único conjunto compacto no vacío K invariante con respecto a S, i.e., tal que $K = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(K)$ y discutió las propiedades de dicho conjunto invariante, principalmente en relación con su medida. Sugirió también una noción de autosimilitud que podría ser más útil, usando la llamada condición del conjunto abierto de Moran, e hizo un estudio muy formal y riguroso de los conjuntos autosimilares principalmente desde el punto de vista de la teoría de la medida, y para el caso particular en que S es un conjunto de similitudes (i.e., composiciones de isometrías y homotecias) y (X, d) es $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana.

Presentemos algunos de los conceptos y resultados propuestos por J. E. Hutchinson.

Definición 75. ***Conjunto Invariante*** *[22]. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que K es invariante si existe un conjunto finito $S = \{S_1, \ldots, S_N\}$ de funciones contractivas en $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $K = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(K)$.*

En tal caso se dice que K es invariante con respecto a S. A menudo pero no siempre, los S_i son similitudes, i.e., la composición de una isometría y una homotecia. En el caso en que los S_i son similitudes, tales conjuntos son construidos por un proceso iterativo. Sin embargo, necesitamos el conjunto S para determinar el conjunto compacto invariante K.

Presentemos el siguiente resultado de J. E. Hutchinson tomado de [22].

(1). Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico completo y $S = \{S_1, \ldots, S_N\}$ un conjunto finito de mapeos contractivos en X. Entonces existe un único conjunto cerrado y acotado K, tal que $K = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(K)$. Por lo tanto, K es compacto y es la cerradura del conjunto de puntos fijos $S_{i_1 \ldots i_p}$ de composiciones finitas $S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_p}$ de elementos de S.

Para $A \subseteq X$, sea $S(A) = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(A)$, $S^P(A) = S(S^{P-1}(A))$. Luego, para el conjunto cerrado y acotado A, $S^P(A) \to K$, con la métrica de Hausdorff. El conjunto compacto K se denota por $|S|$. $|S|$ mantiene varias dimensiones de una manera natural, tenemos lo siguiente:

(2). En adición a las hipótesis de (1), supongamos que $\rho_1, \ldots, \rho_N \in (0,1)$ y $\sum_{i=1}^{N} \rho_i = 1$. Entonces existe una única medida regular de Borel μ de tamaño 1 tal que $\mu = \sum_{i=1}^{N} \rho_i S_{i\sharp}(\mu)$. Por lo tanto *supp*$(\mu) = |S|$. La medida μ es denotada por $\|S, \rho\|$.

Definición 76. *[22]. $S : X \to X$ es una similitud si $d(S(x), S(y)) = rd(x, y)$ para todo $x, y \in X$ y algún r fijo.*

$$\mu_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ es la homotecia } \mu_r(x) = rx \ (r \geq 0).$$

$$\tau_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ es la traslación } \tau_b(x) = x - b.$$

Presentemos el siguiente lema. (Para consultar la demostración ver la referencia.)

Lema 21. *[22]. $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una similitud si y sólo si $S = \mu_r \circ \tau_b \circ O$ para alguna homotecia μ_r, traslación τ_b y transformación ortonormal O.*

Definición 77. ***Autosemejanza Estricta*** *[17]. Sea $K \subseteq X$. Se dice que K es autosemejante con respecto a S si:*

i) K es invariante con respecto a S, y

ii) $\mathcal{H}^k(K) > 0$, $\mathcal{H}^k(K_i \cap K_j) = 0$ para $i \neq j$, donde $k = dim_{HB}\, K$.

A continuación citaremos un resultado que garantiza la existencia de conjuntos autosemejantes en el sentido de Hutchinson. Para lo cual se introduce la condición del conjunto abierto. Esta condición controla las intersecciones de las piezas del atractor, con el objetivo de garantizar la segunda condición de la definición anterior.

Definición 78. ***Condición del Conjunto Abierto de Moran (OSC)*** *[17]. Un sistema iterado de funciones $\{(\mathbb{R}^n, M_e) : S_1, \ldots, S_N\}$ (M_e métrica euclidiana correspondiente) satisface la condición del conjunto abierto de Moran (OSC) si y sólo si existe un abierto no vacío $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $S_i(U) \cap S_j(U) = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{N} S_i(U) \subseteq U$, este conjunto será llamado el conjunto abierto de Moran.*

Teorema 20. *[17]. Sean $\{(\mathbb{R}^n, M_e) : S_1, \ldots, S_N\}$ un SIF con factores de contracción $\{r_i\}_{1 \leq i \leq N}$, tal que $N > 1$ y al menos dos puntos fijos de las contracciones S_i son distintos, K su atractor y $\sin K = s$. Si existe un conjunto abierto acotado que satisface la condición del conjunto abierto, entonces $dim_{HB} K \geq s$ y $\mathcal{H}^s(K) > 0$.*

Bibliografía

[1] B. Mandelbrot, *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Ed. Tusquets.

[2] David C. Kurtz, *Foundations of Abstract Mathematics*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill.

[3] Seymour Lipschutz, *General Topology*, schaum's outline series, McGraw-Hill Book Company. New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, Sydney 1965.

[4] Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, Second Edition 1974.

[5] Walter Rudin, *Principios de Análisis Matemático*, McGraw-Hill Book Company, Segunda Edición 1966.

[6] Shaoyuan Xu, Suyu Cheng and Zouling Zhou, *Reichś iterated function systems and well-posedness via fixed point theory*, (Fixed Point Theory and Applications 2015 DOI 10.1186/s13663-015-0320-7) a SpringerOpen Journal.

[7] James R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall. Seg Edición.

[8] S. Sabogal y G. Arenas, Una Introducción a la Geometría Fractal, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2011.

[9] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., 1988.

[10] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry (Mathematical Foundations and Applications)*, JOHN WILEY AND SONS.

[11] Vasile I. Istratescu, D. Reidel *Fixed Point Theory, An Introduction*, Holland (1981).

[12] Gerald A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Ed. Springer Second Edition.

[13] S. Hayashi. *Self-similar Sets as Tarski's Fixed Points*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985), 1059-1066.

[14] A. Kameyama, *Self-similar Sets from the Topological Point of View*, Japan J. Indust. Appl. Math., 10 (1993), 8595.

[15] M.M. Rocha, *Dimensión y Conjuntos de Julia*, CIMAT-CONCYTEG Año 2. Núm 25, 14 de Sep 2007.

[16] Karen Castelblanco, *Álgebra de las Dimensiones Fractales*, Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas, Bogotá 2015.

[17] Luisa Fernanda Higueras Montaño, *Algunos tipos de autosemejanza en fractales generados a través de sistemas iterados de funciones*, Universidad del Valle, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Programa Académico de Matemáticas, 2011.

[18] Pablo Montesdeoca Pérez, *Longitud y Área de Curvas Fractales. Dimensión Fractal*, 2005.

[19] Sonia M. Sabogal P, *Sobre Autosemejanza Topológica, Parte I*, Revista Integración, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas, Vol. 17, N.1, p.27-47, enero-junio de 1999.

[20] Sonia M. Sabogal P, *Sobre Autosemejanza Topológica, Parte II*, Revista Integración, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas, Vol. 17, N.2, p.117-134, julio-diciembre de 1999.

[21] W.J. Charatonik y A. Dilks, *On self-homeomorphic spaces*, Topol. and its Appl., 55 (1994), 215-238.

[22] J.E. Hutchinson, *Fractals and Self-similarity*, Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), 713-747.

[23] Jun Luo, *Topological Structure of Self-similar Sets*, Fractals, Vol 10, No. 2 (2002) 223-227 WSPC.