

Este artículo puede ser usado únicamente para uso personal o académico. Cualquier otro uso requiere permiso del autor o editor.

El siguiente artículo fue publicado en *Boletín de la Sociedad Mexicana de Física*, 29(2): 103-106 (2015); y lo puede consultar en <https://www.smf.mx/>

¿Es el movimiento Browniano un proceso estocástico o determinista?

Héctor Gilardi-Velázquez y Eric Campos-Cantón

Matemáticas Aplicadas, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica

Con el afán de comprender el comportamiento del universo se han desarrollado distintas técnicas y herramientas para la generación de conocimiento estructurado que han permitido entender diferentes fenómenos en la naturaleza, buscando formular leyes que describan en muchas ocasiones comportamiento complejo. En lo que respecta a las ciencias exactas, se han desarrollado modelos matemáticos que nos ayudan a describir la evolución temporal del universo, ya sea de manera determinista o estocástica. No obstante fue hasta el siglo XX que se empezó a considerar la teoría probabilística.

En ciertas condiciones un sistema dinámico puede ser determinista y no ser predecible. A pesar de la complejidad que pueda tener un sistema, en muchas ocasiones se puede descomponer en sus partes más simples y ser analizado de esta manera; sin embargo, en algunos de estos casos existen limitaciones que no nos permiten predecir su comportamiento ni construir un sistema dinámico determinista que lo represente. Esto no significa que no se pueda decir algo de dichos sistemas debido a las propiedades que presentan. Sin embargo estos sistemas pueden ser entendidos con la ayuda de la teoría de probabilidades, ejemplo de ello son las turbulencias y las oscilaciones físico-químicas y biológicas.

Vale la pena recordar el paradigma de Pierre Laplace para poder ampliar la idea sobre determinista y predecible. Laplace imaginó un demonio que es capaz de conocer la posición y velocidad de todas las partículas del Universo en un momento dado y

también es capaz de resolver las ecuaciones de Newton del Universo. Un demonio con estas capacidades (sobrehumanas pero no sobrenaturales) conocería el devenir de todo lo que existe, conocería el más pequeño movimiento de cualquier cosa o persona que viviera en los próximos cien mil millones de años. Ni los seres humanos ni las computadoras pueden hacer esto, ya que utilizan una cantidad finita de condiciones iniciales y un número limitado de cifras en sus cálculos. Da igual que un demonio así no exista, pero nos permite darnos cuenta de nuestra imperfección como seres limitados que somos.

Un ejemplo de un sistema, característico por su complejidad, que ha sido ampliamente estudiado con teoría de probabilidad, a pesar de conocerse su naturaleza, es el movimiento Browniano.

Movimiento Browniano

En 1821 R. Brown [1] reportó su estudio sobre el proceso de fertilización de las flores, viendo a través de un microscopio el polen en agua observó que pequeñas partículas presentan un “rápido movimiento oscilatorio”. A este fenómeno descrito por el desplazamiento irregular que presentan algunas partículas al estar suspendidas en un fluido, se le conoce como movimiento Browniano. A partir de las observaciones de R. Brown nació la pregunta ¿cuál es la naturaleza de este fenómeno? La primer teoría dinámica sobre el movimiento Browniano fue que las partículas tenían vida. Para 1905, nació la teoría cinética que dice que el movimiento Browniano es ocasionado por un bombardeo de las moléculas del fluido sobre la partícula. Para 1917 B. Thomson [2] dijo que no se puede asegurar que las partículas tengan movimientos vitales; y fortale-

ció la idea de que el movimiento Browniano es debido al bombardeo molecular. L. G. Gouy [3] realizó experimentos con los cuales daba argumentos que apoyaban la teoría cinética.

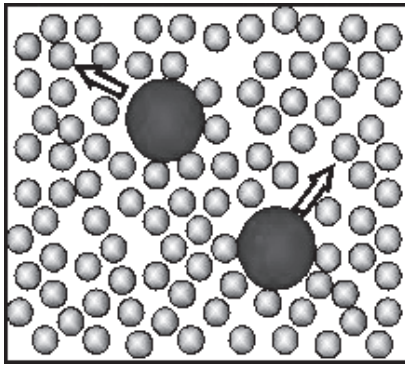


Figura 1: Representación de las colisiones que experimenta una partícula Browniana (representadas en rojo) con las moléculas del fluido (representadas en amarillo). Las colisiones por parte de las moléculas del líquido ocasionan el movimiento Browniano de las partículas suspendidas.

A inicios del siglo pasado, tanto A. Einstein como M. Smoluchowski plantearon y resolvieron exitosamente el problema. Con el método de A. Einstein, el movimiento Browniano es descrito a través de la probabilidad $\rho(r, t)$ de encontrar una partícula en la posición r al tiempo t , la cual satisface la ecuación macroscópica de difusión.

En el desarrollo de la teoría de la cinética molecular Einstein descubrió que, de acuerdo con la teoría atómica, podría haber un movimiento de partículas microscópicas suspendidas que podrían observarse, esto sin saber sobre las observaciones concernientes al movimiento Browniano, las cuales eran en realidad muy familiares [4].

El argumento de A. Einstein para este fenómeno es que existe una densidad de probabilidad de que una partícula Browniana esté en una cierta posición x a un cierto tiempo t . Einstein deriva una ecuación considerando lo que se conoce como coeficiente de difusión, el cual se relaciona con una fuerza externa “virtual”. El argumento de Einstein no da una teoría dinámica sobre el movimiento Browniano, sólo determina la naturaleza de dicho movimiento y el valor del coeficiente de difusión [5].

El estudio del movimiento Browniano ha sido extenso desde R. Brown, L. Bachelier y A. Einstein, quienes propusieron la primera descripción matemática del movimiento Browniano de una partícula libre. Unos pocos años más tarde, P. Langevin propuso otro método para

resolver el problema, usar ecuaciones diferenciales estocásticas; con ello obtuvo una aproximación a partir de la segunda ley de Newton [5]. El modelo propuesto por Langevin [6] está basado en una ecuación diferencial de segundo orden con un término estocástico, el cual representa la naturaleza aleatoria del movimiento:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma \dot{x} + A_f(t). \quad (1)$$

Para su modelo Langevin considera dos fuerzas que actúan sobre la partícula. La primera relacionada a la resistencia viscosa, esto de acuerdo con la ley de Stokes. La segunda, una fuerza estocástica relacionada a la irregularidad de los impactos con las moléculas de su alrededor, a la que él llama fuerza complementaria. En comparación con el modelo de A. Einstein, P. Langevin dice que su modelo es infinitamente más simple; es gracias a este modelo que Langevin es conocido como el fundador de la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Para la primer fuerza postuló que la partícula sentiría una fuerza de fricción simplemente por estar inmersa en un líquido. De acuerdo a la ley de Stokes para una partícula de radio r en un medio de viscosidad η . Y la fuerza estocástica para representar la fluctuación en la aceleración relacionada a la irregularidad de los impactos de las moléculas del fluido, con la cual se provee el carácter aleatorio del movimiento Browniano y caracteriza un proceso Gaussiano.

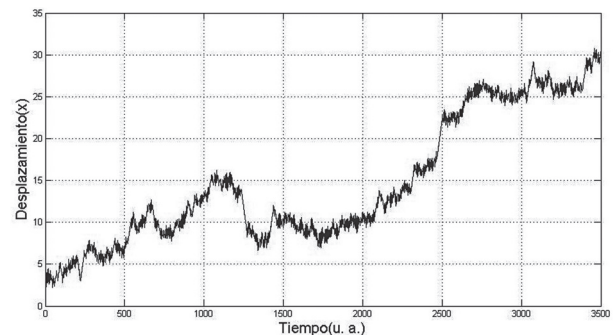


Figura 2: Desplazamiento promedio de una partícula Browniana en una dimensión.

Con este modelo, Langevin llega de la misma manera que Einstein al desplazamiento cuadrado promedio de la partícula, así como a proveer un modelo más general y exacto para la dinámica de una partícula Browniana.

Louis Bachelier desarrolló la teoría de movimiento Browniano en su tesis, en el contexto de las fluctuaciones de los valores en el mercado. Él introdujo lo que ahora es conocido como la ecuación de Chapman-Kolomogorov. El trabajo de Bachelier no dio avances directos en el contexto de la física del movimiento Browniano, ya que en economía no hay lugar para un coeficiente de fricción, ley de Stokes y mucho menos para el número de Avogadro; pero nos permite visualizar una primera aplicación del movimiento Browniano en otras áreas [7]. En la actualidad, más allá del estudio sobre la dinámica de una partícula en un fluido, el movimiento Browniano tiene un rango muy amplio de aplicaciones en distintas áreas tales como: hidrodinámica, en dinámica de polímeros o coagulación de partículas, reactores químicos con comportamiento oscilatorio, magnetismo para vidrios de spin, utilizado como sistemas de perturbación (modelos del clima), sismología para el análisis de vibraciones, generación de secuencias pseudo-aleatorias para encriptación, entre otras. La idea del movimiento Browniano determinista ha sido discutida en hidrodinámica y reactores químicos con comportamiento oscilatorio, donde el movimiento es completamente determinista y en algunas ocasiones es referido como caos microscópico.

Modelos deterministas generadores de movimiento Browniano

En lo que respecta al movimiento Browniano determinista, el primer modelo reportado en la literatura fue propuesto por Trefán y colaboradores [8], ellos no derivan un sistema de ecuaciones microscópico; para esto consideran a nivel microscópico un proceso determinista llamado "Booster", el cual tiene dinámica caótica y lo relacionan a fluctuaciones térmicas de la partícula Browniana; en este sentido el Booster debe cumplir con las propieda-

des estadísticas características de la fuerza complementaria de la ecuación diferencial (Distribución Gaussiana). Para este modelo parten de la ecuación de Langevin y reemplazan el proceso estocástico en la ecuación por el Booster que es dado por medio de un mapeo caótico, con dicho modelo ellos logran obtener movimiento Browniano de manera macroscópica; sin embargo, este modelo no cumple con las propiedades estadísticas del fenómeno, ya que difiere considerablemente de las asunciones estándar de la estadística Gaussiana. La principal aportación de Trefán y colaboradores, es que nos muestran que es posible generar dinámica Browniana de manera determinista, sin la necesidad de imponer las asunciones estocásticas.

De la misma manera Huerta-Cuéllar y colaboradores proponen [9] un modelo determinista para la generación de movimiento Browniano, a partir del modelo propuesto por Langevin. Agregando un grado de libertad al sistema reemplazaron el proceso estocástico, relacionado a la aceleración fluctuante, por una ecuación diferencial de tercer orden. Huerta-Cuéllar y colaboradores obtuvieron una aproximación a la generación de movimiento Browniano de manera determinista transformando el modelo propuesto por Langevin en un sistema de tres ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\gamma y + z, \\ \dot{z} &= \alpha_1 x - \alpha_2 y - \alpha_3 z + \alpha_4,\end{aligned}\tag{2}$$

donde el término estocástico es reemplazado por una nueva variable definida por una ecuación diferencial de tercer orden (ecuación Jerk), esta nueva variable que proponen actúa como la aceleración fluctuante, produce una dinámica de movimiento determinista, que está relacionada a los cambios de velocidad y aceleración ocasionados por la fricción y las colisiones con otras partículas del medio.

Con este modelo Huerta-Cuéllar y colaboradores logran aproximarse a una distribución de probabilidad "tipo Gaussiana" y un desplazamiento cuadrado lineal. En este caso, a diferencia del modelo propuesto por Trefán y colaboradores, se obtiene un modelo completamente continuo en el tiempo, en el cual la aceleración fluctuante depende de los estados de dicho sistema. Con este modelo se logró obtener características estadísticas muy similares a las del movimiento Browniano.

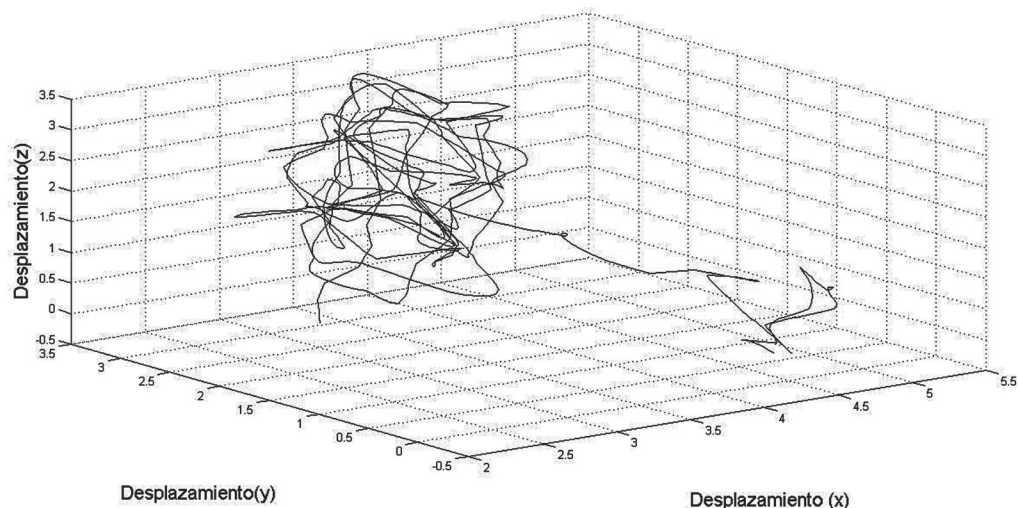


Figura 3: Desplazamiento de una partícula Browniana en tres dimensiones obtenida de manera determinista con el modelo de Huerta-Cuellar.

Comentarios finales

El movimiento Browniano ha sido extensamente estudiado de manera estocástica, y recientemente han aparecido modelos deterministas que nos muestran un nuevo panorama para el estudio de fenómenos relacionados a este tipo de dinámica, y que posiblemente nos permitan conocer más propiedades y características de dicho fenómeno. Hoy en día podemos decidir de qué manera estudiarlo o la forma de describirlo, esto dependiendo de la aplicación o del enfoque del estudio que se esté realizando.

Una de las principales ventajas de los modelos deterministas es que nos permiten reproducir un mismo resultado a diferencia de los modelos estocásticos, así como, no hay la necesidad de utilizar un proceso estocástico caracterizado previamente por una distribución Gaussiana. Con esto se espera que los modelos deterministas puedan ser utilizados para extender el horizonte del conocimiento en las aplicaciones del movimiento Browniano, de tal manera que se puedan relacionar los parámetros de los modelos con sistemas naturales y nos permita ampliar el conocimiento sobre la fenomenología de dicho movimiento.

Referencias

[1] Robert Brown, A brief Account of Microscopical Observations made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles contained in the Pollen of Plants;

and on the general Existence of active Molecules in Organic and Inorganic Bodies, Philosophical Magazine N. S. 4 (1828), 161-173.

- [2] D'Arcy W. Thompson, Growth and Form, Cambridge University Press (1917).
- [3] Jean Perrin, Brownian movement and molecular reality, translated from the Annales de Chimie et de Physique, 8me Series, 1909, by F. Soddy, Taylor and Francis, London, 1910.
- [4] Albert Einstein, Investigations on the Theory of the Brownian Movement, edited with notes by R. Furth, translated by A. D. Cowper, Dover, 1956. (Furth's 1st. note, pp. 86(88, is historical.)
- [5] Nelson, E. (1967). Dynamical theories of Brownian motion (Vol. 17, segunda edición). Princeton: Princeton University Press.
- [6] Uhlenbeck, G. E., & Ornstein, L. S. (1930). On the theory of the Brownian motion. Physical review, 36(5), 823.
- [7] Shlesinger, M. F., Klafter, J., & Zumofen, G. (1999). Above, below and beyond Brownian motion. American Journal of Physics, 67(12), 1253-1259.
- [8] Trefán, G., Grigolini, P., and West, B. J., Physical Review A 45 (1992) 2.
- [9] Huerta-Cuellar, G., Jiménez-López, E., Campos-Cantón, E., & Pisarchik, A. N. (2014). An approach to generate deterministic Brownian motion. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.