



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

El criterio de estabilidad de Mikhailov para sistemas fraccionarios de orden conmensurado

Tesis que presenta

Jessica Carmin Mendiola Fuentes

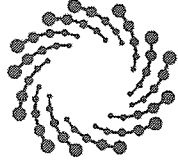
Para obtener el grado de

Doctor en control y sistemas dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

San Luis Potosí, S.L.P., 25 de Junio de 2018



IPICYT

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "***El criterio de estabilidad de Mikhailov para sistemas fraccionarios de orden conmensurado***" presentada para obtener el Grado de Doctora en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Jessica Carmín Mendiola Fuentes** y aprobada el **veinticinco de junio del dos mil dieciocho** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
Director de la tesis

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Jurado en el Examen

Dr. Daniel Ulises Campos Delgado
Jurado en el Examen

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Jurado en el Examen

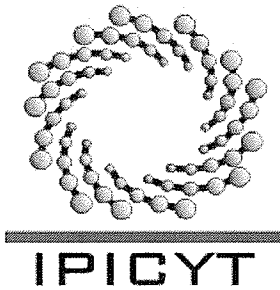


Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 322282 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

Adicionalmente, también recibió apoyo por parte de la fundación Sofia Kovalevskaya.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 005 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 25 días del mes de junio del año 2018, se reunió a las 17:15 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

| | | |
|---|------------------------|---------------|
| Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez | Presidente | IPICYT |
| Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar | Secretario | IPICYT |
| Dr. Daniel Ulises Campos Delgado | Sinodal externo | UASLP |
| Dr. Hugo Cabrera Ibarra | Sinodal | IPICYT |

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

DOCTORA EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó la C.

Jessica Carmín Mendiola Fuentes

sobre la Tesis intitulada:

El criterio de estabilidad de Mikhailov para sistemas fraccionarios de orden conmensurado

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 18:56 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 25 días del mes de junio de 2018.


Dr. Horacio Flores Zúñiga
Secretario Académico


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado



Agradecimientos

A mi asesor el Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar por brindarme su confianza para iniciar este proyecto de tesis. También agradezco su motivación contagiándome su entusiasmo por la ciencia, su admirable dedicación como guía y finalmente su alentadora exigencia, fundamental para mi carrera científica.

Un sincero agradecimiento a los Doctores Guillermo Fernández Anaya, Daniel Ulises Campos Delgado, Hugo Cabrera Ibarra y Juan Gonzalo Barajas Ramírez por su disponibilidad, les agradezco en especial por su labor en la corrección de este manuscrito que contribuyó a la mejora de esta tesis.

A CONACYT por la beca de doctorado, a la fundación Sofía Kovaléskaja y a la Sociedad Matemática Mexicana por el apoyo otorgado y al IPICYT por facilitarme los medios para desarrollar mi proyecto doctoral.

De manera muy especial a mis familiares y amigos. A mis papás, mis hermanas, a mi Tío Francisco que han sido un apoyo y porra incondicional en todo momento. A Sofi mi más grande inspiración que me da fuerzas e impulso para salir adelante.

Índice general

| | |
|---|------------|
| Portada | I |
| Constancia de aprobación de la tesis | II |
| Créditos Institucionales | III |
| Acta de examen | IV |
| Agradecimientos | VI |
| Índice de figuras | IX |
| Notación | X |
| Resumen | XI |
| Abstract | XII |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Historia del cálculo fraccionario | 1 |
| 1.2. Sistemas de orden fraccionario | 2 |
| 1.3. Cálculo fraccionario en la teoría del control | 3 |
| 1.4. Formulación del problema | 5 |
| 1.5. Organización general de la tesis | 6 |
| 2. Fundamentos de cálculo fraccionario | 7 |
| 2.1. Función Gamma | 7 |
| 2.2. Cálculo de orden entero | 12 |
| 2.2.1. Derivadas iteradas | 12 |
| 2.2.2. Integrales iteradas | 13 |
| 2.2.3. Operador difero-integral | 14 |
| 2.3. Cálculo fraccionario: Orden real | 15 |
| 2.3.1. Operadores difero-integral de orden fraccionario | 15 |
| 2.3.2. Transformada de Laplace | 18 |
| 2.3.3. Las funciones de Mittag-Leffler | 19 |
| 2.4. Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario | 20 |

| | |
|--|-----------|
| 2.5. Ubicación de las raíces de un pseudo-polinomio | 22 |
| 2.6. Estabilidad de pseudo-polinomios | 24 |
| 3. El criterio de Mikhailov para sistemas fraccionarios de orden conmensurado | 27 |
| 3.1. Criterios de Stodola y Mikhailov para polinomios | 27 |
| 3.2. Criterio de Stodola y Mikhailov para sistemas de orden fraccionario | 32 |
| 3.2.1. Criterio de Mikhailov erróneo | 33 |
| 3.3. Criterio de Stodola y Mikhailov para sistemas de orden fraccionario | 34 |
| 4. Conclusiones | 49 |
| Bibliografía | 51 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 2.1. Función $\Gamma(z)$ | 9 |
| 2.2. Ubicación de las raíces de $p(\lambda)$ en el plano complejo λ | 24 |
| 2.3. Región M_α cuando $0 < \alpha < 1$ | 25 |
| 2.4. Región M_α cuando $1 < \alpha < 2$ | 25 |
| 3.1. Raíz real negativa | 29 |
| 3.2. Raíz real positiva | 29 |
| 3.3. Raíces complejas con parte real negativa. | 30 |
| 3.4. Raíces complejas con parte real positiva. | 31 |
| 3.5. Curva de Mikhailov para $p(s)$ en (3.7). | 32 |
| 3.6. Curva de Mikhailov para $p(s)$ en (3.8). | 33 |
| 3.7. Curva de Mikhailov para $p(s)$ en (3.11). | 34 |
| 3.8. Raíz real negativa cuando $0 < \alpha < 1$ | 36 |
| 3.9. Raíz real negativa cuando $1 < \alpha < 2$ | 36 |
| 3.10. Raíz real positiva cuando $0 < \alpha < 1$ | 37 |
| 3.11. Raíz real positiva cuando $1 < \alpha < 2$ | 37 |
| 3.12. Raíces estables complejas conjugadas cuando $0 < \alpha < 1$ | 38 |
| 3.13. Raíces estables complejas conjugadas cuando $1 \leq \alpha < 2$ | 39 |
| 3.14. Raíces inestables complejas conjugadas cuando $0 < \alpha < 1$ | 40 |
| 3.15. Raíces inestables complejas conjugadas cuando $1 \leq \alpha < 2$ | 41 |
| 3.16. Curva de Mikhailov para (3.26). | 43 |
| 3.17. Curva de Mikhailov para (3.27). | 44 |
| 3.18. Curva de Mikhailov para (3.28). | 45 |
| 3.19. Curva de Mikhailov para (3.29). | 46 |
| 3.20. Curva de Mikhailov para (3.31). | 47 |

Notación

| | |
|--|---|
| \mathbb{N} | Conjunto de los números naturales. |
| $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-$ | Conjunto de los números enteros, enteros positivos y enteros negativos. |
| $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ | Conjunto de los números reales, reales positivos y reales negativos. |
| \mathbb{C} | Conjunto de los números complejos. |
| \mathbb{C}_- | Semiplano izquierdo abierto del plano complejo. |
| ∂M | Frontera del conjunto M . |
| D^α | Derivada fraccionaria de orden α . |
| \mathcal{L} | Operador transformada de Laplace. |
| $[x]$ | Función techo de $x \in \mathbb{R}$. |
| $\Gamma(\cdot)$ | Función Gamma. |
| $E_\alpha(t)$ | Función de Mittag-Leffler de un parámetro. |
| $E_{\alpha,\beta}(t)$ | Función de Mittag-Leffler de dos parámetros. |
| $Re(s)$ | Parte real de un número complejo s . |
| $\arg(s)$ | Argumento de un número complejo s . |
| $\Delta \arg p(s)$ | Cambio total del argumento de $p(s)$. |
| $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ | Unión matemática de un conjunto índice A_k . |

Resumen

En este trabajo de tesis se aborda el problema de estabilidad de sistemas lineales fraccionarios. La estabilidad de esta clase de sistemas está determinada mediante la ubicación de las raíces del pseudo-polinomio característico asociado. Debido a la complejidad en el cálculo de las raíces del pseudo-polinomio resulta deseable contar con métodos que nos ayuden a determinar la estabilidad de los sistemas sin tener que calcular las raíces de pseudo-polinomios. El criterio de estabilidad de Mikhailov para sistemas lineales de orden entero es una herramienta gráfica poderosa para determinar la estabilidad sin calcular las raíces asociadas al polinomio característico.

En este trabajo se presenta la extensión del criterio de Mikhailov para el caso de sistemas lineales fraccionarios de orden conmensurado. Adicionalmente, se presenta la generalización del criterio clásico de Stodola, que proporciona condiciones necesarias de estabilidad, para dicha clase de sistemas.

Abstract

This dissertation work addresses the stability problem of linear fractional order systems. The stability of this class of systems is determined by the location of the roots of the associated characteristic pseudo-polynomial. Due to the complexity in the calculation of the pseudo-polynomial roots, it is desirable to have methods that help us to determine the stability of the systems without having to calculate pseudo-polynomials roots. The Mikhailov stability criterion for linear integer order systems is a powerful and graphical tool to determine the stability without having to calculate the roots of the associated characteristic polynomial.

In this work the extension of the Mikhailov criterion is presented for the case of fractional linear systems of commensurate order. Additionally, the generalization of the classic Stodola criterion is presented, which provides necessary stability conditions for this class of systems.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se presenta una breve historia del cálculo fraccionario. Además, se mencionan las diversas áreas en donde se aplica esta herramienta matemática, específicamente para el modelado de sistemas de orden fraccionario y en el diseño de controladores. El estado del arte para la estabilidad de sistemas de orden fraccionario se discute de manera breve. Adicionalmente se presenta la formulación del problema de investigación y la organización de esta tesis.

1.1. Historia del cálculo fraccionario

La idea de la generalización de $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$, cuando n no es entero surgió en el nacimiento del mismo cálculo diferencial. Los primeros acercamientos y discusiones acerca del cálculo de orden no entero, surgieron entre Leibniz, Bernoulli y L'Hopital alrededor del año 1695, quienes hicieron algunas observaciones sobre la posibilidad de considerar derivadas de orden $\frac{1}{2}$, de ahí el nombre de cálculo fraccionario. Fue Euler en 1738 quien dió el primer paso, partiendo de la derivada de la potencia de una función, observando que en este caso la derivada también tiene sentido cuando el orden n no es entero. Luego en 1820, Lacroix confirma la observación de Euler llegando al mismo resultado. Es decir, considerando una función $y = x^m$, definieron que

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n},$$

con m y n no necesariamente enteros, en donde la función $\Gamma(\cdot)$, es la generalización de la función factorial para números no enteros. Posteriormente, en 1812 Laplace propone la idea de la diferenciación no entera, por medio de una integral. Después en 1822, Fourier sugiere un operador derivada fraccionario, de orden p usando la siguiente igualdad

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda x - t\lambda + p\pi/2) dt,$$

esta vez para ciertas funciones particulares $f(x)$ no necesariamente la potencia de una función. Parte fundamental del cálculo fraccionario se le atribuye a Niels Henrik Abel quien en 1823, aplicó una derivada de orden no entero en la solución de una ecuación integral para resolver el problema de la tautócrona. Dicho problema consiste en determinar la curva que

describe el movimiento de una partícula que se desliza a lo largo de una curva suave, en un plano vertical, bajo la influencia de la gravedad. Si el tiempo de deslizamiento es una constante k desde el punto más alto de la curva x hasta el punto más bajo 0 , la ecuación integral de Abel es:

$$\int_0^x (x-t)^{-1/2} \varphi(t) dt = k.$$

Aquí el integrando $\varphi(t)$ es la incógnita a determinar. La solución a dicha ecuación integral está dada por:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{k}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Posteriormente, en el periodo de 1832 a 1837, con una serie de trabajos, Liouville se posicionó como uno de los principales aportadores sustanciales a la teoría del cálculo fraccionario. Primero con la definición de la fórmula de la derivada de una función exponencial, después definiendo la derivada fraccionaria como el límite de un cociente de una diferencia, con ello evaluó la derivada de algunas funciones elementales. Adicionalmente Liouville abordó las aplicaciones de cálculo fraccionario para la solución de algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, finalmente propuso una expresión para la integración fraccionaria. Luego, Riemann en 1874, siguiendo la misma idea de Liouville propuso una expresión para la integración fraccionaria, misma que desde ese momento se convertiría en la fórmula de integración fraccionaria moderna, conocida como operador integral de Riemann-Liouville, la cual está directamente relacionada con la fórmula de la integral iterada de Cauchy. Por otro lado, en 1867, Grunwald y en 1868, Letnikov, desarrollaron la definición de derivación de orden no entero, utilizando la derivada iterada definida a través del límite. Con esto, se concluye una breve reseña histórica del cálculo fraccionario, el cual es el comienzo para la formalización de la teoría de los operadores derivada e integral de orden no entero. En la actualidad existen una gran variedad de operadores fraccionarios, como la integral fraccionaria de Weyl (1917), la integral fraccionaria de Riesz (1936), la derivada fraccionaria de Caputo (1967), entre otros. Es importante resaltar la gran cantidad de matemáticos importantes de la historia que hicieron sus aportaciones en esta área, misma que con el tiempo se ha ido perfeccionando. Para ver más detalles de la historia del cálculo fraccionario, véase [1].

1.2. Sistemas de orden fraccionario

El cálculo fraccionario es una rama de las matemáticas que abre la posibilidad de extender las definiciones de derivada e integral para órdenes no enteros. En las últimas dos décadas, las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario han sido utilizadas para el modelado de varios fenómenos físicos cuyas soluciones, en el caso de sistemas lineales, poseen un decaimiento anómalo, diferente al de tipo exponencial [2].

Las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario logran explicar cierta clase de fenómenos físicos, se presume que tienen la capacidad de describir comportamientos que poseen memoria, ya que una característica del operador derivada de orden fraccionario es que no es local, debido a que involucra una integral y por lo tanto depende de los valores de la función en un intervalo.

En la actualidad existen una gran cantidad de aplicaciones de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario en áreas como física, química, ingeniería, finanzas, etc. Por mencionar algunos ejemplos específicos se encuentran aplicaciones en procesos de difusión [3], en el modelado de propiedades mecánicas de materiales [4] en procesamiento de señales [5], [6], en el modelado del comportamiento viscoelástico [7], [8], en bioingeniería [9], electrónica [10], robótica [11], [12], entre otros. En particular, también podemos encontrar aplicaciones en la teoría matemática de control [13], [14].

1.3. Cálculo fraccionario en la teoría del control

El primer acercamiento en la aplicación del cálculo fraccionario en la teoría del control surge en el año de 1945 cuando H. Bode [15] usó una función de transferencia del tipo

$$F(s) = \left(\frac{\omega_c}{s}\right)^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

donde ω_c es la ganancia de frecuencia de cruce, y γ es la pendiente de la curva de magnitud. De hecho, probablemente sin el conocimiento de Bode, la función $F(s)$ es un integrador de orden fraccionario cuando $\gamma > 0$ y un diferenciador cuando $\gamma < 0$. Posteriormente en los años setentas se propuso un controlador de orden fraccionario en el dominio de la frecuencia conocido como CRONE (“Commande Robuste d’Ordre Non Entier”) [16], abriendo paso a una generación de controladores robustos de orden fraccionario. Después a finales de los noventas surgió el controlador fraccionario conocido como $PI^\lambda D^\mu$ [14] que es la generalización del controlador clásico PID. Claramente, para un sistema de control en lazo cerrado existen cuatro posibilidades a considerar, con respecto a los órdenes de la planta y al controlador:

1. Planta entera con controlador entero,
2. Planta entera con controlador fraccionario,
3. Planta fraccionaria con controlador entero y
4. Planta fraccionaria con controlador fraccionario.

El controlador fraccionario $PI^\lambda D^\mu$ posee una mayor cantidad de parámetros, es decir, cuenta con cinco parámetros para sintonizar ($K_p, K_i, \lambda, K_d, \mu$), mientras que el PID de orden entero solo tiene tres (K_p, K_i, K_d), por lo tanto el controlador fraccionario tiene mayor flexibilidad para la sintonización de las ganancias, esperando así mejorar el rendimiento de un sistema de control en lazo cerrado, sin embargo, implica que el diseño del mismo sea más complejo en comparación con un controlador de orden entero. Del mismo modo, resulta natural utilizar un controlador fraccionario cuando se trata de una planta fraccionaria.

Con el objetivo de ilustrar el efecto que tienen los controladores fraccionarios, consideremos un ejemplo para el control de un sistema térmico. Es bien sabido que un proceso térmico con transferencia de calor por conducción o convección se puede modelar aproximadamente mediante una ecuación diferencial de primer orden, como la siguiente:

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh,$$

donde R es la resistencia térmica, C es la capacitancia térmica, θ es la diferencia de temperatura entre un elemento y otro, h es un cambio pequeño en el flujo de calor de la entrada. La función de transferencia que relaciona a θ con h , se obtiene mediante

$$\frac{\Theta(s)}{H(s)} = \frac{R}{RCs + 1},$$

donde $\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}$ y $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$. Dadas las características de la función de transferencia, en [17],[18] se proponen dos modelos para un calentador eléctrico, uno de orden entero y otro de orden fraccionario, descrito por una función de transferencia

$$G_e(s) = \frac{1}{as + b}, \quad (1.1)$$

donde a y b son parámetros a estimar mediante algún método de identificación paramétrica. En [17] se consideran los parámetros $a = 20.14$ y $b = 0.598$. Por otro lado, se propone un segundo modelo de orden fraccionario cuya función de transferencia es de la forma

$$G_f(s) = \frac{1}{as^\alpha + b}, \quad (1.2)$$

donde a diferencia del primer modelo, en este caso se añade el parámetro α . Los autores argumentan que el modelo (1.2) aproxima mejor el comportamiento observado experimentalmente del sistema térmico usando una entrada de tipo escalón. Los valores estimados de los parámetros para el modelo (1.2) son $a = 39.69$, $b = 0.598$ y $\alpha = 1.25$.

Consideremos ahora el controlador $PI^\lambda D^\mu$ que tiene como función de transferencia la que sigue:

$$C(s) = K_p + K_i s^{-\lambda} + K_d s^\mu, \quad (1.3)$$

donde K_p , K_i y K_d son respectivamente las ganancias proporcional, integral y derivativa. Cuando $\lambda = \mu = 1$ obtenemos el controlador clásico PID. De igual forma, ya sea haciendo λ o μ cero tenemos el controlador PD^μ o PI^λ , respectivamente. Por ejemplo, para el caso del controlador PD^μ se tiene la siguiente función de transferencia:

$$C_\mu(s) = K_p + K_d s^\mu. \quad (1.4)$$

Considerando las cuatro posibilidades mencionadas anteriormente. Para el sistema de control en lazo cerrado, la planta entera (1.1) con un controlador entero, es decir, haciendo $\mu = 1$ en (1.4), se tiene que la función de transferencia es como sigue:

$$G_1(s) = \frac{K_d s + K_p}{20.14s + K_d s + (K_p + 0.598)}. \quad (1.5)$$

En cambio, para el caso de la misma planta entera (1.1) con un controlador fraccionario, la función de transferencia es, la siguiente:

$$G_2(s) = \frac{K_d s^\mu + K_p}{20.14s + K_d s^\mu + (K_p + 0.598)}. \quad (1.6)$$

Por otro lado, para el caso de la planta fraccionaria en (1.2) el sistema de control en lazo cerrado utilizando un controlador entero, es decir, (1.4) con $\mu = 1$, la función de transferencia es la que sigue:

$$G_3(s) = \frac{K_d s + K_p}{39.69s^{1.24} + K_d s + (K_p + 0.598)}. \quad (1.7)$$

Y por último, el correspondiente a una planta fraccionaria (1.2) con un controlador fraccionario (1.4), la función de transferencia en lazo cerrado se define como:

$$G_4(s) = \frac{K_d s^\mu + K_p}{39.69s^{1.25} + K_d s^\mu + (K_p + 0.598)}.$$

En [19] se diseña un controlador entero basado en el modelo entero y un controlador fraccionario PD^μ diseñado sobre el modelo de orden fraccionario. Para el controlador entero se obtuvieron los parámetros

$$K_p = 64.47, \quad K_d = 12.39,$$

mientras que para el controlador de orden fraccionario se obtuvieron los parámetros

$$K_p = 64.47, \quad K_d = 48.99, \quad \mu = 0.5.$$

Ambos controladores fueron aplicados experimentalmente al proceso térmico real. Los resultados experimentales mostraron que el controlador fraccionario tenía una mejor respuesta que el controlador de orden entero.

Existen muchas aplicaciones donde, como en el ejemplo anterior, se muestra una mayor flexibilidad de los controladores enteros. Es importante mencionar que existen varios métodos para sintonizar controladores de orden fraccionario, los cuales son propuestas modificadas de métodos empleados en la teoría clásica del control. Evidentemente, en cada uno de los métodos de sintonización, la estabilidad en lazo cerrado es fundamental.

En las funciones de transferencia de $G_2(s)$, $G_3(s)$ y $G_4(s)$, la estabilidad está determinada por los ceros del denominador que para estos casos es de la forma:

$$p(s) = as^\alpha + bs^\mu + c, \quad (1.8)$$

donde $\alpha = 0$ para los casos donde la planta es de orden entero. La función de variable compleja $p(s)$ es conocida como pseudo-polinomio. Nuestro trabajo de tesis trata sobre el estudio de la estabilidad de pseudo-polinomios de la forma (1.8). La formulación del problema que abordaremos se describe en la siguiente sección.

1.4. Formulación del problema

Considere una ecuación diferencial lineal de orden fraccionario, de la forma

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + \dots + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_0 y(t) = 0, \quad (1.9)$$

donde $a_i, \alpha_j \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1$. D^{α_j} $j = 1, 2, \dots, n$, denota el operador derivada fraccionaria de Caputo o de Riemann-Liouville. El comportamiento de las soluciones de la ecuación (1.9) está determinado por las raíces de la función característica (pseudo-polinomio) siguiente:

$$p(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0. \quad (1.10)$$

Es importante mencionar que el pseudo-polinomio (1.10) es exactamente el mismo independientemente del tipo de derivada fraccionaria que se utilice. Decimos que (1.10) es de orden conmensurado si $\alpha_j = j\alpha$, $j = 1, 2, \dots, n$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$. El sistema descrito por la ecuación en (1.9) es asintóticamente estable si y sólo si las raíces de (1.10) se encuentran ubicadas en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo [2], [20]. La aplicación de dicho resultado demanda resolver el problema no trivial de calcular explícitamente las raíces del pseudo-polinomio (1.10). Por lo tanto resulta deseable contar con métodos que nos ayuden a determinar la estabilidad de sistemas de orden fraccionario sin tener que calcular las raíces de pseudo-polinomios.

En el caso de sistemas de orden entero existen resultados bien establecidos para verificar la estabilidad de un sistema lineal sin necesidad de calcular las raíces del polinomio característico asociado, como son los criterios de Stodola [21], Routh-Hurwitz [22], Nyquist [23] y Mikhailov [24]. Sin embargo, estos resultados no se encuentran bien establecidos en el caso de sistemas de orden fraccionario. En [25] se presenta el criterio de Mikhailov para sistemas lineales conmensurados de orden fraccionario descritos por (1.9). Sin embargo, en [25], la condición de estabilidad coincide con la condición clásica de Mikhailov para sistemas de orden entero, lo que en principio no es esperado dada la naturaleza fraccionaria de los sistemas. Adicionalmente, cuando uno grafica la curva de Mikhailov de algunos pseudo-polinomios particulares, resulta que la condición de Mikhailov en [25] no es correcta. En conclusión, no se tiene una extensión adecuada del criterio de Mikhailov y por otra parte no existe una descripción del criterio de Stodola para el caso de sistemas de orden fraccionario. Esta es la principal motivación del trabajo de investigación doctoral donde se pretende establecer criterios análogos a los de Stodola y Mikhailov para la clase de sistemas de orden fraccionario conmensurado.

1.5. Organización general de la tesis

El resto de este manuscrito está organizado como sigue:

En el capítulo 2 se presentan algunos resultados preliminares sobre cálculo fraccionario necesarios para los resultados principales de este trabajo. En este capítulo se revisan conceptos de derivada, integral y transformada de Laplace de operadores fraccionarios. Finalmente en este capítulo se presentan resultados generales de la estabilidad de sistemas lineales fraccionarios.

El capítulo 3 contiene los resultados principales. Primeramente revisamos los resultados de estabilidad de los criterios de Stodola y Mikhailov para sistemas de orden entero. Posteriormente, presentamos la generalización de estos criterios de estabilidad para sistemas fraccionarios conmensurados. Finalmente presentamos varios ejemplos ilustrando los resultados obtenidos. En el capítulo 4 se presentan algunas conclusiones de esta investigación y se proponen algunas ideas como trabajo futuro.

Capítulo 2

Fundamentos de cálculo fraccionario

En este capítulo se presentan algunos resultados preliminares necesarios para el desarrollo de la tesis. Se presenta la función Gamma y algunas de sus propiedades, la cual desempeña un papel muy importante en la teoría del cálculo fraccionario. Por otro lado, se presentan conceptos básicos del cálculo entero, en particular, la conceptualización de derivada e integral iterada que nos llevará de manera intuitiva a definir un solo operador difero-integral para órdenes reales. En otra parte de este capítulo, se muestran conceptos básicos de cálculo para órdenes reales y la definición del operador difero-integral de Riemann-Liouville y algunas de sus características. Finalmente, se presenta lo referente a la teoría de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y se define la estabilidad para este tipo sistemas. La mayoría de los conceptos preliminares utilizados en este capítulo fueron tomados del libro en la referencia [26].

2.1. Función Gamma

Definición 2.1. Para $z \in \mathbb{R}^+$. La función $\Gamma(z)$ está definida como:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.1)$$

Lema 2.1. La integral impropia en (2.1) converge para $z \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Primeramente observemos que si $z \in (0, 1)$ entonces la función t^{z-1} es decreciente y tiende a infinito cuando $t \rightarrow 0+$. Por otro lado, si $z \geq 1$ entonces la función t^{z-1} no decrece para $t \geq 0$, de hecho, es estrictamente creciente si $z > 1$ y tiende a infinito cuando $t \rightarrow +\infty$. Por esta razón dividimos la demostración de convergencia de la integral (2.1) en dos partes:

1) Cuando $z \in (0, 1)$. Reescribamos la integral impropia como

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.2)$$

La primera integral del lado derecho de (2.2) satisface

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{z} t^z \Big|_0^1 = \frac{1}{z}.$$

Ahora consideremos la segunda integral del lado derecho de (2.2). Como t^{z-1} es decreciente de t , entonces se tiene que $t^{z-1} \leq (1)^{z-1} = 1, \forall t \geq 1$. Utilizando este hecho, se sigue que

$$\int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \leq \int_1^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_1^\infty = e^{-1}.$$

Así, para $z \in (0, 1)$ tenemos que

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \leq \frac{1}{z} + e^{-1} < \infty, \quad (2.3)$$

y por tanto la integral impropia en (2.1) converge para $z \in (0, 1)$.

- ii) Cuando $z \geq 1$. En este caso existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 \leq z - 1 \leq m$ y por lo tanto se satisface que $t^{z-1} \leq t^m, \forall t \geq 0$. De lo anterior se sigue que

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \leq \int_0^\infty t^m e^{-t} dt. \quad (2.4)$$

Consideremos la función $g(t) = t^m e^{-\frac{1}{2}t}$. Por un lado $g(0) = 0$ y por otro lado, aplicando el Teorema de L'Hopital, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots \cdot 2 \cdot 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^m e^{\frac{1}{2}t}} = 0.$$

Entonces, dado $T > 0$ existe $\beta = \beta(T) > 0$ tal que

$$g(t) \leq \beta \quad \forall t \geq T.$$

Escogiendo β suficientemente grande, la desigualdad anterior se satisface para $t \geq 0$. Entonces se tiene que

$$t^m \leq \beta e^{\frac{1}{2}t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Así,

$$\int_0^\infty t^m e^{-t} dt \leq \int_0^\infty (\beta e^{\frac{1}{2}t}) e^{-t} dt = \beta \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t} dt = 2\beta. \quad (2.5)$$

Por lo tanto, de (2.4) y (2.5) se tiene que para $z \geq 1$

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \leq 2\beta,$$

lo que implica que la integral impropia (2.1) converge.

□

Corolario 2.1. La función $\Gamma(z)$ cumple con lo siguiente:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \Gamma(z) = +\infty.$$

Demostración. Dado que la función $\Gamma(z)$ se puede reescribir como en (2.2), se tiene que

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt > \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt > \int_0^1 e^{-1} t^{z-1} dt = \frac{1}{ez}.$$

Se sigue que $\Gamma(z) \rightarrow +\infty$ cuando $z \rightarrow 0^+$. □

En la Figura 2.1 se puede observar el gráfico de la función $\Gamma(z)$.

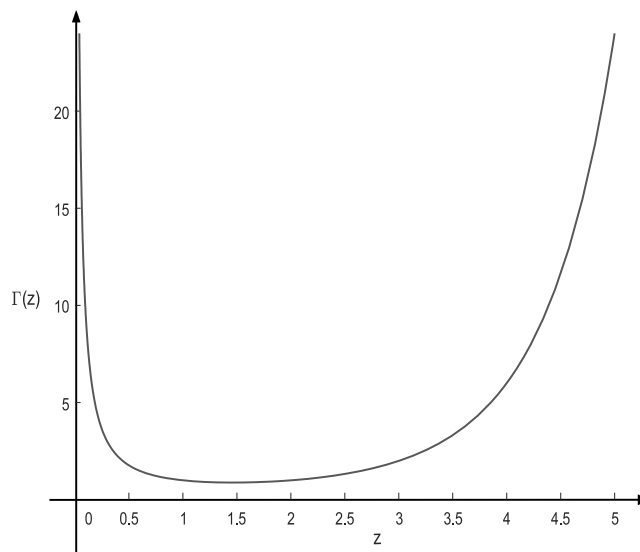


Figura 2.1: Función $\Gamma(z)$.

Ejemplo 2.1. Sea $z = 1/2$. Utilizando la definición en (2.1), tenemos que

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt.$$

Haciendo un cambio de variable $u = t^{1/2}$, tenemos

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Luego,

$$\left(\Gamma(1/2)\right)^2 = \left(2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right) \left(2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv\right) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} dv du.$$

Para resolver esta integral impropia doble utilizaremos coordenadas polares. Sean $u = r\cos(\theta)$ y $v = r\sin(\theta)$ entonces se tiene que

$$4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} dvdu = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta.$$

Por una parte, se tiene que

$$4 \int_0^{\pi/2} d\theta = 4\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

por otro lado, haciendo el cambio de variable $u = r^2$, se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} \int_0^\infty e^u du.$$

Entonces

$$\left(\Gamma(1/2)\right)^2 = 4\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} \int_0^\infty e^u du\right) = \pi.$$

Por lo tanto

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Una propiedad interesante de la función $\Gamma(z)$ está dada por el siguiente resultado:

Lema 2.2. La función $\Gamma(z)$ satisface lo siguiente:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{R}^+. \quad (2.6)$$

Demostración. De la definición de la función $\Gamma(z)$ en (2.1) se tiene que

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt,$$

que al integrar por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= -t^z e^{-t} \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \\ &= -t^z e^{-t} \Big|_0^\infty + z\Gamma(z). \end{aligned}$$

De la demostración del Lema 2.1 se sigue que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^z e^{-t} = 0$ y por lo tanto se obtiene que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

□

La propiedad (2.6), también conocida como recursividad, es de hecho una generalización del factorial para números enteros al caso de números reales positivos. Para visualizar lo anterior primeramente observemos que $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. El siguiente resultado muestra que el factorial de números enteros es un caso particular de (2.6).

Lema 2.3. Para $n \in \mathbb{N}$ se satisface

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (2.7)$$

Demostración. Del Lema 2.2 y dado que $\Gamma(1) = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2! \\ \Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot (2 \cdot 1) = 3!\end{aligned}$$

Supongamos que es válido para n , es decir,

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

entonces

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

Tomando en cuenta que $0! = 1$, se tiene que la fórmula en (2.7) es válida para $n \in \mathbb{N}$. \square

Por otro lado, la función Γ puede ser utilizada para describir un producto, como se presenta en los corolarios siguientes:

Corolario 2.2. Para $z \in \mathbb{R}^+$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (z+k) = z(z+1) \dots (z+(n-1)) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \quad (2.8)$$

Corolario 2.3. Para valores de $n < z$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (z-k) = z(z-1) \dots (z-(n-1)) = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)}. \quad (2.9)$$

Corolario 2.4. Para valores de $n < z$

$$\prod_{k=0}^{-n-1} (z+1+k) = (z+1)(z+2) \dots (z-n) = \frac{\Gamma(z-n+1)}{\Gamma(z+1)}. \quad (2.10)$$

Las demostraciones de los Corolarios 2.2, 2.3 y 2.4 se pueden encontrar en la referencia [26]. Otro de los usos de la función $\Gamma(z)$ es que se puede utilizar para escribir combinaciones. Las combinaciones son el número de formas de seleccionar elementos de un conjunto y generalmente se definen como una expansión binomial, como se presenta a continuación.

Definición 2.2. El número de subconjuntos con k elementos, escogidos de un conjunto con n elementos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Utilizando la función $\Gamma(z)$ obtenemos que $n! = \Gamma(n+1)$, $k! = \Gamma(k+1)$ y $(n-k)! = \Gamma(n-k+1)$, entonces (2.11) se puede escribir como

$$\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}, \quad (2.12)$$

que tiene sentido si $n, k, (n-k) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

2.2. Cálculo de orden entero

Antes de presentar los conceptos de cálculo de orden fraccionario, es conveniente revisar algunos conceptos de cálculo de orden entero que nos ayudarán a entender las generalizaciones de los operadores difero-integral para órdenes reales.

2.2.1. Derivadas iteradas

Definición 2.3. Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La derivada de f con respecto a t se define como

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (2.13)$$

Si el límite en (2.13) existe, decimos que $f(t)$ es diferenciable. Si $h > 0$ y el límite existe tenemos la derivada por la izquierda, y cuando $h < 0$ la derivada por la derecha. Si f es diferenciable en t ambas derivadas por la derecha y la izquierda coinciden. Se sabe del cálculo elemental, que se puede aplicar la composición de funciones de manera iterada, es decir, para obtener la segunda derivada de $f(t)$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}f(t) - \frac{d}{dt}f(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h_1)}{h_1} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(t-h) - f(t-h-h_2)}{h_2}}{h},$$

haciendo $h = h_1 = h_2$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}.$$

De otra manera podemos escribir

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} (-1)^k f(t-kh).$$

Sucesivamente, se obtiene en general que

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(t-kh).$$

Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denotemos

$$Df(t) = D(f)(t) \triangleq \frac{df(t)}{dt}. \quad (2.14)$$

Así, en general se puede escribir que

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.15)$$

y para $n = 0$, tenemos $D^0 f(t) = f(t)$. El operador D^n es entonces el operador derivada sobre $f(t)$, n veces.

2.2.2. Integrales iteradas

Ahora revisemos la integración clásica en el sentido de Riemann.

Definición 2.4. Sea $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ una función (Riemann) integrable. Entonces definimos $F : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi. \quad (2.16)$$

Ahora si integramos la función F , es decir,

$$\int_0^t F(\xi) d\xi = \int_0^t \left(\int_0^\xi f(\tau) d\tau \right) d\xi,$$

tenemos, mediante un cambio en el orden de integración que

$$\int_0^t \left(\int_0^\xi f(\tau) d\tau \right) d\xi = \int_0^t \int_\tau^t f(\tau) d\xi d\tau = \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (2.17)$$

Integrando nuevamente y utilizando (2.17) tenemos

$$\int_0^t \left(\int_0^{\xi_1} \left(\int_0^{\xi_2} f(\tau) d\tau \right) d\xi_2 \right) d\xi_1 = \int_0^t \left(\int_0^{\xi_1} (\xi_1 - \tau) f(\tau) d\tau \right) d\xi_1.$$

Cambiando el orden de integración, tenemos

$$\int_0^t \left(\int_0^{\xi_1} (\xi_1 - \tau) f(\tau) d\tau \right) d\xi_1 = \int_0^t \left(\int_\tau^t (\xi_1 - \tau) d\xi_1 \right) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{2} (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau.$$

Luego entonces

$$\int_0^t \left(\int_0^{\xi_1} F(\xi) d\xi \right) d\xi_1 = \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau.$$

Denotemos

$$D^{-1} f(t) \triangleq \int_0^t f(t) dt. \quad (2.18)$$

Se sigue que

$$D^{-1} \left(D^{-1} f(t) \right) = D^{-2} f(t) = \int_0^t \left(\int_0^{\xi_1} f(\tau) d\tau \right) d\xi_1,$$

está bien definido. Así de los cálculos anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} D^{-1} f(t) &= \int_0^t f(t) dt, \\ D^{-2} f(t) &= \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau, \\ D^{-3} f(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$D^{-n} f(t) = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.19)$$

Calculando inductivamente tenemos

$$D^{-(n+1)}f(t) = D^{-1}\left(D^{-n}f(t)\right) = \int_0^t \left(\int_0^\xi \frac{1}{(n-1)!} (\xi - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \right) d\xi.$$

Aplicando un cambio de variable de integración obtenemos

$$D^{-(n+1)}f(t) = \int_0^t \left(\int_\tau^t \frac{1}{(n-1)!} (\xi - \tau)^{n-1} f(\tau) d\xi \right) d\tau = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \left(\int_\tau^t (\xi - \tau)^{n-1} d\xi \right) f(\tau) d\tau,$$

observando que

$$\int_\tau^t (\xi - \tau)^{n-1} d\xi = \frac{1}{n} (t - \tau)^n,$$

obtenemos

$$D^{-(n+1)}f(t) = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^t \frac{1}{n} (t - \tau)^n f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{n!} (t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

De lo anterior se sigue el siguiente resultado.

Teorema 2.1. [26] *La integral de orden $n \in \mathbb{N}$ de una función $f(t)$ está dada por*

$$D^{-n}f(t) = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.20)$$

La expresión (2.20) se conoce como la fórmula de la integral iterada de Cauchy.

2.2.3. Operador difero-integral

De los resultados anteriores es posible definir un solo operador funcional para la derivada y la integral como a continuación. Se sigue la misma notación descrita en [26].

$$D^n f(t) = \begin{cases} \frac{d^n f(t)}{dt^n} & \text{si } n \in \mathbb{N}, \\ f(t) & \text{si } n = 0, \\ \int_0^t D^{n+1} f(t) dt, & \text{si } n \in \mathbb{Z}^-. \end{cases} \quad (2.21)$$

Para ejemplificar la definición del operador difero-integral en (2.21) apliquemos dichos operadores para ciertas funciones en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. *Sea $f(t) = t^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Tenemos*

$$\begin{aligned} D^1 f(t) &= \lambda t^{(\lambda-1)}, \\ D^2 f(t) &= \lambda(\lambda-1)t^{(\lambda-2)}. \end{aligned}$$

En general

$$D^n f(t) = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-(n-1))t^{(\lambda-n)} = t^{(\lambda-n)} \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda-k). \quad (2.22)$$

Del Corolario 2.3, podemos escribir la expresión anterior como sigue

$$D^n f(t) = t^{\lambda-n} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)}, \quad n < \lambda. \quad (2.23)$$

Ahora consideremos el caso del operador D^n para $n \in \mathbb{Z}^-$. Para $n = -1$ tenemos

$$D^{-1} f(t) = \int_0^t \xi^\lambda d\xi = \frac{1}{\lambda} (t^{\lambda+1}).$$

Para $n = -2$

$$D^{-2} f(t) = \int_0^t D^{-1} f(\xi) d\xi = \frac{1}{\lambda+1} \int_0^t \xi^{\lambda+1} d\xi = \frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{1}{\lambda+2} \right) t^{\lambda+2}.$$

En general, para $n \in \mathbb{Z}^-$ se tiene la expresión siguiente:

$$D^n f(t) = \frac{t^{\lambda+n}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)}.$$

Utilizando el resultado del Corolario 2.4 podemos escribir la expresión anterior como:

$$D^n f(t) = t^{\lambda-n} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)}, \quad n < \lambda. \quad (2.24)$$

De (2.23) y (2.24) es natural pensar que la generalización del operador difero-integral en (2.21) para valores de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, de la función $f(t) = t^\lambda$ es:

$$D^\alpha f(t) = t^{\lambda-\alpha} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}, \quad \alpha < \lambda. \quad (2.25)$$

Note que existe una restricción para los valores λ y α , de los cuales si la desigualdad $\alpha < \lambda$ se cumple, entonces $\lambda - \alpha > 0$, lo cual implica que $\lambda - \alpha + 1 > 0$ y entonces la función Γ está bien definida. En otras palabras, el orden α de la derivada fraccionaria siempre debe ser menor que el orden λ de la función $f(t) = t^\lambda$.

Es importante mencionar que en general las derivadas fraccionarias se definen utilizando ideas como las anteriores mediante el uso de la función Γ .

2.3. Cálculo fraccionario: Orden real

2.3.1. Operadores difero-integral de orden fraccionario

Definición 2.5. (Riemann-Liouville)

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(\tau) d\tau & \alpha \in \mathbb{R}^-, \\ f(t) & \alpha = 0, \\ \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} D^{\alpha-[\alpha]} f(t) & \alpha \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.26)$$

Observemos que si $\alpha \in \mathbb{Z}$ entonces el operador D^α en (2.26) coincide con el operador D^n dado en (2.21). En particular, cuando $\alpha \in \mathbb{R}^-$, D^α generaliza la fórmula de la integral iterada de Cauchy para α reales. Por otro lado, observemos que si $\alpha \in \mathbb{R}^-$ y $-1 < \alpha \leq 0$ entonces $-1 \leq -\alpha - 1 < 0$ y por tanto el kernel

$$(t - \tau)^{-\alpha-1} = \frac{1}{(t - \tau)^{\alpha+1}},$$

presenta una singularidad cuando $\tau = t$.

Así, surge la pregunta si el operador D^α está bien definido para $-1 < \alpha \leq 0$. Ecuaciones de esta forma, es decir, con un kernel no acotado en uno o más puntos de singularidad en su dominio de definición fueron investigados por el matemático noruego Abel, quien en 1823 investigó el movimiento de una partícula que se desliza a lo largo de una curva suave desconocida, en un plano vertical bajo la influencia de la gravedad. Dicha partícula toma un tiempo $f(t)$ para moverse desde el punto más alto t hasta el punto más bajo 0 de la curva. Abel determinó que la ecuación del movimiento de la partícula deslizándose a lo largo de la curva está dado por la ecuación

$$f(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} u(\tau) d\tau, \quad (2.27)$$

donde $f(t)$ es una función de datos determinados y $u(t)$ es la incógnita a determinar. Observemos que el kernel $k(t - \tau) = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$ de (2.27) tiene una singularidad en $\tau = t$ y por tanto es no acotado cuando $\tau \rightarrow t$.

Abel demostró que la solución $u(t)$ a la ecuación (2.27) es

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right). \quad (2.28)$$

Estos resultados seguramente influyeron en la definición de Riemann-Liouville para el operador D^α en (2.26). De hecho, consideremos $\alpha = 1/2$ en (2.26),

$$D^{1/2} f(t) = \frac{d^{\lceil 1/2 \rceil}}{dt^{\lceil 1/2 \rceil}} D^{1/2 - \lceil 1/2 \rceil} f(t) = \frac{d}{dt} D^{-1/2} f(t).$$

De la definición (2.26) tenemos que

$$D^{-1/2} f(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} f(\tau) d\tau,$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} D^{1/2} f(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t (t - \tau)^{-1/2} f(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

La integral en la expresión (2.29) es precisamente la integral de Abel presentada con anterioridad. Abel generalizó el problema original introduciendo la ecuación singular integral

$$f(t) = \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1,$$

la cual se conoce como ecuación integral generalizada de Abel. De la definición (2.26) se sigue que si $\alpha \in \mathbb{R}^-$ y $-1 < \alpha \leq 0$ el operador D^α es, salvo un factor constante, la integral generalizada de Abel. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{R}^+$ con $\alpha \notin \mathbb{Z}^+$, entonces $-1 < \alpha - [\alpha] = \beta < 0$ y

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} f(\tau) d\tau. \quad (2.30)$$

Así cuando $\alpha \in \mathbb{R}^+$ con $\alpha \notin \mathbb{Z}^+$, el operador D^α es una derivada entera de una integral generalizada de Abel.

Una característica interesante del operador D^α , cuando $\alpha \in \mathbb{R}^+$, es que al aplicarlo a una función constante el resultado no es cero en contraste con el caso entero en donde la derivada entera de una constante siempre es cero. De hecho, como

$$\int_0^t (t-\tau)^{-(\beta+1)} d\tau = \frac{1}{(1-(\beta+1))} t^{1-(\beta+1)} = \frac{1}{-\beta} t^{-\beta}.$$

Se sigue de (2.30) que si $f(t) = c$, entonces

$$D^\alpha f(t) = \frac{c}{\Gamma(-\beta)} \left(-\frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} t^{-\beta} \right).$$

De la expresión (2.22), se tiene que

$$\frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} t^{-\beta} = t^{-\beta-[\alpha]} \prod_{k=0}^{[\alpha]-1} (-\beta-k) = t^{-\beta-[\alpha]} (-\beta) \prod_{k=0}^{[\alpha]-1} (-\beta-k),$$

y por tanto

$$D^\alpha f(t) = \frac{c}{\Gamma(-\beta)} t^{-\alpha} \prod_{k=1}^{[\alpha]-1} (-\beta-k).$$

De aquí concluimos que el operador D^α de una constante no es igual a cero cuando $\alpha \in \mathbb{R}^+$ con $\alpha \notin \mathbb{Z}^+$. El operador D^α satisface las propiedades de linealidad y ley de los exponentes como se establece en los siguientes resultados.

Teorema 2.2 ([26]). *El operador D^α en (2.26) satisface*

$$D^\alpha(af(t) + bg(t)) = aD^\alpha f(t) + bD^\alpha g(t),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.3 ([26]). *El operador D^α en (2.26) satisface*

$$D^\alpha(D^\beta f(t)) = D^{\alpha+\beta} f(t). \quad (2.31)$$

excepto cuando $\beta > 0$ y $\alpha + \beta > 0$.

Es importante mencionar que existen otras definiciones de operadores difero-integrales fraccionarios como por ejemplo, el operador de Caputo, el de Grunwald-Letnikov, etc, véase [26], [27] para un estudio detallado de estos.

Cada operador tiene ventajas y/o desventajas sobre los otros operadores. Por ejemplo, el operador de Caputo impone restricciones adicionales sobre las funciones a las cuales puede aplicarse y satisface que al aplicarlo a una función constante si es cero, pero por otro lado no satisface la ley de los exponentes. En este trabajo sólo utilizaremos el operador de Riemann-Liouville dado en (2.26), siendo este suficiente y general para los resultados obtenidos.

2.3.2. Transformada de Laplace

De manera análoga al caso entero, la transformada de Laplace del operador D^α es fundamental para el análisis de sistemas dinámicos de orden fraccionario.

Recordemos que dada $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, la transformada de Laplace de f está definida como

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (2.32)$$

Las condiciones necesarias para garantizar la existencia de la integral impropia en (2.32) son que f sea continua por tramos en $[0, \infty)$ y que f sea una función de orden exponencial, es decir que si existen constantes $c, M > 0$ y $T > 0$ entonces $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

Consideremos calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^\lambda$, la cual es de especial interés para el cálculo de la transformada de Laplace del operador D^α .

Tenemos que

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} t^\lambda dt.$$

Haciendo el cambio de variable $\tau = st$, la expresión se puede escribir como

$$F(s) = \frac{1}{s^{\lambda+1}} \int_0^\infty \tau^\lambda e^{-\tau} d\tau,$$

si $\lambda > -1$ entonces $\lambda + 1 > 0$ y de la definición de la función Γ se tiene que

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^\infty \tau^\lambda e^{-\tau} d\tau.$$

Por lo tanto

$$F(s) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{s^{\lambda+1}}, \quad \lambda > -1.$$

Utilizando este resultado y el teorema de convolución se obtienen el siguiente teorema que establece la transformada de Laplace para el operador D^α .

Teorema 2.4. [26] Dada $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ está bien definida, se tiene que

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = \begin{cases} s^\alpha F(s) & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^- \\ F(s) & \text{si } \alpha = 0 \\ s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0), & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.33)$$

donde D^α es el operador de Riemann-Liouville dado por (2.26).

2.3.3. Las funciones de Mittag-Leffler

Para calcular algunas transformadas de Laplace relevantes en el análisis de sistemas de orden fraccionario es necesario utilizar las funciones especiales de Mittag-Leffler [26].

Definición 2.6. Las funciones de Mittag-Leffler de uno y dos parámetros se definen respectivamente como

$$E_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \quad (2.34)$$

$$E_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (2.35)$$

Observemos que $E_{\alpha, 1}(t) = E_{\alpha}(t)$ lo que muestra la relación entre las funciones de Mittag-Leffler de uno y dos parámetros. En particular, obtenemos que

$$E_1(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = e^{at} = E_{1,1}(at).$$

La ecuación anterior muestra que las funciones exponenciales son un caso particular de las funciones de Mittag-Leffler. En otras palabras, las funciones de Mittag-Leffler son una generalización de funciones exponenciales y otras funciones trascendentales.

Teorema 2.5. [26] Sea

$$h(t) = t^{\alpha k + \beta - 1} \frac{d^k E_{\alpha, \beta}(\pm at^{\alpha})}{d(\pm at^{\alpha})^k},$$

donde $k \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\mathfrak{L}[h(t)] = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^{\alpha} \mp a)^{k+1}}. \quad (2.36)$$

De este resultado general se obtienen varios resultados particulares que permiten conocer las transformadas de Laplace de ciertas funciones especiales que surgen naturalmente en el cálculo de soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Corolario 2.5. Del Teorema 2.5 se tiene lo siguiente:

1. Haciendo $k = 0$,

$$\mathfrak{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(at^{\alpha})] = \frac{s^{\alpha - \beta}}{s^{\alpha} - a}. \quad (2.37)$$

2. Haciendo $k = 0$ y $\alpha = \beta$,

$$\mathfrak{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(at^{\alpha})] = \frac{1}{s^{\alpha} - a}. \quad (2.38)$$

3. Haciendo $k = 0$ y $\alpha = 1$,

$$\mathfrak{L}[t^{\beta-1} E_{1, \beta}(at^{\alpha})] = \frac{s^{1-\beta}}{s - a}. \quad (2.39)$$

4. Haciendo $k = 0$, $\alpha = 1$ y $a = 0$,

$$\mathfrak{L}[t^{\beta-1} E_{1, \beta}(0)] = \frac{1}{s^{\beta}}. \quad (2.40)$$

2.4. Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

El problema de encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias es bastante complejo. Para la clase de ecuaciones lineales con coeficientes constantes es posible encontrar soluciones explícitas. En esta sección, revisaremos brevemente el problema de encontrar soluciones de ecuaciones lineales con coeficientes constantes de orden conmensurado. Así, consideremos la siguiente ecuación diferencial fraccionaria:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_0 y(t) = 0, \quad (2.41)$$

donde $a_i, \alpha_j \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$, además $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1$, $D^{\alpha_j} j = 1, 2, \dots, n$, denota el operador derivada fraccionaria de Riemann-Liouville dado en (2.26), además con $\alpha_j = j\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Debido a que se conoce como calcular la transformada de Laplace del operador D^α , entonces podemos calcular la transformada de Laplace de (2.41), resolver para la incógnita y entonces invertir para encontrar la solución $y(t)$.

Calculando la transformada de Laplace en (2.41) obtenemos

$$\begin{aligned} & a_n \left(s^{\alpha_n} Y(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha_n]-1} s^k D^{\alpha_n-k-1} y(0) \right) + a_{n-1} \left(s^{\alpha_{n-1}} Y(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha_{n-1}]-1} s^k D^{\alpha_{n-1}-k-1} y(0) \right) + \dots \\ & + a_1 \left(s^{\alpha_1} Y(s) - \sum_{k=0}^{[\alpha_1]-1} s^k D^{\alpha_1-k-1} y(0) \right) + a_0 Y(s) = 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. De la expresión anterior se sigue que para poder calcular $Y(s)$, y por tanto una solución de (2.41) es necesario conocer los valores

$$D^{\alpha_j-k-1} y(0), \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha_j] - 1, \quad (2.43)$$

para $j = 1, 2, \dots, n$. Estos valores en (2.43) son de hecho las condiciones iniciales requeridas para poder determinar soluciones de (2.41). La ecuación (2.42) se puede escribir como

$$p(s)Y(s) = C, \quad (2.44)$$

donde

$$\begin{aligned} C &= a_n \left(\sum_{k=0}^{[\alpha_n]-1} s^k D^{\alpha_n-k-1} y(0) \right) + a_{n-1} \left(\sum_{k=0}^{[\alpha_{n-1}]-1} s^k D^{\alpha_{n-1}-k-1} y(0) \right) + a_1 \left(\sum_{k=0}^{[\alpha_1]-1} s^k D^{\alpha_1-k-1} y(0) \right), \\ p(s) &= a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0. \end{aligned}$$

La función de variable compleja $p(s)$ se conoce como el pseudo-polinomio característico asociado a (2.41). De hecho, $p(s)$ es una función multivaluada, que tiene un número infinito de raíces, aunque solo un número finito de ellas son significativas (relevantes) para las soluciones de (2.41). En la siguiente sección trataremos el problema de la ubicación de las raíces de $p(s)$ en el plano complejo. Por ahora, con el objetivo de ilustrar la idea principal para obtener soluciones de (2.41) mediante la expresión (2.44) presentaremos un ejemplo.

Ejemplo 2.3. Consideremos la siguiente ecuación diferencial fraccionaria

$$Dy(t) + aD^{1/2}y(t) + by(t) = 0. \quad (2.45)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior obtenemos

$$(sY(s) - y(0)) + a\left(s^{1/2}Y(s) - D^{-1/2}y(0)\right) + bY(s) = 0. \quad (2.46)$$

De la expresión en (2.44) se sigue que (2.46) se puede escribir como $p(s)Y(s) = C$, donde

$$C = y(0) + aD^{-1/2}y(0), \quad y$$

$$p(s) = s + as^{1/2} + b.$$

Mediante el cambio de variable $\lambda = s^{1/2}$, el pseudo-polinomio $p(s)$ se puede transformar en el polinomio de orden entero

$$\tilde{p}(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

donde λ_1 y λ_2 son las dos raíces distintas de $\tilde{p}(\lambda)$. Mediante la transformación inversa $s = \lambda^2$, se tiene que $s_1 = \lambda_1^2$ y $s_2 = \lambda_2^2$ son raíces de $p(s)$. Se sigue que $p(s)$ se puede factorizar como

$$p(s) = (s^{1/2} - \lambda_1)(s^{1/2} - \lambda_2).$$

Utilizando expansión en fracciones parciales se tiene que

$$\frac{1}{p(s)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1}{s^{1/2} - \lambda_1} - \frac{1}{s^{1/2} - \lambda_2} \right].$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{C}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1}{s^{1/2} - \lambda_1} - \frac{1}{s^{1/2} - \lambda_2} \right]. \quad (2.47)$$

De acuerdo al Corolario 2.5 en la expresión (2.38), se tiene que

$$\mathfrak{L}\left\{t^{-\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\left(\lambda_j t^{\frac{1}{2}}\right)\right\} = \frac{1}{s^{1/2} - \lambda_j}, \quad j = 1, 2.$$

Así, aplicando la transformada inversa de Laplace en ambos lados de (2.47) se obtiene que para $t > 0$:

$$y(t) = \frac{C}{\lambda_1 - \lambda_2} t^{-\frac{1}{2}} \left[E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\left(\lambda_1 t^{\frac{1}{2}}\right) - E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\left(\lambda_2 t^{\frac{1}{2}}\right) \right], \quad (2.48)$$

es solución de la ecuación diferencial fraccionaria.

De la ecuación (2.48) se observa que aún para este ejemplo sencillo de una ecuación diferencial fraccionaria, las soluciones son bastante más complicadas que en el caso entero. La ecuación (2.48) muestra que en general las soluciones de esta clase de ecuaciones diferenciales está expresada mediante la función de Mittag-Leffler y depende de las raíces del pseudo-polinomio $p(s)$ asociado a la ecuación diferencial. En otras palabras, las raíces de $p(s)$ determinan el comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales, en forma análoga al caso entero donde las raíces del polinomio característico gobiernan el comportamiento de las soluciones.

El comportamiento asintótico de la solución en (2.48) se puede encontrar del siguiente Teorema:

Teorema 2.6. [26] *La función de Mittag-Leffler satisface la siguiente aproximación*

$$E_{\alpha,\beta}(t) \approx \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1-\beta}{\alpha}} e^{t^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Así, en correspondencia al caso del ejemplo anterior, se satisface que cuando $t \rightarrow \infty$

$$E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\lambda_j t^{\frac{1}{2}}) \approx 2(\lambda_j t)^{e^{(\lambda_j t^{\frac{1}{2}})^2}}, \quad j = 1, 2,$$

y entonces

$$y(t) \approx \frac{2C}{\lambda_1 - \lambda_2} t^{-\frac{1}{2}} \left[\lambda_1 t e^{\lambda_1^2 t} - \lambda_2 t e^{\lambda_2^2 t} \right].$$

Como $\lambda_1^2 = s_1$ y $\lambda_2^2 = s_2$, la aproximación anterior se puede reescribir como

$$y(t) \approx \frac{2C}{\lambda_1 - \lambda_2} t^{\frac{1}{2}} \left[\lambda_1 e^{s_1 t} - \lambda_2 e^{s_2 t} \right].$$

Es claro que $y(t)$ tenderá a cero si $\text{Re}(s_j) < 0$, $j = 1, 2$. Las ideas anteriores pueden generalizarse para la ecuación (2.41) y obtener condiciones de estabilidad. Lo anterior fue presentado por primera vez en la literatura por Matignon en 1998 [2] para el caso conmensurado y generalizado por Bonnet y Partington en [20] para el caso general. Así se puede enunciar el siguiente resultado:

Teorema 2.7. [20] *La ecuación diferencial fraccionaria en (2.41) es asintóticamente estable si y sólo si todas las raíces del pseudo-polinomio característico asociado tiene parte real estrictamente negativa.*

2.5. Ubicación de las raíces de un pseudo-polinomio

El teorema anterior muestra la necesidad de estudiar la ubicación de las raíces de pseudo-polinomios para la estabilidad asintótica de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Consideremos el pseudo-polinomio

$$p(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0. \quad (2.49)$$

donde $\alpha_j \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha_j = j\alpha$, $j = 1, 2, \dots, n$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Utilizando la transformación $\lambda = s^\alpha$, se obtiene un polinomio de orden entero

$$\tilde{p}(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0. \quad (2.50)$$

Sean λ_j , $j = 1, 2, \dots, n$ las n raíces distintas entre si de $\tilde{p}(\lambda)$. Estas raíces se pueden escribir como

$$\lambda_j = r_j e^{i\theta_j}, \quad r_j > 0, \quad \theta_j \in [0, 2\pi], \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

De la transformación inversa $s = \lambda^{1/\alpha}$ se sigue que los valores complejos

$$s_j = \lambda_j^{\frac{1}{\alpha}} = r_j^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\theta_j + 2k\pi}{\alpha}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

son raíces del pseudo-polinomio $p(s)$. Para analizar la ubicación de las raíces de $p(s)$ se introduce la siguiente estructura de superficie de Riemann.

Definición 2.7. La superficie de Riemann \mathcal{RS} se define como el conjunto

$$\mathcal{RS} = \{s : -\infty < \arg(s) < +\infty\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} RS_k. \quad (2.51)$$

donde RS_k es la k -ésima hoja de Riemann, descrita por

$$RS_k = \{s : -\pi + 2k\pi < \arg(s) \leq \pi + 2k\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.52)$$

La primer hoja de Riemann \mathcal{RPS} también conocida como hoja principal se obtiene cuando $k = 0$, es decir,

$$\mathcal{RPS} = \{s : -\pi < \arg(s) \leq \pi\},$$

donde la región correspondiente en el plano λ es

$$\mathcal{R}_\lambda = \{\lambda : -\alpha\pi < \arg(\lambda) \leq \alpha\pi\}.$$

Existen bastantes trabajos sobre la teoría de funciones multivaluadas y la estructura de las hojas de Riemann. Para nuestro objetivo solo es conveniente recordar que $p(s)$ es univaluada en cada RS_k y además que la \mathcal{RPS} es utilizada para describir sistemas de orden fraccionario, debido a que las raíces de $p(s)$ en \mathcal{RPS} determinan la estabilidad y respuesta dinámica de los sistemas; véase [28],[29]. Las raíces de $p(s)$ en \mathcal{RPS} son llamadas raíces principales o raíces relevantes.

Ejemplo 2.4. Sea el pseudo-polinomio siguiente

$$p_2(s) = 0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1,$$

mediante la transformación $\lambda = s^{\frac{1}{10}}$ se obtiene el siguiente polinomio entero

$$\hat{p}_2(\lambda) = 0.8\lambda^{22} + 0.5\lambda^9 + 1.$$

Las 22 raíces correspondientes y sus argumentos se muestran a continuación, igual que la ubicación física de las raíces en la Figura 2.2.

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -0.9970 \pm 0.1182i, \quad |\arg(\lambda_{1,2})| = 3.023; \quad \lambda_{11,12} = -0.025 \pm 1.011i, \quad |\arg(\lambda_{11,12})| = 1.595; \\ \lambda_{3,4} &= -0.9297 \pm 0.4414i, \quad |\arg(\lambda_{3,4})| = 2.698; \quad \lambda_{13,14} = 0.3080 \pm 0.9772i, \quad |\arg(\lambda_{13,14})| = 1.265; \\ \lambda_{5,6} &= -0.7465 \pm 0.6420i, \quad |\arg(\lambda_{5,6})| = 2.431; \quad \lambda_{15,16} = 0.5243 \pm 0.8359i, \quad |\arg(\lambda_{15,16})| = 1.010; \\ \lambda_{7,8} &= -0.5661 \pm 0.8633i, \quad |\arg(\lambda_{7,8})| = 2.151; \quad \lambda_{17,18} = 0.7793 \pm 0.6795i, \quad |\arg(\lambda_{17,18})| = 0.717; \\ \lambda_{9,10} &= -0.259 \pm 0.9625i, \quad |\arg(\lambda_{9,10})| = 1.834; \quad \lambda_{19,20} = 0.9084 \pm 0.3960i, \quad |\arg(\lambda_{19,20})| = 0.411; \\ \lambda_{21,22} &= 1.0045 \pm 0.1684i, \quad |\arg(\lambda_{21,22})| = 0.1661. \end{aligned}$$

Las raíces relevantes, es decir, que se encuentran en la primera hoja, se pueden expresar mediante la siguiente expresión

$$\mathcal{R}_\lambda = \{\lambda : -\pi/10 < \arg(\lambda) \leq \pi/10\},$$

que para este caso, son

$$\lambda_{21,22} = 1.0045 \pm 0.1684i.$$

Por lo tanto las raíces del pseudo-polinomio $s_{1,2} = (\lambda_{21,22})^{10} = -0.1084 \pm 1.19699i$ están en \mathcal{RPS} . Las demás raíces están en las hojas subsecuentes.

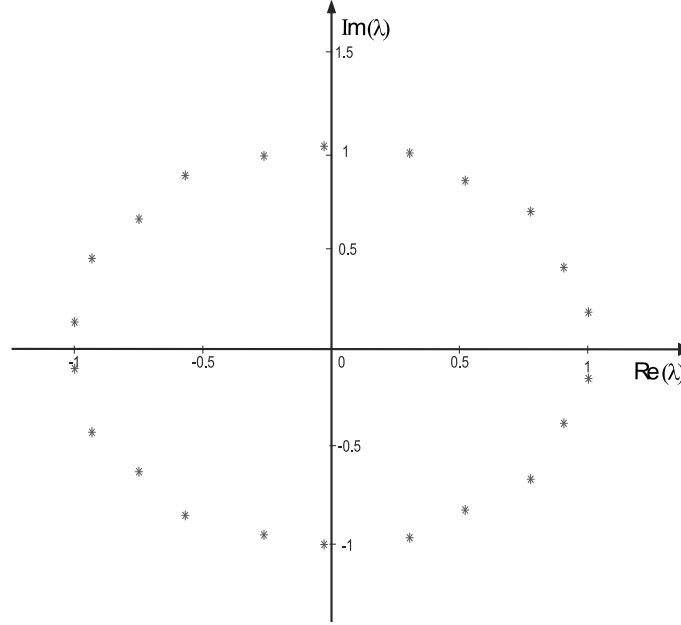


Figura 2.2: Ubicación de las raíces de $p(\lambda)$ en el plano complejo λ .

2.6. Estabilidad de pseudo-polinomios

Basados en el Teorema 2.7, adoptaremos la siguiente definición:

Definición 2.8. *El pseudo-polinomio $p(s)$ se dice estable si todas sus raíces pertenecen al semiplano abierto izquierdo del plano complejo \mathbb{C}_- .*

En el caso conmensurado, el resultado original de Matignon, muestra que la estabilidad del pseudo-polinomio $p(s)$ puede garantizarse mediante la ubicación de las raíces de un polinomio de orden entero en una región especial del plano complejo. Explícitamente, mediante la transformación $\lambda = s^\alpha$ el pseudo-polinomio $p(s)$ se transforma en el polinomio

$$\tilde{p}(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

En el plano complejo λ consideremos la región

$$M_\alpha = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\alpha\pi}{2} < \arg(\lambda) \leq \pi \text{ o } -\pi < \arg(\lambda) < -\frac{\alpha\pi}{2} \right\}. \quad (2.53)$$

véase las Figuras 2.3 y 2.4 donde se ilustra M_α para algunos valores de α . Note que M_1 es precisamente el semiplano izquierdo abierto del plano complejo λ .

El siguiente enunciado es una ligera modificación del resultado fundamental de Matignon reportado en [2]. Es importante notar que esta modificación se basa en la Definición 2.8 y la región M_α en (2.53). Adicionalmente, el enunciado en dicha referencia se establece para $0 < \alpha \leq 1$, sin embargo, en trabajos subsecuentes a [2] se muestra que el resultado es válido también para $1 < \alpha < 2$, véase, por ejemplo [29].

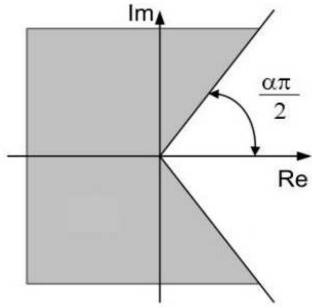


Figura 2.3: Región M_α cuando $0 < \alpha < 1$.

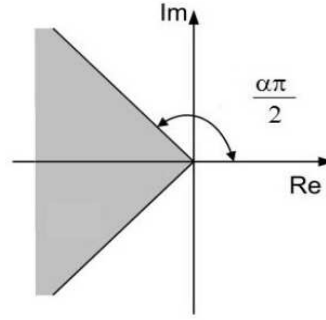


Figura 2.4: Región M_α cuando $1 < \alpha < 2$.

Lema 2.4. *El pseudo-polinomio $p(s)$ es estable si y sólo si las n raíces λ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, del polinomio $\tilde{p}(\lambda)$ pertenecen a la región M_α , para $0 < \alpha < 2$.*

Ejemplo 2.5. *Considere el siguiente pseudo-polinomio*

$$p_1(s) = s^{\frac{2}{3}} - 4s^{\frac{1}{3}} + 8. \quad (2.54)$$

Siendo $\alpha = \frac{1}{3}$, $\lambda = s^{\frac{1}{3}}$. El polinomio $\tilde{p}(\lambda)$ es

$$\tilde{p}_1(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8, \quad (2.55)$$

y la región M_α está dada por

$$M_\alpha = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} < \arg(\lambda) \leq \pi \text{ o } -\pi < \arg(\lambda) < -\frac{\pi}{6} \right\}.$$

Las raíces de $\tilde{p}(\lambda)$ son $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i = 2e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ y por tanto $\lambda_1, \lambda_2 \in M_\alpha$ y por el Lema 2.4, el pseudo-polinomio $p_1(s)$ en (2.54) es estable.

Ejemplo 2.6. *Consideremos el siguiente pseudo-polinomio*

$$p_2(s) = s^{\frac{4}{3}} + 4s^{\frac{2}{3}} + 8, \quad (2.56)$$

en este caso $\alpha = \frac{2}{3}$, y el polinomio $\tilde{p}(\lambda)$ asociado es (2.55) con las raíces $\lambda_{1,2} = 2e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ mientras que la región M_α está definida como

$$M_\alpha = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{3} < \arg(\lambda) \leq \pi \text{ o } -\pi < \arg(\lambda) < -\frac{\pi}{3} \right\}.$$

como $\arg(\lambda_1) = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3}$ y $\arg(\lambda_2) = -\frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{3}$, se sigue que $\lambda_1, \lambda_2 \notin M_\alpha$ y por el Lema 2.4, $p(s)$ no es estable.

Como se ilustra en los ejemplos anteriores, el Lema 2.4 proporciona una herramienta poderosa para estudiar la estabilidad de pseudo-polinomios de orden conmensurado. Sin embargo, para utilizarlo tenemos que calcular las raíces del polinomio $\tilde{p}(\lambda)$ lo cual no resulta conveniente. Como es bien sabido, para el caso de polinomios enteros, existen una gran cantidad de métodos para garantizar la estabilidad de polinomios sin calcular sus raíces. Así, los métodos de Routh-Hurwitz, Nyquist, Stodola y Mikhailov proporcionan criterios algebraicos y/o gráficos que permiten estudiar la estabilidad de polinomios sin calcular las raíces. Motivado en lo anterior, se ha realizado bastante investigación para extender tales criterios para el caso de pseudo-polinomios [25],[28], [30]. En esta dirección se centra nuestra aportación principal en este trabajo de tesis. Específicamente sobre la extensión del famoso criterio de Mikhailov para la estabilidad de polinomios para el caso de pseudo-polinomios. Este resultado será presentado en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

El criterio de Mikhailov para sistemas fraccionarios de orden conmensurado

En este capítulo se presentan los resultados principales de la tesis. Primeramente, revisaremos los criterios clásicos de Stodola y Mikhailov para polinomios. Posteriormente, presentaremos un resultado existente en la literatura donde se argumenta que se presenta la extensión del criterio clásico de Mikhailov para pseudo-polinomios y mostraremos que dicho resultado es incorrecto. Basado en lo anterior procedemos a presentar la modificación adecuada del criterio de Mikhailov para pseudo-polinomios. Adicionalmente, mostramos las modificaciones del criterio de Stodola para pseudo-polinomios.

3.1. Criterios de Stodola y Mikhailov para polinomios

Consideremos el polinomio

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (3.1)$$

donde $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$. El polinomio $p(s)$ se dice ser estable o Hurwitz estable si todas sus raíces se encuentran en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo. Evidentemente, la idea de calcular las raíces de $p(s)$ no es conveniente. Así, el problema real consiste en verificar la estabilidad de $p(s)$ sin calcular las raíces y utilizando únicamente los coeficientes de $p(s)$. Muchos investigadores han contribuido en este problema, entre ellos, Routh, Stodola, Hurwitz, Mikhailov, entre otros. El criterio de Stodola proporciona condiciones necesarias sencillas de verificar para polinomios estables.

Lema 3.1 (Criterio de Stodola). *Si el polinomio $p(s)$ es estable entonces todos sus coeficientes son distintos de cero y además tienen el mismo signo.*

La condición necesaria de Stodola es también suficiente para polinomios de primer y segundo orden. El criterio de Routh-Hurwitz proporciona condiciones algebraicas necesarias y suficientes en términos de los coeficientes para la estabilidad de polinomios. Por otro lado, los criterios de Nyquist y Mikhailov proporcionan soluciones gráficas al problema de estabilidad de polinomios siendo una herramienta poderosa para el análisis y diseño de sistemas retroalimentados. En este trabajo nos concentramos en el criterio de Mikhailov, como

es presentado en el libro de Popov [24]. Dado el polinomio en (3.1), el criterio de Mikhailov consiste en sustituir el valor imaginario puro $s = i\omega$, para obtener

$$p(i\omega) = X(\omega) + iY(\omega) \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} X(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \\ Y(\omega) &= a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

De (3.2) y (3.3), el valor $p(i\omega)$ se puede representar en el plano complejo como un vector para un valor dado de ω . Al variar ω en el intervalo $[0, \infty)$, el extremo del vector $p(i\omega)$ describe una curva para cada valor de ω . A la gráfica en el plano complejo obtenida en la forma descrita anteriormente se le conoce como curva de Mikhailov. El resultado de Mikhailov muestra que el signo de las partes reales de las raíces de $p(s)$ se puede concluir a través de la forma que tomará la curva de Mikhailov.

Con este fin, se definen a s_1, s_2, \dots, s_n como las raíces del polinomio $p(s)$. Entonces $p(s)$ puede reescribirse como

$$p(s) = a_n(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n).$$

Ahora consideremos los siguientes casos:

1. Una raíz real negativa, $s_1 = \alpha_1 < 0$. En este caso podemos considerar un polinomio $p_0(s) = s - s_1$ y entonces $p_0(i\omega) = i\omega - s_1$. Sea $\theta_1(\omega) = \arg(i\omega - s_1)$, dado $\omega \in [0, \infty)$, el valor complejo $p_0(i\omega)$ representa un vector v_1 y si variamos ω desde cero hasta infinito, el vector se desplaza sobre el eje imaginario. Se sigue que el vector v_1 rota en sentido contrario al reloj (sentido positivo) y

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2},$$

donde $\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}$ denota el cambio total del argumento de $p(i\omega)$ cuando ω varía de cero a infinito, véase la Figura 3.1.

2. Una raíz real positiva, $s_1 = \alpha_1 > 0$. Consideremos un polinomio $p_0(s) = s - s_1$ y entonces $p_0(i\omega) = i\omega - s_1$. Sea $\theta_1(\omega) = \arg(i\omega - s_1)$, dado $\omega \in [0, \infty)$, el valor complejo $p_0(i\omega)$ representado por el vector v_2 , se desplaza en sentido horario (sentido negativo) cuando se varía ω desde cero hasta infinito y

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = -\frac{\pi}{2},$$

véase la Figura 3.2.

3. Un par de raíces complejas conjugadas con parte real negativa, $\zeta_1 = \alpha_1 + i\omega_1$ y $\bar{\zeta}_1 = \alpha_1 - i\omega_1$, con $\alpha_1 < 0$. En este caso consideramos un polinomio

$$p_1(s) = (s - \zeta_1)(s - \bar{\zeta}_1).$$

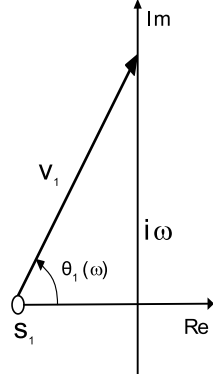


Figura 3.1: Raíz real negativa

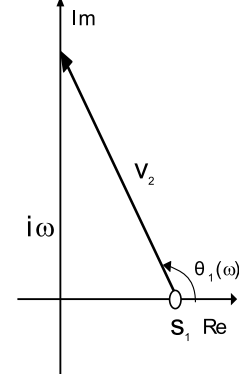


Figura 3.2: Raíz real positiva

Sean $\theta_1(\omega) = \arg(i\omega - \zeta_1)$ y $\theta_2(\omega) = \arg(i\omega - \bar{\zeta}_1)$, dado que $\omega \in [0, \infty)$, los valores complejo de $p_1(i\omega)$ representan los vectores siguientes $v_1 = i\omega - \zeta_1$ y $v_2 = i\omega - \bar{\zeta}_1$, ambos vectores giran en sentido anti-horario cuando ω varia desde cero hasta infinito. Entonces, para el vector v_1 se tiene que

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} + \gamma,$$

en cambio para el vector v_2

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

véase la Figura 3.3.

4. Un par de raíces complejas conjugadas con parte real positiva, $\zeta_1 = \alpha_1 + i\omega_1$ y $\bar{\zeta}_1 = \alpha_1 - i\omega_1$, con $\alpha_1 > 0$. Para este caso, consideremos un polinomio

$$p_1(s) = (s - \zeta_1)(s - \bar{\zeta}_1).$$

Sean $\theta_1(\omega) = \arg(i\omega - \zeta_1)$ y $\theta_2(\omega) = \arg(i\omega - \bar{\zeta}_1)$, dado que $\omega \in [0, \infty)$, los valores complejos de $p_1(i\omega)$ representan los vectores v_1 y v_2 , que están descritos de la siguiente manera $v_1 = i\omega - \zeta_1$ y $v_2 = i\omega - \bar{\zeta}_1$, los cuales giran en sentido horario cuando ω varia desde cero hasta infinito. Entonces se sigue que para el vector v_1 se tiene que

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = -\frac{\pi}{2} + \gamma,$$

en cambio para el vector v_2

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = -\frac{\pi}{2} - \gamma,$$

véase la Figura 3.4.

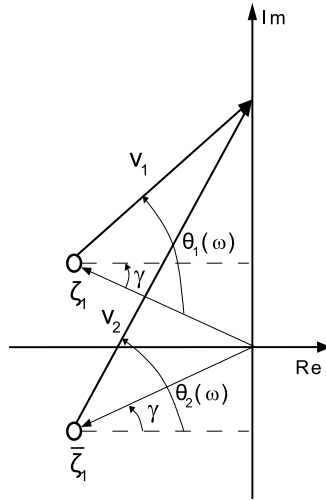


Figura 3.3: Raíces complejas con parte real negativa.

Ahora, dado que el polinomio $p(i\omega)$ tiene n raíces diferentes se puede factorizar en un producto de la forma

$$p(i\omega) = a_n(i\omega - s_1) \cdots (i\omega - s_m)(i\omega - \zeta_1)(i\omega - \bar{\zeta}_1) \cdots (i\omega - \zeta_l)(i\omega - \bar{\zeta}_l),$$

en donde s_j , $j = 1, 2, \dots, m$ son raíces reales y $\zeta_j, \bar{\zeta}_j$, $j = 1, 2, \dots, l$, son raíces complejas con su respectivo par conjugado. Es claro que se debe cumplir que $n = m + 2l$. Entonces, tenemos

$$\arg p(i\omega) = \arg(a_n) + \sum_{j=1}^m \arg(i\omega - s_j) + \sum_{j=1}^l \arg(i\omega - \zeta_j) + \sum_{j=1}^l \arg(i\omega - \bar{\zeta}_j). \quad (3.4)$$

Del análisis de los casos 1 al 4, se sigue que cada raíz real contribuirá con $+\frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{2}$, dependiendo del signo, al cambio total del argumento de $p(i\omega)$. Por otro lado cada par de raíces complejas conjugadas contribuirá con $+2\frac{\pi}{2}$ o $-2\frac{\pi}{2}$, dependiendo del signo de la parte real, al cambio total del argumento de $p(i\omega)$.

Por lo tanto, si $p(s)$ tiene p raíces con parte real positiva y $(n - p)$ raíces con parte real negativa, el cambio total del argumento de $p(i\omega)$ cuando ω varía desde cero hasta infinito es:

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = (n - p) \left(\frac{\pi}{2} \right) - p \left(\frac{\pi}{2} \right) = (n - 2p) \frac{\pi}{2}. \quad (3.5)$$

Es importante notar que en la relación anterior no se consideran los casos de raíces en cero, al infinito o raíces puramente imaginarias. En el caso de raíces en cero, el término constante a_0 en el polinomio (3.1) es igual a cero, lo cual implica que la curva de Mikhailov comenzará en el origen. En el caso de un par de raíces puramente imaginarias $x = \pm i\omega_0$ el polinomio en (3.1) se hace cero al sustituir $x = i\omega_0$, por lo tanto la curva de Mikhailov pasa por el origen en el punto correspondiente al valor $\omega = \omega_0$. Así la curva de Mikhailov nos permite conocer

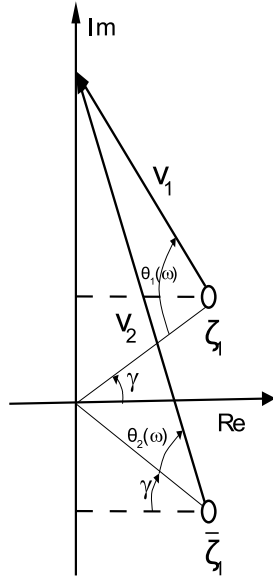


Figura 3.4: Raíces complejas con parte real positiva.

si el polinomio tiene alguna raíz compleja pura y cual es su valor.

El criterio de estabilidad de Mikhailov se establece tomando en cuenta que para la estabilidad de $p(s)$ es necesario y suficiente que todas las raíces de $p(s)$ tengan parte real negativa, lo que implica que en la ecuación (3.5) tengamos que $p = 0$. De aquí se llega el siguiente resultado:

Teorema 3.1 (Criterio de Mikhailov). *El polinomio $p(s)$ en (3.1) es estable si y sólo si*

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{n\pi}{2}. \quad (3.6)$$

Para ilustrar el resultado anterior, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. *Considere el siguiente polinomio de séptimo orden:*

$$p(s) = s^7 + 7s^6 + 23s^5 + 37s^4 + 56s^3 + 36s^2 + 12s + 4, \quad (3.7)$$

La Figura en 3.5 muestra la curva de Mikhailov para el polinomio $p(s)$ en (3.7), en la misma figura, se puede ver un acercamiento alrededor del origen de dicha curva. Como se puede observar la curva corre en sentido positivo (anti-horario) y después de cruzar seis cuadrantes permanece en un séptimo cuadrante tendiendo paralelamente al eje vertical cuando $\omega \rightarrow \infty$. Así el cambio total del argumento es

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{7\pi}{2},$$

y consecuentemente $p(s)$ en (3.7) es estable.

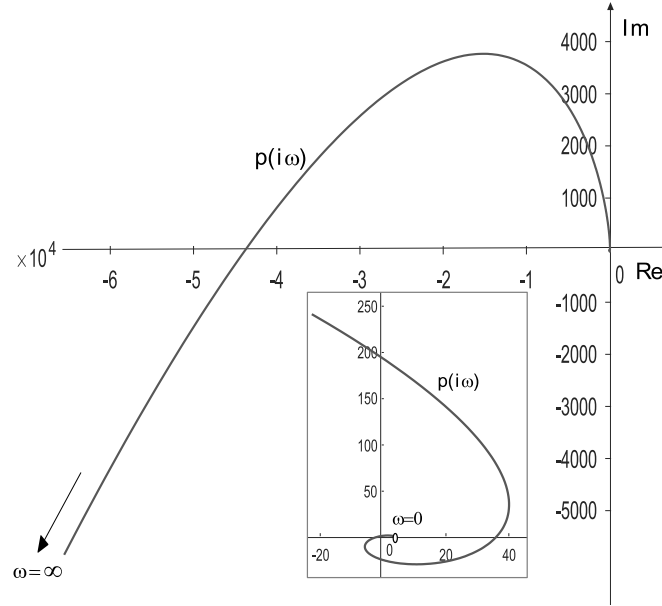


Figura 3.5: Curva de Mikhailov para $p(s)$ en (3.7).

Ejemplo 3.2. Considere el siguiente polinomio de quinto orden :

$$p(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 46s^2 + 89s + 260. \quad (3.8)$$

La Figura 3.6 muestra la curva de Mikhailov para el polinomio $p(s)$ en (3.8). Se observa que inicialmente la curva corre en sentido positivo (anti-horario) y cruza el eje imaginario, para después correr en sentido negativo y volver a cruzar el eje imaginario para finalmente tender paralelamente al eje imaginario cuando $\omega \rightarrow \infty$.

Así

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.9)$$

y consecuentemente $p(s)$ no es estable. De la fórmula (3.5) se tiene que

$$(n - 2p) \frac{\pi}{2} = (5 - 2p) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

lo que implica que $p = 2$, es decir, $p(s)$ tiene 2 raíces con parte real positiva.

3.2. Criterio de Stodola y Mikhailov para sistemas de orden fraccionario

A partir de los resultados de Matignon [2] y Bonnet [20] para la estabilidad de sistemas de orden fraccionario, se han realizado bastantes trabajos de investigación para extender los criterios de Routh-Hurwitz [22], Nyquist [23] y Mikhailov [25] para pseudo-polinomos.

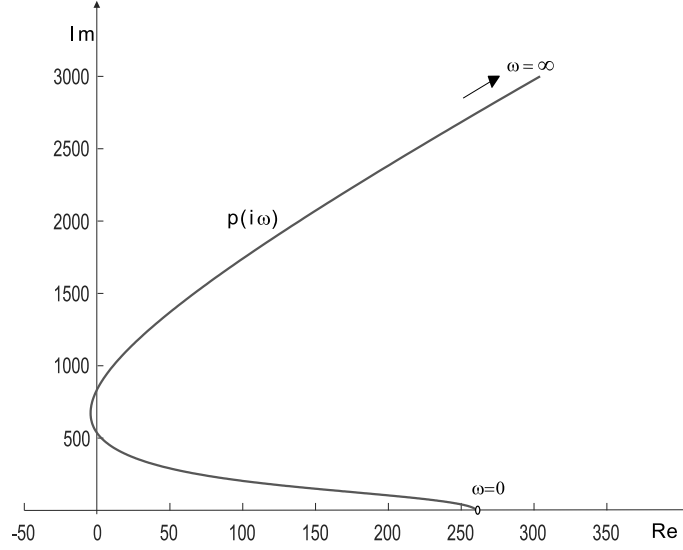


Figura 3.6: Curva de Mikhailov para $p(s)$ en (3.8).

3.2.1. Criterio de Mikhailov erróneo

En [25] se presenta el criterio de Mikhailov para sistemas lineales fraccionarios de orden conmensurado. Sin embargo, este resultado no es correcto. Explícitamente en [25] se presenta el siguiente resultado:

El pseudo-polinomio $p(s)$, con $0 < \alpha \leq 1$, es estable si y sólo si

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_0^\infty = n \left(\frac{\pi}{2} \right), \quad (3.10)$$

lo que significa que la gráfica de $p(i\omega)$ cuando ω crece de 0 a $+\infty$ corre en sentido positivo (antihorario), n cuadrantes del plano complejo, sin pasar por el origen.

En este sentido, se observa que la condición (3.10), coincide con la condición clásica del criterio de estabilidad de Mikhailov para polinomios establecida en el Teorema 3.1 y no refleja la naturaleza fraccionaria de $p(s)$. Con el objetivo de verificar la validez del resultado en (3.10), consideremos el siguiente pseudo-polinomio:

$$p(s) = s^{2/8} - 2s^{1/8} + 3. \quad (3.11)$$

En este caso tenemos que $\alpha_n = 2\left(\frac{1}{8}\right)$, es decir, $n = 2$ y $\alpha = \frac{1}{8}$. El polinomio de orden entero es entonces de la forma

$$\tilde{p}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3,$$

cuyas raíces $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$ pertenecen a la región $M_{\frac{1}{8}}$. Entonces podemos concluir por el Lema propuesto por Matignon [2] expuesto en el capítulo 2, que el pseudo-polinomio en (3.11) es estable. Por otro lado, la curva de Mikhailov para $p(s)$ en (3.11) se muestra en la Figura 3.7, en donde se observa que el cambio total del argumento tiende asintóticamente

a $\pi/8$ y no a $n(\frac{\pi}{2}) = 2(\frac{\pi}{2}) = \pi$, como se establece en (3.10). Adicionalmente se observa que la curva corre en sentido negativo (dirección horaria) y no en sentido positivo (anti-horario) como lo establece la referencia [25]. Así, el pseudo-polinomio (3.11) es claramente un contra-ejemplo al resultado presentado en [25].

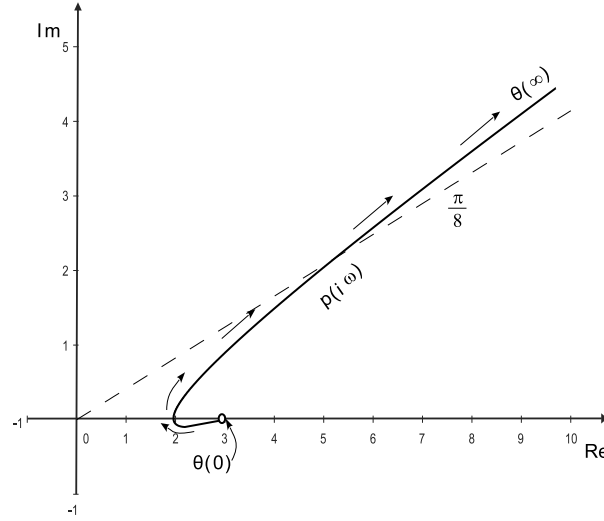


Figura 3.7: Curva de Mikhailov para $p(s)$ en (3.11).

3.3. Criterio de Stodola y Mikhailov para sistemas de orden fraccionario

Antes de establecer el criterio de Mikhailov, presentaremos las condiciones necesarias de estabilidad para el caso de sistemas de orden fraccionario. El criterio de Stodola para el caso de pseudo-polinomios es uno de los resultados principales de este trabajo de tesis, correspondientes a los Lemas 3.2 y 3.3 que se enuncian a continuación, mismos que se encuentran publicados en el artículo [31].

Supongamos un pseudo-polinomio descrito de la siguiente manera:

$$p(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (3.12)$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1 > 0$. Además $p(s)$ es de orden conmensurado, es decir, $\alpha_k = k\alpha$, ($k = 1, 2, \dots, n$), para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lema 3.2 (Criterio de Stodola $1 \leq \alpha < 2$). *Sea $1 \leq \alpha < 2$. Si $p(s)$ es estable entonces todos los coeficientes son distintos de cero y tienen el mismo signo.*

Demostración. Si $p(s)$ es estable entonces todas las raíces de $\tilde{p}(\lambda)$ pertenecen a M_α . Dado que la región $M_\alpha \subseteq \mathbb{C}_-$, se sigue que $\tilde{p}(\lambda)$ es un polinomio Hurwitz y, por lo tanto el resultado se sigue del criterio de Stodola para el caso entero en Lema 3.1. \square

Lema 3.3 (Criterio de Stodola $0 < \alpha < 1$). Sea $0 < \alpha < 1$. Si $p(s)$ es estable, entonces los coeficientes a_n y a_0 son distintos de cero y tienen el mismo signo.

Demostración. Por los argumentos anteriormente expuestos, claramente se requiere $a_n \neq 0$. Si $p(s)$ es estable, entonces todas las raíces de $\tilde{p}(\lambda)$ pertenecen a M_α . Dado que $M_\alpha \not\subseteq \mathbb{C}_-$, el polinomio $\tilde{p}(\lambda)$ puede tener raíces complejas conjugadas con parte real positiva, pero no puede tener raíces reales positivas ni raíces cero. La no existencia de raíces cero implica que $a_0 \neq 0$; ya que si este no fuera el caso entonces podemos escribir $\tilde{p}(\lambda) = \lambda^m \tilde{q}(\lambda)$, en donde $m < n$ y $\tilde{q}(\lambda)$ es un polinomio de orden $n - m$ con coeficientes distintos de cero, lo que implicaría la existencia de una raíz cero de $\tilde{p}(\lambda)$.

Supongamos que $a_n > 0$ y $a_0 < 0$. Para λ real, tenemos

$$\tilde{p}(0) = a_0 < 0 \text{ y } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{p}(\lambda) = +\infty.$$

Entonces, por la continuidad de $\tilde{p}(\lambda)$ con respecto a λ , implica que $\tilde{p}(\lambda)$ tiene al menos una raíz real positiva, lo cual contradice la estabilidad de $p(s)$. Ahora supongamos que $a_n < 0$ y $a_0 > 0$. Para λ real, tenemos

$$\tilde{p}(0) = a_0 > 0 \text{ y } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{p}(\lambda) = -\infty,$$

por lo tanto, $\tilde{p}(\lambda)$ tiene al menos una raíz real positiva, contradiciendo nuevamente la estabilidad de $p(s)$. Así, concluimos que los coeficientes a_n y a_0 no deben ser cero y tener el mismo signo. \square

Es importante mencionar que el Lema 3.3 es equivalente al Lema 9.3 que aparece en [32] sin embargo este es obtenido utilizando el resultado del criterio de Mikhailov en la referencia [25], mismo que se mostró con anterioridad que es incorrecto.

A continuación se presenta la modificación del criterio de estabilidad de Mikhailov para el pseudo-polinomio $p(s)$. Dicho resultado se obtiene siguiendo las ideas originales de [24] y explotando el hecho de que la estabilidad de $p(s)$ está determinada por la ubicación de las raíces de $\tilde{p}(\lambda)$ en M_α .

Primeramente observemos que de los Lemas 3.3 y 3.2 para el problema de estabilidad de $p(s)$ podemos asumir sin pérdida de generalidad que los coeficientes a_n y a_0 son positivos. Por lo tanto se tiene que $p(0) = a_0 > 0$ y en consecuencia la curva de Mikhailov siempre comienza en el eje real positivo, tal y como ocurre en el caso polinomial.

Ahora considere los siguientes pseudo-polinomios para los casos de raíces reales y raíces complejas conjugadas:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0(\lambda) &= (\lambda - \lambda_0), \\ \tilde{p}_1(\lambda) &= (\lambda - \zeta_1)(\lambda - \bar{\zeta}_1), \end{aligned}$$

donde $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \neq 0$, $\zeta_1 = \rho_1 e^{\phi_1 i}$ y $\bar{\zeta}_1 = \rho_1 e^{-\phi_1 i}$, con $\rho_1 > 0$ y $\phi_1 \in (0, \pi)$.

Sea $\theta_0(r) = \arg\left(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \lambda_0\right)$, $\theta_1(r) = \arg\left(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{\phi_1 i}\right)$ y $\theta_2(r) = \arg\left(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{-\phi_1 i}\right)$,

tal que

$$\theta_0(r) = \arg\left(\tilde{p}_0\left(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i}\right)\right),$$

$$\theta(r) = \theta_1(r) + \theta_2(r) = \arg\left(\tilde{p}_1\left(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i}\right)\right).$$

Los Lemas siguientes caracterizan el cambio total en $\theta_0(r)$, $\theta_1(r)$, $\theta_2(r)$ y $\theta(r)$ cuando r varía desde 0 hasta ∞ , esenciales para obtener el resultado de estabilidad de Mikhailov.

Lema 3.4. Para $\theta_0(r)$ se satisface lo siguiente:

1. Si $\lambda_0 < 0$ entonces $\theta_0(r)$ es una función creciente de r en el intervalo $[0, \infty)$ y

$$\Delta\theta_0(r)\Big|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (3.13)$$

2. Si $\lambda_0 > 0$ entonces $\theta_0(r)$ es una función decreciente de r en el intervalo $[0, \infty)$ y

$$\Delta\theta_0(r)\Big|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2} - \pi, \quad (3.14)$$

Demostración. En aras de la brevedad, probaremos la afirmación del caso cuando $0 < \alpha < 1$. La prueba del caso $1 \leq \alpha < 2$ se comprueba bajo la misma línea de argumentos.

1. Cuando $\lambda_0 < 0$, tenemos que $\theta_0(0) = \arg(-\lambda_0) = \pi$. Es geoméricamente claro, véase Figura 3.8 y 3.9, que $\theta_0(r)$ es una función creciente (el vector $v = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \lambda_0$ gira en sentido anti-horario) para r en el intervalo $[0, \infty)$, además $\theta_0(r) \rightarrow \frac{\alpha\pi}{2}$ cuando $r \rightarrow \infty$, lo que nos lleva a la expresión en (3.13).

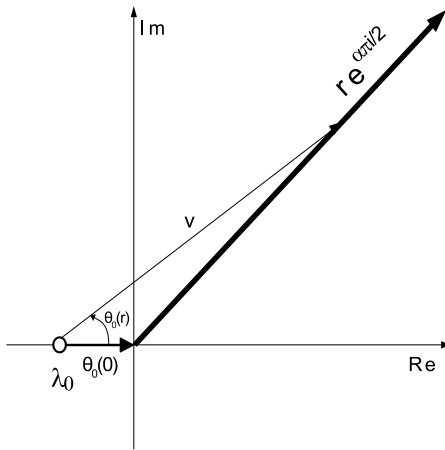


Figura 3.8: Raíz real negativa cuando $0 < \alpha < 1$.

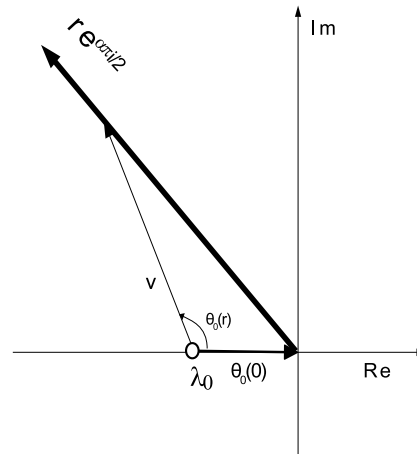


Figura 3.9: Raíz real negativa cuando $1 < \alpha < 2$.

2. Cuando $\lambda_0 > 0$, tenemos $\theta_0(r) = \pi$. De la Figuras 3.10 y 3.11 es geoméricamente claro

que $\theta_0(r)$ es una función decreciente (el vector $v = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \lambda_0$ gira en sentido negativo (horario)) para r en el intervalo $[0, \infty)$, además $\theta_0(r) \rightarrow \alpha\frac{\pi}{2}$ cuando $r \rightarrow \infty$, lo que nos lleva a la expresión (3.14). \square

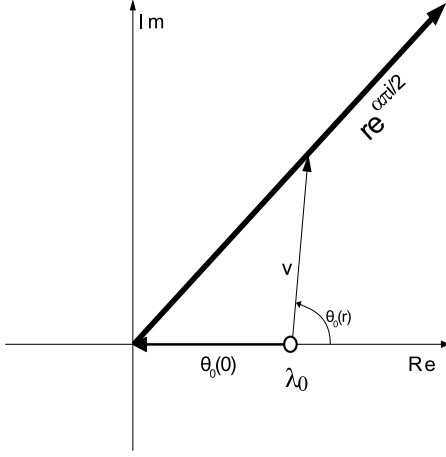


Figura 3.10: Raíz real positiva cuando $0 < \alpha < 1$.

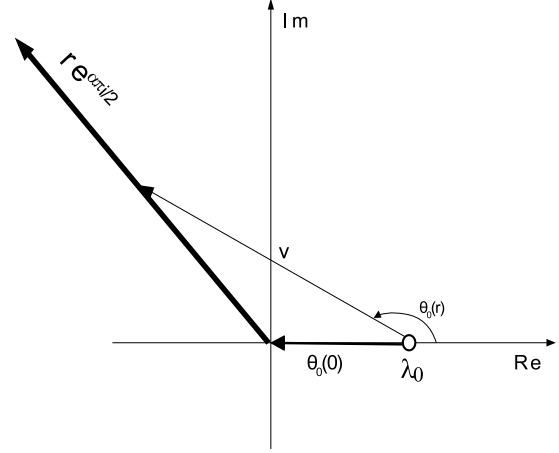


Figura 3.11: Raíz real positiva cuando $1 < \alpha < 2$.

Lema 3.5. Para $\theta_1(r)$, $\theta_2(r)$ y $\theta(r)$ se cumple lo siguiente:

1. Si $\frac{\alpha\pi}{2} < \phi_1 < \pi$, entonces $\theta_1(r)$ es una función creciente y $\theta_2(r)$ es una función decreciente cuando $0 < \alpha < 1$, mientras que cuando $1 \leq \alpha < 2$, $\theta_1(r)$ y $\theta_2(r)$ son ambas funciones decrecientes para r en el intervalo $[0, \infty)$ y

$$\Delta\theta_1(r)\Big|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2} - (-\pi + \phi_1), \quad (3.15)$$

$$\Delta\theta_2(r)\Big|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2} - (\pi - \phi_1), \quad (3.16)$$

que implica

$$\Delta\theta(r)\Big|_0^\infty = 2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right). \quad (3.17)$$

2. Si $0 < \phi_1 < \frac{\alpha\pi}{2}$, entonces $\theta_1(r)$ y $\theta_2(r)$ son ambas funciones decrecientes cuando $0 < \alpha < 1$, mientras que cuando $1 \leq \alpha < 2$, $\theta_1(r)$ es decreciente y $\theta_2(r)$ es creciente para r en el intervalo $[0, \infty)$ y

$$\Delta\theta_1(r)\Big|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2} - (\pi + \phi_1), \quad (3.18)$$

$$\Delta\theta_2(r)\Big|_0^\infty = \frac{\alpha\pi}{2} - (\pi - \phi_1), \quad (3.19)$$

que implica

$$\Delta\theta(r)\Big|_0^\infty = 2\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \pi\right). \quad (3.20)$$

Demostración.

1. a) Cuando $\frac{\alpha\pi}{2} < \phi_1 < \pi$ y $0 < \alpha < 1$, véase Figura 3.12, tenemos

$$\theta_1(0) = \arg(-\rho_1 e^{\phi_1 i}) = \arg(-\zeta_1) = -\pi + \phi_1.$$

Es geoméricamente claro que $\theta_1(r)$ es creciente (el vector $v_1 = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{\phi_1 i}$ gira en sentido anti-horario) cuando r aumenta, además $\theta_1(r) \rightarrow \frac{\alpha\pi}{2}$ cuando $r \rightarrow \infty$, y de esto se obtiene (3.15). De igual forma, tal como se observa en la Figura 3.12 tenemos que,

$$\theta_2(0) = \arg(-\rho_1 e^{-\phi_1 i}) = \arg(-\bar{\zeta}_1) = \pi - \phi_1,$$

donde es claro que $\theta_2(r)$ decrece (el vector $v_2 = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{-\phi_1 i}$ gira en sentido horario) cuando r aumenta y $\theta_2(r) \rightarrow \frac{\alpha\pi}{2}$ cuando $r \rightarrow \infty$ y así se obtiene la expresión en (3.16). Por lo tanto, el cambio total de $\theta(r)$, cuando r va desde 0 hasta ∞ , está dado por (3.17).

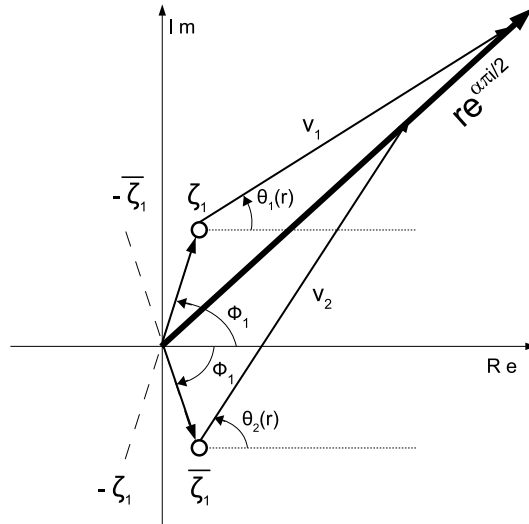


Figura 3.12: Raíces estables complejas conjugadas cuando $0 < \alpha < 1$.

1. b) Cuando $\frac{\alpha\pi}{2} < \phi_1 < \pi$ y $1 \leq \alpha < 2$, véase Figura 3.13. Siguiendo la misma geometría, se puede ver que las expresiones dadas en (3.15), (3.16) y (3.17), se siguen cumpliendo. Particularmente se tiene que $\theta_1(0) = \arg(-\zeta_1) = \arg(-\rho_1 e^{\phi_1 i})$ y $\theta_2(0) = \arg(-\bar{\zeta}_1) = \arg(-\rho_1 e^{-\phi_1 i})$. En el caso de $\theta_1(r)$ y $\theta_2(r)$ ambas son funciones crecientes (en donde los vectores $v_1 = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{\phi_1 i}$ y $v_2 = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{-\phi_1 i}$ corren en sentido contrario a las manecillas del reloj) cuando r crece desde 0 hasta ∞ .

2. a) Cuando $0 < \phi_1 < \frac{\alpha\pi}{2}$ y $0 < \alpha < 1$, véase Figura 3.14, tenemos

$$\theta_1(0) = \arg(-\zeta_1) = \arg(-\rho_1 e^{\phi_1 i}) = \pi + \phi_1.$$

Geoméricamente se observa que $\theta_1(r)$ decrece (el vector $v_1 = re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \rho_1 e^{\phi_1 i}$ gira en sentido horario) cuando r crece y $\theta_1(r) \rightarrow \frac{\alpha\pi}{2}$ cuando $r \rightarrow \infty$ y así se obtiene la expresión (3.18). De

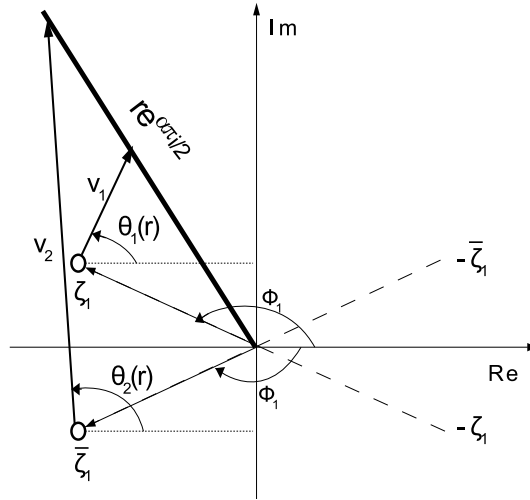


Figura 3.13: Raíces estables complejas conjugadas cuando $1 \leq \alpha < 2$.

igual forma, tal como se observa en la Figura 3.14, donde tenemos

$$\theta_2(0) = \arg(-\bar{\zeta}_1) = \arg(-\rho_1 e^{-\phi_1 i}) = \pi - \phi_1.$$

Geoméricamente, se puede ver que la función $\theta_2(r)$ decrece (el vector $v_2 = r e^{\frac{\alpha r}{2} i} - \rho_1 e^{-\phi_1 i}$ gira en sentido horario) cuando r crece y $\theta_2(r) \rightarrow \frac{\alpha \pi}{2}$ cuando $r \rightarrow \infty$, obteniéndose la expresión en (3.19). Finalmente, el cambio total del argumento $\theta(r)$, cuando r varia desde 0 hasta infinito, está dado por (3.20).

2. b) Cuando $0 < \phi_1 < \frac{\alpha \pi}{2}$ y $1 \leq \alpha < 2$, véase Figura 3.15. Nuevamente, utilizando la misma geometría se puede llegar a las expresiones en (3.18), (3.19) y (3.20). Particularmente se observa que $\theta_1(0) = \arg(-\zeta_1) = \arg(-\rho_1 e^{\phi_1 i})$ y por otro lado $\theta_2(0) = \arg(-\bar{\zeta}_1) = \arg(-\rho_1 e^{-\phi_1 i})$. Para el caso de $\theta_1(r)$ decrece (el vector $v_1 = r e^{\frac{\alpha r}{2} i} - \rho_1 e^{\phi_1 i}$ gira en sentido horario) mientras que $\theta_2(r)$ crece (el vector $v_2 = r e^{\frac{\alpha r}{2} i} - \rho_1 e^{-\phi_1 i}$ gira en sentido anti-horario) cuando $r \rightarrow \infty$. \square

Con los Lemas anteriores estamos listos para enunciar el resultado principal de esta tesis, este es el criterio de estabilidad de Mikhailov para pseudo-polinomios de orden conmensurado el cual fue reportado en [31].

Teorema 3.2 (Criterio de Mikhailov). *El pseudopolinomio $p(s)$ es estable si y sólo si*

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_0^\infty = \alpha_n \left(\frac{\pi}{2} \right) = \alpha \left(\frac{n\pi}{2} \right), \quad (3.21)$$

donde $0 < \alpha < 2$.

Demostración. Consideraremos solo pseudo-polinomios $p(s)$ que cumplen con los Lemas 3.2 y 3.3, dado que al no satisfacerse esta condición necesaria no tiene caso investigar su

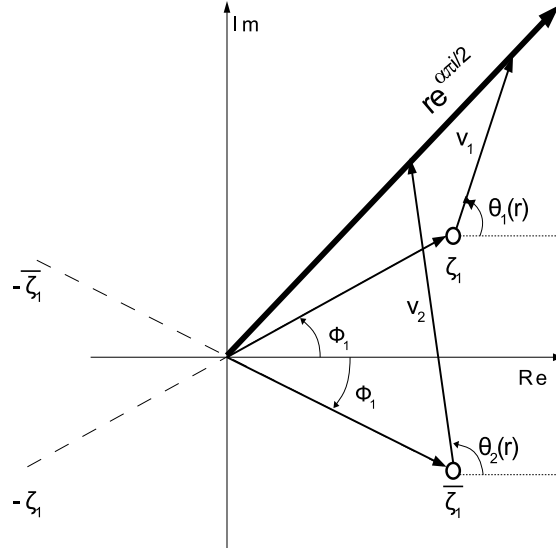


Figura 3.14: Raíces inestables complejas conjugadas cuando $0 < \alpha < 1$.

estabilidad. Adicionalmente, asumamos que $p(s)$ no tiene raíces imaginarias puras. Por medio de la transformación $\lambda = s^\alpha$, un punto en el plano complejo $s = i\omega = \omega e^{\frac{\pi}{2}i}$ es transformado en el plano complejo λ a $\lambda = \omega^\alpha e^{\frac{\alpha\pi}{2}i}$. Por lo tanto se tiene que

$$p(i\omega) = \tilde{p}(\omega^\alpha e^{\frac{\alpha\pi}{2}i}).$$

De esta igualdad se sigue que el problema de la medición del cambio total de argumento de $p(i\omega)$ cuando ω varía desde 0 hasta ∞ es equivalente al problema de medir el cambio total del argumento de $\tilde{p}(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i})$ cuando r varía desde 0 hasta ∞ . El polinomio entero $\tilde{p}(\lambda)$ tiene n raíces diferentes en el plano complejo λ y puede factorizarse como un producto de la forma

$$\tilde{p}(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_m) \cdots (\lambda - \zeta_1)(\lambda - \bar{\zeta}_1) \cdots (\lambda - \zeta_l)(\lambda - \bar{\zeta}_l), \quad (3.22)$$

en donde $\lambda_j, j = 1, \dots, m$ son raíces reales y $\zeta_j, \bar{\zeta}_j, j = 1, \dots, l$, son raíces complejas conjugadas. Claramente se cumple que $n = m + 2l$. Entonces, tenemos

$$\arg \tilde{p}(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i}) = \arg(a_n) + \sum_{j=1}^m \arg(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \lambda_j) + \dots + \sum_{j=1}^l \arg(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \zeta_j) + \sum_{j=1}^l \arg(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i} - \bar{\zeta}_j). \quad (3.23)$$

La condición necesaria garantiza que el polinomio $\tilde{p}(\lambda)$ no tiene raíces cero ni raíces reales positivas. Por otro lado, la hipótesis de que $p(s)$ no tiene raíces imaginarias puras implica que $\tilde{p}(\lambda)$ no tiene raíces complejas conjugadas en ∂M_α , la frontera de la región M_α . Sea p el número de raíces de $\tilde{p}(\lambda)$ que pertenecen a la región $(M_\alpha \cup \partial M_\alpha) \setminus \mathbb{C}$. Entonces existen $(n - p)$ raíces de $\tilde{p}(\lambda)$ que pertenecen a M_α . De los Lemas 3.4 y 3.5 se sigue que cada una de las raíces que pertenecen a M_α contribuyen $\frac{\alpha\pi}{2}$ al cambio total del argumento de $\tilde{p}(re^{\frac{\alpha\pi}{2}i})$. De la misma manera las raíces que pertenecen a $(M_\alpha \cup \partial M_\alpha) \setminus \mathbb{C}$ aportan $(\frac{\alpha\pi}{2} - \pi)$ al cambio

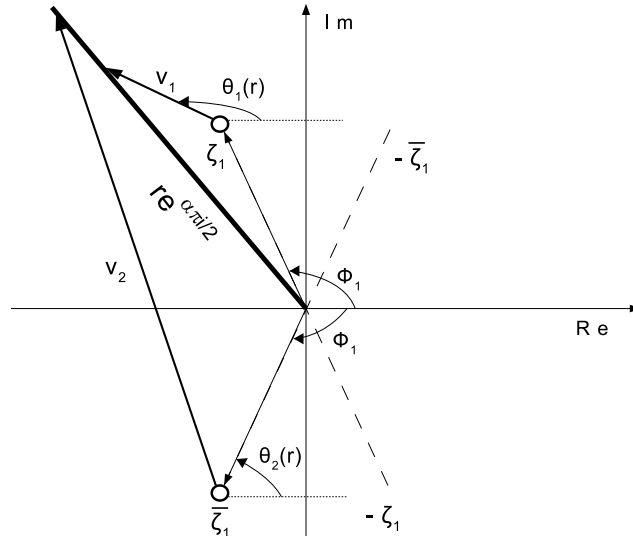


Figura 3.15: Raíces inestables complejas conjugadas cuando $1 \leq \alpha < 2$.

total de argumento. Por lo tanto de (3.22) y (3.23) obtenemos

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_0^\infty = (n-p) \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) + p \left(\frac{\alpha\pi}{2} - \pi \right). \quad (3.24)$$

Para la estabilidad de $p(s)$ es necesario y suficiente que $\tilde{p}(\lambda)$ tenga todas sus raíces en M_α , en otras palabras, que $p = 0$. Haciendo $p = 0$ en (3.24) obtenemos (3.21). \square

Observemos que en el Teorema 3.2 no establece nada sobre la dirección (positiva o negativa) de la curva de Mikhailov. De hecho, del Lema 3.5 para el caso de raíces complejas estables, cuando $0 < \alpha < 1$, se tiene que $\theta_1(r)$ es una función creciente pero, sin embargo, $\theta_2(r)$ es decreciente y, por tanto $\theta(r) = \theta_1(r) + \theta_2(r)$ puede ser creciente o decreciente cuando r aumenta desde 0 hasta ∞ . Como consecuencia tenemos que raíces estables complejas conjugadas no necesariamente implican que la dirección de la curva de Mikhailov corra en sentido positivo.

En esta parte, se presentan algunos ejemplos que ilustran el criterio de Stodola y la modificación del criterio de Mikhailov para el caso de pseudo-polinomios, primeramente se desarrolla el contra-ejemplo al Teorema [25]. Posteriormente se muestran ejemplos de pseudo-polinomios ampliamente estudiados en la literatura [33] [28], de los cuales se conoce su estabilidad por medio del cálculo explícito de las raíces del pseudo-polinomio, se explora el caso estable y para el caso inestable cuando $0 < \alpha < 1$. Por otro lado, se muestran ejemplos para el caso de $1 \leq \alpha < 2$, en particular cuando α es irracional. Y por último un ejemplo para el caso de raíces complejas puras, para observar el comportamiento que toma la curva de Mikhailov, ya que en el Teorema 3.2 sólo es válido asumiendo el pseudo-polinomio no tiene raíces complejas puras.

Ejemplo 3.3. Considere el mismo pseudo-polinomio utilizado para el contra-ejemplo en

(3.11):

$$p(s) = s^{2/8} - 2s^{1/8} + 3. \quad (3.25)$$

En este caso $n = 2$, $a_n = 1$ y $a_0 = 3$ por lo tanto, la condición necesaria del Lema 3.3 se satisface. Ahora con la finalidad de investigar la estabilidad de (3.25) basta observar la Figura 3.7 y verificar que se satisface la condición del Teorema 3.2. Dado que $\alpha_n = \frac{2}{8}$ y $\alpha = \frac{1}{8}$, se sigue que

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_0^\infty = \alpha_n \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

Se puede ver en la Figura 3.7 que la curva de Mikhailov corre en sentido negativo además de que el argumento de $p(i\omega)$ inicialmente es negativo y decreciente, luego aumenta pasando por cero y después por $\pi/8$ para finalmente decrecer hacia $\pi/8$, es decir, el cambio total del argumento tiende asintóticamente a $\alpha\pi/2$. Es importante destacar que el comportamiento de la curva de Mikhailov en la Figura 3.7 no ocurre en el caso de polinomios. En conclusión, del Teorema 3.2 se sigue que (3.25) es estable. Este resultado se puede verificar por medio del cálculo de sus raíces.

Ejemplo 3.4. Considere el pseudo-polinomio

$$p(s) = 0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1 \quad (3.26)$$

el cual ha sido ampliamente estudiado en la literatura, véase por ejemplo [33]. En este caso tenemos $\alpha_n = 22 \left(\frac{1}{10} \right) = 2.2$ de donde $n = 22$ y $\alpha = \frac{1}{10}$. Primeramente, observamos que se satisface la condición necesaria del Lema 3.3 puesto que $a_n = 0.8$ y $a_0 = 1$.

La curva de Mikhailov de (3.26) se muestra en la Figura 3.16. En dicha figura se observa que el cambio total del argumento tiende asintóticamente a $\frac{11\pi}{10}$, que es igual a $\alpha_n \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, del Teorema 3.2 se concluye que (3.26) es estable, lo cual coincide con lo obtenido mediante el cálculo de las raíces en [33] y expuesto en el capítulo 2 de esta tesis. Note que, en este caso, la curva corre en dirección positiva.

Ejemplo 3.5. Considere el siguiente pseudo-polinomio [28]:

$$p(s) = s - 2s^{1/2} + 1.25. \quad (3.27)$$

En este caso tenemos $\alpha_n = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$, $n = 2$ y $\alpha = \frac{1}{2}$. Claramente, se satisface la condición necesaria del Lema 3.3. Se observa la curva de Mikhailov de (3.27) en la Figura 3.17 corre en dirección negativa y el cambio total del argumento tiende asintóticamente a $-\frac{3\pi}{2}$. Se sigue del Teorema 3.2 que el pseudo-polinomio en (3.27) es inestable.

Por otro lado, podemos ilustrar que la curva de Mikhailov nos permite conocer el número de raíces inestables. Primeramente, note que (3.27) no tiene raíces puras imaginarias, dado que la curva no pasa por el origen. Entonces, de la formula (3.24) se obtiene directamente que $p = 2$, por lo tanto (3.27) debe tener dos raíces complejas conjugadas con parte real positiva. El resultado de estabilidad se puede verificar nuevamente mediante el cálculo de las raíces de (3.27) en [28].

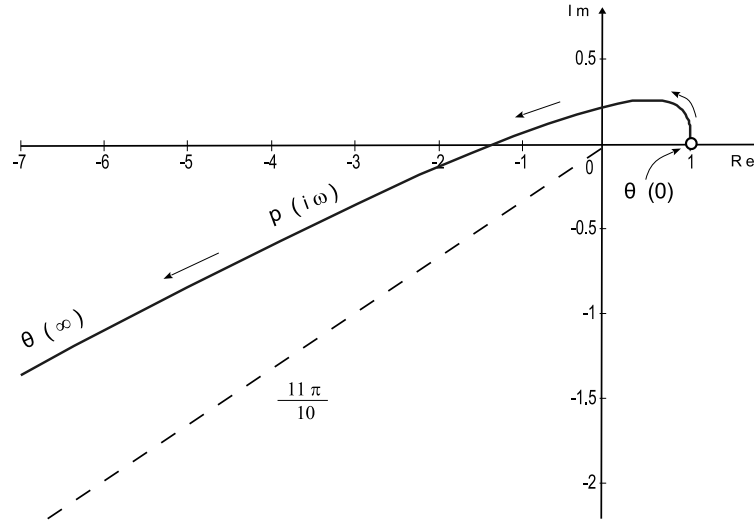


Figura 3.16: Curva de Mikhailov para (3.26).

Ejemplo 3.6. En este ejemplo se ilustra el resultado principal para pseudo-polinomios para $1 \leq \alpha < 2$. Primero, verificamos el criterio de Stodola dado en el Lema 3.2, para ello considere los siguientes dos polinomios

$$p_1(s) = s^{\frac{8}{3}} + 1$$

y

$$p_2(s) = s^{\frac{8}{3}} + 2s^{\frac{4}{3}} - 1.$$

En ambos casos, tenemos que $\alpha = \frac{4}{3}$ y para $p_1(s)$ hay un coeficiente cero (no hay término para $s^{\frac{4}{3}}$) mientras que para $p_2(s)$ los coeficientes no tienen el mismo signo, se sigue del Lema 3.3 que $p_1(s)$ y $p_2(s)$ son inestables. Para ilustrar la conclusión de este resultado, verifiquemos la ubicación de las raíces de los pseudo-polinomios anteriores. Usando la transformación $\lambda = s^\alpha$ se tiene que el polinomio entero asociado a $p_1(s)$ es:

$$\tilde{p}_1(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

y sus raíces son $\lambda_{1,2} = \pm i = e^{\pm\pi/2i}$, aplicando la transformación inversa, obtenemos que las raíces del pseudo-polinomio $p_1(s)$ son $s_{1,2} = (\lambda_{1,2})^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}e^{\pm\frac{3\pi}{8}}$, y dado que $|\arg(s_{1,2})| < \pi/2$ se concluye que $s_{1,2}$ están en el semi plano complejo derecho del plano complejo s y por lo tanto $p_1(s)$ es inestable.

Ahora para el caso de $p_2(s)$, aplicando la misma transformación obtenemos que el polinomio entero asociado es como sigue

$$\tilde{p}_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 1,$$

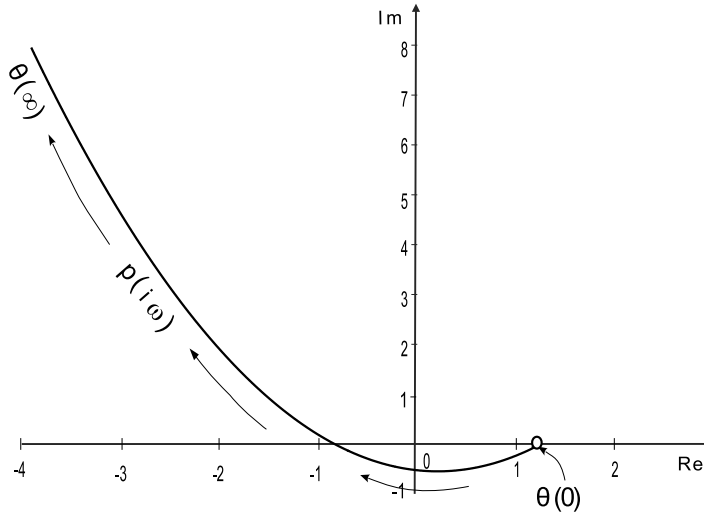


Figura 3.17: Curva de Mikhailov para (3.27).

cuyas raíces son $\lambda_1 = 2.4141e^{\pi i}$ y $\lambda_2 = 0.4141$. Es fácil notar que $\arg(s_2) = 0$, por lo tanto se encuentra en el semi plano complejo derecho del plano complejo s y se concluye que $p_2(s)$ es inestable.

Por otra parte, para ilustrar el criterio de estabilidad de Mikhailov consideremos el siguiente pseudo-polinomio:

$$p(s) = s^{2\sqrt{2}} + 4s^{\sqrt{2}} + 8. \quad (3.28)$$

Se tiene que $\alpha_n = 2\sqrt{2}$ que implica que $n = 2$ y $1 \leq \alpha = \sqrt{2} < 2$. Para (3.28) la condición necesaria dadas por el Lema 3.3 se cumple. La curva de Mikhailov de (3.28) en la Figura 3.18 nos muestra que el cambio total del argumento se aproxima asintóticamente a $\sqrt{2}\pi$ que es equivalente a $\alpha_n \left(\frac{\pi}{2}\right)$ por lo tanto (3.28) es estable por el Teorema 3.2. Note que la curva de Mikhailov corre en sentido positivo como se estableció anteriormente.

Ejemplo 3.7. Considere el siguiente pseudo-polinomio:

$$p(s) = s - 4s^{1/2} + 8. \quad (3.29)$$

En este caso $\alpha_n = 2(1/2)$, $n = 2$ y $\alpha = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, el polinomio asociado de orden entero es

$$\tilde{p}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8, \quad (3.30)$$

es claro que la condición necesaria de Stodola establece que el polinomio $p(s)$ puede ser estable, por lo tanto procedemos a determinar si es estable utilizando el criterio de Mikhailov. La curva de Mikhailov de (3.29) se muestra en la Figura 3.19 en donde se observa que la curva cruza por el origen, por lo tanto se puede decir que el pseudo-polinomio tiene un par de raíces imaginarias puras. Y de ahí podemos concluir que dicho pseudo-polinomio no

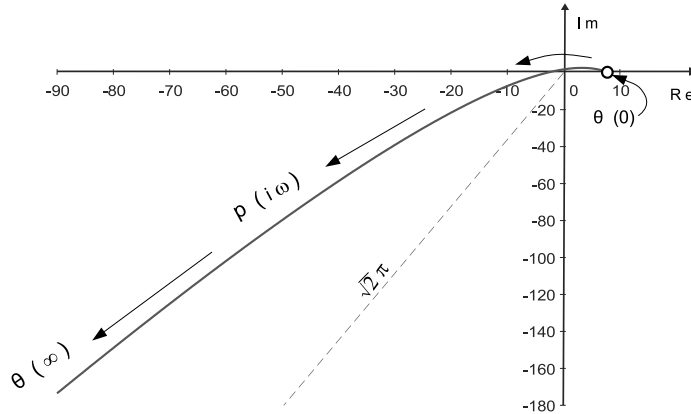


Figura 3.18: Curva de Mikhailov para (3.28).

es estable ya que las raíces se encuentran en el límite de la región de estabilidad, lo cual se puede verificar numéricamente.

Ejemplo 3.8. Considere el problema del sistema térmico con planta fraccionaria y control PD^μ expuesto en el Capítulo 1, descrito por la función de transferencia en lazo cerrado siguiente:

$$G(s) = \frac{K_d s^\mu + K_p}{39.69 s^{1.25} + K_d s^\mu + (K_p + 0.598)}.$$

Consideremos el pseudo-polinomio

$$p(s) = 39.69 s^{1.25} + K_d s^\mu + (K_p + 0.598).$$

En este caso, existen varias alternativas con respecto a los valores de α y μ para tener un pseudo-polinomio de orden conmensurado, como se muestran a continuación:

1. Si consideramos $\alpha = 1.25$, es decir, $1 \leq \alpha < 2$ entonces $\mu = k\alpha$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Para distintos valores de k se tiene lo siguiente:

- a) Si $k = 1$, entonces $\mu = \alpha$ y el pseudo-polinomio $p(s)$ es como sigue:

$$p(s) = (39.69 + K_d) s^{1.25} + (K_p + 0.598).$$

Aplicando el Lema 3.2, se pueden imponer las siguientes restricciones necesarias de estabilidad con respecto a las ganancias, $(39.69 + K_d) > 0$ y $(K_p + 0.598) > 0$.

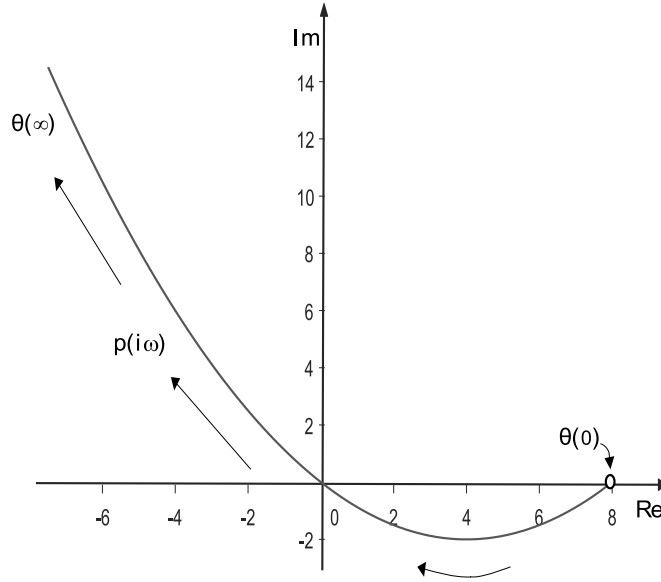


Figura 3.19: Curva de Mikhailov para (3.29).

b) Si $k = 2$, el pseudo-polinomio correspondiente queda como:

$$p(s) = K_d s^{2.25} + 39.69 s^{1.25} + (K_p + 0.598).$$

Del cual, usando nuevamente el resultado del Lema 3.2, se obtienen las siguientes condiciones: $K_d > 0$ y $(K_p + 0.598) > 0$.

c) Si $k = 3$, el pseudo-polinomio es de la siguiente forma:

$$p(s) = K_d s^{3.25} + 39.69 s^{1.25} + (K_p + 0.598).$$

Se tiene por medio del resultado en el Lema 3.2 que este pseudo-polinomio no puede ser estable.

2. Si consideramos $\alpha = \frac{1}{4}$ es decir, $0 < \alpha < 1$ entonces $\mu = k\alpha$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Para distintos valores de k se tiene lo siguiente:

a) Si $k \in [1, 4]$ entonces aplicando el resultado de Stodola en el Lema 3.3 resulta la siguiente restricción para estabilidad $(K_p + 0.598) > 0$.

b) Si $k = 5$, en este caso el pseudo-polinomio $p(s)$ quedaría como sigue:

$$p_4(s) = (K_d + 39.69) s^{1.25} + (K_p + 0.598).$$

Utilizando el resultado de Stodola en Lema 3.3 implica que $(K_d + 39.69) > 0$ y $(K_p + 0.598) > 0$ son condiciones necesarias para la estabilidad.

c) Si $k > 5$, en este caso se tiene que por el Lema 3.3 las siguientes condiciones deben satisfacerse $K_d > 0$ y $(K_p + 0.598) > 0$.

Del análisis anterior se sigue que existen varias posibilidades de escoger μ y las ganancias K_p y K_d para tener estabilidad. Para ilustrar un ejemplo, consideremos los valores $K_p = 64.47$, $K_d = 48.99$ y $\mu = 0.5$ propuestos en [19] como parámetros de control para este modelo. El pseudo-polinomio característico es

$$p(s) = 39.69s^{1.25} + 48.99s^{0.5} + 65.068, \quad (3.31)$$

donde se observa que $\alpha_n = 5(\frac{1}{4})$, $n = 5$ y $\alpha = \frac{1}{4}$. Con la finalidad de verificar la estabilidad de (3.31) basta observar la Figura 3.20 y constatar que satisface la condición del Teorema 3.2, se sigue que

$$\Delta \arg p(i\omega) \Big|_0^\infty = \alpha_n \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{5\pi}{8}.$$

En conclusión, el pseudo-polinomio en (3.31) es estable.

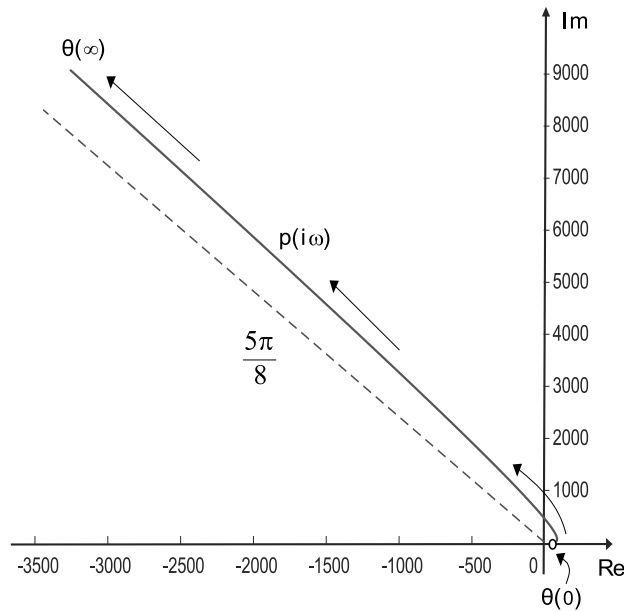


Figura 3.20: Curva de Mikhailov para (3.31).

Capítulo 4

Conclusiones

En esta sección se presentan las conclusiones de este trabajo de investigación, de igual manera las perspectivas a futuro del mismo.

1. En este trabajo se mostró la extensión del criterio de Stodola para el caso de pseudo-polinomios de orden conmensurado, cuando $0 < \alpha < 2$. En este sentido, se mostró que para $1 \leq \alpha < 2$, el criterio clásico de Stodola se mantiene, es decir, todo pseudo-polinomio estable tiene sus coeficientes distintos de cero y del mismo signo. Sin embargo, para $0 < \alpha < 1$, este criterio clásico no se mantiene y mostramos que en este caso una condición necesaria para un pseudo-polinomio estable es que los coeficientes a_n y a_0 sean distintos de cero y del mismo signo.
2. Como otra aportación se obtuvo la modificación del criterio de Mikhailov para el caso de pseudo-polinomios de orden conmensurado. Dicha modificación consiste en determinar la medida apropiada del cambio total del argumento. En este resultado el Teorema de Mikhailov modificado, se establece que la medida del cambio total del argumento es $\alpha_n \left(\frac{\pi}{2}\right)$, donde $\alpha_n = n\alpha$ es la máxima potencia fraccionaria del pseudo-polinomio y no $n \left(\frac{\pi}{2}\right)$ como ha sido reportado en la literatura hasta el momento.
3. Además, se concluyó que la curva de Mikhailov no necesariamente gira siempre en sentido positivo en el caso de pseudo-polinomios estables. Con ello podemos concluir que la propiedad de fase monotónicamente creciente para pseudo-polinomios estables en general no se cumple.
4. Finalmente, se concluyó que el resultado de la modificación del criterio de Mikhailov es válido para valores de $0 < \alpha < 2$ y no solo para $0 < \alpha < 1$ como se establece en la referencia [25].

Las perspectivas de este trabajo de investigación, se presentan a continuación:

- Generalizar el resultado para el caso de pseudo-polinomios de orden no conmensurado.
- Extender los resultados a pseudo-polinomios incluyendo términos exponenciales asociados a sistemas fraccionarios lineales con retardos.

Publicaciones generadas con esta tesis:

1. Jessica Mendiola-Fuentes “Modificación del criterio de Mikhailov para sistemas conmensurados de orden fraccionario”, Memorias: Congreso Nacional de Control Automático, Monterrey, Nuevo León, México, Octubre 2017 pp. 551-556.
2. J. Mendiola-Fuentes, D. Melchor-Aguilar “Modification of Mikhailov stability criterion for fractional commensurate order systems”, J. Franklin I. 355 (2018) 2779-2790.

Reconocimientos:

- Apoyo Sofia Kovaléskaia 2017.

Bibliografía

- [1] S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev “Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications”, Gordon and Breach Science Publisher, Singapore, (1993).
- [2] D. Matignon “Stability properties for generalized fractional differential systems”, ESAIM: Proc. 5 (1998) 145-158.
- [3] K. B. Oldham, J. Spanier “The fractional calculus”, Academic Press, New York, (1974).
- [4] P.J. Torvik, R.L. Bagley “On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials”, J. Appl. Mech. 51 (1984) 294-298.
- [5] R.J. Marks, M.W. Hall “Differintegral interpolation from a bandlimited signal’s samples”, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 29 (1981) 872-877.
- [6] R. Panda, M. Dash “ Fractional generalized splines and signal processing”, Signal Process. 86 (2006) 2340-2350.
- [7] A.D. Freed, K. Diethelm, Y. Luchko “Fractional-order viscoelasticity (FOV): constitutive development using the fractional calculus”, (1st annual report). Technical Memorandum 2002-211914 NASA Glenn Research Center, Cleveland (2002).
- [8] N. Heymans “Dynamic measurements in long-memory materials: fractional calculus evaluation of approach to steady state”, J. Vib. Control, 14 (2008) 1587-1596.
- [9] R. Magin “Fractional Calculus in Bioengineering”, Begell House, Redding (2006).
- [10] B. T. Krishna, K. V. V. S. Reddy “Active and passive realization of fractance device of order $1/2$ ”, Active and Passive Electronic Components,(2008) Article ID 369421.
- [11] M. F. M. Lima, J.A.T. Machado, M. Crisostomo “Experimental signal analysis of robot impacts in a fractional calculus perspective”, Journal of advanced computational intelligence and Intelligent Informatics, 11 (2007) 1079-1085.
- [12] L. Debnath “Recent applications of fractional calculus to science and engineering”, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 54, (2003) 3413-3442.
- [13] A. Oustaloup, X. Moreau, M. Nouillant “The CRONE suspension”, Control Eng. Pract. 4 (1996) 1101-1108.

- [14] I. Podlubny “Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ -controllers”, IEEE Trans. Automat. Control, 44 (1999) 208-214.
- [15] H. Bode K. B. Oldham “Network analysis and feedback amplifier design”, D. Van Nostrand Co., Inc., N. Y., (1945).
- [16] A. Oustaloup, B. Mathieu, P. Lanusse “The CRONE control of resonant plants: Applications to a flexible transmission”, Eur. J. Contr. 1 (1995) 113-121.
- [17] I. Petras, Y. Q. Chen, B. Vinagre, I. Podlubny “Stability of linear time invariant systems with interval fractional orders and interval coefficients”, Proc. of the Int. Conf. on Computation Cybern. (2004) 341-346.
- [18] I. Petras, B. Vinagre, L. Dorcak, V. Feliu “Fractional digital control of a heat solid: experimental results”, Proc. 3rd Int. Carpathian Control Conf. (2002) 365-370.
- [19] I. Petras, B. Vinagre “Practical application of digital fractional-order controller to temperature control”, Acta Montanistica Slovaca, 7 (2002) 131-137.
- [20] C. Bonnet, J.R. Partington “Coprime Factorizations and stability of fractional differential systems”, Syst. Contr. Lett. 41 (2000) 167-174.
- [21] Bissell, C. C. Stodola “Hurwitz and the genesis of the stability criterion”, Int. J. Control, 50 (1989) 2313-2332.
- [22] E.J. Routh “A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion”, Proc. Of London Mathematical Society, 5,(1877) Macmillan and Co., London, U.K.
- [23] H. Nyquist “Regeneration theory”, The Bell System Technical Journal, 11 (1932) 126-147.
- [24] E. P. Popov “The dynamics of automatic control systems”, Addison-Wesley, (1962).
- [25] M. Buslowicz “Stability of linear continuous-time fractional systems of commensurate order”, Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems. 1 (2009) 12-17.
- [26] D. Valerio, J.S. da Costa “An introduction to fractional control”, IET (Inst. Engineering Technology) control engineering series, London, (2013).
- [27] K. Miller, B. Ross “An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations”, John Wiley & Sons, New York, (1993).
- [28] C.A. Monje, Y-Q. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu “Fractional-order systems and controls. Fundamental and Applications”, Springer-Verlag, London, (2010).
- [29] A.G. Radwan, A.M. Soliman, A.S. Elwakil, A. Sedeek “On the stability of linear systems with fractional order elements”, Chaos, Soli. Frac. 40 (2009) 2317-2328.

- [30] S. Liang, S-G. Wang, Y. Wang “Routh-type table for zero distribution of polynomial with commensurate fractional and integer degrees”, *J. Franklin I.* 354 (2017) 83-104.
- [31] J. Mendiola-Fuentes, D. Melchor-Aguilar “Modification of Mikhailov stability criterion for fractional commensurate order systems”, *J. Franklin I.* 355 (2018) 2779-2790.
- [32] T. Kaczorek, *Stability Analysis of Fractional Linear Systems in Frequency Domain, Selected problems of fractional systems theory*, Lect. Notes Contr. Inf. 441, Springer-Verlag, Berlin, (2011) 189-220.
- [33] I. Petras “Stability of fractional-order systems with rational orders: A survey”, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 12 (2009) 269-298.