

**Este artículo puede ser usado únicamente para uso personal o académico.
Cualquier otro uso requiere permiso del autor o editor.**

El siguiente artículo fue publicado en las *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2010*.

Sincronización Generalizada Entre Sistemas Rössler Y Lorenz Con Dinámica Interna

K. P. Cuéllar-Galarza*, J. G. Barajas-Ramírez*, R. Femat*

*Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A.C. (IPICYT), División de Matemáticas Aplicadas, Camino a la Presa San José 2055 Col. Lomas 4a Sección CP. 78216 San Luis Potosí, S. L. P., México.

Resumen—Se investiga la sincronización generalizada (SG) entre los osciladores caóticos Rössler y Lorenz en una configuración maestro-esclavo. Para lograr la sincronización se diseña un controlador escalar por retroalimentación obtenido a partir de una transformación de coordenadas basada en Álgebra de Lie. La SG se logra en términos de los cambios de coordenadas al estabilizar el error de sincronización en las variables transformadas. En particular, se muestra la existencia de una SG parcial entre Rössler y Lorenz cuando el grado relativo de los sistemas es menor a su dimensión.

Palabras clave: Sistemas Caóticos, Sincronización Generalizada, Control Retroalimentado.

I. INTRODUCCIÓN

En su contexto más amplio, sincronizar se refiere a hacer que dos o más fenómenos ocurran relacionados en el tiempo. De modo que dos sistemas sincronizados son tales que eventos en su operación suceden de forma coordinada en el tiempo (Pikovsky et al., 2001). Dependiendo de la forma que tome esta concordancia en el tiempo, diferentes tipos de sincronización pueden ser definidos, incluyendo por ejemplo: la *sincronización idéntica*, en la cual las trayectorias de los sistemas coinciden exactamente; la *sincronización de fase*, en la que solo la fase de los osciladores involucrados coincide; la *sincronización parcial*, donde solo algunos estados de los sistemas coinciden en el tiempo; entre muchas otras. Para una revisión detallada el lector puede consultar (Boccaletti et al., 2002; Femat y Solís-Perales, 2008) y las referencias ahí incluidas.

Esta contribución se enfoca al estudio de la sincronización en términos generalizados que surge entre sistemas caóticos estrictamente diferentes. Se dice que dos sistemas dinámicos acoplados unidireccionalmente, donde uno es llamado *maestro* y el otro *esclavo*, están sincronizados de manera generalizada si existe una relación funcional estática entre los sistemas, misma que mapea las trayectorias del *esclavo* de modo que coinciden exactamente en el tiempo con las trayectorias del sistema *maestro* (Rulkov et al., 1995). Específicamente, sean $\dot{x}_m = f_m(x_m) + g_mu_m$ y $\dot{x}_s = f_s(x_s) + g_su_s(x_s, h(x_m))$, las descripciones dinámicas de los sistemas *maestro* y *esclavo*, respectivamente. Donde las

variables de estados son $x_m \in \mathbb{R}^{n_m}$ y $x_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, con $y_m = h_m(x_m)$ y $y_s = h_s(x_s)$ sus salidas. Entonces, ocurre una SG entre los sistemas *maestro* y *esclavo* si existe un mapeo $\Theta : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_m(t) - \Theta(x_s(t))\| = 0$. En el resto del escrito, el subíndice m se utilizará cuando se hable del sistema *maestro*, mientras que el subíndice s se utilizará en referencia al sistema *esclavo*.

Se han reportado resultados en los que se sincronizan, por ejemplo, a un sistema de segundo orden (oscilador de Duffing) con la proyección canónica de un sistema de tercer orden (oscilador de Chua) (Femat y Solís-Perales, 2002). De igual forma, se ha reportado el diseño de una señal de sincronización basadas en esquemas de observadores en modos deslizantes para sincronizar sistemas estrictamente diferentes (Duffing y van der Pol) (Yang y Shao, 2002). En estos trabajos, el objetivo es alcanzar una forma de sincronización idéntica parcial entre los sistemas a controlar. Este es un problema distinto de SG al que implica determinar, por un lado, la existencia y forma del mapeo de sincronización generalizada Θ , y por otro lado, el diseño del control sincronizador que permite que dicha SG ocurra. De hecho, la SG entre sistemas caóticos de diferentes dimensiones sigue siendo un problema abierto.

Las dos partes del problema de SG descritas en el párrafo anterior, es decir, determinar la función Θ , llamado el problema de análisis; y construir un controlador u_s tal que se logre la SG a través de Θ , llamado el problema de síntesis, pueden integrarse en un solo diseño (Femat et al., 2005). Con este fin, es conveniente considerar que los sistemas maestro y esclavo pueden ser escritos en forma triangular a través de un cambio de coordenadas. Una forma de construir este cambio de coordenadas es mediante las derivadas de Lie de las salidas de los sistemas *maestro* y *esclavo* (Isidori, 1999).

El presente estudio se acota al caso de sistemas estrictamente diferentes con la misma dimensión ($n_m = n_s = n$). Se propone que para lograr la SG entre el sistema *maestro* y el *esclavo*, la entrada de control escalar $u_s \in \mathbb{R}$ se diseñe a partir de los cambios de coordenadas, $\Phi_m(x_m)$ y $\Phi_s(x_s)$, los cuales están dados por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_\rho \\ \eta_\rho \end{bmatrix} = \Phi_\rho(x_\rho) = \begin{bmatrix} L_{f_\rho}^0 h_\rho(x_\rho) \\ \vdots \\ L_{f_\rho}^{\sigma_\rho-1} h_\rho(x_\rho) \\ \phi_{\rho,1}(x_\rho) \\ \vdots \\ \phi_{\rho,(n-\sigma_\rho)}(x_\rho) \end{bmatrix} \quad (1) \end{aligned} \quad \dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_z \\ \vdots \\ \dot{e}_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{z,2} \\ \vdots \\ e_{z,\sigma} \\ \delta(e_z) + \beta_s(z_s)u_s \\ \vdots \\ \epsilon_1(e_z, e_\eta) \\ \vdots \\ \epsilon_{(n-\sigma)}(e_z, e_\eta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde el subíndice ρ es m o s según sea el caso. El número entero σ_ρ es llamado el grado relativo del sistema. $L_{f_\rho}^{\sigma_\rho} h_\rho(x_\rho)$ es la σ_ρ -ésima derivada de Lie¹ de la salida y_ρ a lo largo del campo vectorial $f_\rho(x_\rho)$. Además, las funciones $\phi_{\rho,j}(x_\rho) = 0$ para $j = 1, \dots, (n - \sigma_\rho)$. Cabe resaltar que siempre que la transformación Φ_ρ sea involutiva existirá una transformación de coordenadas inversa tal que $x_\rho = \Phi_\rho^{-1}([z_\rho, \eta_\rho]^\top)$ (Isidori, 1999).

En las variables transformadas, los sistemas *maestro* y *esclavo* pueden escribirse en la siguiente forma normal:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{\rho,1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho,(\sigma_\rho-1)} \\ \dot{z}_{\rho,\sigma_\rho} \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{\rho,1} \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{\rho,(n-\sigma_\rho)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{\rho,2} \\ \vdots \\ z_{\rho,\sigma_\rho} \\ \alpha_\rho(z_\rho) + \beta_\rho(z_\rho)u_\rho \\ \vdots \\ \gamma_{\rho,1}(z_\rho, \eta_\rho) \\ \vdots \\ \gamma_{\rho,(n-\sigma_\rho)}(z_\rho, \eta_\rho) \end{bmatrix} \quad (2)$$

La dinámica en las variables $z_\rho = [z_{\rho,1}, \dots, z_{\rho,\sigma_\rho}]^\top \in \mathbb{R}^{\sigma_\rho}$ es llamada la *dinámica linealizable* del sistema, ya que a través de un controlador por retroalimentación u_ρ es posible hacer esta dinámica lineal entrada-salida. Por otra parte, la dinámica en las variables $\eta_\rho = [\eta_{\rho,1}, \dots, \eta_{\rho,(n-\sigma_\rho)}]^\top \in \mathbb{R}^{(n-\sigma_\rho)}$ es llamada la *dinámica interna* sistema, la cual es no observable y no controlable de la salida y entrada, respectivamente.

Para lograr SG entre los sistemas *maestro* y *esclavo* se define un *error de sincronización* en términos de las variables transformadas, $e = [z_m, \eta_m]^\top - [z_s, \eta_s]^\top \in \mathbb{R}^n$. En el resto de esta contribución se considera exclusivamente el caso de sistemas con el mismo grado relativo ($\sigma_m = \sigma_s = \sigma$). De modo que la dinámica del *error de sincronización* esta dada por:

¹La derivada de Lie es definida iterativamente como $L_{f_\rho}^m h_\rho(x_\rho) = L_{f_\rho}[L_{f_\rho}^{m-1} h_\rho(x_\rho)]$ con $L_{f_\rho}^1 h_\rho(x_\rho) = \frac{\partial h_\rho(x_\rho)}{\partial x_\rho} f_\rho(x_\rho)$ y $L_{f_\rho}^0 h_\rho(x_\rho) = h_\rho(x_\rho)$ (Isidori, 1999).

donde $\delta(e_z) = \alpha_m(z_m) + \beta_m(z_m)u_m - \alpha_s(z_s)$ y $\epsilon_i(e_z, e_\eta) = \gamma_{m,i}(z_m, \eta_m) - \gamma_{s,i}(z_s, \eta_s)$. De igual manera que en (2), la dinámica del *error de sincronización* se divide en *dinámica linealizable* y *dinámica interna* del error, en las variables $e_z \in \mathbb{R}^\sigma$ y $e_\eta \in \mathbb{R}^{(n-\sigma)}$, respectivamente.

La SG se logra cuando a través del diseño de u_s , la dinámica del *error de sincronización* se vuelve asintóticamente estable. Es decir, cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$. Al satisfacer esta condición se tiene que $\|e\| = \|[z_m, \eta_m]^\top - [z_s, \eta_s]^\top\| = \|\Phi_m(x_m) - \Phi_s(x_s)\| = 0$. Entonces, despejando las variables del *maestro* se obtiene la siguiente relación: $\|x_m - \Phi_m^{-1}(\Phi_s(x_s))\| = 0$. De modo que, las trayectorias del *esclavo* son mapeadas por $\Theta = \Phi_m^{-1} \circ \Phi_s$ tal que coinciden con las trayectorias del *maestro*. Dando lugar a una SG entre ellos a través de la composición de sus cambios de coordenadas.

El resto de esta contribución se enfoca al caso particular de los sistemas Rössler y Lorenz. Específicamente, cuando: (i) el grado relativo de ambos sistemas es idéntico a la dimensión del sistema ($\sigma = n$), y (ii) ambos sistemas tienen dinámica interna de la misma dimensión ($\sigma < n$). Esto se hace con el objetivo de ilustrar los diferentes escenarios de SG que se presentan al tratar de estabilizar el origen del *error de sincronización* mediante el diseño de una $u_s \in \mathbb{R}$ estática por retroalimentación de estados.

II. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considere los sistemas dinámicos Rössler y Lorenz, descritos por las siguiente ecuaciones diferenciales, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{R,1} \\ \dot{x}_{R,2} \\ \dot{x}_{R,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{R,2} - x_{R,3} \\ x_{R,1} + a_R x_{R,2} \\ x_{R,3}(x_{R,1} - b_R) + a_R \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{L,1} \\ \dot{x}_{L,2} \\ \dot{x}_{L,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_L(x_{L,2} - x_{L,1}) \\ b_L x_{L,1} - x_{L,2} - x_{L,1} x_{L,3} \\ -c_L x_{L,3} + x_{L,1} x_{L,2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde los parámetros del sistema Rössler son $a_R = 0.2$ y $b_R = 5.7$, mientras que para el sistema de Lorenz los parámetros son $a_L = 16$; $b_L = 4$; $c_L = 45.92$. Cabe mencionar que para estos valores paramétricos, ambos sistemas están en su régimen caótico.

Suponga que los sistemas Rössler y Lorenz son acoplados unidireccionalmente en una configuración *maestro-esclavo*.

De modo que, la descripción dinámica de los sistemas *maestro* y *esclavo* es:

$$\dot{x}_m = f_m(x_m) + g_m u_m \quad (6)$$

$$y_m = h_m(x_m)$$

$$\dot{x}_s = f_s(x_s) + g_s u_s(x_s, h(x_m)) \quad (7)$$

$$y_s = h_s(x_s)$$

donde $f_m(x_m)$ y $f_s(x_s)$ están dadas por (4) o (5), según sea el caso.

Dependiendo de la forma que tengan la función de salida y el campo vectorial de entrada, $(h_\rho(x_\rho), g_\rho(x_\rho))$, con $\rho = m, r$, se pueden obtener diferentes cambios de coordenadas para los sistemas Rössler y Lorenz. En particular, se consideran dos casos: En el primero, ambos sistemas son completamente linealizables, es decir, su grado relativo es $\sigma = n = 3$. En el segundo, ambos sistemas son de grado relativo igual a dos ($\sigma < n$), en este caso los sistemas tienen *dinámica interna*.

Una combinación de entrada-salida que resulta en un grado relativo igual a tres para el sistema Rössler es $y_\rho = h_\rho(x_R) = x_{R,2}$, con $g_\rho(x_R) = [0, 0, 1]^\top$. Calculando las derivadas de Lie correspondientes, el cambio de coordenadas es:

$$z_R = \Phi_{R^3, \rho}(x_R) \quad (8)$$

$$z_R = \begin{bmatrix} x_{R,2} \\ x_{R,1} + a_R x_{R,2} \\ (a_R^2 - 1)x_{R,2} - x_{R,3} + a_R x_{R,1} \end{bmatrix}$$

con el cambio de coordenadas inverso dado por:

$$x_R = \Phi_{R^3, \rho}^{-1}(z_R) \quad (9)$$

$$x_R = \begin{bmatrix} z_{R,2} - a_R z_{R,1} \\ z_{R,1} \\ a_R z_{R,2} - z_{R,1} - z_{R,3} \end{bmatrix}$$

Para obtener una representación del sistema de Rössler con grado relativo igual a dos, la combinación de entrada-salida se escoge como: $y_\rho = h_\rho(x_R) = x_{R,1}$, con $g_\rho(x_R) = [0, 0, 1]^\top$. De donde el cambio de coordenadas se obtiene como:

$$[z_R, \eta_R]^\top = \Phi_{R^2, \rho}(x_R) \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} z_{R,1} \\ z_{R,2} \\ \eta_{R,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{R,1} \\ -x_{R,2} - x_{R,3} \\ x_{R,2} \end{bmatrix}$$

con su inverso dado por:

$$x_R = \Phi_{R^2, \rho}^{-1}([z_R, \eta_R]^\top) \quad (11)$$

$$x_R = \begin{bmatrix} z_{R,1} \\ \eta_{R,1} \\ -z_{R,2} - \eta_{R,1} \end{bmatrix}$$

Para el sistema de Lorenz la combinación entrada-salida $y_\rho = h_\rho(x_L) = x_{L,1}$, con $g_\rho(x_L) = [0, 0, 1]^\top$ resulta en un

cambio de coordenadas con grado relativo tres, dado por:

$$z_L = \Phi_{L^3, \rho}(x_L) \quad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} x_{L,1} \\ a_L(x_{L,2} - x_{L,1}) \\ -a_L^2(x_{L,2} - x_{L,1}) + a_L(b_L x_{L,1} - x_{L,2} - x_{L,1} x_{L,3}) \end{bmatrix}$$

con el cambio de coordenadas inverso dado por:

$$x_L = \Phi_{L^3, \rho}^{-1}(z_L) \quad (13)$$

$$x_L = \begin{bmatrix} z_{L,1} \\ -\frac{z_{L,2}}{a_L} - \frac{z_{L,3}}{a_L z_{L,1}} - \frac{z_{L,2}}{a_L z_{L,1}} + b_L - 1 \end{bmatrix}$$

Es importante resaltar que alrededor del origen el cambio de coordenadas inverso, $\Phi_{L^3, \rho}^{-1}(z_L)$, no está bien definido, ya que la transformación pierde dimensión en $z_{L,1} = 0$.

Una representación del sistema de Lorenz con grado relativo igual a dos, se obtiene de la combinación de entrada-salida $y_\rho = h_\rho(x_L) = x_{L,1}$, con $g_\rho(x_L) = [0, 1, 0]^\top$. En este caso el cambio de coordenadas es:

$$[z_L, \eta_L]^\top = \Phi_{L^2, \rho}(x_L) \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} z_{L,1} \\ z_{L,2} \\ \eta_{L,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{L,1} \\ a_L(x_{L,2} - x_{L,1}) \\ x_{L,3} \end{bmatrix}$$

con su inverso dado por:

$$x_L = \Phi_{L^2, \rho}^{-1}([z_L, \eta_L]^\top) \quad (15)$$

$$x_L = \begin{bmatrix} z_{L,1} \\ \frac{z_{L,2}}{a_L} + z_{L,1} \\ \eta_{L,1} \end{bmatrix}$$

Para lograr la SG entre los sistemas Rössler y Lorenz, el controlador del sistema *esclavo*, u_s , se diseña tal que la dinámica del *error de sincronización*, en términos de las variables transformadas (3) sea asintóticamente estable en el origen. En los casos considerados en esta contribución, ya sea cuando el grado relativo de ambos sistemas es igual a la dimensión, o cuando es menor, el diseño de u_s tal que se logre la SG entre los sistemas Rössler y Lorenz depende de cual sistema se tome como *maestro* y cual como *esclavo*. En la siguiente Sección se describen condiciones bajo las cuales un controlador por retroalimentación de estados linealizante es capaz de producir SG entre estos sistemas. Así como, el tipo de SG que se logra en cada combinación de grado relativo, *maestro* y *esclavo*.

III. DISEÑO DE u_s PARA SG RÖSSLER-LORENZ

III-A. Caso $\sigma = n$

En las variables transformadas, z_R y z_L obtenidas a partir de los cambios de coordenadas (8) y (9), la dinámica de los sistemas Rössler y Lorenz está dada por las siguientes ecuaciones, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{R,1} \\ \dot{z}_{R,2} \\ \dot{z}_{R,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{R,2} \\ z_{R,3} \\ \alpha_{R^3, \rho}(z_R) + \beta_{R^3, \rho}(z_R) u_\rho \end{bmatrix} \quad (16)$$

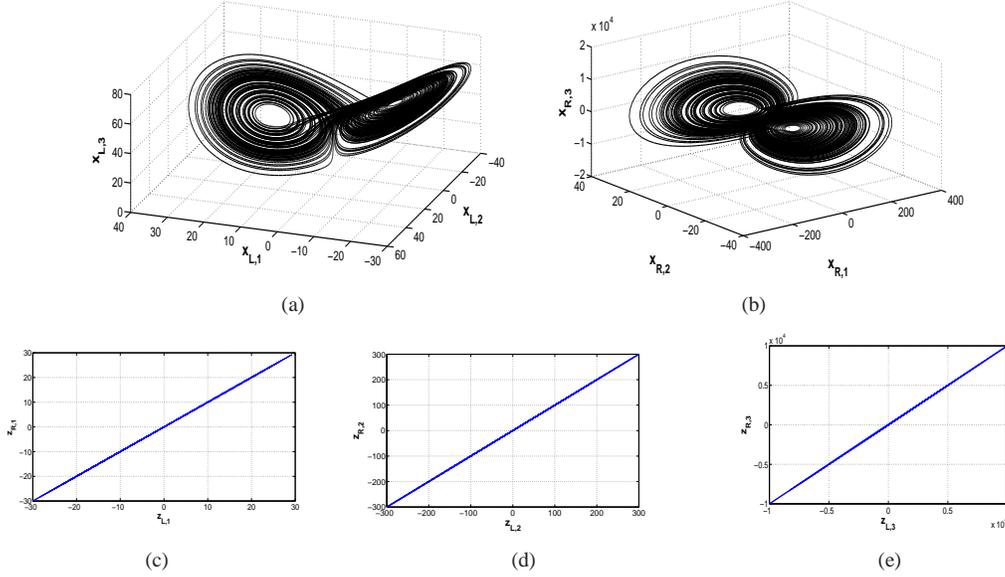


Figura 1. SG Lorenz-Rössler con grado relativo tres.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{L,1} \\ \dot{z}_{L,2} \\ \dot{z}_{L,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{L,2} \\ z_{L,3} \\ \alpha_{L^3,\rho}(z_L) + \beta_{L^3,\rho}(z_L)u_\rho \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde $\alpha_{R^3,\rho}(z_R) = -\dot{x}_{R,2} - \dot{x}_{R,3} + a_R(\dot{x}_{R,1} + a\dot{x}_{R,2})$; $\beta_{R^3,\rho}(z_R) = -1$; $\alpha_{L^3,\rho}(z_L) = -a_L^2(\dot{x}_{L,2} - \dot{x}_{L,1}) + a_L(b_L\dot{x}_{L,1} - \dot{x}_{L,2} - x_{L,3}\dot{x}_{L,1} - x_{L,1}\dot{x}_{L,3})$; y $\beta_{L^3,\rho}(z_L) = -a_L z_{L,1}$. Con las variables \dot{x}_R y \dot{x}_L descritas en (4) y (5).

III-A.1. Combinación: $\sigma = n$, $R \rightarrow L$:

Tomando al sistema Rössler como *maestro* y al Lorenz como *esclavo*, la dinámica del *error de sincronización* esta dada por:

$$\dot{e}_z = \begin{bmatrix} e_{z,2} \\ e_{z,3} \\ \delta_{RL^3}(e_z) - \beta_{L^3,s}(z_L)u_s \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde² $\delta_{RL^3}(e_z) = \alpha_{R^3,m}(z_R) - \alpha_{L^3,s}(z_L)$.

Una forma directa de diseñar un estabilizador para el sistema en (18) es mediante un controlador por retroalimentación linealizante. En este caso sin embargo, debido a que $\beta_{L^3,s}(z_L)$ es cero en el origen, no es posible construir un controlador estático por retroalimentación que vuelva el error de sincronización asintóticamente estable. De modo que, por retroalimentación de estados no es posible tener una SG entre los sistemas Rössler y Lorenz, a través de los cambios de coordenadas con grado relativo igual a tres, cuando el sistema Lorenz es el *esclavo*.

III-A.2. Combinación: $\sigma = n$, $L \rightarrow R$:

En contraposición a la combinación anterior, tomando al sistema Lorenz como *maestro* y al Rössler como *esclavo* la

dinámica del *error de sincronización* esta dada por:

$$\dot{e}_z = \begin{bmatrix} e_{z,2} \\ e_{z,3} \\ \delta_{LR^3}(e_z) - \beta_{R^3,s}(z_R)u_s \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde $\delta_{LR^3}(e_z) = \alpha_{L^3,m}(z_L) - \alpha_{R^3,s}(z_R)$.

Para esta combinación, un controlador estabilizador puede ser diseñado como una retroalimentación linealizante de la forma:

$$u_s = \frac{1}{\beta_{R^3,s}(z_R)}(\delta_{LR^3}(e_z) - Ke_z) \quad (20)$$

donde el vector de ganancias $K = [k_1, k_2, k_3]$ se escoge tal que el polinomio $s^3 - k_3s^2 - k_2s - k_1 = 0$ tenga solo raíces con parte real negativa.

La dinámica del *error de sincronización* en lazo cerrado esta dada por:

$$\dot{e}_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} e_z = Ae_z \quad (21)$$

donde, para las k 's escogidas, A es Hurwitz y el *error de sincronización* es asintóticamente estable. Entonces, SG entre los sistemas Rössler y Lorenz ocurre a través del mapeo $\Phi_{R^3,s}^{-1}(\Phi_{L^3,m}(x_L))$. Note que en este caso el mapeo de sincronización generalizada mapea las trayectorias del sistema *maestro* para hacerlas coincidir con las trayectorias del *esclavo*, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\Theta}(x_L) - x_r\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_{R^3,s}^{-1}(\Phi_{L^3,m}(x_L)) - x_R\| = 0$. Este cambio en la descripción de la SG es necesario ya que $\Phi_{L^3,m}^{-1}(z_L)$ no esta determinada alrededor del origen.

En la Figura 1 se muestran los resultados de simular numéricamente la SG entre Rössler y Lorenz, a través de sus cambios de coordenadas con grado relativo tres y el

²En el resto de la contribución se considera que el controlador del sistema *maestro* siempre es cero ($u_m = 0$).

controlador (20). Los atractores de los sistemas *maestro* y *esclavo* en sus coordenadas originales se muestran en las Figuras 1(a) y 1(b), respectivamente. Así mismo, en las Figuras 1(c), 1(d), y 1(e), se muestra que las variables transformadas, z_1 , z_2 , y z_3 , de los sistema Rössler y Lorenz coinciden de manera idéntica.

III-B. Caso $\sigma < n$

La dinámica de los sistemas Rössler y Lorenz en las variables transformadas, $[z_R, \eta_R]^\top$ y $[z_L, \eta_L]^\top$, obtenidas a partir de los cambios de coordenadas (10) y (14), es:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{R,1} \\ \dot{z}_{R,2} \\ \dot{\eta}_{R,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{R,2} \\ \alpha_{R^2,\rho}(z_R) + \beta_{R^2,\rho}(z_R)u_\rho \\ \gamma_{R,\rho}([z_R, \eta_R]^\top) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{L,1} \\ \dot{z}_{L,2} \\ \dot{\eta}_{L,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{L,2} \\ \alpha_{L^2,\rho}(z_L) + \beta_{L^2,\rho}(z_L)u_\rho \\ \gamma_{L,\rho}([z_L, \eta_L]^\top) \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde $\alpha_{R^2,\rho}(z_R) = -\dot{x}_{R,2} - \dot{x}_{R,3}$; $\beta_{R^2,\rho}(z_R) = -1$; $\gamma_{R,\rho}([z_R, \eta_R]^\top) = \dot{x}_{R,2}$; $\alpha_{L^2,\rho}(z_L) = a_L(\dot{x}_{L,2} - \dot{x}_{L,1})$; $\beta_{L^2,\rho}(z_L) = a_L$; y $\gamma_{L,\rho}([z_L, \eta_L]^\top) = \dot{x}_{L,3}$. Con las variables \dot{x}_R y \dot{x}_L descritas en (4) y (5).

III-B.1. Combinación: $\sigma < n$, $L \rightarrow R$:

Tomando al sistema Lorenz como *maestro* y al Rössler como *esclavo*, la dinámica del *error de sincronización* esta dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{z,2} \\ \dot{e}_{\eta,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{z,2} \\ \delta_{LR^2}(e_z) - \beta_{R^2,s}(z_R)u_s \\ \Gamma_{LR}([e_z, e_\eta]^\top) \end{bmatrix} \quad (24)$$

donde $\delta_{LR^2}(e_z) = \alpha_{L^2,m}(z_L) - \alpha_{R^2,s}(z_R)$ y $\Gamma_{LR}([e_z, e_\eta]^\top) = \gamma_{L,m}([z_L, \eta_L]^\top) - \gamma_{R,s}([z_R, \eta_R]^\top)$.

Una SG completa entre los sistemas Rössler y Lorenz ocurre cuando el origen de (24) es asintóticamente estable. En este caso, debido a que la dinámica del *error de sincronización* tiene *dinámica interna*, un controlador por retroalimentación linealizable puede ser utilizado para estabilizar el origen, si y solo si, la *dinámica interna* del *error de sincronización* (e_η), cuando las variables linealizables son cero ($e_z = 0$), es asintóticamente estable. En otras palabras, solo se puede obtener un diseño útil de u_s para estabilizar el *error de sincronización* en el origen cuando su *dinámica cero* ($[\dot{e}_z, \dot{e}_\eta]^\top = [0, \gamma(0, e_\eta)]^\top$) es asintóticamente estable (Isidori, 1999; Marquez, 2003).

Para este caso, la *dinámica cero* del *error de sincronización* es:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\eta,LR}^0 &= \Gamma_{LR}([e_z, e_\eta]^\top)|_{e_z=0} \\ &= [\gamma_{L,m}([z_L, \eta_L]^\top) - \gamma_{R,s}([z_R, \eta_R]^\top)]|_{z_L=z_R} \end{aligned} \quad (25)$$

La estabilidad de $e_{\eta,LR}^0$ puede determinarse a partir de sus componentes. Note que al sistema *maestro* no se le aplica ninguna acción de control ($u_m = 0$), de modo que permanece en su régimen caótico. Por lo tanto, sus trayectorias se mantienen acotadas al tamaño del atractor en que viven. Por esta misma razón, la *dinámica interna*

del *maestro* no es asintóticamente estable a cero. Por otra parte, debido a que los sistemas *maestro* y *esclavo* son estrictamente diferentes, aun cuando las variables linealizables sean iguales ($z_L = z_R$), sus dinámicas internas serán diferentes ($\gamma_{L,\rho} \neq \gamma_{R,\rho}$). En consecuencia, $e_{\eta,LR}^0$ nunca es asintóticamente estable al origen cuando los sistemas son estrictamente diferentes y el *maestro* es un sistema caótico.

Por las razones descritas arriba, una SG completa entre los sistemas caóticos Rössler y Lorenz a través de transformaciones con dinámica interna no es posible mediante un controlador por retroalimentación linealizante de la forma (20). Sin embargo, una SG parcial es posible si el controlador u_s , es tal que la *dinámica interna* del error se mantenga acotada, y a la vez, la *dinámica linealizable* es asintóticamente estable. Es decir,

$$\|e_\eta\| < M, \quad \forall t, \text{ con } M \in \mathbb{R}, \text{ y} \quad (26)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_z\| = 0 \quad (27)$$

Un requerimiento básico para satisfacer estas condiciones es que el sistema *esclavo* sea estabilizable. Esto es, que su *dinámica cero* sea asintóticamente estable, ya que de no ser así, el efecto del controlador sobre el *esclavo* podría volverlo inestable.

Para esta combinación, la *dinámica cero* del sistema *esclavo* es:

$$\dot{\eta}_{R,s}^0 = \gamma_{R,s}([z_R, \eta_R]^\top)|_{z_R=0} = a_R \eta_{R,1} \quad (28)$$

como $a_R > 0$, la *dinámica cero* del *esclavo* es inestable. De modo que para esta combinación no es posible lograr una SG completa, y tampoco es posible lograr una SG parcial a través del diseño de un controlador linealizador por retroalimentación.

III-B.2. Combinación: $\sigma < n$, $R \rightarrow L$:

Finalmente, si el sistema Rössler se toma como *maestro* y al Lorenz como *esclavo*, la dinámica del *error de sincronización* resulta ser:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{z,1} \\ \dot{e}_{z,2} \\ \dot{e}_{\eta,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{z,2} \\ \delta_{RL^2}(e_z) - \beta_{L^2,s}(z_L)u_s \\ \Gamma_{RL}([e_z, e_\eta]^\top) \end{bmatrix} \quad (29)$$

donde $\delta_{RL^2}(e_z) = \alpha_{R^2,s}(z_R) - \alpha_{L^2,m}(z_L)$ y $\Gamma_{RL}([e_z, e_\eta]^\top) = \gamma_{R,s}([z_R, \eta_R]^\top) - \gamma_{L,m}([z_L, \eta_L]^\top)$.

De igual manera como en la combinación anterior, el *error de sincronización* no es estabilizable al origen a través de u_s . Por lo tanto, no se puede tener una SG completa. Por otro lado, para lograr una SG parcial en los términos de (26) y (27), en primer lugar es necesario que la *dinámica cero* del sistema *esclavo* sea asintóticamente estable. La *dinámica cero* del sistema Lorenz es:

$$\dot{\eta}_{L,s}^0 = \gamma_{L,s}([z_L, \eta_L]^\top)|_{z_L=0} = -c_L \eta_{L,1} \quad (30)$$

como $c_L > 0$, la *dinámica cero* del *esclavo* es asintóticamente estable al origen. Sin embargo, el objetivo del controlador u_s es diferente a la estabilización del sistema *esclavo*. De hecho, se busca a través de u_s que las trayectorias del

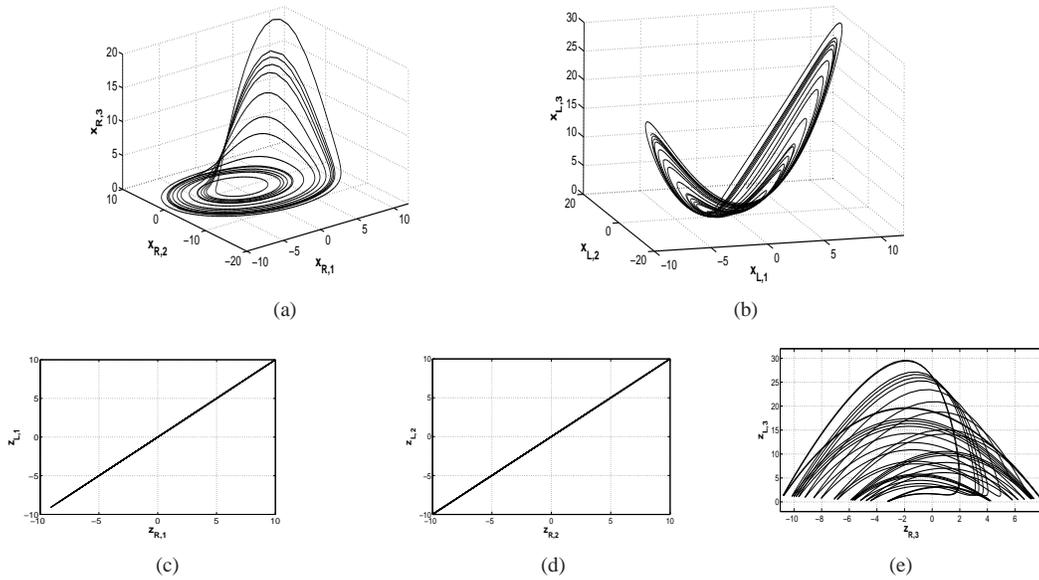


Figura 2. SG Rössler-Lorenz con grado relativo dos.

esclavo sigan a las del *maestro*. Por lo tanto, es necesario que la *dinámica interna* del sistema *esclavo*, además de asintóticamente estable sea *convergente*³. Para mostrar que la *dinámica interna* del sistema Lorenz es convergente basta notar que la dinámica en la variable $\eta_{L,1}$ se va a cero conforme pasa el tiempo, de modo que su dinámica esta determinada por z_L , que puede verse como su entrada. En particular, cuando $e_z = 0$, tenemos $z_L = z_R$. Es decir, que la dinámica interna del esclavo sigue una función de los estados linealizables del *maestro*.

En la Figura 2 se muestran los resultados de simular numéricamente la SG parcial entre Rössler y Lorenz, a través de sus cambios de coordenadas con dinámica interna ($\sigma = 2$) y el controlador (20). Los atractores de los sistemas *maestro* y *esclavo* en sus coordenadas originales se muestran en las Figuras 2(a) y 2(b), respectivamente. Así mismo, en las Figuras 2(c), 2(d), y 2(e), se muestra la relación entre las variables transformadas, z_1 , z_2 , y z_3 , de los sistema Rössler y Lorenz.

IV. CONCLUSIONES

El problema de SG entre sistemas estrictamente diferentes en una conexión *maestro-esclavo* se estudio utilizando los sistemas Rössler y Lorenz como ejemplos ilustrativos. De esta manera se dilucidaron casos y combinaciones para los cuales a través de un controlador por retroalimentación de estados linealizante se puede producir SG completa. Más aun, se mostró la existencia de una SG parcial entre Rössler y Lorenz cuando el grado relativo de los sistemas es menor a su dimensión. Este primer estudio será ampliado

para considerar el caso de dimensiones y grados relativos diferentes de los sistemas *maestro* y *esclavo*.

V. AGRADECIMIENTOS

Se contó con financiamiento de CONACYT con el proyecto 106915-Y y la beca 221804.

REFERENCIAS

- A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, (2001), *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge UK.
- S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, C. S. Zhou (2002). The synchronization of chaotic systems, *Phys. Rep.*, **366**, 1–101
- R. Femat, G. Solis-Perales, (2008), *Robust Synchronization of Chaotic Systems Via Feedback*, Springer-Verlag, Berlin
- N. Rulkov, M. Sushchik, L. Tsimring, H. Abarbanel (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, *Phys. Lett. E*, **51**, 980–994
- R. Femat and G. Solis-Perales (2002). Synchronization of chaotic systems with different order, *Phys. Rev. E*, **65**, 036226
- T. Yang, H. H. Shao (2002). Synchronizing chaotic dynamics with uncertainties based on a sliding mode control design, *Phys. Rev. E*, **65**, 036556
- R. Femat, L. Kocarev, L. van Gerven, M. E. Monsivais-Pérez (2005). Towards generalized synchronization of strictly different chaotic systems, *Phys. Lett. A*, **342**, 247–255
- A. Isidori (1995). *Nonlinear control systems*, 3th Ed., Springer, London
- H. J. Marquez (2003). *Nonlinear control systems*, Wiley-Interscience, USA
- A. Pavlov, N. van der Wouw, H. Nijmeijer (2006). *Uniform Output Regulation of Nonlinear Systems: A convergent dynamics approach*, Birkhäuser, USA

³La dinámica de un sistema controlado es convergente si: (1) el sistema sin control converge asintóticamente a cero; (2) cuando es controlado, conforme pasa el tiempo “olvida” sus condiciones iniciales y converge a seguir su entrada (Pavlov et al., 2006).