Cálculo numérico de matrices de Lyapunov de sistemas integrales con retardo

Héctor Arismendi-Valle Daniel Melchor-Aguilar

División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, 78216, San Luis Potosí, SLP, México (e-mail: hector.arismendi, dmelchor@ipicyt.edu.mx)

Resumen: En este artículo se propone un algoritmo numérico para la construcción de matrices de Lyapunov de sistemas integrales con un retardo.

Palabras clave: Sistemas integrales con retardo, Funcionales de Lyapunov-Krasovskii, Matrices de Lyapunov.

1. INTRODUCCIÓN

Recientemente en Melchor-Aguilar et al. (2010), se han introducido los teoremas directo y converso de Lyapunov-Krasovskii para la estabilidad exponencial de sistemas integrales con retardo. En el mismo artículo se ha mostrado que se requiere un nuevo tipo de funcionales de Lyapunov con el fin de abordar adecuadamente la dinámica de dicha clase de sistemas. Se proporcionan expresiones generales de funcionales de Lyapunov-Krasovskii del tipo cuadrática satisfaciendo una derivada preestablecida. Estas funcionales están definidas por funciones matriciales especiales las cuales son el equivalente a las matrices de Lyapunov que aparecen en el cálculo de las funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para sistemas diferenciales con retardo Kharitonov and Zhabko (2003); por lo tanto, es natural llamar a dichas funciones matriciales como *Matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardo* y a las funcionales correspondientes *Funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para sistemas integrales con retardo.*

Al igual que el caso diferencial con retardos, el cálculo de la matriz de Lyapunov desempeña un rol importante en el uso de las funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para resolver problemas tales como el cálculo de cotas de robustez y estimados exponenciales para la solución de sistemas integrales con retardo exponencialmente estables, ver Melchor-Aguilar et al. (2010).

Sin embargo, de acuerdo a nuestro conocimiento, no se han propuesto en la literatura procedimientos computacionales para calcular las matrices de Lyapunov de los sistemas integrales con retardo a diferencia de los sistemas diferenciales con retardo para los cuales existen distintos métodos semi-analíticos y/o numéricos para el cálculo de la matriz de Lyapunov, ver el libro reciente Kharitonov (2013) para una descripción completa de dichos métodos.

La falta de algoritmos numéricos para calcular las matrices de Lyapunov de los sistemas integrales con retardo ha limitado la aplicación de las funcionales de tipo completo pero, al mismo tiempo, ha motivado la construcción de funcionales de tipo reducido para obtener condiciones de estabilidad y estabilidad robusta formuladas directamente en términos de los coeficientes de los sistemas integrales con retardo expresadas como desigualdades matriciales lineales, véase, por ejemplo, Melchor-Aguilar (2010), Mondié and Melchor-Aguilar (2012) y Melchor-Aguilar (2014).

En este artículo, se presenta un esquema numérico para calcular aproximaciones lineales a pedazos de matrices de Lyapunov de sistemas integrales con un retardo y un kernel matricial constante.

Es importante resaltar que los métodos existentes para calcular matrices de Lyapunov de sistemas diferenciales con retardo no pueden ser aplicados directamente al caso de los sistemas integrales con retardo. Más aún, resulta que las ideas principales detrás del procedimiento numérico propuesto en Garcia-Lozano and Kharitonov (2006) para sistemas diferenciales con retardo no proveen una solución al problema del cálculo de matrices de Lyapunov incluso para el caso mas sencillo de sistemas integrales escalares con retardo.

La parte restante del artículo esta organizada de la manera siguiente. En la sección 2 se presentan algunos preliminares. Se introducen las funcionales y matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardo. La sección 3 está dedicada a mostrar que el método numérico propuesto en Garcia-Lozano and Kharitonov (2006) para sistemas diferenciales con retardo no permite el cálculo de matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardo. El algoritmo numérico para calcular aproximaciones lineales a pedazos continuas de matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardo está dado en la sección 4. Un ejemplo ilustrando el algoritmo se proporciona en la sección 5 y el artículo finaliza con algunas conclusiones.

2. PRELIMINARES

Considerar el sistema integral con retardo

$$x(t) = F \int_{-h}^{0} x(t+\theta) d\theta, \tag{1}$$

donde $F \in \mathbb{R}^n$ y $h > 0$. Para definir una solución particular de (1) una función inicial vectorial $\varphi(\theta), \theta \in [-h, 0)$ debe ser dada. Se supone que $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0), \mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones acotadas y continuas a pedazos que mapean el intervalo $[-h,0)$ a $\mathbb{R}^n$, equipado con la norma de convergencia uniforme $\|\varphi\|_{\mathrm{h}} = \sup_{\theta\in[-h,0)} \|\varphi(\theta)\|$.

Dada una función inicial $\varphi \in \mathcal{PC}([-h,0),\mathbb{R}^n)$, existe una solución única $x(t,\varphi)$ de (1) la cual está definida para todo $t \in [-h,\infty)$ Melchor-Aguilar et al. (2010). Está solución es continua para todo $t > 0$ y en $t = 0$ presenta una discontinuidad de tipo salto dada por

$$\begin{aligned}\Delta x(0,\varphi) &= x(0,\varphi) - x(-0,\varphi)\\ &= F\left(\int_{-h}^{0}\varphi(\theta)d\theta\right) - \varphi(-0).\end{aligned}$$

Definición 1. Melchor-Aguilar et al. (2010) El sistema (1) se dice ser exponencialmente estable si existen constantes $\mu \geq 1$ y $\alpha > 0$ tales que toda solución de (1) satisface la desigualdad

$$\|x(t,\varphi)\| \leq \mu e^{-\alpha t}\|\varphi\|_{\mathrm{h}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Para presentar las condiciones de Lyapunov-Krasovskii para la estabilidad exponencial de (1) dadas en Melchor-Aguilar et al. (2010) se introducirá un poco de terminología. Como es habitual, se define el estado natural de (1) por

$$x_t(\theta,\varphi) \triangleq x(t+\theta,\varphi), \quad \theta \in [-h,0).$$

Debido a la discontinuidad de tipo salto de la solución en $t = 0$, se sigue que $x_t(\theta,\varphi) \in \mathcal{PC}([-h,0),\mathbb{R}^n)$ para $t \in [0,h)$, mientras que $x_t(\theta,\varphi) \in \mathcal{C}([-h,0),\mathbb{R}^n)$ para $t \geq h$. Como consecuencia de ello, en el enfoque de Lyapunov-Krasovskii, las funcionales deben estar definidas en el espacio infinito dimensional $\mathcal{PC}([-h,0),\mathbb{R}^n)$.

Por simplicidad de la notación, se escribe $x_t(\varphi)$ en lugar de $x_t(\theta,\varphi)$, $\theta \in [-h,0)$. Asimismo, cuando la función inicial es irrelevante en el contexto, simplemente se escribe $x(t)$ y x_t en lugar de $x(t,\varphi)$ y $x_t(\varphi)$.

Teorema 2. Melchor-Aguilar et al. (2010) El sistema (1) es exponencialmente estable si existe una funcional continua $v : \mathcal{PC}([-h,0),\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ tal que $t \to v(x_t(\varphi))$ es diferenciable y se cumplen las condiciones siguientes:

(1) $\alpha_1 \int_{-h}^{0}\|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \int_{-h}^{0}\|\varphi(\theta)\|^2 d\theta$, para constantes $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$,
(2) $\frac{d}{dt}v(x_t(\varphi)) \leq -\beta \int_{-h}^{0}\|x(t+\theta,\varphi)\|^2 d\theta$, para una constante $\beta > 0$.

Sea $K(t)$ la solución de la ecuación matricial

$$K(t) = \left(\int_{-h}^{0} K(t+\theta)d\theta\right)F,$$

con función inicial $K(t) = -K_0$, $t \in [-h,0)$, donde $K_0 = (I - hF)^{-1}$. La matriz $K(t)$ se conoce como la matriz fundamental del sistema (1), ver Melchor-Aguilar et al. (2010).

Suponga que (1) es exponencialmente estable. Dada $W = W^T$ se define la matriz

$$U(\tau) \triangleq \int_{0}^{\infty} K^T(t)WK(t+\tau)dt, \quad \tau \in [-h,h]. \qquad (2)$$

Note que la estabilidad exponencial del sistema (1) garantiza la existencia de la integral impropia en (2).

Definición 3. La matriz (2) es la matriz de Lyapunov del sistema (1) asociada a la matriz W.

Observación 4. La matriz fundamental $K(t)$ presenta una discontinuidad de tipo salto en $t = 0$ dada por

$$\Delta K(0) \triangleq K(0) - K(-0) = I - K_0 - (-K_0) = I.$$

Por otro lado, la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ es continua para todo $\tau \in [-h,h]$.

También se ha demostrado un enunciado converso al Teorema 2 en Melchor-Aguilar et al. (2010). De manera más precisa, bajo la suposición de la estabilidad exponencial de (1) y definiendo en $\mathcal{PC}([-h,0),\mathbb{R}^n)$ la funcional

$$w(\varphi) = \varphi^T(-h)W_0\varphi(-h) + \int_{-h}^{0}\varphi^T(\theta)W_1\varphi(\theta)d\theta,$$

donde W_0 y W_1 son matrices definidas positivas, la funcional de tipo completo correspondiente

$$\begin{aligned}v(x_t) = &\left(F\int_{-h}^{0}x(t+\theta)d\theta\right)^T U(0)\left(F\int_{-h}^{0}x(t+\theta)d\theta\right)\\ &-2\left(F\int_{-h}^{0}x(t+\theta)d\theta\right)^T\int_{-h}^{0}U(-h-\theta)Fx(t+\theta)d\theta\\ &+\int_{-h}^{0}x^T(t+\theta_1)F^T\left(\int_{-h}^{0}U(\theta_1-\theta_2)Fx(t+\theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1\\ &-\int_{-h}^{0}x^T(t+\theta_1)F^TK_0^TW\times\\ &\times\left[\int_{-h}^{0}\left(\int_{-h-\theta_2}^{\theta_1-\theta_2}K(\xi)d\xi\right)Fx(t+\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1\\ &+\int_{-h}^{0}x^T(t+\theta)\left[W_0+(\theta+h)W_1\right]x(t+\theta)d\theta,\end{aligned} \qquad (3)$$

donde $U(\cdot)$ es la matriz de Lyapunov del sistema (1) asociada con la matriz $W = W_0 + hW_1$, satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}v(x_t) = -w(x_t), \quad t \geq 0.$$

Se muestra en Melchor-Aguilar et al. (2010) que si el sistema (1) es exponencialmente estable entonces la funcional (3) satisface las condiciones del Teorema 2.

Se sigue de (3) que el cálculo de la matriz $U(\tau)$ es fundamental para construir la funcional $v(x_t)$. En Melchor-Aguilar et al. (2010) se demostró que $U(\tau)$ satisface las propiedades siguientes.

Lema 5. La matriz de Lyapunov $U(\tau)$ satisface la ecuación dinámica

$$U(\tau) = \left(\int_{-h}^{0}U(\tau+\theta)d\theta\right)F, \qquad \tau \geq 0. \qquad (4)$$

Lema 6. Sea $W = W^T$. Entonces la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ satisface

$$U(\tau) = K_0^TW\int_{0}^{\tau}K(\xi)d\xi + U^T(-\tau), \quad \tau \in [0,h]. \qquad (5)$$

Lema 7. La matriz de Lyapunov $U(\tau)$ satisface

$$\begin{aligned}-K(0)WK(0) = &\left[U(0)F - U(-h)F\right]^T\\ &+\left[U(0)F - U(-h)F\right].\end{aligned} \qquad (6)$$

Las condiciones (4), (5) y (6) son llamadas respectivamente *la propiedad dinámica*, *la propiedad de simetría* y *la propiedad algebraica*. Claramente, estas tres propiedades proveen una alternativa más práctica de calcular la matriz de Lyapunov que la integral impropia definida en (2).

La propiedad dinámica define $U(\tau)$ como una solución de la ecuación (4). Para calcular dicha solución se necesita conocer su correspondiente función inicial. La función inicial no esta dada explícitamente. Por otro lado, la propiedad de simetría (5) junto con la propiedad algebraica (6) proveen información implícita de la función inicial desconocida.

Como se mencionó en la introducción, existen algunos métodos para calcular matrices de Lyapunov de sistemas diferenciales con retardo Kharitonov (2013) pero, sin embargo, no pueden ser aplicados directamente al cálculo de matrices de Lyapunov de sistemas integrales con retardo. El problema principal es que para aplicar dichos métodos se necesita derivar la ecuación dinámica (1) y esto dará lugar a una ecuación matricial diferencial con retardo inestable, ver Melchor-Aguilar et al. (2010) para más detalles.

Por otro lado, parece natural analizar la posibilidad de aplicar, no los métodos para sistemas diferenciales, pero si las ideas principales detrás de ellos al caso de los sistemas integrales con retardo. Así, en la siguiente sección, se aplicarán las ideas principales en Garcia-Lozano and Kharitonov (2006) para la construcción numérica de matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardo.

3. APLICACIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO DE SISTEMAS DIFERENCIALES CON RETARDO

Siguiendo las ideas expuestas en Garcia-Lozano and Kharitonov (2006) definimos la función matricial $\Phi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$, como la función inicial desconocida para la ecuación dinámica (4) y dividimos el intervalo $[-h, 0]$ en N segmentos de la misma longitud $[-(j+1)r, -jr]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, donde $r = \dfrac{h}{N}$.

Ahora, introducimos $N+1$ matrices desconocidas $\Phi_j = \Phi(-jr)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$, y definimos la aproximación lineal a pedazos continua de la función inicial $\Phi(\tau)$ como sigue:

$$\hat{\Phi}(s) = \left(1 + \frac{s + jr}{r}\right)\Phi_j + \left(-\frac{s + jr}{r}\right)\Phi_{j+1}, \qquad (7)$$

donde $s \in [-(j+1)r, -jr]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Sea $U(\tau) = U(\tau, \Phi)$ la solución de (4) correspondiente a la función inicial Φ. Note que para la construcción de la funcional (3), $U(\tau)$ solamente se necesita conocer para los valores de $\tau \in [0, h]$. En consecuencia, también dividimos el intervalo $[0, h]$ en N segmentos de la misma longitud $[jr, (j+1)r]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, introducimos $N+1$ matrices desconocidas $U_j = U(jr)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$, y definimos la aproximación lineal a pedazos de $U(\tau)$ como sigue:

$$\hat{U}(s) = \left(1 - \frac{s - jr}{r}\right)U_j + \left(\frac{s - jr}{r}\right)U_{j+1}, \qquad (8)$$

donde $s \in [jr, (j+1)r]$, $j = 0, 1, 2, \cdots, N-1$.

Para $\tau = jr$ se tiene

$$U(jr) = \left(\int_{-h}^{0} U(jr + \theta)\, d\theta\right) F.$$

Entonces, de acuerdo con el método en Garcia-Lozano and Kharitonov (2006), se comparan $U(jr)$ y $U((j+1)r)$ para obtener

$$\begin{aligned} U_{j+1} - U_j &= U((j+1)r) - U(jr) \\ &= \left(\int_0^r \left(U(jr + \theta) - \Phi((j - N)r + \theta)\right) d\theta\right) F. \end{aligned}$$

Sustituyendo las matrices $U(jr+\theta)$ y $\Phi((j-N)r+\theta)$ bajo la integral por sus aproximaciones lineales a pedazos (8) y (7) y usando la propiedad de simetría (5) en los puntos de la partición

$$U_j = \Phi_j^T + K_0^T W V_j, \; j = 0, 1, \ldots, N, \qquad (9)$$

donde

$$V_j = \int_0^{jr} K(\xi) d\xi, \qquad (10)$$

se llega al conjunto de N ecuaciones lineales expresadas en términos de las matrices desconocidas Φ_j, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ siguiente:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{r}{2}F + I\right)\Phi_j^T + \left(\frac{r}{2}F - I\right)\Phi_{j+1}^T - \frac{r}{2}\left(\Phi_{N-j} + \right. \\ &\left. + \Phi_{N-j-1}\right) F = K_0^T W \left(V_{j+1} - V_j - \frac{r}{2}\left(V_j + V_{j+1}\right)\right) \end{aligned} \qquad (11)$$

Agregando a este conjunto la ecuación algebraica (6) en los puntos de la partición

$$\left(\Phi_0 - \Phi_N\right) F + F^T \left(\Phi_0 - \Phi_N\right)^T = -K^T(0) W K(0) \quad (12)$$

se llega a un sistema de $N+1$ ecuaciones matriciales para $N+1$ matrices desconocidas Φ_j, $j = 0, 1, \ldots, N$.

En principio, la solución del sistema de ecuaciones (11)-(12) proporciona las matrices Φ_j y la formula (7) da la aproximación deseada de la función inicial.

Considere el caso escalar y dos particiones del intervalo $[-h, 0]$, es decir. $F \in \mathbb{R}$ y $N = 2$ lo que lleva a $r = \frac{h}{2}$. En este caso, el sistema lineal de ecuaciones (11)-(12) puede ser escrito como $A\mathcal{X} = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{r}{2}F + 1\right) & -1 & -\frac{r}{2}F \\ \frac{r}{2}F & 1 & \left(\frac{r}{2} - 1\right) \\ 2F & 0 & -2F \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \left[\Phi_0 \;\, \Phi_1 \;\, \Phi_2\right]^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} K_0 W \left(V_1 - \frac{r}{2} V_1 F\right) \\ K_0 W \left(\left(V_1 - V_1\right) - \frac{r}{2}\left(V_1 + V_2\right) F\right) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que

$$\det(A) = -rF^2 - 2F - rF^2 + 2F + rF^2 + rF^2 = 0$$

lo cual implica que la matriz A es singular para todos los valores de $F \in \mathbb{R}$ y $h > 0$.

Se sigue que el sistema de ecuaciones (11)-(12) no es consistente ya que no hay una solución única de $A\mathcal{X} = B$ y, por lo tanto, la metodología expuesta en Garcia-Lozano and Kharitonov (2006) para sistemas diferenciales con retardo no provee una solución apropiada al problema del calculo de matrices de Lyapunov para sistemas integrales con retardo.

4. APROXIMACIÓN LINEAL A PEDAZOS

El análisis en la sección 3 muestra que se requiere un nuevo método para calcular soluciones de la ecuación dinámica (4), satisfaciendo las condiciones (5) y (6) para calcular matrices de Lyapunov de sistemas integrales con retardo. En esta sección, se propone dicho método.

4.1 Función inicial aproximada

Considerar las mismas particiones de los intervalos $[-h, 0]$ y $[0, h]$ en N segmentos iguales definidos en la sección 3 y las aproximaciones lineales a pedazos continuas de la función inicial $\hat{\Phi}(s)$ y la matriz $\hat{U}(s)$ definidas respectivamente por (7) y (8).

Ahora, para $\tau = jr$ se obtiene

$$U(jr) = \left(\int_{-h}^{0} U(jr+\theta)d\theta\right) F = \left(\int_{(j-N)r}^{jr} U(\xi)d\xi\right) F.$$

Dado que $(j-N)r \leq 0$, $j = 0, 1, \ldots, N$, se puede escribir la ecuación anterior como

$$U(jr) = \left(\underbrace{\int_{(j-N)r}^{0} \Phi(\xi)d\xi}_{m_j} + \underbrace{\int_{0}^{jr} U(\xi)d\xi}_{n_j}\right) F. \quad (13)$$

Considerar el término m_j en (13). Reescribiendo la integral en suma de integrales en intervalos de longitud r y sustituyendo $\Phi(\xi)$ por su aproximación $\hat{\Phi}(\xi)$ se obtiene

$$\hat{m}_j = \sum_{k=0}^{N-j-1} \int_{-(N-j-k)r}^{-(N-j-k-1)r} \hat{\Phi}(\xi)d\xi, j = 0, 1, \cdots, N-1,$$
$$\hat{m}_N = 0,$$

donde $\hat{m}_j$ denota la aproximación del término m_j.

Sustituyendo $\hat{\Phi}(\xi)$ en la integral del lado derecho de la expresión para $\hat{m}_j$ por su aproximación lineal a pedazos (7), un término de la integral satisface

$$\int_{-(N-j-k)r}^{-(N-j-k-1)r} \hat{\Phi}(\xi)d\xi =$$
$$= \int_{-(N-j-k)r}^{-(N-j-k-1)r} \left[\left(1 + \frac{\xi + (N-j-k-1)r}{r}\right)\right.$$
$$\left. \times \Phi_{N-j-k-1} + \left(-\frac{\xi + (N-j-k-1)r}{r}\right)\Phi_{N-j-k}\right] d\xi.$$

Cálculos directos de la ecuación anterior conducen a

$$\hat{m}_j = \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{N-j-1} \left(\Phi_{N-j-k-1} + \Phi_{N-j-k}\right), j = 0, 1, \cdots, N-1,$$
$$\hat{m}_N = 0. \quad (14)$$

Considerar el término n_j en (13). De manera similar, reescribiendo la integral como suma de integrales en intervalos de longitud r y sustituyendo $U(\xi)$ por su aproximación $\hat{U}(\xi)$ se obtiene

$$\hat{n}_j = \sum_{k=0}^{j-1} \int_{(j-k-1)r}^{(j-k)r} \hat{U}(\xi)d\xi, j = 1, 2, \cdots, N,$$
$$\hat{n}_0 = 0$$

donde $\hat{n}_j$ denota la aproximación de n_j.

Sustituyendo $\hat{U}(\xi)$ en la integral del lado derecho de la expresión para $\hat{n}_j$ por su aproximación lineal a pedazos (7), un término de la integral satisface

$$\int_{(j-k-1)r}^{(j-k)r} \hat{U}(\xi)d\xi =$$
$$= \int_{(j-k-1)r}^{(j-k)r} \left[\left(1 - \frac{\xi - (j-k-1)r}{r}\right) U_{j-k-1} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\xi - (j-k-1)r}{r}\right) U_{j-k}\right] d\xi.$$

Mediante cálculos directos se obtiene

$$\hat{n}_j = \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{j-1} \left(U_{j-k-1} + U_{j-k}\right), \quad j = 1, \cdots, N, \quad (15)$$
$$\hat{n}_0 = 0.$$

Ahora, notar que si N es suficientemente grande entonces de (13) se sigue que

$$U_j = (\hat{m}_j + \hat{n}_j) F, \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

A partir de esta expresión, (14), (15) y la propiedad de simetría en los puntos de la partición (9) se llega a las ecuaciones matriciales siguientes:

- Para $j = 0$
$$\Phi_0 - \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{N-j-1} \left(\Phi_{N-j-k-1} + \Phi_{N-j-k}\right) F = 0. \quad (16)$$
- Para $j = 1, 2, \cdots, N-1$
$$\Phi_j^T - \frac{r}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-j-1} \left(\Phi_{N-j-k-1} + \Phi_{N-j-k}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{j-1} \left(\Phi_{j-k-1}^T + \Phi_{j-k}^T\right)\right] F =$$
$$= K_0^T W \left(\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{j-1} \left(V_{j-k-1} + V_{j-k}\right) F - V_j\right). \quad (17)$$
- Para $j = N$
$$\Phi_N^T - \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{j-1} \left(\Phi_{j-k-1}^T + \Phi_{j-k}^T\right) F =$$
$$= K_0^T W \left(\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{j-1} \left(V_{j-k-1} + V_{j-k}\right) F - V_N\right). \quad (18)$$

Notar que las ecuaciones (16)-(18) describen un sistema de $N+1$ ecuaciones matriciales para $N+1$ matrices incógnitas Φ_j, $j = 0, 1, \cdots, N$. La solución de este sistema de ecuaciones provee las matrices Φ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$ y la formula (7) permite el calculo de la aproximación deseada de la función inicial matricial.

A fin de mostrar que el sistema de ecuaciones matriciales (16)-(18) no presenta el mismo problema inconsistente del sistema de ecuaciones matriciales (11)-(12) obtenido siguiendo las ideas del método en Garcia-Lozano and Kharitonov (2006) considerar de nuevo el caso escalar cuando $F \in \mathbb{R}$ y $N = 2$. En este caso, el sistema de ecuaciones (16)-(18) se pueden escribir como $\bar{A}\mathcal{X} = \bar{B}$, donde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{r}{2}F\right) & -rF & -\frac{r}{2}F \\ -rF & (1 - rF) & 0 \\ -\frac{r}{2}F & -rF & \left(1 - \frac{r}{2}F\right) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = [\Phi_0 \ \Phi_1 \ \Phi_2]^T,$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 W \left(\frac{r}{2} V_1 F - V_1\right) \\ K_0 W \left(\frac{r}{2}(2V_1 + V_2) F\right) - V_2 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que $\det(\bar{A}) = -2Fr + 1$. Luego entonces, se sigue que el único caso cuando $\bar{A}$ es singular es $F = \frac{1}{2r} = \frac{1}{h}$.

Se ha mostrado en Kharitonov and Melchor-Aguilar (2000) que el sistema integral escalar con retardo es exponencialmente estable sí y solo si $F < \frac{1}{h}$ y que $F = \frac{1}{h}$ es la frontera de la región de estabilidad. En consecuencia, para este caso, el sistema de ecuaciones (16)-(18) provee solución para todos los sistemas integrales escalares con retardo exponencialmente estables.

Observación 8. Notar que el sistema de ecuaciones matriciales (16)-(18) está bien definido sin involucrar la propiedad algebraica (6) a diferencia del método propuesto en Garcia-Lozano and Kharitonov (2006) el cual requiere la correspondiente propiedad algebraica para matrices de Lyapunov de sistemas diferenciales con retardo.

4.2 Forma vectorial

Para encontrar una solución del sistema de ecuaciones (16)-(18) es conveniente escribirlo en forma vectorial por medio de la operación vector $vec(Q) = q$, donde $q \in \mathbb{R}^{n^2}$ se obtiene apilando las columnas de $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

La vectorización de la matriz $C = AXB$ es $vec(C) = (A \otimes B)\, vec(X)$, donde

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{21}A & \cdots & b_{n1}A \\ b_{12}A & b_{22}A & \cdots & b_{n2}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n}A & b_{2n}A & \cdots & b_{nn}A \end{pmatrix}$$

es el producto de Kronecker de las matrices A y B. Por otro lado, la vectorización de la matriz $D = AX^TB$ es $vec(D) = (A \circ B)\, vec(X)$, donde $A \circ B$ está definida por

$$A \circ B = \begin{pmatrix} A_1B_1^T & A_2B_1^T & \cdots & A_nB_1^T \\ A_1B_2^T & A_2B_2^T & \cdots & A_nB_2^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1B_n^T & A_2B_n^T & \cdots & A_nB_n^T \end{pmatrix},$$

denotando con A_j, B_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, los vectores columna de A y B, respectivamente.

Entonces, el sistema de ecuaciones matriciales (16)-(18) puede ser escrito en forma vectorial como sigue:

- Para $j = 0$

$$(I \circ I)\,\phi_0 - \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{N-j-1}(I \times F)\,(\phi_{N-j-k-1} + \phi_{N-j-k}) = 0.$$

- Para $j = 1, 2, \cdots, N-1$

$$(I \circ F)\,\phi_j - \frac{r}{2}\left[\sum_{k=0}^{N-j-1}(I \times F)\,(\phi_{N-j-k-1} + \phi_{N-j-k}) + \sum_{k=0}^{j-1}(I \circ F)\,(\phi_{j-k-1} + \phi_{j-k})\right]F =$$
$$= vec\left(K_0^T W\left(\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{j-1}(V_{j-k-1} + V_{j-k})\,F - V_j\right)\right).$$

- Para $j = N$

$$(I \circ I)\,\phi_N - \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{j-1}(I \circ F)\,(\phi_{j-k-1} + \phi_{j-k})\,F =$$
$$= vec\left(K_0^T W\left(\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{j-1}(V_{j-k-1} + V_{j-k})\,F - V_N\right)\right),$$

donde $\phi_j = vec(\Phi_j), j = 1, 2, \ldots, N$.

4.3 Matriz de Lyapunov aproximada

Con la aproximación lineal a pedazos de la función inicial calculada, se plantea el problema de buscar la solución correspondiente de la ecuación dinámica (4). De hecho, el problema puede ser formulado como el problema de valor inicial general siguiente:

$$U(\tau) = \left(\int_{-h}^{0} U(\tau + \theta)d\theta\right)F, \quad \tau \geq 0, \tag{19}$$
$$U(\tau) = \Phi(\tau), \quad \tau \in [-h, 0]. \tag{20}$$

Notar que el problema de valor inicial (19)-(20) no se puede resolver por medio del método paso a paso conocido para construir soluciones de sistemas diferenciales con retardo Bellman and Cooke (1963).

A continuación, se propone un método para resolver el problema de valor inicial (19)-(20) el cual está inspirado en el método paso a paso para sistemas diferenciales con retardo y, en realidad, este puede ser usado para construir soluciones numéricas de sistemas integrales con retardo de la forma (1).

De (19) se tiene para $\tau \in [0, h]$

$$U(\tau) = W(\tau) + \left(\int_0^\tau U(\xi)d\xi\right)F, \tag{21}$$

donde

$$W(\tau) = \left(\int_{\tau-h}^{0}\Phi(\xi)d\xi\right)F.$$

Se sigue que el problema de valor inicial (19)-(20) es equivalente al problema de encontrar una solución de la ecuación integral (21).

Sean $U_0(\tau) = W(\tau)$ y $U_j(\tau)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, sucesiones descritas como sigue:

$$U_j(\tau) = W(\tau) + \left(\int_0^\tau U_{j-1}(\xi)d\xi\right)F, \quad \tau \in [0, h].$$

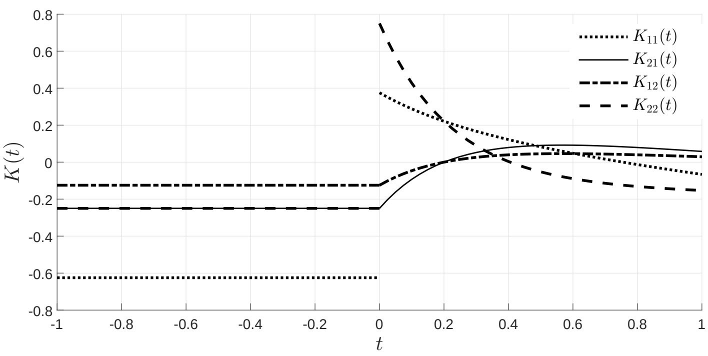

Fig. 1. Componentes de la matriz fundamenta $K(t)$.

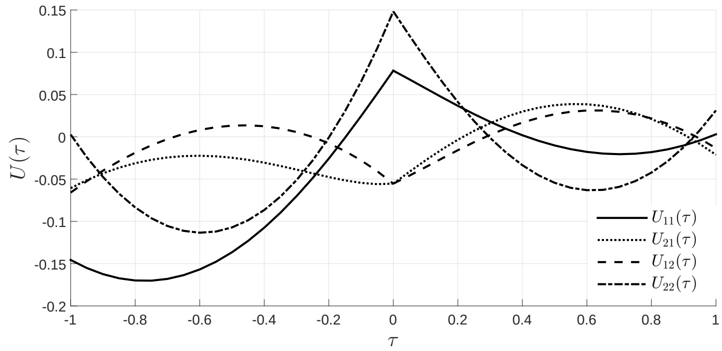

Fig. 2. Componentes de la función inicial aproximada $\hat{\Phi}(\tau)$ y la matriz de Lyapunov $\hat{U}\left(\tau, \hat{\Phi}\right)$.

Es posible mostrar que $U_j(\tau)$ converge (uniformemente en τ) a la matriz $U(\tau)$ cuando $j \to \infty$ y que la matriz límite $U(\tau)$ satisface la ecuación integral (21) la cual, a su vez, implica la existencia y unicidad de la solución $U(\tau)$ satisfaciendo (19) y (20). Por motivos de espacio se omiten los detalles de tal demostración.

Continuando el proceso en intervalos de longitud h se obtiene la existencia y unicidad de la solución $U(\tau)$ para $\tau \geq 0$.

La sucesión $U_j(\tau)$ proporciona un método para construir numéricamente una aproximación de $U(\tau)$ para cada $\tau \geq 0$.

Por lo tanto, usando este método, sea $\hat{U}\left(\tau, \hat{\Phi}\right)$, $\tau \in [0, h]$, la solución aproximada de la ecuación dinámica (4) correspondiente a la función inicial $\hat{\Phi}$.

5. EJEMPLO NUMÉRICO

Considerar el sistema integral con retardo (1) con $h = 1$ y

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Como los valores propios de F yacen en el dominio abierto Γ cuya frontera admite la parametrización

$$\partial\Gamma = \left\{ \frac{\omega \sin(\omega)}{2\left[1 - \cos(\omega)\right]} + i\frac{\omega}{2} \middle| \omega \in (-2\pi, 2\pi) \right\}$$

entonces el sistema (1) es exponencialmente estable, ver Kharitonov and Melchor-Aguilar (2000).

Notar que para resolver el sistema de ecuaciones matriciales (16)-(18) se requiere calcular las matrices V_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, definidas por (10) y, por lo tanto, calcular la matriz fundamental $K(t)$ para $t \in [0, 1]$. Debido a que la función inicial para la matriz fundamental es conocida se puede aplicar el método propuesto en la subsección 4.3 y construir $K(t)$ para $t \in [0, 1]$, ver Fig. 1.

Ahora para $W = I$ y $N = 20$ se usa el algoritmo propuesto para calcular la aproximación de la función inicial $\hat{\Phi}(\tau)$, $\tau \in [-1, 0]$, y la correspondiente matriz de Lyapunov $\hat{U}\left(\tau, \hat{\Phi}\right)$, $\tau \in [0, 1]$, ver Fig. 2.

Como se puede ver en las Figs. 1 y 2, la matriz fundamental $K(t)$ presenta una discontinuidad de tipo salto en $t = 0$ mientras que la matriz de Lyapunov es continua para todo $\tau \in [-1, 1]$ como se esperaba de la Observación 4.

6. CONCLUSIONES

En este artículo, se aborda el problema del cálculo de la matriz de Lyapunov de sistemas integrales con un retardo. Después de mostrar que los métodos numéricos existentes para calcular matrices de Lyapunov para sistemas diferenciales con retardo no pueden ser aplicados a los sistemas integrales con retardo, se propuso un algoritmo numérico para calcular aproximaciones lineales a pedazos de matrices de Lyapunov.

Es importante mencionar que el algoritmo propuesto no involucra la propiedad algebraica de la matriz de Lyapunov a diferencia del método para sistemas diferenciales con retardo el cual requiere dicha propiedad. La propiedad algebraica se puede usar para evaluar la calidad de la aproximación de la matriz de Lyapunov, un problema que se abordará en un trabajo futuro.

7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado por el proyecto CONACYT con clave 265667 : "PROGRAMA PARA UN AVANCE GLOBAL E INTEGRADO DE LA MATEMÁTICA MEXICANA".

REFERENCIAS

Bellman, R. and Cooke, K.L. (1963). *Differential-difference equations.* Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York.

Garcia-Lozano, H. and Kharitonov, V. (2006). Numerical computation of time delay lyapunov matrices. *6th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, 6, 60–65.

Kharitonov, V. (2013). *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices.* Birkhäuser.

Kharitonov, V. and Zhabko, A. (2003). Lyapunov-krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 39(1), 15 – 20.

Kharitonov, V.L. and Melchor-Aguilar, D. (2000). On delay dependent stability conditions. *Syst. Control Lett.*, 40(1), 71 – 76.

Melchor-Aguilar, D. (2010). On stability of integral delay systems. *Appl. Math. Comput.*, 217(7), 3578 – 3584.

Melchor-Aguilar, D. (2014). New results on robust exponential stability of integral delay systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 47(8), 1905–1916.

Melchor-Aguilar, D., Kharitonov, V., and Lozano, R. (2010). Stability conditions for integral delay systems. *Int. J. Robust. Nonlin.*, 20(1), 1–15.

Mondié, S. and Melchor-Aguilar, D. (2012). Exponential stability of integral delay systems with a class of analytic kernels. *IEEE T. Automat. Contr.*, 57(2), 484–489.