Modificación del criterio de Mikhailov para sistemas conmensurados de orden fraccionario.

Jessica Mendiola-Fuentes, Daniel Melchor-Aguilar

División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, 78216, San Luis Potosí, SLP, México correo electrónico: jessica.mendiola, dmelchor@ipicyt.edu.mx.

Abstract: En este trabajo se presenta la modificación del criterio de estabilidad de Mikhailov para sistemas lineales fraccionarios de orden conmensurado. Dicha modificación consiste en determinar la medida apropiada del cambio total del argumento misma que depende del máximo orden fraccionario del sistema $\alpha_n = n\alpha$ y no solo del entero n como se establece en la literatura. Para ilustrar la validez del resultado se presentan algunos ejemplos.

Keywords: Sistemas fraccionarios, orden conmensurado, estabilidad, Criterio de Mikhailov

1. INTRODUCCIÓN

Para el estudio de la estabilidad de un sistema lineal de orden fraccionario es bien conocido el resultado propuesto por (Matignon (1998)) y generalizado por (Bonnet & Partington (2000)), el cual establece que un sistema lineal de orden fraccionario es asintóticamente estable si y sólo si las raíces del pseudo-polinomio característico asociado al sistema se ubican en el semiplano izquierdo del plano complejo. Sin embargo, la aplicación de dicho resultado demanda resolver el problema no trivial de calcular explícitamente las raíces de pseudo-polinomios. Por lo tanto resulta deseable contar con métodos que nos ayuden a determinar la estabilidad de sistemas de orden fraccionario sin tener que calcular las raíces de pseudo-polinomios. En este sentido, existen algunos métodos clásicos de estabilidad para sistemas lineales de orden entero que han sido extendidos para el análisis de estabilidad de sistemas fraccionarios, como por ejemplo el criterio de Nyquist (Valerio & da Costa (2013)) y recientemente el criterio de Routh-Hurwitz (Liang et al. (2017)).

Entre otros criterios frecuenciales se encuentra el criterio de estabilidad de Mikhailov que es presentado en (Buslowicz (2008)) para una clase de sistemas lineales de orden fraccionario con retardos. Dado que la clase de sistemas lineales fraccionarios es una clase particular de sistemas con retardos considerados en (Buslowicz (2008)) la cual se obtiene haciendo cero los retardos, el resultado tipo Mikhailov presentado en (Buslowicz (2008)) podría ser utilizado para investigar la estabilidad de sistemas lineales fraccionarios, y en particular los de orden conmensurado. Cuando uno observa dicho resultado, resulta que la condición de estabilidad coincide con la condición clásica de Mikhailov para sistemas de orden entero, lo que en principio no es esperado dada la naturaleza fraccionaria de los sistemas. Sin embargo, cuando uno grafica la curva de Mikhailov de algunos pseudo-polinomios particulares, resulta que la condición de Mikhailov en (Buslowicz (2008)) no es correcta. Lo anterior motiva el presente artículo, donde presentamos el criterio de estabilidad de Mikhailov modificado para sistemas fraccionarios de orden conmensurado. Adicionalmente, presentamos condiciones necesarias para la estabilidad de los sistemas. Estas condiciones están basadas en los coeficientes del pseudo-polinomio y nos permiten por simple inspección determinar pseudo-polinomios inestables. Las condiciones necesarias pueden considerarse como un resultado análogo al criterio de Stodola conocido para polinomios (Bissell (1989)).

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se presentan algunos resultados preliminares sobre pseudo-polinomios y su análisis de estabilidad, también se presenta el planteamiento del problema. El resultado principal de la modificación del criterio de estabilidad de Mikhailov para pseudo-polinomios se proporciona en la sección 3. La sección 4 presenta algunos ejemplos ilustrando la validez de los resultados y finalmente en la sección 5 se presentan las conclusiones.

2. PRELIMINARES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Un pseudo-polinomio característico asociado a un sistema lineal fraccionario de orden conmensurado es de la forma

$$p(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0, \quad (1)$$

donde $a_k, k = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{R}$, con $a_n \neq 0$ y $\alpha_k = k\alpha$, $k = 1, 2, \ldots, n$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Basado en los resultados expuestos en (Matignon (1998)) y (Bonnet & Partington (2000)), adoptamos la siguiente definición de estabilidad:

Definición 1. El pseudo-polinomio $p(s)$ se dice estable si todas sus raíces están ubicadas en $\mathbb{C}_-$, el semiplano abierto del plano complejo.

De los resultados de (Matignon (1998)), se sigue que utilizando la transformación $\lambda = s^\alpha$, la estabilidad de $p(s)$ puede determinarse mediante la ubicación de las raíces del polinomio de orden entero

$$\tilde{p}(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0. \quad (2)$$

en la región del plano complejo λ definida por

$$M_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{\alpha\pi}{2} < \arg(\lambda) \leq \pi$$
$$\text{o } -\pi < \arg(\lambda) < -\frac{\alpha\pi}{2}\}, \qquad (3)$$

como se establece en el siguiente resultado:

Lema 1. (Matignon (1998)) El pseudo-polinomio $p(s)$ es estable si y sólo si las n raíces λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, del polinomio $\tilde{p}(\lambda)$ pertenecen a la región M_α, $0 < \alpha < 1$.

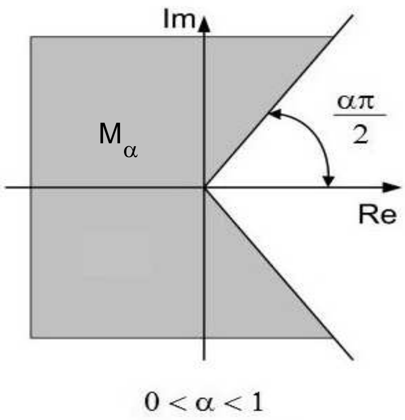

Fig. 1. Región M_α en el plano complejo λ para $0 < \alpha < 1$.

En la Figura 1 se muestra la forma de la región de estabilidad M_α para $0 < \alpha < 1$.

Ahora presentamos la idea principal detrás del criterio de Mikhailov. Esta consiste en substituir $s = i\omega$ en $p(s)$ para obtener

$$p(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

y luego medir el cambio total de la variación del argumento de la función $p(i\omega)$ cuando ω va desde cero hasta infinito. La gráfica correspondiente de la función $p(i\omega)$ en el plano complejo, se le conoce como curva de Mikhailov.

Para el pseudo-polinomio $p(s)$ el resultado tipo Mikhailov (véase Teorema 2 en Buslowicz (2008) y Teorema 9.3 en Kaczorek (2011)) es de la siguiente forma:

Teorema 1. El pseudo-polinomio $p(s)$, con $0 < \alpha \leq 1$, es estable si y sólo si

$$\Delta \arg p(i\omega)\Big|_0^\infty = n\Big(\frac{\pi}{2}\Big), \qquad (4)$$

lo que significa que la gráfica de $p(i\omega)$ cuando ω crece de 0 a $+\infty$ corre en sentido positivo (antihorario), n cuadrantes del plano complejo, sin pasar por el origen.

Se observa que la condición (4), coincide con la condición clásica del criterio de estabilidad de Mikhailov para polinomios (Popov (1962)) y no refleja la naturaleza fraccionaria del pseudo-polinomio $p(s)$.

Con el objetivo de verificar la validez del Teorema 1, consideremos el siguiente pseudo-polinomio:

$$p(s) = s^{2/8} - 2s^{1/8} + 3. \qquad (5)$$

En este caso tenemos que $\alpha_n = 2\big(\frac{1}{8}\big)$, es decir, $n = 2$ y $\alpha = \frac{1}{8}$. El polinomio (2) de orden entero es entonces de la forma

$$\tilde{p}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3,$$

cuyas raíces $\lambda_{1,2} = 1 + \sqrt{2}i$ pertenecen a la región M_α. Entonces podemos concluir por el Lema 1 que el pseudo-polinomio en (5) es estable.

La curva de Mikhailov para $p(s)$ en (5) se muestra en la Figura 2, en donde se observa que el cambio total del argumento tiende asintóticamente a $\pi/8$ y no a $n\big(\frac{\pi}{2}\big) = 2\big(\frac{\pi}{2}\big) = \pi$, como lo establece el Teorema 1.

Adicionalmente se observa que la curva corre en sentido negativo (dirección horaria) y no en sentido positivo (antihorario) como lo establece el Teorema 1. Así, el pseudo-polinomio (5) es claramente un contra-ejemplo al Teorema 1, presentado en (Buslowicz (2008)).

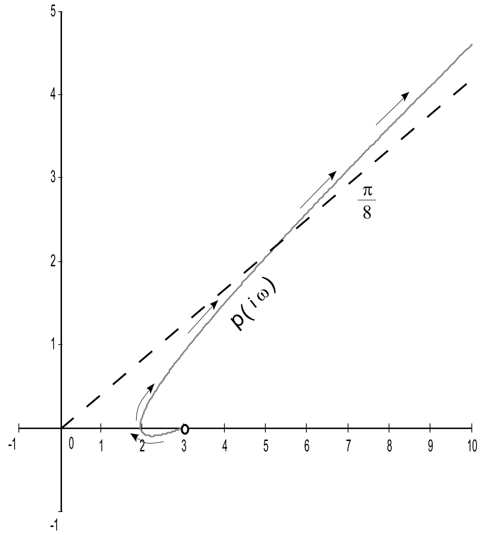

Fig. 2. Curva de Mikhailov para $p(s)$ en (5).

En la siguiente sección presentamos la modificación del criterio de estabilidad de Mikhailov para el pseudo-polinomio $p(s)$. El resultado lo obtendremos siguiendo las ideas originales de (Popov (1962)) y explotando el hecho de que la estabilidad de $p(s)$ está determinada por la ubicación de las raíces de $\tilde{p}(\lambda)$ en M_α.

3. CRITERIO DE MIKHAILOV

Antes de establecer el criterio de Mikhailov, presentaremos condiciones necesarias para la estabilidad de pseudo-polinomios. Recordemos que en el caso de polinomios una condición necesaria para que un polinomio sea Hurwitz, es decir, las raíces del polinomio estén ubicadas en $\mathbb{C}_-$, es necesario que todos sus coeficientes no sean cero y además tengan el mismo signo. Dicha condición necesaria en el caso de polinomios se conoce como criterio de Stodola, véase (Bissell (1989)). Desafortunadamente el criterio de Stodola no se cumple para pseudo-polinomios cuando $0 < \alpha < 1$, sin embargo se pueden establecer condiciones necesarias de estabilidad, como se expresa en el Lema siguiente.

Lema 2. Sea $0 < \alpha < 1$. Si $p(s)$ es estable, entonces los coeficientes a_n y a_0 son distintos de cero y tienen el mismo signo.

Demostración:
Claramente, $a_n \neq 0$. Si $p(s)$ es estable, entonces todas las raíces de $\tilde{p}(\lambda)$ pertenecen a M_α. Dado que $M_\alpha \nsubseteq \mathbb{C}_-$, $\tilde{p}(\lambda)$ puede tener raíces complejas conjugadas con parte real positiva, pero en particular no puede tener raíces reales positivas ni raíces cero. La no existencia de raíces cero implica que $a_0 \neq 0$; ya que si este no fuera el caso entonces podemos escribir $\tilde{p}(\lambda) = \lambda^m \tilde{q}(\lambda)$, en donde $m < n$ y $\tilde{q}(\lambda)$ es un polinomio de orden $n - m$ con coeficientes distintos de cero, lo que implicaría la existencia de una raíz cero de $\tilde{p}(\lambda)$.
Supongamos que $a_n > 0$ y $a_0 < 0$. Para λ real, tenemos

$$\tilde{p}(0) = a_0 < 0 \text{ and } \lim_{\lambda \to \infty} \tilde{p}(\lambda) = +\infty.$$

Entonces, la continuidad de $\tilde{p}(\lambda)$ con respecto a λ, implica que $\tilde{p}(\lambda)$ tiene al menos una raíz real positiva, lo cual contradice la estabilidad de $p(s)$. Ahora supongamos que $a_n < 0$ y $a_0 > 0$. Para λ real, tenemos

$$\tilde{p}(0) = a_0 > 0 \text{ and } \lim_{\lambda \to \infty} \tilde{p}(\lambda) = -\infty,$$

por lo tanto, $\tilde{p}(\lambda)$ tiene al menos una raíz real positiva, contradiciendo nuevamente la estabilidad de $p(s)$. Así, concluímos que los coeficientes a_n y a_0 no deben ser cero y tener el mismo signo. ■
Es importante resaltar que el Lema 2 es equivalente al Lema 9.3 en (Kaczorek (2011)) pero es obtenido mediante argumentos independientes del criterio de Mikhailov. Ahora nos enfocaremos en el criterio de estabilidad de Mikhailov. Primeramente observemos que del Lema 2 para el problema de estabilidad de $p(s)$ podemos asumir sin pérdida de generalidad que los coeficientes a_n y a_0 son positivos. Por lo tanto, se tiene que $p(0) = a_0 > 0$ y en consecuencia la curva de Mikhailov siempre comienza en el eje real positivo, tal y como ocurre en el caso polinomial.
Considere los siguientes polinomios

$$\tilde{p}_0(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \text{ y } \tilde{p}_1(\lambda) = (\lambda - \zeta_1)\left(\lambda - \bar{\zeta}_1\right),$$

donde $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \neq 0$, $\zeta_1 = \rho_1 e^{\phi_1 i}$ y $\bar{\zeta}_1 = \rho_1 e^{-\phi_1 i}$, con $\rho_1 > 0$ y $\phi_1 \in (0, \pi)$.
Para $0 < \alpha < 1$ y $r \in [0, \infty)$ sea

$$\theta_0(r) = \arg(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \lambda_0),$$
$$\theta_1(r) = \arg(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{\phi_1 i}),$$

y

$$\theta_2(r) = \arg(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{-\phi_1 i}).$$

Entonces

$$\theta_0(r) = \arg\left(\tilde{p}_0(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i})\right),$$
$$\theta(r) = \theta_1(r) + \theta_2(r) = \arg\left(\tilde{p}_1(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i})\right).$$

Los Lemas siguientes caracterízan el cambio total en $\theta_0(r)$, $\theta_1(r)$, $\theta_2(r)$ y $\theta(r)$ cuando r varía desde 0 hasta ∞, esenciales para obtener el resultado de estabilidad de Mikhailov.

Lema 3. Para $\theta_0(r)$ se satisface lo siguiente:

(1) Si $\lambda_0 < 0$ entonces $\theta_0(r)$ es una *función creciente* de r en el intervalo $[0, \infty)$ y

$$\Delta\theta_0(r)|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2}. \tag{6}$$

(2) Si $\lambda_0 > 0$ entonces $\theta_0(r)$ es una *función decreciente* de r en el intervalo $[0, \infty)$ y

$$\Delta\theta_0(r)|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2} - \pi. \tag{7}$$

Demostración:

(1) Cuando $\lambda_0 < 0$, tenemos que $\theta_0(0) = \arg(-\lambda_0) = 0$. Es geométricamente claro, véase Figura 3, que $\theta_0(r)$ es una función creciente (el vector $v = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \lambda_0$ gira en sentido anti-horario) para r en el intervalo $[0, \infty)$, además $\theta_0(r) \to \alpha\frac{\pi}{2}$ cuando $r \to \infty$, lo que nos lleva a la expresión en (6).
(2) Cuando $\lambda_0 > 0$, tenemos $\theta_0(r) = \pi$. De la Figura 3 es geométricamente claro que $\theta_0(r)$ es una función decreciente (el vector $v = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \lambda_0$ gira en sentido negativo (horario)) para r en el intervalo $[0, \infty)$, además $\theta_0(r) \to \alpha\frac{\pi}{2}$ cuando $r \to \infty$, lo que nos lleva a la expresión (7).

■

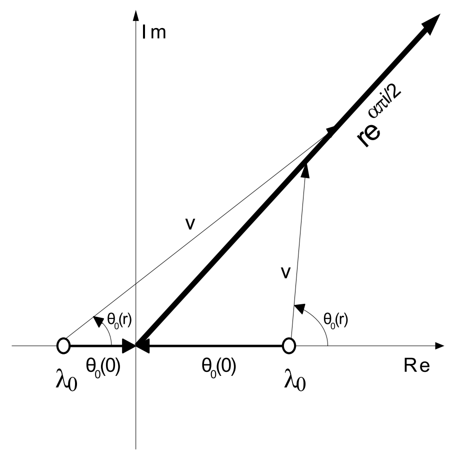

Fig. 3. Raíces reales positivas y negativas.

Lema 4. Para $\theta_1(r)$, $\theta_2(r)$ y $\theta(r)$ se cumple lo siguiente:

(1) Si $\frac{\alpha\pi}{2} < \phi_1 < \pi$, entonces $\theta_1(r)$ es una *función creciente* y $\theta_2(r)$ es una *función decreciente* para r en el intervalo $[0, \infty)$ y

$$\Delta\theta_1(r)|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2} - (-\pi + \phi_1), \tag{8}$$

$$\Delta\theta_2(r)|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2} - (\pi - \phi_1), \tag{9}$$

que implica

$$\Delta\theta(r)|_0^\infty = 2\Big(\frac{\alpha\pi}{2}\Big). \tag{10}$$

(2) Si $0 < \phi_1 < \frac{\alpha\pi}{2}$, entonces $\theta_1(r)$ y $\theta_2(r)$ son ambas *funciones decrecientes* para r en el intervalo $[0, \infty)$ y

$$\Delta\theta_1(r)|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2} - (\pi + \phi_1), \tag{11}$$

$$\Delta\theta_2(r)|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2} - (\pi - \phi_1), \tag{12}$$

que implica

$$\Delta\theta(r)|_0^\infty = 2\Big(\frac{\alpha\pi}{2} - \pi\Big). \tag{13}$$

Demostración:

(1) Cuando $\frac{\alpha\pi}{2} < \phi_1 < \pi$, véase Figura 4, tenemos $\theta_1(0) = \arg(-\rho_1 e^{\phi_1 i}) = -\pi + \phi_1$. Es geométricamente claro que $\theta_1(r)$ es creciente (el vector $v_1 = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{\phi_1 i}$ gira en sentido anti-horario) cuando r aumenta, además $\theta_1(r) \to \frac{\alpha\pi}{2}$ cuando $r \to \infty$, y de esto se obtiene (8).
Por otro lado, tenemos que $\theta_2(0) = \arg(-\rho_1 e^{-\phi_1 i}) = \pi - \phi_1$ y $\theta_2(r)$ decrece (el vector $v_2 = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{-\phi_1 i}$ gira en sentido horario) cuando r aumenta y $\theta_2(r) \to \frac{\alpha\pi}{2}$ cuando $r \to \infty$ y así se obtiene la expresión en (9). Por lo tanto, el cambio total de $\theta(r)$, cuando r va desde 0 hasta ∞, está dado por (10).

(2) Cuando $0 < \phi_1 < \frac{\alpha\pi}{2}$, véase Figura 5, tenemos $\theta_1(0) = \arg(-\rho_1 e^{\phi_1 i}) = \pi + \phi_1$. Geométricamente se observa que $\theta_1(r)$ decrece (el vector $v_1 = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{\phi_1 i}$ gira en sentido horario) cuando r crece y $\theta_1(r) \to \frac{\alpha\pi}{2}$ cuando $r \to \infty$ y así se obtiene la expresión (11). Por otro lado, tenemos $\theta_2(0) = \arg(-\rho_1 e^{-\phi_1 i}) = \pi - \phi_1$. Geométricamente, se puede ver que la función $\theta_2(r)$ decrece (el vector $v_2 = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{-\phi_1 i}$ gira en sentido horario) cuando r crece y $\theta_2(r) \to \frac{\alpha\pi}{2}$ cuando $r \to \infty$, obteniéndose la expresión en (12). Finalmente, el cambio total del argumento $\theta(r)$, cuando r varia desde 0 hasta ∞, está dado por (13).

■

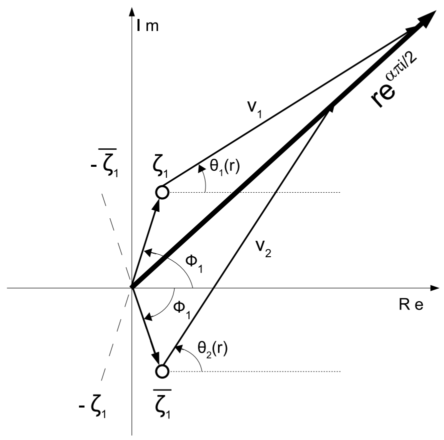

Fig. 4. Raíces complejas conjugadas estables.

Teorema 2. El pseudo-polinomio $p(s)$ es estable si y sólo si

$$\Delta \arg p(i\omega)\Big|_0^\infty = \alpha_n\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \alpha\Big(\frac{n\pi}{2}\Big), \tag{14}$$

donde $0 < \alpha < 1$.

Demostración:
Consideraremos solo pseudo-polinomios $p(s)$ que cumplen con el Lema 2, dado que al no satisfacerse esta condición necesaria no tiene caso investigar su estabilidad. Adicionalmente, asumamos que $p(s)$ no tiene raíces imaginarias puras. Por medio de la transformación $\lambda = s^\alpha$, un punto en el plano complejo $s = i\omega = we^{\frac{\pi}{2}i}$ es transformado en el plano complejo λ a $\lambda = \omega^\alpha e^{\frac{\alpha\pi}{2}i}$. Por lo tanto se tiene que

$$p(i\omega) = \tilde{p}(\omega^\alpha e^{\frac{\alpha\pi}{2}i}).$$

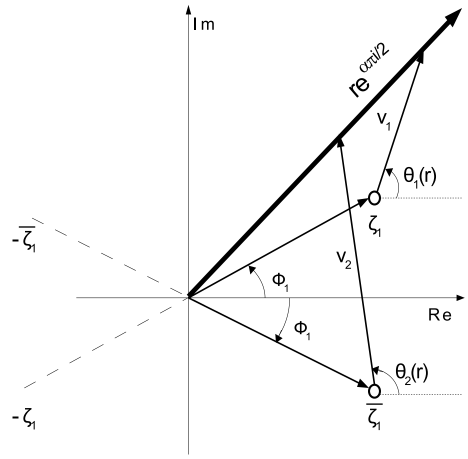

Fig. 5. Raíces complejas conjugadas inestables.

De esta igualdad se sigue que el problema de la medición del cambio total de argumento de $p(i\omega)$ cuando w varía desde 0 hasta ∞ es equivalente al problema de medir el cambio total del argumento de $\tilde{p}(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i})$ cuando r varía desde 0 hasta ∞. El polinomio entero $\tilde{p}(\lambda)$ tiene n raíces diferentes en el plano complejo λ y puede factorizarse como un producto de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\lambda) &= a_n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_m)\cdots \\ &\ldots(\lambda - \zeta_1)(\lambda - \bar{\zeta}_1)\cdots(\lambda - \zeta_l)(\lambda - \bar{\zeta}_l)\end{aligned} \tag{15}$$

en donde $\lambda_j, j = 1, \ldots, m$ son raíces reales y $\zeta_j, \bar{\zeta}_j, j = 1, \ldots, l$, son raíces complejas conjugadas. Claramente se cumple que $n = m + 2l$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\arg \tilde{p}(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i}) &= \arg(a_n) + \sum_{j=1}^{m} \arg(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \lambda_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^{l} \arg(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \zeta_j) + \sum_{j=1}^{l} (re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \bar{\zeta}_j).\end{aligned} \tag{16}$$

La condición necesaria garantiza que el polinomio $\tilde{p}(\lambda)$ no tiene raíces cero ni raíces reales positivas. Por otro lado, la hipótesis de que $p(s)$ no tiene raíces imaginarias puras implica que $\tilde{p}(\lambda)$ no tiene raíces complejas conjugadas en δM_α, la frontera de la región M_α. Sea p el número de raíces de $\tilde{p}(\lambda)$ que pertenecen a la región $(M_\alpha \cup \partial M_\alpha) \setminus \mathbb{C}$. Entonces existen $(n - p)$ raíces de $\tilde{p}(\lambda)$ que pertenecen a M_α. De los Lemas 3 y 4 se sigue que cada una de las raíces que pertenecen a M_α contribuyen $\frac{\alpha\pi}{2}$ al cambio total del argumento de $\tilde{p}(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i})$. De la misma manera las raíces que pertenecen a $(M_\alpha \cup \partial M_\alpha) \setminus \mathbb{C}$ aportan $(\frac{\alpha\pi}{2} - \pi)$ al cambio total de argumento. Por lo tanto de (15) y (16) obtenemos

$$\Delta \arg p(i\omega)\Big|_0^\infty = (n - p)\Big(\frac{\alpha\pi}{2}\Big) + p\Big(\frac{\alpha\pi}{2} - \pi\Big). \tag{17}$$

Para la estabilidad de $p(s)$ es necesario y suficiente que $\tilde{p}(\lambda)$ tenga todas sus raíces en M_α, en otras palabras, que $p = 0$. Haciendo $p = 0$ en (17) obtenemos (14) y la prueba del Teorema 2. ■

Observemos que en el Teorema 2 no establece nada sobre la dirección (positiva o negativa) de la curva de Mikhailov. De hecho, del Lema 4 para el caso de raíces complejas estables se tiene que $\theta_1(r)$ es una función creciente pero, sin embargo, $\theta_2(r)$ es decreciente y, por tanto $\theta(r) = \theta_1(r) + \theta_2(r)$ puede ser creciente o decreciente cuando r aumenta desde 0 hasta ∞. Como consecuencia tenemos que raíces estables complejas conjugadas no necesariamente implican que la dirección de la curva de Mikhailov corra en sentido positivo.

4. EJEMPLOS

Ejemplo 1. Considere el mismo pseudo-polinomio utilizado para el contra-ejemplo en (5):

$$p(s) = s^{2/8} - 2s^{1/8} + 3.$$

Como $n = 2$, $a_n = 1$ y $a_0 = 3$, la condición necesaria del Lema 2 se satisface y por lo tanto procedemos a verificar la condición del Teorema 2. Como $\alpha_n = \frac{2}{8}$ y $\alpha = \frac{1}{8}$, se sigue que

$$\Delta \arg p(i\omega)\Big|_0^\infty = \alpha_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8},$$

lo que coincide con lo observado en la Figura 2, en donde el cambio total del argumento tiende asintóticamente a $\frac{\pi}{8}$.

Ejemplo 2. Considere el pseudo-polinomio

$$p(s) = 0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1 \tag{18}$$

el cual ha sido ampliamente estudiado en la literatura, véase por ejemplo (Petras (2009)). En este caso tenemos $\alpha_n = 22\left(\frac{1}{10}\right) = 2.2$ de donde $n = 22$ y $\alpha = \frac{1}{10}$. Primeramente, observamos que se satisface la condición necesaria del Lema 2 puesto que $a_n = 0.8$ y $a_0 = 1$.

La curva de Mikhailov de (18) se muestra en la Figura 6. En dicha figura se observa que el cambio total del argumento tiende asintóticamente a $\frac{11\pi}{10}$, que es igual a $\alpha_n \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, por el Teorema 2 se concluye que (18) es estable, lo cual coincide con lo obtenido mediante el cálculo de las raíces en (Petras (2009)). Note que, en este caso, la curva corre en dirección positiva.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se aborda el criterio de estabilidad de Mikhailov para pseudo-polinomios de orden conmensurado. Primeramente se obtienen condiciones necesarias para la estabilidad de dichos pseudo-polinomios, en términos de los coeficientes a_n y a_0. Esta condición necesaria es importante ya que nos permite por simple inspección de los coeficientes del pseudo-polinomio determinar su inestabilidad.

El resultado principal de este artículo es la modificación del criterio de estabilidad de Mikhailov. Dicha modificación consiste en determinar la medida apropiada del cambio total del argumento para $p(i\omega)$ cuando ω varia desde cero hasta infinito. El resultado en el Teorema 2 establece que la medida del cambio total del argumento es $\alpha_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donde $\alpha_n = n\alpha$ es la máxima potencia fraccionaria del pseudo-polinomio y no $n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ como ha sido reportado en la literatura hasta el momento.

Otro resultado importante es que la curva de Mikhailov no necesariamente gira siempre en sentido positivo para el caso de pseudo-polinomios estables. En otras palabras la conocida propiedad de fase monotónicamente creciente para polinomios estables en general no se cumple para pseudo-polinomios estables.

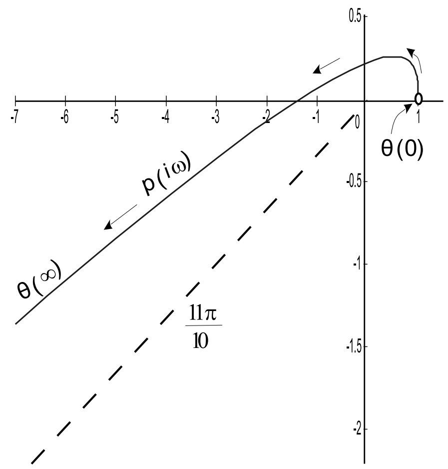

Fig. 6. Curva de Mikhailov para (18).

ACKNOWLEDGEMENTS

Jessica Mendiola-Fuentes agradece a CONACYT por la beca de doctorado otorgada.

REFERENCIAS

Matignon, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM:Proc.*, 5:145–158.

Bonnet C., and Partington, J. R. (2000). Coprime factorizations and stability of fractional differential systems. *Sys. Control Lett.*, 41:167–174.

Kaczorek, T. (2011). Stability Analysis of Fractional Linear Systems in Frequency Domain, in selected problems of fractional systems theory. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 411:Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Valerio, D., and da Costa, J.S. (2013). An introduction to fractional control. *IET control engineering series*, 91: United Kingdom.

Liang, S., Wang, S. G., and Y. Wang. (2017). Routh-type table for zero distribution of polynomial with conmmensurate fractional and integer degrees. *J. Frankl. Inst.*, 354:83–104.

Buslowicz, M. (2018). Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, 56: 319–324.

Popov, E. P. (1962). The dynamics of automatic control systems. *Addison-Wesley.*

Bissell, C. C. (1989). Stodola, Hurwitz and the genesis of the stability criterion. *Int. J. Control*, 50:2313–2332, 1989.

Petras, I. (2009). Stability of fractional-order systems with rational orders: A survey. *Fract. Calculus & Appl. Analysis*, 12:269–298.