

Sobre la estabilidad de controladores PD en redes TCP/AQM

Adrian Puerto-Piña Daniel Melchor-Aguilar

División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, San Luis Potosí, 78216, México. (correo electrónico: {adrian.puerto,dmelchor}@ipicyt.edu.mx)

Abstract: En este artículo se aborda el problema de estabilización de los modelos con retardo de redes TCP / AQM (Transmission Control Protocol / Active Queue Management) mediante el uso de un controlador Proporcional-Derivativo (PD) como estrategia AQM. Se obtienen condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad exponencial de los modelos linealizados en lazo cerrado. Como consecuencia, se determina el conjunto completo de controladores PD AQM que estabilizan exponencialmente los sistemas lineales con retardo correspondientes, en contraparte con los trabajos existentes en la literatura que sólo proporcionan una estimación del mismo. Adicionalmente, se proporciona un procedimiento simple para la determinación de las ganancias del controlador que proporcionan un controlador PD no frágil que admite perturbaciones en los coeficientes de controlador.

Keywords: Five to ten keywords, preferably chosen from the IFAC keyword list.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los mayores problemas en las redes de comunicación es la congestión. Para abordar dicho problema se recomienda utilizar esquemas de gestión de colas activas (AQM, por sus siglas en inglés). Las estrategias AQM tienen como objetivo principal minimizar el riesgo de congestión regulando el tamaño promedio de la cola en los enrutadores.

En Hollot et al. (2002) se presenta un modelo matemático que describe aproximadamente el comportamiento de los enrutadores congestionados en las redes TCP/AQM y permite abordar el problema de congestión desde el enfoque de la teoría de control. A partir de este modelo se han propuestos varios esquemas AQM basados en estrategias de control retroalimentado, como por ejemplo, Proporcional (P) Hollot et al. (2002); Michiels et al. (2006), Proporcional-Integral (PI) Hollot et al. (2002); Melchor-Aguilar y Niculescu (2009), Proporcional-Derivativo (PD) Azadegan et al. (2015); Kim (2006); Sun et al. (2003), y \mathcal{H}^∞ Quet y Özbay (2004).

Entre estos trabajos, es interesante observar la formulación de retroalimentación en espacio de estados propuesta en Kim (2006) para el problema de control TCP / AQM. En el trabajo se demuestra que una estructura de control de tipo PD en función de la longitud de la cola es el control por retroalimentación de estados natural para regular completamente la dinámica del TCP. Las capacidades del control PD-AQM en la regulación de la longitud promedio de la cola en diferentes escenarios de red así como comparaciones con otras estrategias de AQM se han ilustrado mediante simulaciones en Azadegan et al. (2015) y Sun et al. (2003).

Aunque los diseños existentes de controladores PD-AQM pueden proporcionar resultados satisfactorios, sólo se

basan en condiciones suficientes para garantizar la estabilidad en lazo cerrado de la linealización de los modelos, considerando que las ganancias del controlador se obtienen a través de algunas reglas heurísticas en Sun et al. (2003), la minimización de una función lineal cuadrática de costo en Kim (2006) y en términos de desigualdades matriciales lineales en Azadegan et al. (2015). Como consecuencia, estos diseños no ofrecen el conjunto completo de valores en las ganancias para los controladores PD estabilizantes. Este hecho nos motiva a buscar una caracterización completa del conjunto de todos los controladores PD que estabilizan de forma exponencial la linealización de una versión simplificada del modelo considerado en Azadegan et al. (2015) y Kim (2006).

Durante el desarrollo del análisis, observamos que el sistema en lazo cerrado con un controlador PD-AQM es un sistema con retardo de *tipo neutro* pero, sin embargo, los diseños en Azadegan et al. (2015) y Kim (2006) se basan en un sistema con retardo en lazo cerrado de *tipo retardado* que se considera equivalente al de tipo neutro. Así, revisamos los resultados obtenidos en Azadegan et al. (2015) y Kim (2006), y demostramos que los sistemas con retardo en lazo cerrado de tipo neutro y retardado no son equivalentes en general, sino que sólo para algunas condiciones iniciales específicas. Este resultado, que de acuerdo a nuestro conocimiento no ha sido reportado en la literatura, proporciona una justificación formal para el diseño de un controlador PD-AQM basado en un sistema con retardo de tipo retardado, con lo cual se evita la necesidad de estudiar la estabilidad del correspondiente sistema de tipo neutro, que como es sabido en la literatura su análisis es más complicado, véase Gu et al. (2003).

Una de las principales ventajas de conocer el conjunto de todos los controladores estabilizantes es que nos permite realizar una comparación adecuada de los problemas de robustez y la fragilidad de varios diseños estables, ver

Melchor-Aguilar y Niculescu (2009) para la caracterización completa y Ünal et al. (2013) para comparaciones sobre la robustez y la fragilidad de los controladores PI-AQM estabilizantes. En este trabajo, usando la caracterización completa de todos los controladores PD estabilizantes, se presenta una metodología sencilla para examinar la fragilidad de un controlador PD estabilizante dado y se propone un algoritmo para determinar uno no frágil. Obtener un controlador que no sea frágil es muy importante para la aplicación práctica de los diseños, ya que se requiere mantener la estabilidad en lazo cerrado ante perturbaciones en los coeficientes del controlador que surgen naturalmente de errores de redondeo durante la implementación y el posible ajuste de las ganancias alrededor de un diseño nominal para conseguir un desempeño deseado en lazo cerrado, véase Keel y Bhattacharyya (1997).

La parte restante del artículo se organiza de la siguiente manera. En la sección II se presenta el modelo TCP/AQM en estudio y el control PD como estrategia de AQM. La justificación formal para considerar un sistema con retardo en lazo cerrado de tipo retardado en lugar del sistema con retardo de tipo neutro se presenta en la sección III. La caracterización completa de los controladores PD estabilizantes para la linealización se proporciona en la sección IV. Un ejemplo numérico ilustra que los diseños de PD con los enfoques en Kim (2006) y la metodología clásica de Ziegler-Nichols O'Dwyer (2006) pertenecen a la región de estabilidad completa. La sección V presenta el análisis de fragilidad, en donde se proporciona un algoritmo para el cálculo de un controlador PD no frágil. Por medio de un ejemplo numérico se realiza una comparación de algunos controladores PD estabilizantes. En la sección 6 se realiza un análisis del cual se derivan las expresiones para las funciones iniciales específicas necesarias para el sistema de tipo retardado. Adicionalmente se presenta una simulación con la finalidad de observar el comportamiento de la cola en el enrutador. Por último se presentan las conclusiones del trabajo. Es importante mencionar que un análisis más detallado así como las demostraciones de las proposiciones en este artículo, se pueden consultar en Puerto-Piña (2015).

2. MODELO MATEMÁTICO Y CONTROLADOR PD

En nuestro análisis consideramos el modelo dinámico de flujo de fluidos introducido en Hollot et al. (2002) para describir el comportamiento de las redes TCP/AQM. Este modelo relaciona el valor promedio de las principales variables de red para n fuentes homogéneas controladas con el TCP y un sólo enrutador congestionado, el cual es descrito a través de las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales, acopladas y con retardos variantes en el tiempo:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau(t)} - \frac{w(t)w(t-\tau(t))}{2\tau(t-\tau(t))}p(t-\tau(t)), \\ \dot{q}(t) = \frac{n(t)}{\tau(t)}w(t) - c(t), \end{cases} \quad (1)$$

donde $w(t)$ denota el tamaño promedio de ventana TCP (paquetes), $q(t)$ es el tamaño promedio de la cola (paquetes), $\tau(t) = \frac{q(t)}{c} + \tau_p$ es el RTT (round-trip time) en segundos donde τ_p representa el retardo de propagación, $c(t)$ es la capacidad del enlace (paquetes/segundos), $n(t)$

es el número de sesiones TCP y $p(\cdot)$ es la probabilidad de marcado de paquetes, que representa la estrategia de control de AQM. Es importante mencionar que el modelo (1) no considera la etapa de inicio lento del TCP.

Siguiendo argumentos similares a los propuestos en Hollot et al. (2002), suponemos que el número de sesiones TCP, el tiempo de retardo RTT y la capacidad del enlace son constantes, i.e., $n(t) = n, \tau(t) = \tau$ and $c(t) = c$. Entonces, el modelo (1) se aproxima por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w(t)w(t-\tau)}{2\tau}p(t-\tau), \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau}w(t) - c, \end{cases} \quad (2)$$

cuyo único punto de equilibrio está dado por

$$(w_e, p_e) = \left(\frac{c\tau}{n}, \frac{2n^2}{(c\tau)^2} \right).$$

Adicionalmente, en Hollot y Chait (2001) y Michiels et al. (2006) se muestra que si $w_e \gg 1$ entonces el comportamiento local del modelo (2) alrededor del equilibrio puede aproximarse por el comportamiento local de

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w^2(t)}{2\tau}p(t-\tau), \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau}w(t) - c. \end{cases} \quad (3)$$

Aunque la condición $w_e \gg 1$ impone una restricción en los parámetros de la red para considerar (3) como una buena aproximación de (2), este hecho se satisface para un rango típico de parámetros que surgen en la práctica, como se argumenta en Hollot y Chait (2001) y Michiels et al. (2006).

Nosotros consideramos el modelo simplificado (3) y un controlador PD-AQM de la forma

$$p(t) = K_p q(t) + K_d \dot{q}(t). \quad (4)$$

En Kim (2006) se demostró que es necesario un control PD de la forma (4) para soportar completamente la dinámica TCP. A grandes rasgos, el razonamiento principal detrás de esto es que el tamaño de ventana $w(t)$ y la longitud de la cola $q(t)$ son las variables de estado del sistema (3) y, por lo tanto, necesitan estar involucradas en una retroalimentación de estado para controlar por completo la dinámica. Ahora, dado que la segunda ecuación de (3) expresa la dinámica de la cola como una función del tamaño de ventana, entonces surge que $\dot{q}(t)$ se puede usar en lugar de $w(t)$ lo que conduce a una estructura de control de tipo PD. Por otro lado, el uso de un control PD supera la restricción en la aplicación de tener una medida o estimación de $w(t)$, la cual no es accesible en los enrutadores de redes reales, ver Azadegan et al. (2015) para las discusiones de este hecho.

3. TRANSFORMACIÓN DEL SISTEMA EN LAZO CERRADO DE TIPO NEUTRO AL SISTEMA TIPO RETARDADO

El sistema en lazo cerrado (3)-(4) es

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w^2(t)}{2\tau} [K_p q(t-\tau) + K_d \dot{q}(t-\tau)], \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau} w(t) - c. \end{cases} \quad (5)$$

Claramente, el sistema con retardo (5) es de *tipo neutro* debido a que involucra los valores pasados de la derivada temporal de $q(t)$, ver Vyhřídál et al. (2009) para la discusión acerca de aplicar una retroalimentación tipo PD a un sistema con retardos en la entrada de control.

Siguiendo los planteamientos presentados en Azadegan et al. (2015) y Kim (2006), diferenciamos la segunda ecuación de (3) y sustituimos la parte derecha, tanto de la primera como de la segunda ecuación de (3)

$$\ddot{q}(t) = \frac{n}{\tau^2} - \frac{1}{2n} (\dot{q}(t) + c)^2 p(t-\tau). \quad (6)$$

El sistema en lazo cerrado (6)-(4) es

$$\ddot{q}(t) = \frac{n}{\tau^2} - \frac{1}{2n} (\dot{q}(t) + c)^2 (K_p q(t-\tau) + K_d \dot{q}(t-\tau)), \quad (7)$$

un sistema con retardo de *tipo retardado*, el cual se considera equivalente al sistema neutro (5) en Azadegan et al. (2015) y Kim (2006) para el diseño de los valores de las ganancias.

Formalmente hablando, el proceso de convertir las dinámicas acopladas de $w(t)$ y $q(t)$ en (3) a una sola dinámica para $q(t)$ en (6) representa una transformación especial del sistema que, ante un controlador tipo PD, sólo es válida para funciones iniciales particulares.

Siendo más precisos, cuando transformamos (3) en (6), usamos la segunda ecuación de (3)

$$\dot{q}(t) = \frac{n}{\tau} w(t) - c.$$

Sin embargo, esta ecuación es válida solo para $t \geq 0$ y debido a que el control PD (4) involucra $\dot{q}(t)$ entonces, se requiere que

$$\dot{q}(t-\tau) = \frac{n}{\tau} w(t-\tau) - c,$$

se satisfaga para $t \in [0, \tau]$. Evidentemente, la ecuación anterior se satisface solo si se impone una restricción a las condiciones iniciales.

Lema 1. Considere el sistema con retardo de tipo neutro (5) y el sistema con retardo de tipo retardado

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{w^2(t)}{2\tau} \left[K_p q(t-\tau) + K_d \left(\frac{nw(t-\tau)}{\tau} - c \right) \right], \\ \dot{q}(t) = \frac{n}{\tau} w(t) - c. \end{cases} \quad (8)$$

Para condiciones iniciales

$$w(t) = \varphi_w(t), q(t) = \varphi_q(t), t \in [-\tau, 0], \quad (9)$$

satisfaciendo

$$\dot{\varphi}_q(t) = \frac{n}{\tau} \varphi_w(t) - c, \quad t \in [-\tau, 0], \quad (10)$$

tenemos que las soluciones correspondientes de los sistemas (5) y (8) coinciden. Aquí, asumimos que $\varphi_w \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R})$, el espacio de las funciones continuas que mapean el intervalo $[-\tau, 0]$ a \mathbb{R} , y $\varphi_q \in \mathcal{C}^1([-\tau, 0], \mathbb{R})$, el espacio de las funciones continuamente diferenciables que mapean el intervalo $[-\tau, 0]$ a \mathbb{R} .

Observación 1. Para las funciones iniciales (9) satisfaciendo (10) la solución correspondiente $q(t, \varphi_w, \varphi_q)$ del sistema con retardo de tipo retardado (8) también se satisface la ecuación (7) y viceversa. Por lo tanto, en virtud de la restricción (10) en las condiciones iniciales (9), el sistema con retardo de tipo neutro (5) y el de tipo retardado (7) son equivalentes como se propone en Azadegan et al. (2015) y Kim (2006), pero sin una justificación.

Basados en el Lema 1 y la Observación 1 ahora procedemos a desarrollar el análisis de estabilidad local alrededor del equilibrio del sistema con retardo de tipo retardado en lazo cerrado (8).

El único punto de equilibrio de (8) está dado por

$$(w_e, q_e) = \left(\frac{c\tau}{n}, \frac{2n^2}{K_p(\tau c)^2} \right).$$

La linealización alrededor del equilibrio (w_e, q_e) es

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B\xi(t-\tau), \quad (11)$$

donde

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \bar{w}(t) \\ \bar{q}(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -\frac{2n}{c^2\tau} & 0 \\ \frac{n}{\tau} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{c^2}{2n} K_d & -\frac{\tau c^2}{2n} K_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\bar{w}(t) = w(t) - w_e$ y $\bar{q}(t) = q(t) - q_e$.

Observación 2. Como se afirmó en Melchor-Aguilar y Niculescu (2009) para el caso de los controladores PI-AQM, no es posible investigar directamente la estabilidad de (11) para el caso sin retardo ($\tau = 0$) ya que las matrices A y B dependen explícitamente del parámetro $1/\tau$. De este hecho se sigue que el enfoque desarrollado en Silva et al. (2005), para el cual, el primer paso es calcular el conjunto de controladores PD estabilizantes en el caso libre de retardo, no puede aplicarse directamente. En consecuencia, se aborda el problema siguiendo las ideas de Michiels et al. (2006) y Melchor-Aguilar y Niculescu (2009), donde el método D-descomposición, introducido por Neimark en Neimark (1949) se utiliza y explota para el caso de los controladores AQM P y PI.

4. CARACTERIZACIÓN COMPLETA DE CONTROLADORES PD ESTABILIZANTES

Es bien sabido que el sistema (11) es exponencialmente estable si y sólo si su función característica (cuasipolinomio)

$$f(s) = s^2 + \left(\frac{2n}{c\tau^2} \right) s + \left(\frac{K_d c^2}{2n} \right) s e^{-\tau s} + \left(\frac{K_p c^2}{2n} \right) e^{-\tau s}$$

no tiene ceros con parte real positiva, ver Gu et al. (2003).

El siguiente resultado proporciona la caracterización completa de las ganancias del controlador (K_p, K_d) para las cuales el sistema (11) es exponencialmente estable.

Proposición 1. Dados los parámetros de red (n, τ, c) , el sistema (11) es exponencialmente estable si y sólo si las ganancias (K_p, K_d) del controlador pertenecen a la región

de estabilidad Γ , cuya frontera en el espacio las ganancias (K_p, K_d) del controlador está definida por

$$\partial\Gamma = \{(K_p(\omega), K_d(\omega)) : \omega \in (0, \bar{\omega})\} \cup \{(K_p, K_d) : K_d \in [K_d(0), K_d(\bar{\omega})] \text{ and } K_p = 0\}, \quad (12)$$

donde

$$K_p(\omega) = \frac{2n}{c^2} \left[\omega^2 \cos(\tau\omega) + \frac{2n\omega}{c\tau^2} \sin(\tau\omega) \right], \quad (13)$$

$$K_d(\omega) = \frac{2n}{c^2} \left[\omega \sin(\tau\omega) - \frac{2n}{c\tau^2} \cos(\tau\omega) \right], \quad (14)$$

y $\bar{\omega}$ es la solución de

$$\tan(\tau\omega) = -\frac{c\tau^2}{2n}\omega \quad (15)$$

para $\omega \in \left(\frac{\pi}{2\tau}, \frac{\pi}{\tau}\right)$.

4.1 Ejemplo numérico

Consideremos los parámetros de red utilizados en Sun et al. (2003) donde $n=100$ flujos TCP, $\tau=0.100$ s, y $c=5760$ paquetes/s. El enfoque propuesto en Kim (2006) para diseñar un controlador PD estabilizante que minimiza una función de costo lineal presenta una parametrización para las ganancias del controlador $K_p(\lambda)$ y $K_d(\lambda)$, donde λ es un parámetro real negativo, ver las Proposiciones 1 y 3 en Kim (2006). Usando este enfoque con $\lambda = -30$ y $\lambda = -40$ se obtiene, respectivamente, los pares de ganancias:

$$KB_1 = (K_p, K_d) = (1.40383 \times 10^{-4}, 1.07985 \times 10^{-5}),$$

$$KB_2 = (K_p, K_d) = (2.23817 \times 10^{-4}, 1.64472 \times 10^{-5}).$$

Para una comparación adicional se diseña un controlador PD utilizando el enfoque clásico de Ziegler-Nichols. Siguiendo O'Dwyer (2006) (página 235) obtenemos un controlador PD estabilizante para $K_p \in [0.6K_u, K_u]$ y $K_d = 0.125K_pT_u$, donde K_u es la ganancia proporcional para la cual la salida comienza a oscilar bajo una entrada escalón y $K_d = 0$, y T_u es el período de oscilación correspondiente. Observe que este método de sintonización proporciona un conjunto de controladores PD estabilizantes debido a que K_p puede ser seleccionado en el intervalo $[0.6K_u, K_u]$. Para $K_p = 0.6K_u$ y $K_p = K_u$, se obtienen los siguientes pares de ganancias:

$$ZN_1 = (K_p, K_d) = (1.32330 \times 10^{-4}, 1.98495 \times 10^{-5}),$$

$$ZN_2 = (K_p, K_d) = (2.20550 \times 10^{-4}, 3.30825 \times 10^{-5}).$$

En la Fig. 1 se observa la gráfica de la región de estabilidad Γ en el espacio de las ganancias del controlador (K_p, K_d) junto con los controladores KB_1, KB_2, ZN_1 y ZN_2 . Como se esperaba, estos controladores pertenecen al conjunto completo de controladores PD que estabilizan el sistema (11).

5. ANÁLISIS DE FRAGILIDAD

En esta sección se aborda el análisis de la fragilidad de los controladores PD estabilizantes, es decir, la robustez

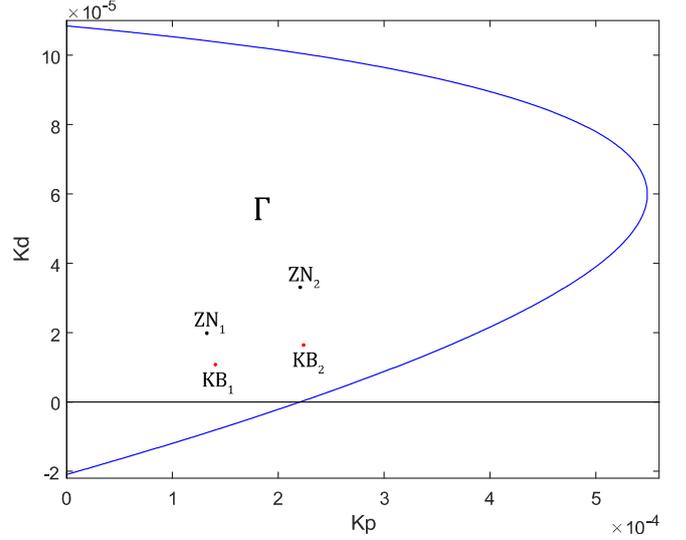


Fig. 1. Región de estabilidad para el ejemplo propuesto.

frente a perturbaciones en las ganancias del controlador (K_p, K_d) . Aunque las ganancias negativas pueden estabilizar el sistema (11), tiene sentido que sólo se tomen en cuenta los valores positivos para la aplicación práctica de las redes, consulte Únal et al. (2013) para las discusiones en el caso de controladores PI. Por lo tanto, para el análisis de la fragilidad tomemos en cuenta las ganancias del controlador (K_p, K_d) que pertenecen a la región de estabilidad Γ_p cuya frontera en el espacio ganancias del controlador está dada por

$$\partial\Gamma_p = C \cup \{(K_p, K_d) : K_d \in [0, K_d(\bar{\omega})] \text{ y } K_p = 0\} \cup \{(K_p, K_d) : K_p \in [0, K_p(\hat{\omega})] \text{ y } K_d = 0\},$$

donde

$$C = \{(K_p(\omega), K_d(\omega)) : \omega \in (\hat{\omega}, \bar{\omega})\},$$

con $K_p(\omega)$ y $K_d(\omega)$ respectivamente dadas por (13) y (14), $\bar{\omega}$ la solución de (15) para $\omega \in \left(\frac{\pi}{2\tau}, \frac{\pi}{\tau}\right)$ y $\hat{\omega}$ es la solución de

$$\tan(\tau\omega) = \frac{2n}{\omega c\tau^2}, \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right).$$

El problema de fragilidad de un controlador PD estabilizante dado se puede formular de la siguiente manera: Dadas las ganancias nominales del controlador $(K_{p0}, K_{d0}) \in \Gamma_p$, encontrar el máximo $\rho_0 > 0$ tal que para cualquier $K_p, K_d \geq 0$ la siguiente condición se satisface:

$$B_{\rho_0}(K_{p0}, K_{d0}) = \{(K_p, K_d) : \sqrt{(K_p - K_{p0})^2 + (K_d - K_{d0})^2} < \rho_0\} \subset \Gamma_p.$$

El problema es equivalente a encontrar la distancia mínima entre (K_{p0}, K_{d0}) y $\partial\Gamma_p$. La distancia de (K_{p0}, K_{d0}) a la curva C es obtenida por el mínimo de la función

$$d(\omega) = \sqrt{(K_p(\omega) - K_{p0})^2 + (K_d(\omega) - K_{d0})^2}, \quad \omega \in [\hat{\omega}, \bar{\omega}].$$

Desde que $\omega \rightarrow d(\omega)$ es una función continua, siempre existe $\tilde{\omega} \in [\hat{\omega}, \bar{\omega}]$ tal que $d(\tilde{\omega}) \leq d(\omega)$ para toda $\omega \in [\hat{\omega}, \bar{\omega}]$. Entonces, es fácil ver que la mínima distancia del punto dado (K_{p0}, K_{d0}) a $\partial\Gamma_p$ es definida por

$$\rho_0 = \min \{K_{p0}, K_{d0}, d(\tilde{\omega})\}. \quad (16)$$

La fórmula (16) proporciona un procedimiento numérico para determinar el margen de estabilidad paramétrica l_2 alrededor de un punto nominal (K_{p0}, K_{d0}) , el cual nos permite examinar la fragilidad de un controlador estabilizante dado, considerando que un mayor ρ_0 proporciona un controlador menos frágil mientras que un pequeño ρ_0 produce un controlador más frágil.

5.1 Algoritmo para diseñar controladores PD no frágiles

Con el procedimiento para calcular el margen de estabilidad paramétrica l_2 alrededor de un punto nominal (K_{p0}, K_{d0}) , ahora podemos abordar el problema de encontrar las ganancias del controlador $(K_p^*, K_d^*) \in \Gamma_p$ en el centro del círculo $B_{\rho_0}(K_{p0}, K_{d0})$ con el máximo $\rho_0 > 0$ tal que $B_{\rho_0}(K_{p0}, K_{d0}) \subset \Gamma_p$. Este $\rho_0 > 0$ representa el máximo margen de estabilidad paramétrica l_2 en el espacio de las ganancias del controlador (K_p, K_d) , ver Keel y Bhattacharyya (1997).

Para este objetivo se propone el siguiente algoritmo:

- Escoger $K_p^* = \frac{1}{2}K_p(\hat{\omega})$,
- Realizar un barrido de K_d en el intervalo $[0, K_d(\omega^*)]$, donde $\omega^* \in [\hat{\omega}, \bar{\omega}]$ tal que $K_p(\omega^*) = K_p^*$ y determinar $\rho_0 > 0$ usando la fórmula (16).

Este procedimiento determina una familia de círculos de diferentes radios y centros, de los cuales seleccionamos el que tiene el radio máximo. Por último, elegimos K_d^* tal que se encuentre en el centro de este círculo.

5.2 Ejemplo numérico

Consideremos los parámetros de red utilizados en Sun et al. (2003) para el ejemplo numérico de la sección 4.1. Utilizando el algoritmo anterior obtenemos el controlador

$$PD = (K_p, K_d) = (1.10275 \times 10^{-4}, 5.20000 \times 10^{-5}).$$

Realizando los cálculos podemos encontrar los $\rho_0 > 0$ para los controladores KB_1 , ZN_1 y PD , los cuales son 1.60184×10^{-5} , 3.29016×10^{-5} y 5.20000×10^{-5} , respectivamente. La Fig. 2 ilustra la fragilidad de estos controladores estabilizantes en la región completa Γ_p .

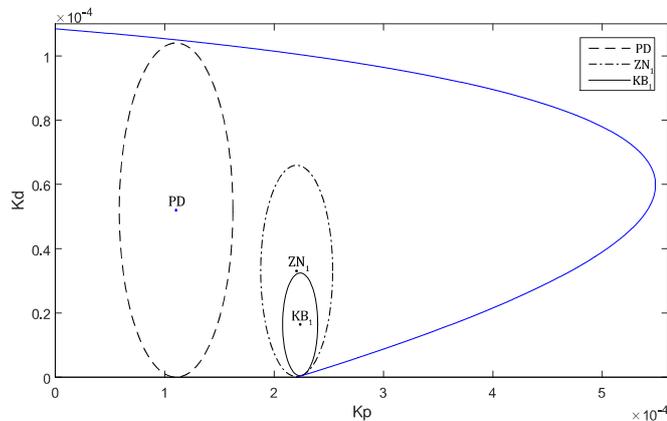


Fig. 2. Comparación de la fragilidad de los controladores PD estabilizantes obtenidos.

6. CONDICIONES INICIALES PARA EL SISTEMA TCP/AQM EN LAZO CERRADO BAJO UNA ESTRATEGIA PD-AQM

Como se muestra en el Lema 1, las soluciones de los modelos retardado (8) y neutro (5) son equivalentes si se cumple la condición (10), por lo tanto, para realizar un análisis del sistema TCP/AQM en lazo cerrado bajo una estrategia PD-AQM usando el sistema retardado (8), resulta pertinente analizar si es posible que esta restricción se satisfaga en la aplicación real. Primeramente, observemos que (10) describe aproximadamente la dinámica en la cola del enrutador durante un RTT antes de que inicie la etapa de evitando congestión, es decir, se desarrolla durante la etapa de inicio lento. Este hecho se presenta en Peterson y Davie (2007), donde se explica que el funcionamiento de un enrutador, descrito aproximadamente por la segunda ecuación de (8), se mantiene para todo tiempo sin importar la etapa del TCP. Así, tenemos que la condición (10) se satisface en la aplicación real y por lo tanto es justiciable utilizar el sistema (8) con las funciones iniciales (9)-(10). Lo anterior es importante ya que evita la necesidad de estudiar el sistema tipo neutro (5), que como se sabe en la literatura de sistemas con retardo, es más complicado que los de tipo retardado, véase Gu et al. (2003).

Como ya sabemos que la condición (10) se satisface, procederemos a desarrollar formalmente las funciones iniciales necesarias para el sistema (8). Como se discute en Srikant (2004) en la etapa de inicio lento del TCP $w(t) \approx 2^{(t/\tau)}$. Adicionalmente, la etapa de inicio lento termina cuando el tamaño de ventana alcanza un límite conocido como *sstresh*. A manera de aproximación y siguiendo con las ideas en Srikant (2004), supongamos que en la etapa de inicio lento $w(t') = 2^{(t'/\tau)}$, $t' \geq 0$ y que $sstresh = 2^K$ con $K \in \mathbb{N}$. Sin embargo, el modelo no lineal (8) está definido para $t \geq 0$, y debido a que $w(t')$ ocurre durante la etapa de inicio lento, para este análisis es necesario reescribir $w(t')$ para $t < 0$. Sea $t = t' - \tau K$, entonces

$$w(t + \tau K) = 2^K 2^{(t/\tau)}, \quad t \geq -\tau K.$$

Así, podemos definir la función inicial $\varphi_w(t)$ para el sistema (8) como

$$\varphi_w(t) = 2^K 2^{(t/\tau)}, \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (17)$$

De la condición (10) y de (17), tenemos que la función inicial $\varphi_q(t)$ para el sistema (8) es

$$\varphi_q(t) = \varphi_q(-\tau) + \frac{2^K n}{\ln(2)} \left[2^{(t/\tau)} - 0.5 \right] - c(t + \tau), \quad (18)$$

para $t \in [-\tau, 0]$.

6.1 Simulaciones

Con la finalidad de observar el comportamiento de la cola en el sistema (8) junto a la función inicial (18), a continuación se presenta una simulación numérica con los mismos valores en los parámetros de red utilizados en el ejemplo de la sección 4.

En la Fig. 3 se muestra la respuesta del sistema y la función inicial para el controlador PD obtenido en la sección 5 a través del algoritmo propuesto en este trabajo. Para este ejemplo tomamos $\varphi_q(-\tau) = 0$ y $K = 4$.

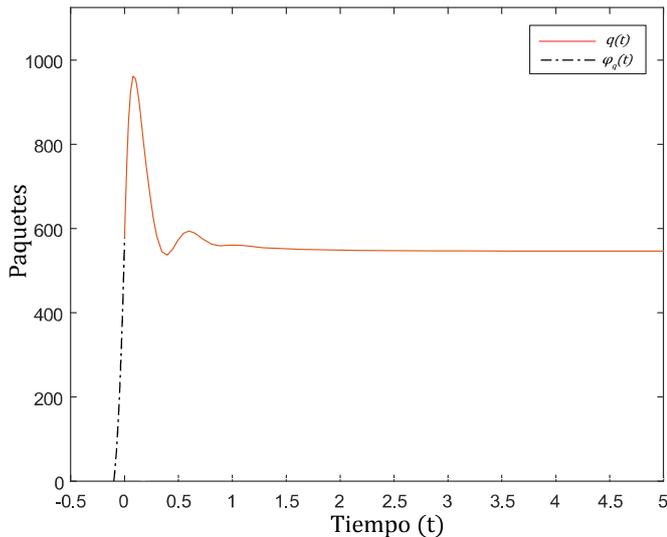


Fig. 3. Respuesta del sistema no lineal con el controlador PD obtenido en la sección 5.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la estabilidad de los modelos con retardo TCP / AQM mediante el uso de un controlador PD como estrategia de AQM. En primer lugar, hemos demostrado que el sistema con retardo en lazo cerrado correspondiente es de tipo neutro y se le da una justificación formal para transformar el sistema con retardo de tipo neutro a uno de tipo retardado. Después, se proporciona la región de estabilidad completa de los controladores PD. Esto permite a los diseñadores seleccionar las ganancias del controlador para el logro de algunas especificaciones de rendimiento basados en la región exacta de estabilidad y no en una estimación de ella como ocurre en los trabajos existentes.

El conocimiento de los límites de la región de estabilidad en el espacio de los parámetros del controlador nos permitió realizar un análisis de fragilidad para un controlador PD estabilizante dado y también proponer una metodología simple para determinar las ganancias de un controlador PD no frágil. Finalmente presentamos las expresiones de las funciones iniciales para el sistema (8), las cuales evitan la necesidad de estudiar el sistema tipo neutro (5).

ACKNOWLEDGEMENTS

Adrian Puerto-Piña agradece al CONACYT y al IPICYT por el apoyo económico.

REFERENCIAS

Azadegan, M., Beheshti, M.T.H., y Tavassoli, B. (2015). Design of Proportional-Derivative-Type State Feedback Controllers for Congestion Control of Transmission Control Protocol Networks. *Int. J. of Syst. Sci.*, 46(10), 1774–1779.

Gu, K., Chen, J., y Kharitonov, V.L. (2003). *Stability of Time-Delay Systems*. Springer Science & Business Media.

Hollot, C.V. y Chait, Y. (2001). Nonlinear Stability Analysis for a Class of TCP/AQM Networks. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001*, volume 3, 2309–2314. IEEE.

Hollot, C.V., Misra, V., Towsley, D., y Gong, W.B. (2002). Analysis and Design of Controllers for AQM Routers Supporting TCP Flows. *IEEE Trans. Autom. Control*, 47(6), 945–959.

Keel, L.H. y Bhattacharyya, S.P. (1997). Robust, Fragile, or Optimal? *IEEE Trans. Autom. Control*, 42(8), 1098–1105.

Kim, K.B. (2006). Design of Feedback Controls Supporting TCP Based on the State-Space Approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51(7), 1086–1099.

Melchor-Aguilar, D. y Niculescu, S.I. (2009). Computing Non-fragile PI Controllers for Delay Models of TCP/AQM Networks. *Int. J. Control*, 82(12), 2249–2259.

Michiels, W., Melchor-Aguilar, D., y Niculescu, S.I. (2006). Stability Analysis of Some Classes of TCP/AQM Networks. *Int. J. Control*, 79(9), 1136–1144.

Neimark, J. (1949). D-subdivisions and Spaces of Quasipolynomials. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 13, 349–380.

O'Dwyer, A. (2006). *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, volume 57. London: Imperial College Press.

Peterson, L.L. y Davie, B.S. (2007). *Computer Networks: a Systems Approach*. Elsevier.

Puerto-Piña, A. (2015). *Condiciones de estabilidad de controladores PD para modelos con retardo de redes TCP/AQM*. Tesis de maestría, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica. Enlace: [intranet.ipicyt.edu.mx /posgrado/tesis/130640TFPuertoPina.pdf](http://intranet.ipicyt.edu.mx/posgrado/tesis/130640TFPuertoPina.pdf).

Quet, P.F. y Özbay, H. (2004). On the Design of AQM Supporting TCP Flows Using Robust Control Theory. *IEEE Trans. Autom. Control*, 49, 1031–1036.

Silva, G.J., Datta, A., y Bhattacharyya, S.P. (2005). *PID Controllers for Time-delay Systems*. Boston: Birkhäuser.

Srikant, R. (2004). *The Mathematics of Internet Congestion Control*. Springer Science & Business Media.

Sun, J., Chen, G., Ko, K., Chan, S., y Zukerman, M. (2003). PD-controller: a New Active Queue Management Scheme. In *GLOBECOM'03 IEEE Global Telecommunications Conference, 2003*, volume 6, 3103–3107. IEEE.

Vyhlídal, T., Michiels, W., Zitek, P., y McGahan, P. (2009). Stability Impact of Small Delays in Proportional-Derivative State Feedback. *Control Eng. Practice*, 17(3), 382–393.

Ünal, H.U., Melchor-Aguilar, D., Üstebay, D., Niculescu, S.I., y Özbay, H. (2013). Comparison of PI Controllers Designed for the Delay Model of TCP/AQM Networks. *Comput. Commun.*, 36, 1225–1234.