

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A. C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Sincronización y control de redes
dinámicas con topología conmutada**

Tesis que presenta

Isaac Leonel López García

Para obtener el grado de

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la tesis:

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

San Luis Potosí, S.L.P., Septiembre de 2018



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "**Sincronización y control de redes dinámicas con topología conmutada**" presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Isaac Leonel López García** y aprobada el **cinco de septiembre del dos mil dieciocho** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
Director de la tesis

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Jurado en el Examen

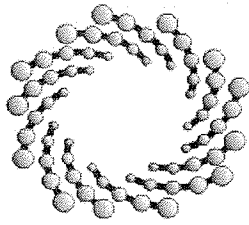
Dr. Arturo Zavala Río
Jurado en el Examen

Dr. Diego Langarica Córdoba
Jurado en el Examen

Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Juan Gonzalo Barrajas Ramírez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnológica con el número 612121, así como apoyos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 034 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 5 días del mes de septiembre del año 2018, se reunió a las 10:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Arturo Zavala Río	Presidente	IPICYT
Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez	Secretario	IPICYT
Dr. Diego Langarica Córdoba	Sinodal externo	UASLP
Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Isaac Leonel López García

sobre la Tesis intitulada:

Sincronización y control de redes dinámicas con topología conmutada

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 11:30 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 5 días del mes de septiembre de 2018.

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

Dr. Horacio Flores Zúñiga
Secretario Académico



Dedicatoria

A mis padres y hermanos que siempre me apoyaron y especialmente a mi esposa e hijos, Ani y Jacob, que confiaron en mí.

Agradecimientos

Un profundo agradecimiento al Dr. Gonzalo Barajas por su asesoría y constante apoyo durante la realización del trabajo de tesis.

Especialmente le doy las gracias al Instituto Potosino de Ciencia y Tecnología (IPICYT) por abrirme sus puertas y a cada uno de los profesores que compartieron su tiempo y conocimientos en cada una de las clases.

También agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría.

Muchas gracias a los miembros del jurado por sus comentarios y correcciones así como a mis compañeros.

Índice general

Índice de Figuras	VIII
Resumen	IX
Abstract	X
1. Introducción	1
1.1. Sistemas complejos	1
1.2. Redes complejas	2
1.3. Descripción del problema	7
1.4. Descripción del documento	11
2. Redes con topología fija	12
2.1. Sincronización en redes con topología fija	14
2.1.1. Ejemplo 1. Red BA de sistemas Lorenz	20
2.2. Regulación por pinning en redes con topología fija	27
2.2.1. Ejemplo 2. Regulación por pinning en redes con topología fija	31
3. Sistemas conmutados	37
3.1. Conmutación dependiente de los estados	38
3.2. Conmutación dependiente del tiempo	42
3.3. Estabilizabilidad de sistemas conmutados	46
3.4. Estabilidad en sistemas conmutados	51
4. Redes con topología conmutada	55
4.1. Sincronización en redes dinámicas con topología conmutada	56
4.1.1. Ejemplo 3. Sincronización en redes conmutadas	63
4.2. Regulación por pinning en redes dinámicas con topología conmutada	66
4.2.1. Ejemplo 4. Regulación por pinning en redes conmutadas	68
5. Conclusiones	72
5.1. Trabajo futuro	73

Índice de figuras

2.1.	Atractor de Lorenz con $\zeta = 10, \rho = 28$ y $\tau = 8/3$	20
2.2.	Red BA generada para el ejemplo 1 ($m_o = m = 3, N = 15$)	21
2.3.	Dinámica de la red (2.26) con $c = 0.1$	23
2.4.	Error de sincronización de la red (2.26) con $c = 0.1$	24
2.5.	Dinámica de la red (2.26) con $c = 12$	25
2.6.	Error de sincronización de la red (2.26) con $c = 12$	26
2.7.	Dinámica de la red del ejemplo 2 con $c = 0.1$	32
2.8.	Control en el tiempo	33
2.8.	Dinámica de la red del ejemplo 2 con $c = 60$	35
2.8.	Control en el tiempo	36
3.1.	Ley de conmutación $\sigma_2(x(t)) : \mathbb{R} \rightarrow M = \{1, 2\}$	38
3.2.	Ley de conmutación $\sigma_3(x(t)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow M = \{1, 2\}$	39
3.3.	Proyección de la ley de conmutación $\sigma_3(x(t))$ en el espacio de estados . . .	40
3.4.	Gráficas de la función $\hat{g}(x_1(t))$ y de $\sigma_4(x_1(t))$	41
3.5.	Dinámica del modelo del circuito de Chua	42
3.6.	Sistema conmutado dependiente del tiempo	43
3.7.	Sistema conmutado inestable dependiente del tiempo	44
3.8.	Sistema conmutado estable dependiente del tiempo	45
3.8.	Soluciones del sistema (3.4) con $\sigma_3(x(t))$ fija	47
3.9.	Solución del sistema conmutado (3.4) con $\sigma_3(x(t))$	48
3.10.	Solución del sistema conmutado (3.4) con $\sigma_8(x(t))$	48
3.10.	Soluciones del sistema (3.15) con $\sigma_3(x(t))$ fija	49
3.11.	Solución del sistema conmutado (3.15) con $\sigma_3(x(t))$	50
3.12.	Solución del sistema conmutado (3.15) con $\sigma_8(x(t))$	50
3.12.	Solución del sistema conmutado (3.23) con $\sigma_9(t)$	54
4.1.	Ley de conmutación arbitraria en el tiempo	63
4.2.	Dinámica de la red conmutada	64
4.3.	Error de sincronización de la red conmutada	65
4.4.	Ley de conmutación arbitraria en el tiempo	69
4.5.	Dinámica de la red conmutada	70
4.6.	Error de control de la red conmutada	71

Resumen

Las redes dinámicas conmutadas son modelos matemáticos de sistemas dinámicos complejos que se presentan en todas las áreas del conocimiento, las cuales capturan propiedades de interés, como la estructura, evolución de los estados y cambios en la forma de conexión.

En este trabajo abordamos el problema de sincronización y el de control por pinning en una red dinámica conmutada. Analizamos condiciones bajo las cuales una red dinámica compleja logra sincronización idéntica, y diseñamos un controlador para llevar los estados de la red a un punto de equilibrio. Para determinar la estabilidad de la solución de sincronización y del punto de equilibrio al que se regula la red, consideramos una perspectiva de sistemas conmutados y los resultados se establecen usando el Teorema de la función común de Lyapunov.

El modelo considerado es una red de nodos idénticos con dinámica no lineal y estructura de conexión que conmuta de acuerdo a una función del tiempo constante por partes y continua por la derecha. Todas las estructuras consideradas son difusivas, simétricas e irreducibles. Suponemos que todas las matrices Laplacianas cumplen alguna de las condiciones de diagonalización o triangularización simultánea para usar un cambio de variables que permite desacoplar la dinámica del error simplificando el problema. Si no se satisfacen estas suposiciones mostramos condiciones adicionales para garantizar la sincronización idéntica de la red.

Consideramos el mismo modelo de red para aplicar control por pinning, que es diseñar controles por retroalimentación para un número muy reducido de nodos a fin de llevar las soluciones de todos los nodos de la red a un punto fijo de modo que sea asintóticamente estable. Se presentan ejemplos y simulaciones numéricas de sincronización y control para ilustrar los resultados.

Abstract

Switched complex dynamical networks are mathematical models of dynamical complex systems that appear in all areas of knowledge, which capture properties of interest, such as structure, evolution of states and changes in the form of connection.

In this paper we address the problem of synchronization and control by pinning in the switched dynamic network. We analyze conditions under which a complex dynamical network achieves identical synchronization, and we design a controller to bring the states of the network to a equilibrium point. To determine the stability of the synchronization solution and the equilibrium point to which the network is regulated, we use consider a perspective of switched systems and the results are established using the Lyapunov common function theorem.

The model considered is a network of identical nodes with non-linear dynamics and connection structure that switches according to a constant in parts time function and continue on the right. All structures considered are diffusive, symmetric and irreducible. We suppose that all the Laplacian matrices satisfy either the conditions of simultaneous diagonalization or triangulation to use a change of variables that allows us to uncouple the error dynamics, simplifying the problem. If these assumptions are not met, additional conditions to ensure identical network synchronization are presented.

We consider the same network model to apply pinnign control, which is to design feedback controls for a very small number of nodes in order to bring the solutions of all the nodes of the network to a fixed point so that it is asymptotically stable. Examples and numerical simulations of synchronization and control are presented to illustrate the results.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Sistemas complejos

Sistema, de acuerdo al diccionario de la Real Academia Española (R.A.E.), es un conjunto de cosas que relacionadas entre sí ordenadamente contribuyen a determinado objeto. Cabe remarcar que el ordenamiento de las relaciones entre los elementos es determinante para el propósito del conjunto, sin esta característica, un conjunto no sería un sistema. Si los elementos del sistema evolucionan en el tiempo, se denomina sistema dinámico.

Un sistema complejo es un ensamble de un gran número de unidades fundamentales que interactúan entre sí estableciendo las características y funcionalidad del sistema. En este sentido, decimos que un sistema es complejo cuando las relaciones entre sus elementos no siguen un patrón regular o cuando las interacciones son enmarañadas. La forma en que las unidades fundamentales interactúan describe la estructura de conexión del sistema. Por otra parte, la interacción entre la estructura de conexión y la evolución dinámica de las unidades fundamentales determinan la funcionalidad del sistema complejo [1].

Podemos encontrar muchos ejemplos de sistemas complejos a nuestro alrededor: el Internet, el World Wide Web, la red de distribución eléctrica, entre muchos otros sistemas de interés, se pueden clasificar como complejos [2]. Por ejemplo, el Internet, que está conformado por un gran número de servidores interconectados en forma intrincada para compartir información, tiene una estructura de conexión muy compleja; mientras que su funcionalidad surge de la interacción entre la dinámica de los servidores y la estructura en la que están conectados. Por su parte, la red de distribución eléctrica cuenta con una complejidad adicional debido a que comúnmente las conexiones entre subestaciones de alta tensión fallan por periodos de tiempo no despreciables, esto es, la estructura de conexión conmuta de una topología a otra en forma aleatoria, lo cual complica considerablemente la determinación de estabilidad de sus comportamientos.

Para estudiar un sistema dinámico el primer paso es construir un modelo, es decir, generar una representación matemática simplificada e idealizada que capture sus propiedades de interés para su estudio. Una vez que se tiene un modelo se procede a determinar las propiedades cualitativas de sus soluciones, es decir, establecer que tipo de soluciones tiene el sistema, su estabilidad, e inclusive diseñar acciones de control para imponer un comportamiento deseado [3]. En particular, en el caso de sistemas complejos, los modelos deberán capturar su estructura y funcionalidad. A continuación describimos un modelo de sistema complejo al que llamamos red compleja.

1.2. Redes complejas

Una definición de red, de acuerdo a la R.A.E., es un “conjunto de elementos organizados para determinado fin”, la cual es muy similar a la definición de sistema, por lo que en ocasiones se utilizan estos conceptos en forma equivalente. Por ejemplo, se dice red eléctrica en lugar de sistema de distribución eléctrica, también se acostumbra decir red de telecomunicaciones en lugar de sistema de telecomunicaciones, etc. Por nuestra parte, cuando hablemos de red nos referiremos exclusivamente al modelo matemático que describe la estructura del sistema complejo.

Para modelar la estructura de un sistema complejo, las unidades fundamentales del sistema se representan como nodos y las interacciones entre ellas como enlaces, lo que permite hacer una representación visual de la estructura del sistema donde los nodos son puntos y las relaciones entre ellos son líneas, a esta abstracción se le conoce como grafo o gráfica. Cuando a esta representación se le incluyen aspectos adicionales su nombre cambia, por ejemplo, se le llama digrafo si se incluye información de quien afecta a quien, es decir, la dirección de los enlaces. Por otra parte, se le llama grafo con pesos si se incluye la fuerza de conectividad entre los nodos que describen cada enlace [2].

Una de las herramientas más útiles para el análisis estructural de las redes es la teoría de grafos [4]. Matemáticamente un grafo $\mathcal{G} = (V, E)$, se define por un par de conjuntos: un conjunto no vacío de nodos V y un conjunto de enlaces E . Donde cada enlace $e_{ij} \in E$ es un par ordenado de nodos $e_{ij} = (v_i, v_j)$ con $v_i, v_j \in V$ [2]. Al grafo \mathcal{G} se denomina grafo simple, si entre cualquier par de nodos sólo se permite la existencia de un enlace, además que no existen auto-ciclos. Por otra parte, se le llama grafo no dirigido si para cada enlace $e_{ij} \in E$ existe el enlace $e_{ji} \in E$, de otra manera es un digrafo [5].

Un grafo puede ser representado mediante matrices; en particular, el grafo \mathcal{G} , tiene aso-

ciada una matriz de adyacencia, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, donde N es el número de nodos, es decir, la cardinalidad del conjunto V , la cual describe las conexiones entre los nodos de la siguiente manera: las entradas a_{ij} son igual a uno, si existe un enlace entre los nodos v_i y v_j ($e_{ij} \in E$), en caso contrario, a_{ij} es igual a cero. Otra matriz de interés es la matriz Laplaciana, $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$, la cual se obtiene de la diferencia entre la matriz de adyacencia y la matriz de grados de nodo D , dada por $D = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_N)$, con k_i el grado del i -ésimo nodo (el número de enlaces que tiene dicho nodo). Es importante remarcar que la matriz Laplaciana, $L = A - D$, de un grafo tiene las siguientes propiedades, es: simétrica, de suma por renglón nula, semidefinida negativa y de espectro de eigenvalores con la forma descrita como en [6]:

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \quad (1.1)$$

Estas propiedades estructurales serán de gran utilidad para el análisis que se presenta en capítulos posteriores.

Las tres medidas fundamentales de un grafo simple ayudan a caracterizar la estructura del sistema complejo asociado. Estas medidas son: la longitud de camino promedio, el coeficiente de agrupamiento y la distribución de grado de nodo [5].

La distancia o distancia geodésica entre dos nodos, d_{ij} , es el número mínimo de enlaces que se atraviesan para llegar del nodo i al nodo j . La longitud promedio de la red \mathbf{I} , es el valor promediado de todas las distancias entre todos los pares de nodos, y se calcula con la siguiente fórmula:

$$\mathbf{I} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} d_{ij} \quad (1.2)$$

La distancia en los sistemas complejos tiene un impacto importante en su funcionalidad, por ejemplo, una distancia corta en el Internet, implica mayor velocidad de transferencia de información, en el sistema de distribución eléctrica, significa una menor pérdida de energía. Muchos sistemas reales tienen una distancia promedio relativamente corta a pesar del gran número de nodos que involucran.

La segunda medida de interés es el coeficiente de agrupamiento, \bar{c} , también llamada transitividad, el cual indica qué tan conectada es la red. Para calcularlo tomemos el nodo i con k_i enlaces conectando a k_i nodos a los que llamamos vecinos del nodo i . Sabemos que pueden existir hasta $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ enlaces entre estos vecinos. Sea \bar{e}_i el número de enlaces que realmente existen entre los k_i vecinos. Entonces, el coeficiente de agrupamiento del nodo i es:

$$\bar{c}_i = \frac{2\bar{e}_i}{k_i(k_i-1)}$$

Luego, el promedio de los coeficientes de todos los nodos es el coeficiente de agrupamiento de la red. Notemos que este valor es $0 \leq \bar{c} \leq 1$, de modo que una red con coeficiente de agrupamiento igual a uno, indica una red totalmente conectada, mientras que un coeficiente bajo apunta a pocas conexiones en la red. Muchos sistemas reales con un alto número de nodos presentan un efecto de agrupamiento en el se forman grupos o 'clusters', derivando en un alto coeficiente de agrupamiento de la red.

Ahora, la última de las medidas es el grado de nodo, denotado como k_i , es el número de enlaces que tiene el i -ésimo nodo y el grado promedio de la red es el valor promedio de los grados de todos los nodos de la red. Adicionalmente, usamos la distribución de grado de nodo, $P(k)$, que es una función que nos dice la probabilidad de que un nodo tomado aleatoriamente tenga k enlaces, es decir, tenga grado k . Para describir la distribución de los grados de nodo en una red, se usan normalmente la distribución de Poisson y la distribución de ley de potencias. La primera representa que la mayoría de los nodos tienen un grado de nodo cercano al valor promedio, y la curva de Poisson decae exponencialmente rápido, mientras que la segunda representa que pocos nodos poseen muchos enlaces y la mayor parte de los nodos tienen muy pocos, esto causa que la curva decaiga mucho más despacio que la curva de Poisson.

Luego, las tres medidas mencionadas caracterizan las diferencias estructurales encontradas en los sistemas complejos del mundo real. Por ejemplo, se ha mostrado que muchas redes tecnológicas y biológicas reales tenían una longitud promedio relativamente corta a pesar de tener un gran número de nodos o elementos [1]. Este fenómeno se denomina *mundo pequeño* y fue observado por el psicólogo social Stanley Milgram en un experimento que intentaba medir la distancia en enlaces entre dos personas aleatoriamente seleccionadas [7]. Por otra parte, se encontró que muchos sistemas como el de telecomunicaciones o transporte, presentan un fenómeno llamado *escala libre*, que establece que algunos nodos de cualquier red tiene mayor número de enlaces que el resto y que esta propiedad se mantendría sin importar cuanto creciera la red, de allí el nombre de escala libre [9]. Los modelos de red presentados son objetos matemáticos que buscan capturar estos distintos efectos estructurales de los sistemas complejos.

Para facilitar la construcción de estos modelos se han propuesto algoritmos para los distintos tipos de red. Por ejemplo, para construir una grafo regular con acoplamiento global primeramente se colocan N nodos y en seguida se conecta el nodo i con todos los demás, y se realiza para todos los nodos. Este modelo tiene una distancia entre nodos y coeficiente de agrupamiento igual a uno y una distribución de nodo constante, es decir, todos los nodos tienen el mismo número de enlaces. Otro modelo de red regular es el de vecinos más cercanos,

el cual mantiene un alto coeficiente de agrupamiento pero reduciendo el número de enlaces por nodo. Se construye colocando N nodos y luego se conecta cada nodo con los $k_i \ll N$ nodos más cercanos. Sin embargo, estos no son buenos modelos porque pocos sistemas reales poseen esta estructura.

Los matemáticos húngaros Paul Erdos y Alfréd Rényi propusieron los grafos aleatorios, los cuales son "útiles idealizaciones", pero no describían la densidad de muchas redes reales. La distancia promedio es corta en relación con el número de nodos, tiene un bajo coeficiente de agrupamiento y la distribución de grado de nodo esta dada por una distribución de Poisson. Estos modelos se generan a partir de N nodos, luego, se conecta una fracción $0 \leq p \leq 1$ de todos los posibles enlaces de la red uniformemente al azar, donde p es la probabilidad de conexión. Claramente vemos que con $p = 1$ tenemos un grafo regular de acoplamiento global y con $p = 0$ un grafo completamente desconectado. Además, Erdos y Rényi encontraron que muchas propiedades aparecen repentinamente para alguna probabilidad de conexión crítica, es decir, dada una probabilidad de conexión p , la mayoría de los grafos aleatorios tiene cierta propiedad Y , o casi ninguno la tiene [5].

Por su parte, Duncan Watts y Steven Strogatz propusieron un modelo que refleja el fenómeno de *mundo pequeño* así como un alto coeficiente de agrupamiento. Para generar estos modelos se inicia colocando N nodos, luego se conectan como una red regular de vecinos más cercanos, por último, se toma una fracción de los enlaces y se re-alambran, es decir, se desconecta un lado del enlace y uniformemente al azar se conecta en otro nodo, evitando auto-ciclos y dobles enlaces. Al igual que un grafo aleatorio, estos modelos también tienen una distribución de grado de nodo que sigue una distribución de Poisson [6].

Albert Lazlo Barabasi y Réka Albert propusieron aún otro modelo que captura el efecto de escala libre. Este modelo se construye a partir de un número inicial de nodos $m_0 > 1$ y se van agregando nuevos nodos con una probabilidad proporcional al número de enlaces que cuenta cada nodo, es decir, un nodo con mayor número de enlaces tendrá más probabilidades de recibir un nuevo enlace. Como resultado, estos modelos tienen una distancia promedio corta (incluso más corta que la de los grafos aleatorios), un coeficiente de agrupamiento mayor al de los grafos aleatorios y la distribución de grado sigue una ley de potencias, que a diferencia de los modelos anteriores, representa una conectividad heterogénea. Estas propiedades se encuentran extensamente en los sistemas de la realidad lo que los hace buenos modelos [9].

Hasta este punto hemos tratado solamente las características estructurales, o complejidad estructural, de las redes, sin embargo, existen otras fuentes de complejidad que no pueden ser representadas mediante un grafo como la evolución de la red o la dinámica interna. Steven

Strogatz enlistó seis fuentes de complejidad, incluyendo la a considerar al realizar estos modelos [1]:

1. Complejidad estructural. Relacionada con la forma en que los nodos de la red se enlazan. Se han propuesto distintos modelos para capturar apropiadamente la manera en que se enlazan los elementos de los sistemas.
2. Evolución de la red. Incluye cambios en el conjunto de nodos, por ejemplo debido al crecimiento de la red, y cambios en el conjunto de enlaces, ya sea que la conexión entre dos nodos deje de existir o que se cree una nueva.
3. Complejidad dinámica. Cada nodo puede ser un sistema y tener dinámica propia, incluso dinámica no lineal. Cuando incluimos esta propiedad en el modelo tenemos una red dinámica compleja.
4. Diversidad de conexión. Los enlaces en una red pueden ser distintos entre sí, pueden ser dirigidos o no dirigidos o tener pesos específicos, es decir, un enlace es más importante o fuerte que otro.
5. Diversidad de nodos. De manera similar a la diversidad de enlaces, los nodos en una misma red pueden tener naturalezas distintos entre sí.
6. Meta-complicación. Se da cuando dos o más complejidades están presentes en una red y se afectan mutuamente.

Al considerar otras complejidades obtenemos distintos modelos que permiten representar más apropiadamente los sistemas y sus comportamientos. Por ejemplo, si un modelo describe la funcionalidad del sistema, le llamamos red dinámica. En este caso, un modelo de red dinámica usa ecuaciones diferenciales para describir el comportamiento de las soluciones a lo largo del tiempo. Esto permite estudiar comportamientos colectivos emergentes así como diseñar controladores que permitan imponer un comportamiento deseado.

La sincronización es uno de los comportamientos colectivos emergentes de interés en las redes dinámicas. Con el término sincronización nos referimos a que existe una correspondencia en el tiempo entre los estados de cada nodo. Existen diversos tipos de sincronización: sincronización idéntica, de fase, con retraso, generalizada, entre otros [4].

El problema de control en redes complejas también ha ocupado el interés de diversos investigadores. Particularmente la regulación por pinning es una estrategia de control comúnmente usada en la que se aplica retroalimentación lineal local sólo a un número muy

reducido de nodos en la red y se logra imponer un comportamiento deseado a la red en su conjunto.

Por otra parte, si un modelo describe la evolución de la red entonces estamos hablando de una red conmutada la cual considera los cambios en la estructura. Estos cambios son comunes en los sistemas complejos reales, ya que muchos sistemas no mantienen una estructura de conexión estática, por ejemplo, el sistema de distribución eléctrica cambia su estructura cuando hay fallas en las líneas de transmisión (cambio en el conjunto de enlaces) y la constante conexión y desconexión de dispositivos evita que la Internet mantenga una estructura fija (cambio en el conjunto de nodos y enlaces). Por lo que es importante considerar la evolución de la red en los modelos ya que como dijo Strogatz “la estructura siempre afecta la funcionalidad”[1].

Además del cambio en la estructura o topología, es importante considerar la manera en que estos cambios se realizan. Estos cambios pueden ser activados por algún estado de la dinámica o por un tiempo definido o ser completamente aleatorios. En cualquier caso, estos cambios pueden estudiarse desde el punto de vista de sistemas conmutados, donde se ha mostrado que los cambios en la estructura pueden alterar el comportamiento general del sistema.

En particular, nosotros consideramos un modelo de red que incluye la complejidad estructural, dinámica y la evolución de la red, de modo que le llamamos red dinámica compleja conmutada, donde la conmutación se refiere a cambios exclusivamente en el conjunto de enlaces arbitrariamente en el tiempo. Más adelante daremos más detalles del modelo usado.

1.3. Descripción del problema

Al considerar la evolución de la red en nuestro modelo, afectamos los resultados obtenidos para las redes que no consideran cambios en la estructura, así que es posible que una red con estructura fija logre la sincronización idéntica, mientras que si se considera algún cambio en el conjunto de nodos o enlaces, puede no hacerlo. Por lo que surgen las siguientes preguntas ¿bajo que condiciones se mantiene la estabilidad del estado sincronizado a pesar de la conmutación arbitraria de topología? o ¿será posible diseñar un controlador por pinning que regule una red conmutada a un punto de equilibrio y bajo que condiciones? Estas preguntas son las que han motivado un interés en el presente trabajo.

En este trabajo de tesis nos proponemos usar modelos de red de escala libre, ecuaciones diferenciales para representar la dinámica de los nodos y matrices Laplacianas conmutadas

para modelar la evolución estructural de la red, de modo que incluye complejidad estructural, complejidad dinámica y evolución en la red.

Específicamente nuestro modelo es de nodos idénticos, por lo que la dinámica de cada elemento se representa con la misma ecuación diferencial, además consideramos que existe un valor real positivo que multiplica a la conexión entre nodos, a este valor le llamamos fuerza de acoplamiento uniforme. La estructura de conexión está dada por matrices Laplacianas con el mismo número de nodos entre las que la red conmuta arbitrariamente. La conmutación se realiza mediante una función $\sigma(t)$ que es constante por partes, continua por la derecha, y con la restricción que los cambios de topología se realizan instantáneamente.

El primer problema que abordamos es de estabilidad de una solución de sincronización de una red cuya estructura conmuta arbitrariamente, por lo que buscamos condiciones bajo las cuales el error de sincronización, definido como la diferencia entre los estados de la red y el estado sincronizado, sea asintóticamente estable, al menos localmente alrededor de la solución de sincronización.

Proponemos usar el Teorema de la función común de Lyapunov para determinar la estabilidad de la solución de sincronización bajo conmutación arbitraria considerando diagonalización y triangularización simultánea de las matrices de conexión. Aún más, mostramos que es posible prescindir de la condición de triangularización simultánea y establecer condiciones para la sincronización idéntica de la red.

El problema de control por pinning es una simplificación de la sincronización ya que analizamos la estabilidad de un punto de equilibrio, no de una solución variante en el tiempo. Proponemos resolver el problema de control diseñando controladores para un número muy pequeño de nodos que puedan llevar a toda la red a un punto de equilibrio común bajo el cambio arbitrario de estructura.

Los objetivos principales de este trabajo de tesis consisten en analizar una red dinámica compleja con conmutación arbitraria de topología y: 1) establecer condiciones suficientes bajo las cuales una solución de sincronización sea asintóticamente estable bajo la conmutación arbitraria de la topología, y 2) diseñar los controladores para un número pequeño de nodos tales que lleven los estados de la red a un punto de equilibrio a pesar de la conmutación arbitraria de la estructura.

Para esto analizaremos primeramente las condiciones necesarias para lograr sincronización en redes complejas con conexión fija y el control por pinning para regular una red con conexión fija. Simulaciones numéricas corroboran los resultados. Luego analizamos los resultados de varios investigadores en relación a la sincronización y control de redes complejas con estructura conmutada para finalmente proponer condiciones alternativas para lograr los

objetivos de sincronización y control de dichas redes ilustrando los resultados con ejemplos numéricos.

Aunque son diversos los enfoques y estrategias para analizar las condiciones que garantizan que una red compleja se sincroniza a pesar de variaciones en su estructura de conexión, el procedimiento y objetivos son muy similares. En todos los casos se establece una solución de sincronización, ya sea una solución promediada o la solución de un nodo aislado, y se define el error de sincronización como la diferencia entre los estados de cada nodo y esta solución de sincronización. El objetivo principal es analizar la estabilidad de la dinámica del error y establecer las condiciones bajo las cuales la dinámica del error es estable.

El análisis de las condiciones para lograr sincronización en redes complejas con nodos idénticos y estructura fija ha sido ampliamente abordado en las últimas décadas por múltiples investigadores, como Wu, Chua, Pecora, Wang, Chen, entre otros [8][10][11]. El análisis realizado por estos investigadores ha sido de estabilidad de una solución de sincronización a la que se llama estado sincronizado.

Tao Liu, Jun Zhao y David Hill analizan las condiciones bajo las cuales logra sincronización exponencial local y global una red dinámica compleja con acoplamientos variantes en el tiempo [22]. Consideran que cada nodo es un sistema dinámico no lineal y un acoplamiento difusivo, simétrico e irreducible. La conmutación de estructuras esta dada por una función $\sigma(t)$ que es constante por partes y continua por la derecha.

Más adelante Jun Zhao, David Hill y Tao Liu toman la perspectiva de sistemas conmutados para analizar la sincronización de redes dinámicas complejas con topología conmutada [24]. Toman el modelo usual para una red dinámica con nodos idénticos con dinámica continua y consideran que la estructura de conexión conmuta de acuerdo a una ley de switcheo arbitraria que es continua por la derecha y constante por partes. De modo que conmuta la estructura de la red entre m topologías que son difusivas, simétricas e irreducibles. Definen una solución de sincronización como una solución de un nodo aislado y linealizan la dinámica de los nodos alrededor de la solución de sincronización. Luego definen el error de sincronización como la diferencia entre los estados del i -ésimo nodo y la solución de sincronización y hacen un cambio de coordenadas considerando que todas las matrices de acoplamiento sean simultáneamente triangularizables y usan una función común de Lyapunov para determinar la estabilidad de la dinámica del error.

Sehjeong Kim y David Hill también abordan el problema de sincronización de redes complejas cuando el acoplamiento esta variando [23]. Los autores mencionan que uno de los intereses mayores en el estudio de la sincronización de redes complejas es obtener una fuerza de acoplamiento adecuada para la sincronización de la red. El objetivo de su trabajo

es proponer un criterio para determinar el valor de la fuerza de acoplamiento para lograr la sincronización en una red compleja con topología variante. Consideran una red con nodos idénticos, acoplamientos difusivos y simétricos y una solución de sincronización igual a la solución de un nodo aislado. Definen la sincronización si los estados de todos los nodos son iguales a la solución de sincronización cuando t tiende a infinito. Linealizan la dinámica de un nodo de la red alrededor de la solución de sincronización y establecen el error de sincronización del i -ésimo nodo de nodo.

Muchos investigadores han propuesto diversas metodologías y enfoques en el área de control de redes por pinning [15][16][17]. Por ejemplo, Wang y Chen estudiaron redes dinámicas con N nodos idénticos y acoplamientos lineales difusivos con el modelo de Barabasi-Albert, las llamadas de escala libre, y mostraron que para estabilizar la red en un punto estacionario, \bar{x} , con $f(\bar{x}) = 0$, es mucho más efectivo aplicar el control por pinning a algunos nodos con mayor número de conexiones que a la misma cantidad de nodos seleccionados aleatoriamente [15]. Por otro lado Tianping Chen, Xiwei Liu, y Wenlian Lu establecieron condiciones suficientes para garantizar la sincronización de una red con nodos idénticos a una solución homogénea con un solo controlador por pinning [17].

Antonio Adaldo *et al.* investigaron el problema del control por pinning para sincronizar una red con nodos idénticos y dinámica no lineal. El procedimiento seguido por los autores es similar al usado por Wang y Chen [11] para demostrar la sincronización de una red, en el sentido que definen primeramente el error de sincronización como la diferencia entre los estados y la trayectoria deseada y los resultados que presentan garantiza la estabilidad de la dinámica del error cuando el tiempo tiende a infinito. Analizan la estabilidad del error primeramente con redes de topología fija mostrando la existencia de una cota para la dinámica del error para cada instante dentro del intervalo entre eventos. Para el caso con topologías cambiantes consideran únicamente conmutación en el conjunto de enlaces y muestran la existencia de cotas para la dinámica del error de modo que aseguran que la norma del error en conjunto de la red converge exponencialmente a cero.

De modo que en este trabajo consideramos la perspectiva de sistemas conmutados como la herramienta para determinar la estabilidad de la solución de sincronización y para diseñar los controles para regular a un punto de equilibrio una red dinámica conmutada. Esta tesis presenta la metodología para determinar las condiciones suficientes para la sincronización y control de una red con topología fija para establecer las bases y conceptos necesarios para usarlos más adelante en el análisis de la red conmutada.

1.4. Descripción del documento

En el siguiente capítulo analizamos las redes dinámicas sin considerar cambios en su estructura, es decir, con topología fija. Establecemos condiciones suficientes para que dicha red logre la sincronización idéntica y enseguida diseñamos un control para regular la red a un punto de equilibrio. El capítulo 3 amplía la discusión en cuanto a los sistemas conmutados y presenta las herramientas necesarias para determinar la estabilidad de las soluciones en un sistema conmutado. El cuarto capítulo presenta el análisis de estabilidad de la solución de sincronización bajo ciertas condiciones, también describe el diseño del control para regular la red a un punto de equilibrio y muestra ilustraciones de los resultados. El quinto capítulo presenta las conclusiones y un resumen de los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Redes con topología fija

Suponga que la evolución de los estados de una red dinámica de N nodos de la misma dimensión esta dada por:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{X}(t) = [x_1(t)^T, x_2(t)^T, \dots, x_N(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ con $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ que son los estados del i -ésimo nodo. La evolución dinámica de la red esta descrita por la función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$, suponemos que se puede separar por nodos, donde cada nodo tiene una parte que solo depende de los estados del nodo y una parte que afecta de forma aditiva la dinámica en términos de sus conexiones con el resto de los nodos en la red. Entonces podemos describir la dinámica de la red completa (2.1), en términos de la evolución de cada nodo como:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + \mathbf{G}_i(\mathbf{X}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

donde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable que describe la dinámica del i -ésimo nodo si estuviera desconectado de la red, es decir, la dinámica del i -ésimo nodo asilado. El acoplamiento del i -ésimo nodo esta descrito por $\mathbf{G}_i : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Adicionalmente, si consideramos que todos los nodos son idénticos, tenemos $f_i = f \forall i$, más aún, pedimos que el acoplamiento sea una combinación lineal de la diferencia entre el i -ésimo nodo y el resto de los nodos de la red, podemos escribir la ecuación (2.2) como:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \Gamma(x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es la fuerza de acoplamiento uniforme en todos las conexiones de la red. $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de entradas cero o uno, que describe el acoplamiento interno de la red, es decir, indica como se conectan los estados de los nodos acoplados, por simplicidad, podemos

suponer que $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ entonces, $\gamma_j = 1$ indica que los nodos se conectan a través de su j -ésima componente. $A = (a_{ij})^{N \times N}$ es la matriz de acoplamiento externo de la red y se construye de la siguiente manera: Si el i -ésimo y el j -ésimo nodo están conectados la entrada $a_{ij} = 1$, en caso contrario, $a_{ij} = 0$. Más aún, suponemos que las conexiones son bidireccionales, entonces $a_{ij} = a_{ji}$. De modo que A es la matriz de adyacencia del grafo bidireccional que describe las conexiones entre los nodos de la red.

Por otro lado, como una consecuencia de la resta en (2.3) podemos desarrollar la ecuación de la siguiente manera:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \Gamma x_j(t) - c \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \Gamma x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Como los términos $\Gamma x_i(t)$ no dependen de la sumatoria en el último término, tenemos

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \Gamma x_j(t) - c \Gamma x_i(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Si definimos los elementos de la diagonal de la matriz de acoplamiento externo como:

$$a_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \tag{2.4}$$

Tenemos:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \Gamma x_j(t) + c a_{ii} \Gamma x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

De modo que podemos reescribir (2.3) en términos de la matriz Laplaciana $L = (l_{ij})^{N \times N}$ del grafo que describe las conexiones de la red, como:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{2.5}$$

En esta representación de la dinámica de la red se puede ver que la suma por renglón o por columna de la matriz de acoplamiento externo es cero. En forma vectorial (2.5) es:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}(t)) + c(L \otimes \Gamma)\mathbf{X}(t) \tag{2.6}$$

donde $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}(t)) = [f^T(x_1(t)), f^T(x_2(t)), \dots, f^T(x_N(t))]^T$ esta formado por la dinámica aislada de cada nodo en la red y \otimes indica el producto de Kronecker.

Al expresar la red en términos de la matriz Laplaciana del grafo de conexiones tenemos que si la red es conexa, es decir, si existe al menos un camino entre cada par de nodo en la red, entonces se puede demostrar que L tiene un eigenvalor de multiplicidad uno igual a 0, esto es, si a los eigenvalores de L , los llamamos λ_i con $i = 1, 2, \dots, N$. Uno de sus eigenvalores es cero $\lambda_1 = 0$ y tendrá un eigenvector asociado de la forma $v_1 = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N$, entonces de la ecuación de eigenvalor $Lv_1 = \lambda_1 v_1$, tenemos que la solución correspondiente a este eigenvalor es cuando todos los nodos tienen un mismo valor y la suma por renglón es cero. Además, utilizando los círculos de Gershgorin, se puede demostrar que la matriz Laplaciana es semidefinida negativa, es decir, que el resto de su espectro de eigenvalores es negativo y se pueden ordenar como [11]:

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \quad (2.7)$$

2.1. Sincronización en redes con topología fija

El modelo de red dinámica (2.6) puede capturar complejidad estructural a través de la matriz Laplaciana del grafo de conexiones y complejidad dinámica mediante las ecuaciones diferenciales que describen la evolución de los estados de sus nodos. Un fenómeno de interés en estos modelos es el surgimiento de sincronización, es decir, cuando las soluciones de los nodos de la red evolucionan coordinados en el tiempo. Wu y Chua definieron sincronización uniforme con respecto a una constante positiva H^* en [8], de la siguiente manera:

Definición 1. El sistema (2.5) es uniformemente sincronizado con respecto a la constante positiva H^* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta^*(\varepsilon) > 0$ tal que si $\|x_i(t_0) - x_j(t_0)\| \leq \delta^*(\varepsilon)$ y $x_i(t_0) \in B_{H^*}$ para todo $i, j \in \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$, entonces $\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$ y para todo $i, j \in \mathcal{N}$

Donde B_{H^*} es una bola de radio H^* . De manera similar definieron sincronización uniforme asintótica con respecto a H^* como:

Definición 2. El sistema (2.5) es uniformemente asintóticamente sincronizado con respecto a H^* si es uniformemente sincronizado con respecto a H^* y existe una $\delta^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $T(\varepsilon) \geq 0$ tal que si:

$$\|x_i(t_0) - x_j(t_0)\| \leq \delta^*$$

y $x_i(t_0) \in B_{H^*}$ para todo $i, j \in \mathcal{N}$ y $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$, entonces:

$$\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq \varepsilon$$

para todo $i, j \in \mathcal{N}$.

En particular, buscamos identificar el surgimiento de sincronización idéntica asintótica, es decir, con $\varepsilon = 0$, una solución donde todos los nodos evolucionen al unisono a la cual se llega conforme el tiempo tiende a infinito. Una definición de sincronización idéntica es dada en [12] de la siguiente manera:

Definición 3. Sea $x_i(t) \forall i \in \mathcal{N}$ una solución de la red dinámica (2.5). Si existe un subconjunto no vacío $D^0(t_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ con $x_i(t_0) \in D^0(t_0), \forall i \in \mathcal{N}$ tal que $x_i(t) \in D^0(t_0)$ para $t \geq t_0$ y todo $i \in \mathcal{N}$, además:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (2.8)$$

para todo $i \in \mathcal{N}$, entonces la red dinámica (2.5) se dice que logra sincronización idéntica y $D^0(t_0) \times \dots \times D^0(t_0)$ es llamada región de sincronía para la red dinámica (2.5).

En adelante asumiremos que la red siempre inicia dentro de su región de sincronía y que la sincronización de la red se logra dentro de la variedad invariante de sincronización:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t)$$

Lü *et.al.* remarcan que dada la difusividad de la estructura de conexión de la red, la solución de sincronización, donde todos los nodos se comportan igual es una solución de un nodo aislado. También notan que en el caso de un atractor caótico, la estabilidad del estado sincronizado corresponde a la estabilidad de los errores de la variedad de sincronización de la red. Por lo que en adelante tomaremos únicamente el caso de sincronización en atractores caóticos donde la solución de sincronización es una órbita del atractor.

Dado que la definición de sincronización se describe con la diferencia entre cualesquiera dos nodos, una forma alternativa de escribir (2.8) es comparar todos los nodos contra uno de ellos, como [12], donde definen una dirección de referencia de la variedad de sincronización y entonces la condición para alcanzar sincronización puede escribirse como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_1(t)\| = 0, \forall i \in \{2, \dots, N\} \quad (2.9)$$

Si nombramos la dirección de referencia de la variedad de sincronización como $s(t)$ tal que $\dot{s}(t) = f(s(t))$, entonces (2.9) puede escribirse como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (2.10)$$

donde $x_1(t) - s(t) \equiv 0$. De modo que la sincronización de la red es equivalente a la estabilidad del error en la variedad de sincronización. Por lo que basados en lo anterior, tenemos que:

Definición 4. Se dice que la red dinámica (2.6) alcanza la sincronización idéntica cuando la solución $\mathcal{S}(t) = [s^T(t), \dots, s^T(t)]^T$ es asintóticamente estable.

Podemos probar que $\mathcal{S}(t)$ es una solución de la red (2.6) si sustituimos cada nodo de la red con la solución de un nodo cualesquiera $x_i(t) = s(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, entonces la solución cuando la red esta sincronizada es:

$$\dot{x}_i(t) = \dot{s}(t) = f(s(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma s(t), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Como los términos $\Gamma s(t)$ no dependen de la variable j pueden salir de la sumatoria y como la suma por renglones de la matriz Laplaciana es cero, el segundo término de la derecha desaparece.

$$\dot{x}_i(t) = f(s(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Por tanto N -veces $s(t)$ es una solución de (2.6).

Para establecer que la red alcanza la sincronización idéntica, analizamos la estabilidad de la *solución de sincronización*, es decir, buscamos establecer que la solución $\mathcal{S}(t)$ es asintóticamente estable. Esto es equivalente a decir que se cumple el requerimiento (2.10), a partir del cual podemos definir el *error de sincronización* del i -ésimo nodo como

$$\eta_i(t) = x_i(t) - s(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.11)$$

De donde sigue que el *error de sincronización* para toda la red es

$$\eta(t) = [\eta_1^T(t), \eta_2^T(t), \dots, \eta_N^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{nN}$$

La *dinámica del error* del i -ésimo nodo se obtiene de (2.11) sustituyendo (2.5) y (??):

$$\dot{\eta}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t) - f(s(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

Entonces, la red dinámica (2.5) se sincroniza si la solución cero de (2.12) es asintóticamente estable para cada nodo. Una manera de establecer la estabilidad asintótica de $\eta_i = 0$ es apro-

ximando la dinámica de cada nodo alrededor de la solución $s(t)$ usando la parte lineal de la expansión por series de Taylor, es decir:

$$f(x_i(t)) \approx f(s(t)) + Df(s(t))(x_i(t) - s(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

donde $Df(s(t))$ es el Jacobiano de f evaluado en $s(t)$. Notemos que es una aproximación y que los resultados serán locales. Entonces, en una vecindad de la solución cero la dinámica del error de sincronización esta dada por:

$$\dot{\eta}_i(t) = Df(s(t))\eta_i(t) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}\Gamma\eta_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.13)$$

Escribiendo la última ecuación en forma vectorial, tenemos:

$$\dot{\eta}(t) = (I_N \otimes Df(s(t)) + c(L \otimes \Gamma))\eta(t) \quad (2.14)$$

donde I_N es la matriz identidad de dimensión $N \times N$.

Para simplificar el análisis, recordamos que la matriz Laplaciana es simétrica y de entrada reales, y por teoría de álgebra lineal, existe una matriz invertible $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ construida con los eigenvectores de L , tal que:

$$L = \Phi\Lambda\Phi^{-1} \quad (2.15)$$

donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ es una matriz diagonal cuyas entradas son los eigenvalores de la matriz Laplaciana. Usando el cambio de coordenadas $\mathbf{v}(t) = (\Phi^{-1} \otimes I_n)\eta(t) \in \mathbb{R}^{nN}$ y las siguientes propiedades del producto de Kronecker[14]:

1) Sean las matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times r}, B \in \mathbb{R}^{p \times s}, C \in \mathbb{R}^{r \times n}, D \in \mathbb{R}^{s \times q}$, entonces:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

2) Sean las matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times r}, B \in \mathbb{R}^{p \times s}$:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

entonces podemos cambiar la ecuación (2.14) a:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = (I_N \otimes Df(s(t)) + c\Lambda \otimes \Gamma)\mathbf{v}(t) \quad (2.16)$$

Una ventaja de esta representación es que se puede descomponer por renglones como:

$$\dot{\mathbf{v}}_i(t) = (Df(s(t)) + c\lambda_i\Gamma)\mathbf{v}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.17)$$

donde $\mathbf{v}(t) = [\mathbf{v}_1^T(t), \mathbf{v}_2^T(t), \dots, \mathbf{v}_N^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{nN}$. El eigenvalor cero de la matriz Laplaciana esta asociado con la eigendirección donde todos los nodos son idénticos y la suma da cero, en otras palabras, coincide con la solución de sincronización (2.10). Por lo tanto, la sincronización idéntica de la red (2.6) es equivalente a demostrar la estabilidad de las $N - 1$ sistemas lineales n -dimensionales variantes en el tiempo

$$\dot{\mathbf{v}}_i(t) = (Df(s(t)) + c\lambda_i\Gamma)\mathbf{v}_i(t), \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (2.18)$$

La estabilidad de uno de los sistemas de (2.18) se puede establecer con la función de Lyapunov variante en el tiempo

$$V_i(\mathbf{v}_i(t)) = \mathbf{v}_i^T(t)P(t)\mathbf{v}_i(t) \quad (2.19)$$

de donde se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *La i -ésima ecuación de (2.18) es asintóticamente estable a su punto de equilibrio cero, si existen las matrices variantes en el tiempo positivas definidas para todo tiempo $P(t)$ y $Q(t)$, así como la constante $d_i < 0$ tal que:*

$$\dot{P}(t) + (Df(s(t)) + d_i\Gamma)^T P(t) + P(t)(Df(s(t)) + d_i\Gamma) < -Q(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.20)$$

Prueba: La derivada de (2.19) en las trayectorias de una ecuación de (2.18) es

$$\dot{V}_i(\mathbf{v}_i(t)) = \mathbf{v}_i^T(t) (\dot{P}(t) + (Df(s(t)) + c\lambda_i\Gamma)^T P(t) + P(t)(Df(s(t)) + c\lambda_i\Gamma)) \mathbf{v}_i(t)$$

La cual será negativa si se cumple la siguiente desigualdad matricial para todo tiempo

$$\dot{P}(t) + (Df(s(t)) + c\lambda_i\Gamma)^T P(t) + P(t)(Df(s(t)) + c\lambda_i\Gamma) < -Q(t),$$

donde $d_i = c\lambda_i$ ■.

Más aun, si el Jacobiano $Df(s(t))$ esta acotado, la estabilidad puede ser demostrada con una función de Lyapunov invariante en el tiempo de la forma:

$$V_i(\mathbf{v}_i(t)) = \mathbf{v}_i^T(t)P\mathbf{v}_i(t) \quad (2.21)$$

donde $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante definida positiva. Entonces, similar a [15] el resultado anterior se puede reescribir como:

Teorema 2.2. *La i -ésima ecuación de (2.18), cuando $Df(s(t))$ esta acotada, es asintóticamente estable a su punto de equilibrio cero, si existen las matrices positivas definidas $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, así como la constante $d_i < 0$ tal que:*

$$(Df(s(t)) + d_i \Gamma)^T P + P(Df(s(t)) + d_i \Gamma) < -Q, \forall t \geq 0 \quad (2.22)$$

Prueba: La derivada de (2.21) en las trayectorias de una ecuación de (2.18) es

$$\dot{V}_i(v_i(t)) = v_i^T(t) ((Df(s(t)) + c\lambda_i \Gamma)^T P + P(Df(s(t)) + c\lambda_i \Gamma)) v_i(t)$$

La cual es negativa si se cumple la desigualdad

$$(Df(s(t)) + c\lambda_i \Gamma)^T P + P(Df(s(t)) + c\lambda_i \Gamma) < -Q, \forall t \geq 0$$

donde $d_i = c\lambda_i$ ■.

Como se mencionó antes el eigenvalor cero de la matriz Laplaciana $\lambda_1 = 0$ corresponde al estado sincronizado, por lo tanto, para establecer que la red se sincroniza basta probar que los $N - 1$ sistemas de (2.18) asociados con los restantes eigenvalores de la matriz Laplaciana también son asintóticamente estables. Por otro lado, de (2.7) sabemos que el eigenvalor más grande diferente de cero de la matriz Laplaciana es λ_2 , además sabemos que es negativo. Con estas observaciones podemos establecer el siguiente resultado como [11]:

Teorema 2.3. *La red dinámica (2.5) logra la sincronización idéntica asintótica descrita en la Definición 4 en el sentido de la condición (2.10), si $Df(s(t))$ esta acotada, existe una constante negativa $\bar{d} \geq d_2$ tal que se satisface:*

$$(Df(s(t)) + \bar{d} \Gamma)^T P + P(Df(s(t)) + \bar{d} \Gamma) < -Q, \forall t \geq 0 \quad (2.23)$$

y además la fuerza de conexión uniforme cumple la siguiente desigualdad:

$$c \geq \frac{|\bar{d}|}{|\lambda_2|} \quad (2.24)$$

Prueba: Si se satisface (2.23), entonces $d_2 = c\lambda_2$ satisface el Teorema (2.2) y la segunda ecuación de (2.18) es asintóticamente estable. Como $\lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N$ entonces $\bar{d} \geq d_2 \geq$

$d_3 \geq \dots \geq d_N$ y todos los sistemas lineales invariantes de (2.18) son asintóticamente estables, y la red dinámica se sincroniza. Adicionalmente sabemos que ambos \bar{d} y λ_2 son negativos. Por lo tanto, $\bar{d} \geq c\lambda_2$ es equivalente a $|\bar{d}| \leq c|\lambda_2|$, de modo que despejando c , tenemos la condición (2.24) ■.

2.1.1. Ejemplo 1. Red BA de sistemas Lorenz

Para ilustrar este resultado consideremos 2 redes dinámicas con nodos idénticos, donde cada uno es un sistema de Lorenz, descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \zeta(x_2(t) - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)(\rho - x_3(t)) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - \tau x_3(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

con $\zeta = 10$, $\rho = 28$ y $\tau = 8/3$ el sistema de Lorenz presenta su conocido atractor caótico, el cual se presenta en la Figura 2.1.

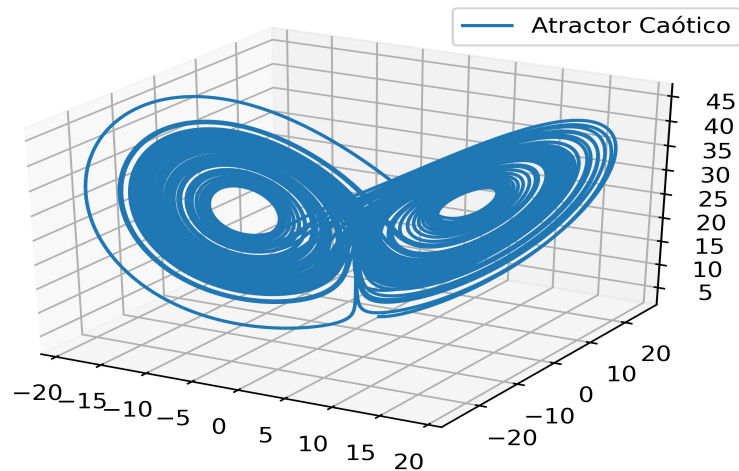


Figura 2.1: Atractor de Lorenz con $\zeta = 10$, $\rho = 28$ y $\tau = 8/3$

Cada red consiste de quince nodos conectados mediante un grafo bidireccional generado usando el modelo Barabasi-Albert [5]. El algoritmo de construcción utilizado para generar la realización de la red sigue un formato similar al descrito en [11], esto es:

1. **Crecimiento.** Se inicia con un número pequeño de nodos ($m_0 = 3$), y en cada paso de tiempo se añade un nuevo nodo que se conecta a $m \leq m_0 = 3$ nodos existentes.
2. **Acoplamiento preferencial.** El nuevo nodo se enlaza con el nodo i de acuerdo a una probabilidad Π_i proporcional a su grado de nodo (k_i), de modo que la probabilidad de que el nuevo nodo se enlace con el nodo i es:

$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

donde k_i es el grado de nodo del i -ésimo nodo.

En la Figura 2.2 se muestra una realización de la red BA con quince nodos. Este tipo de redes son también llamadas redes de escala libre ya que tienen nodos concentradores con un número considerablemente grande de conexiones en este caso los grados de nodo son $\{4, 7, 9, 6, 7, 4, 5, 5, 6, 4, 4, 3, 4, 3, 3\}$ donde el nodo “2” es un nodo concentrador con grado de nodo nueve.

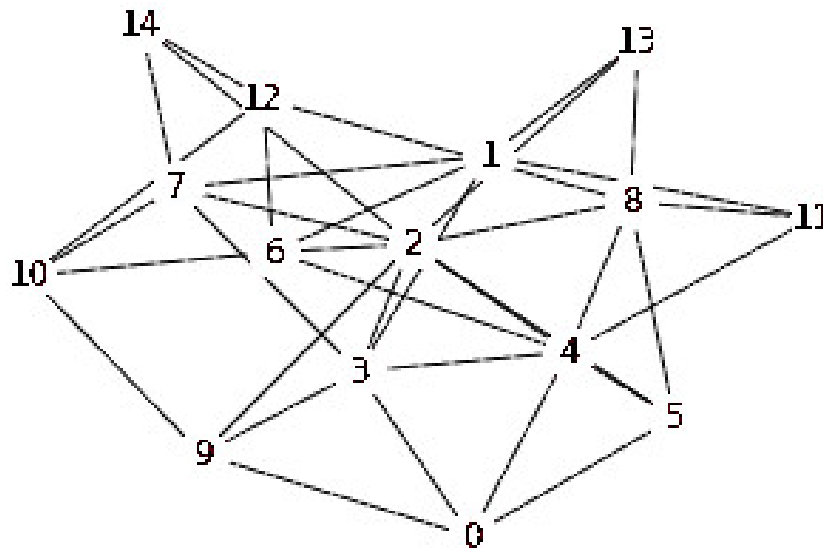


Figura 2.2: Red BA generada para el ejemplo 1 ($m_0 = m = 3, N = 15$)

La estructura de conexión de las redes se describe mediante la matriz Laplaciana, L , asociada al grafo de la Figura 2.2, que es de suma por renglón nula, semidefinida negativa y sus eigenvalores son: $\{0, -1.82, -2.12, -2.81, -2.87, -3.17, -4.13, -4.64, -5.30, -5.52, -6.02, -7.14, -7.43, -8.64, -10.38\}$, por lo tanto cumple las condiciones para ser llamada un topología de conexión difusiva [5].

La ecuación que describe cada red dinámica esta dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta(x_{i1}(t) - x_{i2}(t)) \\ x_{i1}(t)(\rho - x_{i3}(t)) - x_{i2}(t) \\ x_{i1}(t)x_{i2}(t) - \tau x_{i3}(t) \end{bmatrix} + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma \begin{bmatrix} x_{j1}(t) \\ x_{j2}(t) \\ x_{j3}(t) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.26)$$

con la matriz de acoplamiento interno $\Gamma = I_n$, el número de nodos $N = 15$ y donde la fuerza de acoplamiento uniforme c se determinará más adelante.

Para determinar si la red (2.26) se sincroniza, tomamos en cuenta que las soluciones de un nodo cualesquiera aislado de la red vivirán en el atractor mostrado en la Figura 2.1, por lo tanto, $s(t)$ esta acotada para todo tiempo, además podemos verificar que el Jacobiano de la dinámica de un nodo aislado, $Df(s(t))$ también esta acotada. En particular tenemos que

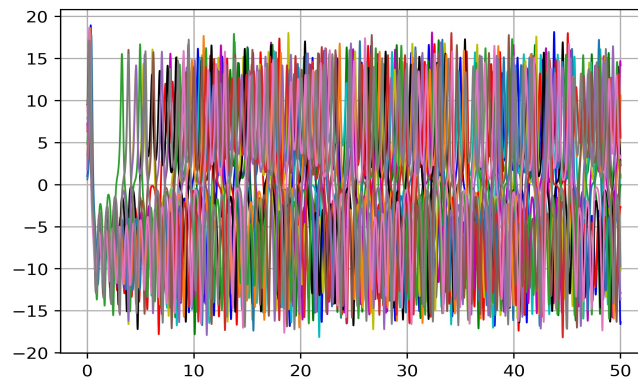
$$Df(s(t)) = \begin{bmatrix} \zeta & -\zeta & 0 \\ \rho - s_3(t) & -1 & -s_1(t) \\ s_2(t) & s_1(t) & -\tau \end{bmatrix}$$

donde $s(t) = [s_1(t), s_2(t), s_3(t)]^T$ es una solución de (2.25). Entonces, podemos utilizar el Teorema 2.2. Por simplicidad, proponemos $P = I_n$, entonces (2.22) toma la forma

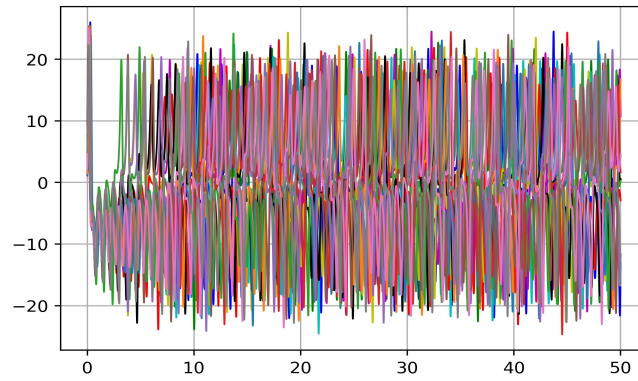
$$\begin{bmatrix} 2(\zeta + \bar{d}) & \rho - \zeta - s_3(t) & s_2(t) \\ \rho - \zeta - s_3(t) & 2(\bar{d} - 1) & 0 \\ s_2(t) & 0 & 2(\bar{d} - \tau) \end{bmatrix} \leq -Q \quad (2.27)$$

Evaluamos la matriz de la izquierda de (2.27) para una solución de un nodo aislado de la red y encontramos que con $\bar{d} = -21$ los eigenvalores de la matriz se encuentran en el intervalo $(-65, -5)$ para todo el tiempo de la simulación. Con este valor para \bar{d} , utilizamos el Teorema 2.3, con el valor de $\lambda_2 = -1.82$. Entonces, podemos determinar que si la fuerza de acoplamiento satisface la desigualdad (2.24) la red se sincronizará, es decir, si $c \geq 21/1.82 = 11.54$, la red se sincroniza en forma idéntica asintótica en el sentido de la Definición 4.

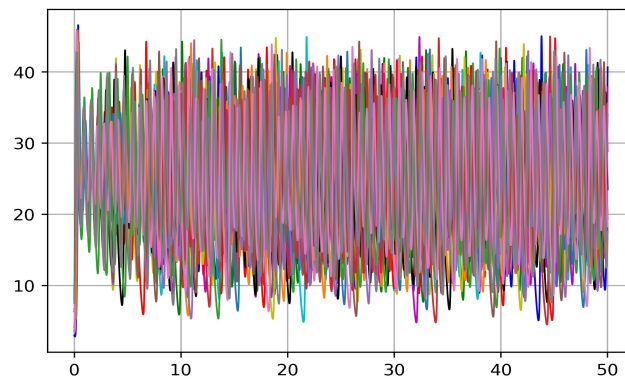
En las Figuras 2.3 y 2.4 se muestran los resultados de la simulación numérica de una red (2.26) con una fuerza de acoplamiento uniforme $c = 0.1$ la cual no es suficiente para lograr sincronización idéntica. Usamos condiciones iniciales aleatorias en el rango $(0, 10)$ para cada uno de los nodos y presentamos la dinámica de la red y del error.



(a) Primer estado de la red (2.26) con $c = 0.1$

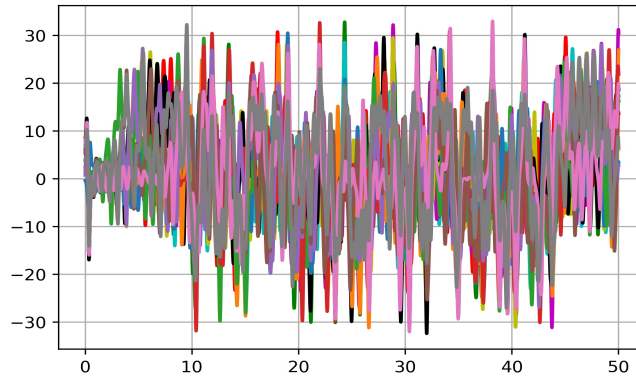


(b) Segundo estado de la red (2.26) con $c = 0.1$

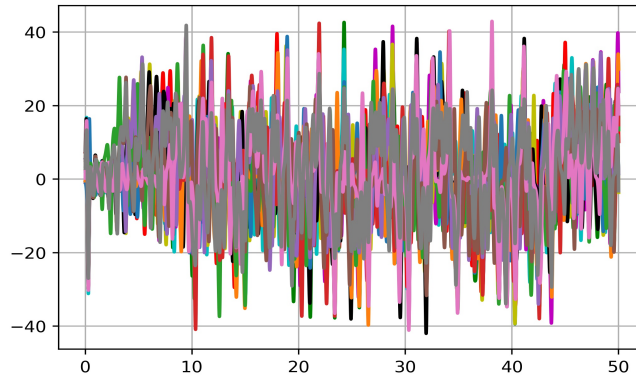


(c) Tercer estado de la red (2.26) con $c = 0.1$

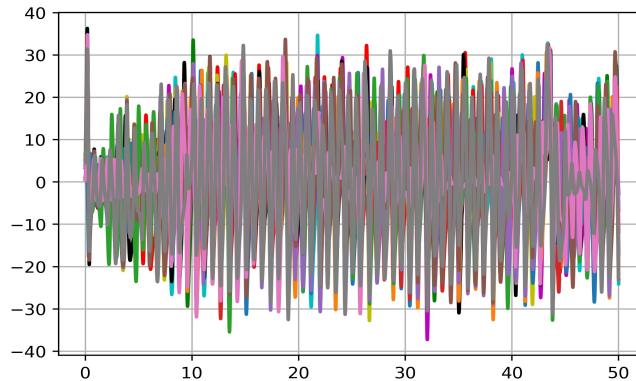
Figura 2.3: Dinámica de la red (2.26) con $c = 0.1$



(a) Error en el primer estado de la red (2.26) con $c = 0.1$



(b) Error en el segundo estado de la red (2.26) con $c = 0.1$

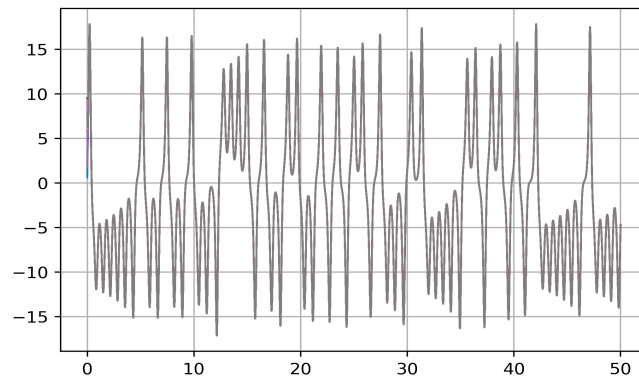


(c) Error en el tercer estado de la red (2.26) con $c = 0.1$

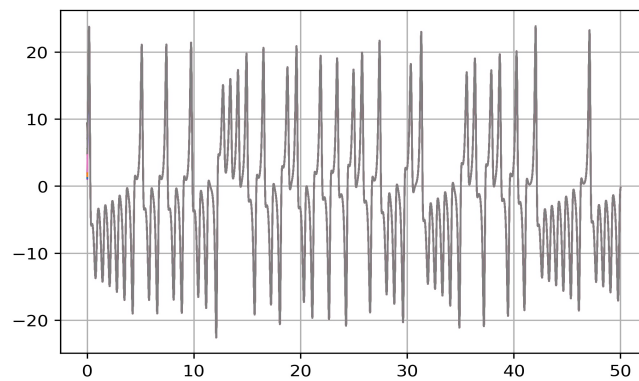
Figura 2.4: Error de sincronización de la red (2.26) con $c = 0.1$

A continuación presentamos los resultados de la simulación de una red (2.26) pero esta vez con $c = 12$, de modo que la red logra sincronización idéntica. Las condiciones iniciales

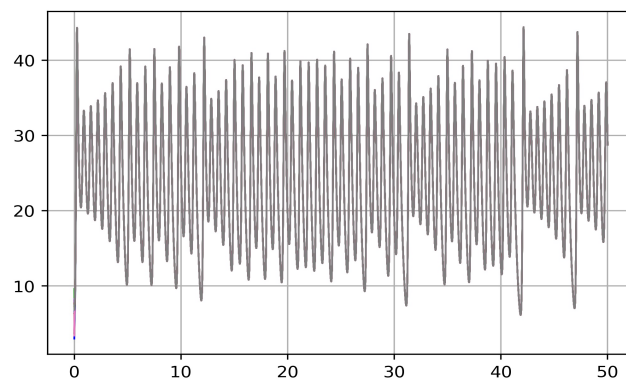
se toman aleatoriamente entre 0 y 10.



(a) Primer estado de la red (2.26) con $c = 12$

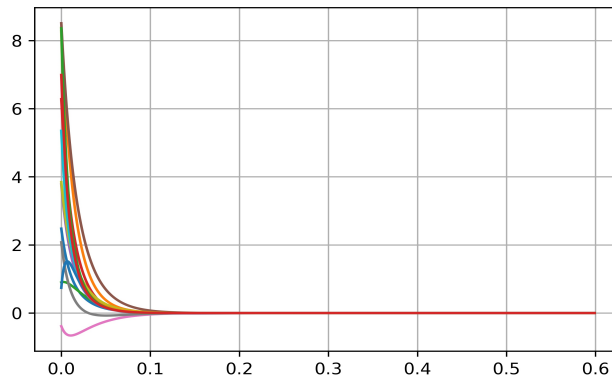


(b) Segundo estado de la red (2.26) con $c = 12$

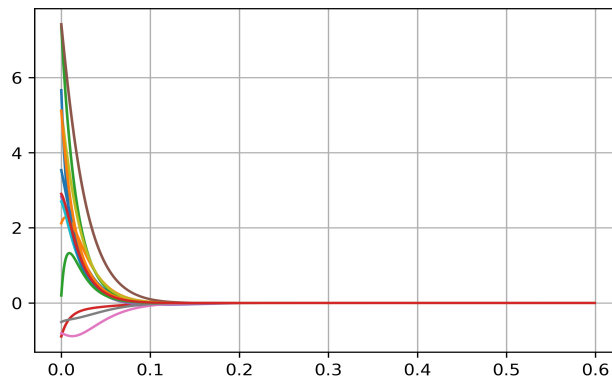


(c) Tercer estado de la red (2.26) con $c = 12$

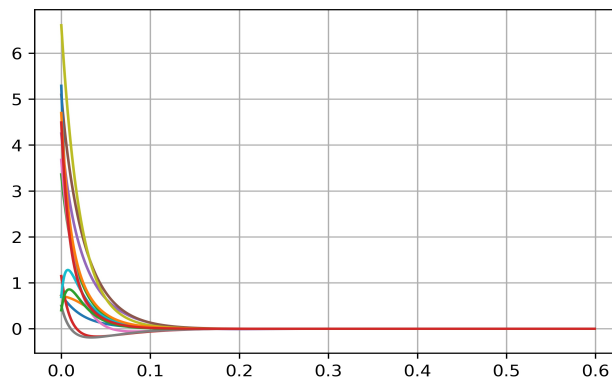
Figura 2.5: Dinámica de la red (2.26) con $c = 12$



(a) Error en el primer estado de la red (2.26) con $c = 12$



(b) Error en el segundo estado de la red (2.26) con $c = 12$



(c) Error en el tercer estado de la red (2.26) con $c = 12$

Figura 2.6: Error de sincronización de la red (2.26) con $c = 12$

En este caso, solo mostramos los primeros instantes de la dinámica del error ya que la

convergencia al origen es prácticamente inmediata. En los siguientes resultados de sincronización presentaremos ambos casos (de una red que no se sincroniza y una que si logra la sincronización) en un misma figura por estado, mostrando la primera mitad de la simulación de una red y la segunda mitad de la otra.

A continuación abordamos el problema de regulación por pinning en una red con topología fija.

2.2. Regulación por pinning en redes con topología fija

La regulación por pinning, es una forma de controlar un red dinámica en la cual se aplica un control local solamente a algunos nodos, de modo que se logre un objetivo de control para la red completa. En el caso de una red dinámica de nodos idénticos como la presentada por (2.6), el control por pinning significa que se aplican controladores por retroalimentación local a $\delta \ll N$ nodos de la red, de la forma:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.28)$$

donde $u_i(t) = -c\xi_i\Gamma(x_i - \bar{x})$ si el i -ésimo nodo tiene control y $u_i = 0$ de lo contrario, además $\xi_i \in \mathbb{R}$ es la ganancia del i -ésimo controlador local y \bar{x} es un punto de equilibrio de los nodos aislados, ($f(\bar{x}) = 0$).

Por simplicidad, asumimos que los nodos controlados son los primeros δ nodos de la red y que todas las ganancias de control son iguales ($\xi_i = \xi, \forall i$) para los nodos controlados, de modo que la red completa tiene la forma:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t) - c\xi\Gamma(x_i - \bar{x}), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta \\ f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t), & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.29)$$

En forma vectorial (2.29) se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}(t)) + c(L \otimes \Gamma)\mathbf{X}(t) - c(K \otimes \Gamma)\mathbf{E}(t) \quad (2.30)$$

donde $K = \text{diag}(\underbrace{\xi, \dots, \xi}_{\delta}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-\delta}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $\mathbf{E}(t) = [(x_1(t) - \bar{x})^T, (x_2(t) - \bar{x})^T, \dots, (x_N(t) - \bar{x})^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ es el error de control de la red. La cantidad de nodos (δ) y la ganancia de control (ξ) se diseñan con el objetivo de que el punto de equilibrio $\bar{X} = [\bar{x}^T, \dots, \bar{x}^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ sea asintóticamente estable. Para determinar la estabilidad del punto de equilibrio de la red

seguimos un proceso similar a [15], de modo que (2.30) analizamos el *error de control* del i -ésimo nodo:

$$e_i(t) = x_i(t) - \bar{x}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.31)$$

y cuya dinámica es

$$\dot{e}_i(t) = \dot{x}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.32)$$

De (2.30) - (2.31) tenemos que la dinámica del error de toda la red es

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}(t)) + c(L \otimes \Gamma)(\mathbf{E}(t) + \bar{X}) - c(K \otimes \Gamma)\mathbf{E}(t) \quad (2.33)$$

donde $K = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_\delta, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $\xi_1 = \dots = \xi_\delta$. Al desarrollar el segundo término de la derecha de la igualdad y por la propiedad de difusividad de la matriz L , la ecuación (2.33) se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}(t)) + c(\mathbf{B} \otimes \Gamma)\mathbf{E}(t) \quad (2.34)$$

donde $\mathbf{B} = L - K \in \mathbb{R}^{N \times N}$, de manera que establecer la estabilidad del origen de (2.34) es equivalente a establecer la estabilidad del punto de equilibrio \bar{X} en la red (2.30). Una manera de establecer la estabilidad asintótica de $\bar{\mathbf{E}} = 0$ es aproximar la dinámica de cada nodo alrededor del punto de equilibrio \bar{x} usando el Jacobiano de f , esto es:

$$\dot{\mathbf{E}}(t) = (I_N \otimes Df(\bar{x}) + c(\mathbf{B} \otimes \Gamma))\mathbf{E}(t) \quad (2.35)$$

donde $Df(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el Jacobiano de f evaluado en \bar{x} .

El análisis se simplifica al recordar que las matrices L y K son simétricas y de entradas reales, de modo que la diferencia entre estas dos matrices, \mathbf{B} , conserva estas propiedades por lo que existe una matriz invertible $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ construida con sus eigenvectores, tal que:

$$\mathbf{B} = \Psi Y \Psi^{-1} \quad (2.36)$$

donde $Y = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_N)$ es una matriz diagonal cuyas entradas son los eigenvalores de la matriz \mathbf{B} , los cuales sabemos que satisfacen el orden:

$$0 \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_N \quad (2.37)$$

dado que L es una matriz semidefinida negativa y K es una matriz diagonal semidefinida

positiva, la diferencia $L - K$ es también semidefinida negativa. Usando el cambio de variable $\omega(t) = (\Psi^{-1} \otimes I_n) \mathbf{E}(t) \in \mathbb{R}^{nN}$ la ecuación (2.35) tenemos

$$\dot{\omega}(t) = (I_N \otimes Df(\bar{x}) + c(Y \otimes \Gamma))\omega(t) \quad (2.38)$$

donde $\omega(t) = [\omega_1^T(t), \omega_2^T(t), \dots, \omega_N^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{nN}$. Por lo que podemos describir la dinámica de cada nodo como

$$\dot{\omega}_i(t) = (Df(\bar{x}) + cy_i\Gamma)\omega_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.39)$$

con lo que simplificamos el problema de nN dimensional a N sistemas lineales, desacoplados e invariantes en el tiempo, de donde tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.4. *La i -ésima ecuación de (2.39) es asintóticamente estable a su punto de equilibrio cero, si*

$$Df(\bar{x}) + cy_i\Gamma \quad (2.40)$$

es Hurwitz.

Prueba: Consideremos la i -ésima ecuación de (2.39) y supongamos que $Df(\bar{x}) + cy_i\Gamma$ es Hurwitz. Sea $\hat{A} = Df(\bar{x}) + cy_i\Gamma$, entonces la i -ésima ecuación de (2.39) tiene la forma:

$$\dot{\omega}_i(t) = \hat{A}\omega_i(t) \quad (2.41)$$

De la teoría de sistemas lineales sabemos que el origen de (2.41) es asintóticamente estable si \hat{A} es Hurwitz, como $\hat{A} = Df(\bar{x}) + cy_i\Gamma$ y $Df(\bar{x}) + cy_i\Gamma$ es Hurwitz entonces el origen de (2.41) es asintóticamente estable. ■

El orden en los eigenvalores de la matriz \mathbf{B} descrito en la desigualdad (2.37) facilita el análisis de estabilidad de la red (2.39), ya que si las N ecuaciones de (2.39) son asintóticamente estables, entonces la red se regula en el punto de equilibrio como se muestra en el siguiente resultado de [15]:

Teorema 2.5. *La red dinámica controlada (2.29) es asintóticamente estable a su punto de equilibrio si se satisface el Teorema 2.4 para $i = 1$, es decir, si*

$$Df(\bar{x}) + cy_1\Gamma \quad (2.42)$$

es Hurwitz.

Prueba: Supongamos que $Df(\bar{x}) + cy_1\Gamma$ es Hurwitz, entonces por el Teorema 2.4, el primer nodo de la red (2.39) es asintóticamente estable a su punto de equilibrio. Ahora, por el orden de los eigenvalores (2.37) tenemos que $cy_1 \geq cy_2 \geq \dots \geq cy_N$, por tanto $Df(\bar{x}) + cy_i\Gamma$ para $i = 2, \dots, N$ también son Hurwitz y por el Teorema 2.4 los $N - 1$ nodos restantes son asintóticamente estables al origen y por lo tanto la red completa es asintóticamente estable al origen ■.

Ahora, mostramos que es posible imponer un comportamiento en toda red aplicando control sólo a un número reducido de nodos al presentar el concepto de control virtual de la siguiente manera:

Consideremos la red controlada (2.29) y supongamos que con una ganancia de control ξ suficientemente grande, los estados de los δ nodos con control alcanzan el punto estacionario homogéneo \bar{x} , entonces la red controlada (2.29) se puede escribir como:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta \\ f(x_i(t)) + c \sum_{j=\delta+1}^N l_{ij}\Gamma x_j(t) + c \sum_{j=1}^{\delta} l_{ij}\Gamma \bar{x}, & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.43)$$

Si definimos la matriz $M = (m_{ij})^{N-\delta \times N-\delta}$ como la menor de la matriz L al remover las i -ésimas filas y las i -ésimas columnas con $i = 1, 2, \dots, \delta$, donde sus elementos son:

$$m_{ij} = l_{ij}, i \neq j, \quad i = \delta + 1, \dots, N, \\ j = \delta + 1, \dots, N \\ m_{ii} = - \sum_{\substack{j=\delta+1 \\ j \neq i}}^N l_{ij}$$

Entonces la ecuación (2.43) se puede escribir como en [16]:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{para } i = 1, 2, \dots, \delta \\ f(x_i(t)) + c \sum_{j=\delta+1}^N m_{ij}\Gamma x_j(t) + \tilde{u}_i, & \text{para } i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.44)$$

donde $\tilde{u}_i = -c \sum_{j=1}^{\delta} l_{ij}\Gamma(x_j - \bar{x})$, es un control virtual sobre los $N - \delta$ nodos no controlados originalmente. Suponemos que el error de control de los primeros δ nodos es suficientemente pequeño, y por tanto basta considerar la red reducida de ζ nodos:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=\zeta}^N m_{ij}\Gamma x_j(t) + \tilde{u}_i, \quad i = \zeta, \dots, N \quad (2.45)$$

donde $\zeta = \delta + 1$, y probar que es asintóticamente estable con el control

$$\tilde{u}_i = -c \sum_{j=1}^{\delta} l_{ij}$$

2.2.1. Ejemplo 2. Regulación por pinning en redes con topología fija

Como ilustración tomemos el ejemplo de red (2.26), y tomemos uno de los puntos de equilibrio del sistema de Lorenz para buscar satisfacer la condición del Teorema 2.5 que tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \zeta & -\zeta & 0 \\ \rho - \bar{x}_3 & -1 & -\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 & -\tau \end{pmatrix} + cy_1 \Gamma \quad (2.46)$$

Los valores de este punto de equilibrio son $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \sqrt{\tau(\rho - 1)}$ y $\bar{x}_3 = \rho - 1$ con $\zeta = 10$, $\rho = 28$ y $\tau = 8/3$, por lo que al sustituir estos valores en (2.46) tenemos:

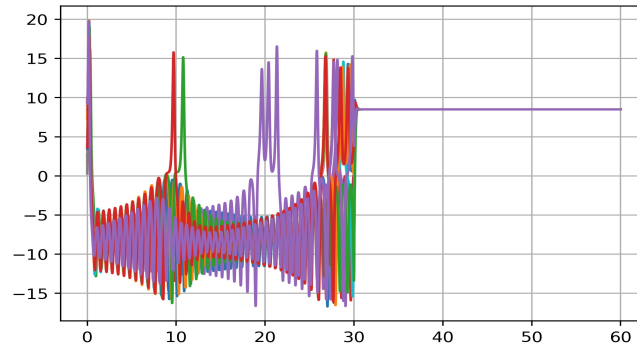
$$\begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & -8.485 \\ 8.485 & 8.485 & -2.667 \end{pmatrix} + cy_1 \Gamma \quad (2.47)$$

Encontramos que la matriz anterior es Hurwitz con $cy_1 \geq 12.5$, por lo que una pequeña fuerza de acoplamiento implica un alto valor para y_1 , por otro lado, con un alto valor para la fuerza de acoplamiento es suficiente un bajo valor de y_1 . Dado que la fuerza de acoplamiento es un parámetro del sistema la variable que podemos modificar son los eigenvalores de la matriz Y , esto es, manipulando la ganancia de control ξ y el número de nodos δ a los que se aplica el control.

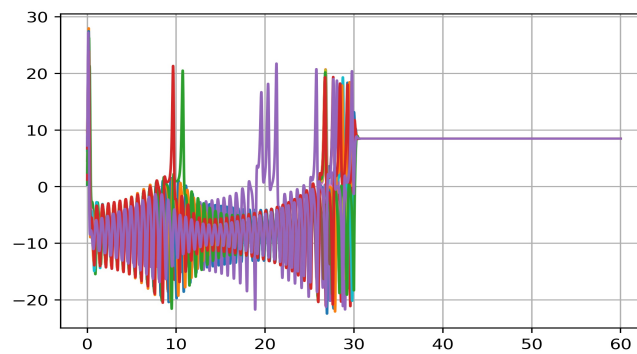
A continuación presentamos una simulación correspondiente al caso en que la fuerza de acoplamiento es pequeña y otra con una fuerza de acoplamiento mayor. En ambos casos se seleccionan condiciones iniciales aleatorias en un rango entre 0 y 10, y los valores para c , ξ y δ como se especifican a continuación.

En primer lugar, presentamos una simulación asumiendo una fuerza de acoplamiento $c = 0.1$, que es inferior a la necesaria para lograr la sincronización, en este caso, es necesario aplicar el control a todos los nodos a fin de que la matriz (2.47) sea Hurwitz. Particularmente con $\delta = 15$ y $\xi = 125$ los eigenvalores más grandes de las matrices Y y 2.47 son -125 y -0.355 respectivamente, es decir, logramos satisfacer la condición del Teorema 2.5 e impo-

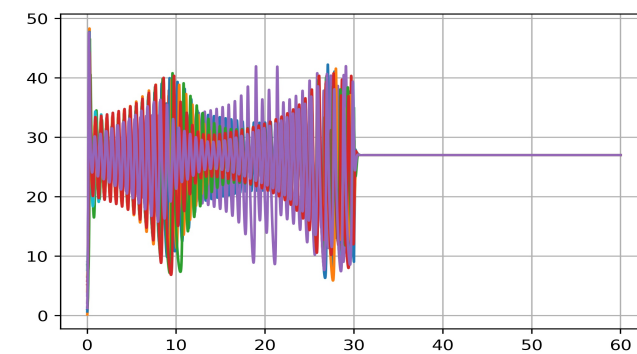
ner el comportamiento deseado.



(a) Estado 1 de los nodos de la red



(b) Estado 2 de los nodos de la red

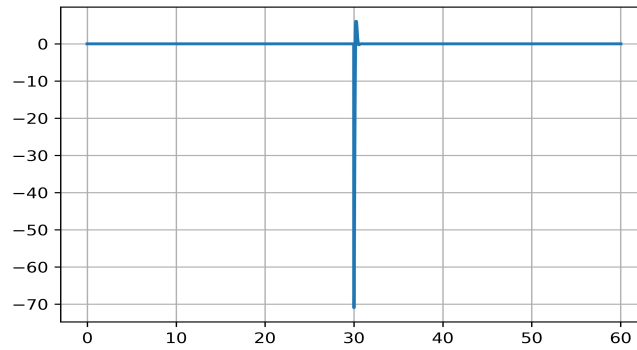


(c) Estado 3 de los nodos de la red

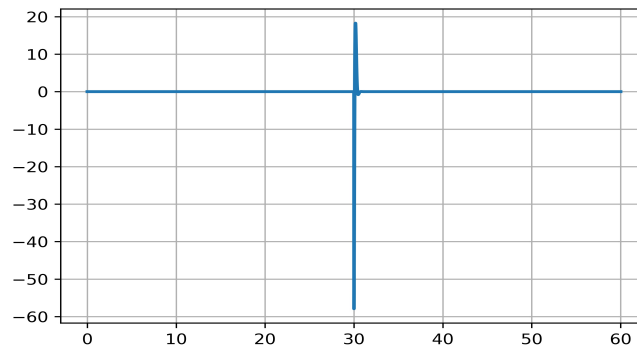
Figura 2.7: Dinámica de la red del ejemplo 2 con $c = 0.1$

Cabe destacar que también encontramos un comportamiento similar al reducir el número de nodos controlados a cinco aunque en este caso ya no se satisface que la matriz (2.47) sea

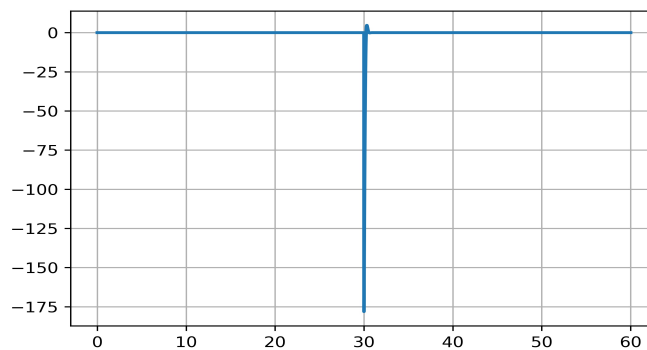
Hurwitz, es decir, la condición presentada para la regulación de la red es suficiente pero no necesaria. El control aplicado en $t > 30$ oscila entre -180 y 20 , sin embargo, la acción del control es inmediata y el control vuelve a cero (ver Fig.(2.8)).



(a) Control aplicado al estado 1 de los nodos de la red



(b) Control aplicado al estado 2 de los nodos de la red



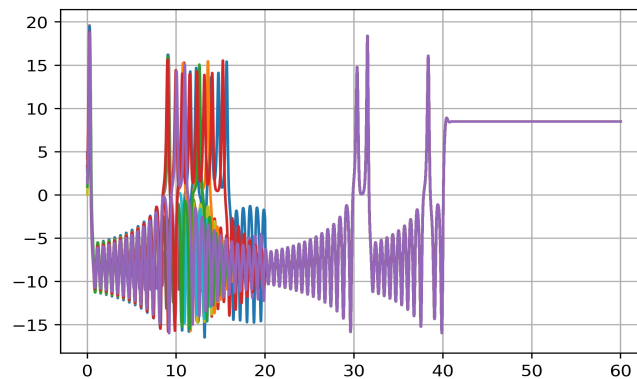
(c) Control aplicado al estado 3 de los nodos de la red

Figura 2.8: Control en el tiempo

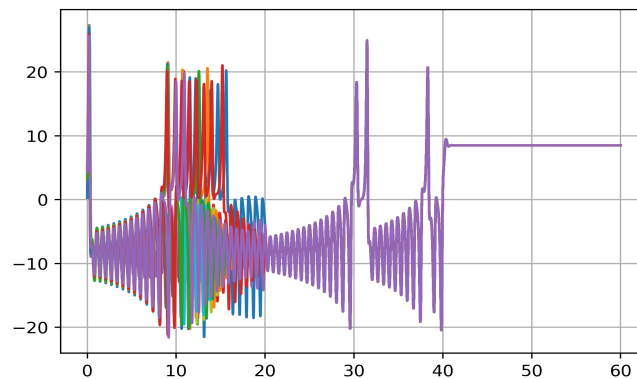
Por otra parte, si la fuerza de acoplamiento es suficientemente alta podemos reducir el número de nodos controlados y la ganancia de control, incluso aplicar el control únicamente a un solo nodo, tal como se propone en [17].

Como ejemplo del caso en que la fuerza de acoplamiento es suficientemente alta, en la siguiente ilustración comenzamos con una fuerza de acoplamiento $c = 0.1$, de tal manera que la red no se sincroniza. Enseguida, cuando $t > 20$ aumentamos el valor de la fuerza de acoplamiento a $c = 60$ de modo que ahora la red se encuentra sincronizada y finalmente en $t > 40$ aplicamos el control a un solo nodo con $\xi = 10$ para regular la red.

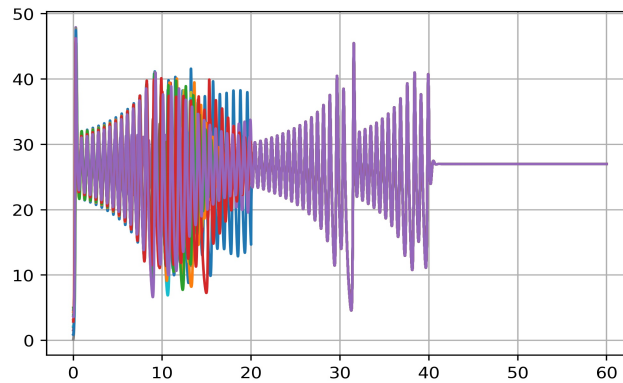
Con los valores finales de la simulación, el eigenvalor más grande de la matriz Y es $y_1 = -0.223$, de tal manera que los eigenvalores de la matriz (2.47) son: -1.269 , $-16.318 + 10.494i$ y $-16.318 - 10.494i$, es decir, todos sus eigenvalores tienen parte real negativa y se satisfacen las condiciones del Teorema 2.5 por lo que la red se regula en el punto de equilibrio deseado como se muestran en las figuras (2.8).



(a) Estado 1 de los nodos de la red



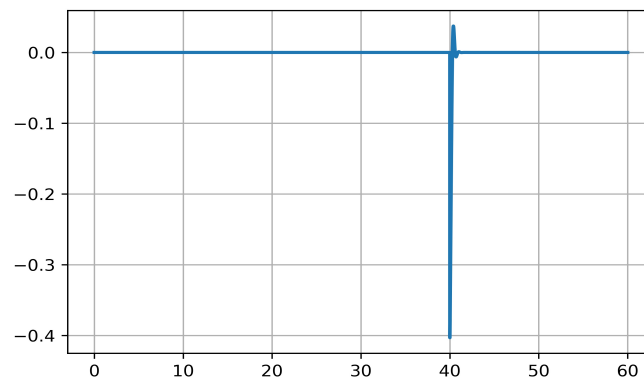
(b) Estado 2 de los nodos de la red



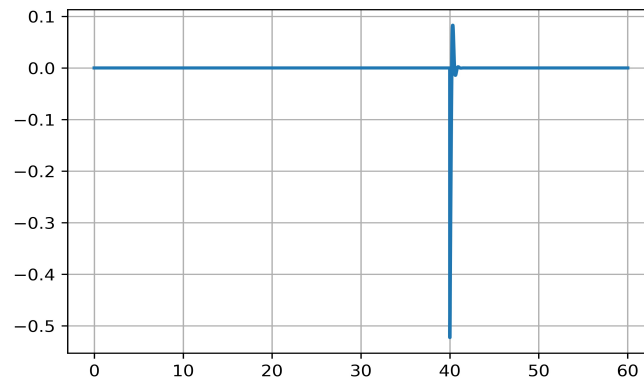
(c) Estado 3 de los nodos de la red

Figura 2.8: Dinámica de la red del ejemplo 2 con $c = 60$

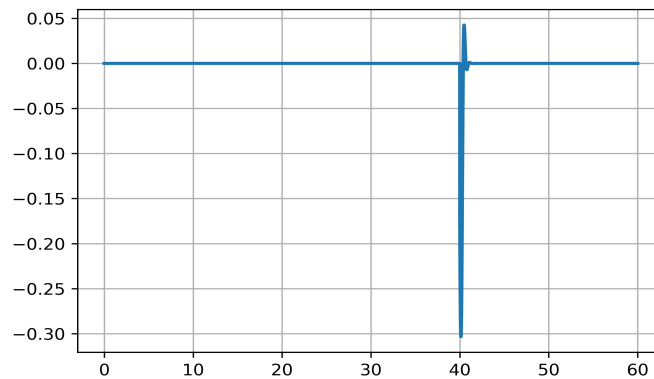
El control se aplica en $t \geq 40$ y oscila entre 0.5 y 0.1 haciendo que el error tienda a cero. Las condiciones presentadas son suficientes para asegurar que el punto de equilibrio, sin embargo, notamos que son muy estrictas, por lo que la convergencia del error al origen es prácticamente instantánea, entonces el control también tiende a cero junto con la dinámica del error.



(d) Control aplicado al estado 1 de los nodos de la red



(e) Control aplicado al estado 2 de los nodos de la red



(f) Control aplicado al estado 3 de los nodos de la red

Figura 2.8: Control en el tiempo

Se han presentado condiciones suficientes para garantizar la estabilidad asintótica de una solución de sincronización en una red con complejidad estructural y complejidad dinámica, a continuación añadiremos la dinámica de evolución de la red a nuestro modelo. La evolución que consideramos es una conmutación arbitraria entre un número finito de topologías admisibles de la misma dimensión, y procederemos a analizar la estabilidad de la solución de sincronización y regular un punto de equilibrio de la red. Esta evolución la estudiamos desde el punto de vista de sistemas conmutados por lo que presentamos en el siguiente capítulo algunos conceptos de este tema.

Capítulo 3

Sistemas conmutados

Muchos sistemas involucran funciones distintas en la descripción de su dinámica, por ejemplo la temperatura de una habitación tiene una descripción distinta cuando esta apagado el aire acondicionado que cuando esta prendido. Igualmente, la dinámica que describe el movimiento de un automóvil es diferente cuando se cambia la palanca de velocidades. Una forma de describir este tipo de sistemas es como sistemas conmutados en su campo vectorial, los cuales debido a sus muchas aplicaciones en problemas del mundo real son de interés para investigadores de diferentes áreas del conocimiento.

Un sistema conmutado se define mediante una familia de funciones, es decir, un conjunto de funciones definidas como: $f_{\sigma(x(t),t)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde cada función $f_{\sigma(x(t),t)}$ es continua, y una función o ley de conmutación $\sigma(x(t),t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$, que indica cual función esta activa. Adicionalmente, la ley de conmutación es continua por la derecha, por lo que los cambios de valor de la función de conmutación se realizan instantáneamente, y este valor permanece constante hasta el próximo cambio de valor de $\sigma(x(t),t)$ o evento, es decir, es constante por partes, de modo que un sistema conmutado tiene la forma:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(x(t),t)}(x(t)) \quad (3.1)$$

donde $\sigma(x(t),t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$ es la ley o función de conmutación. Pueden existir distintos tipos de ley de conmutación, para más detalles ver [19]. En particular, en este capítulo abordamos dos tipos de ley de conmutación: una conmutación que depende exclusivamente de los estados $\sigma(x(t))$, y otra que depende únicamente del tiempo, $\sigma(t)$. En cualquier caso, tenemos superficies de conmutación, en las que se produce el cambio de función, y regiones de operación, es decir, el resto del espacio de estados donde esta activa una de las funciones $f_{\sigma(x(t),t)}$. Cabe mencionar que nosotros consideramos que únicamente una de las funciones $f_{\sigma(x(t),t)}$ puede estar activa en cada intervalo de tiempo.

3.1. Conmutación dependiente de los estados

Si la conmutación depende exclusivamente de los estados entonces la ley de conmutación mapea del espacio de estados al conjunto de índices, de modo que las superficies de conmutación están definidas sobre los estados y cuando la trayectoria del sistema cruza estas superficies, los estados de la dinámica serán definidos por otro elemento de la familia de funciones del sistema.

Un sistema conmutado con una ley de conmutación dependiente de los estados tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_{\sigma_1(x(t))}(x(t)) \\ \sigma_1(x(t)) &: \mathbb{R}^n \rightarrow P \end{aligned} \quad (3.2)$$

La figura 3.1 muestra un ejemplo de ley de conmutación dependiente de los estados, en la que se presenta una función de conmutación $\sigma_2(x(t)) = \mathbb{R} \rightarrow M = \{1, 2\}$ para el sistema conmutado :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_{\sigma_2(x(t))}(x(t)) \\ \sigma_2(x(t)) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x(t) < 0 \\ 2, & \text{si } x(t) \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}$ y la familia de funciones es:

$$f_1(x(t)) = \frac{1}{2}x(t) \quad f_2(x(t)) = x^2(t)$$

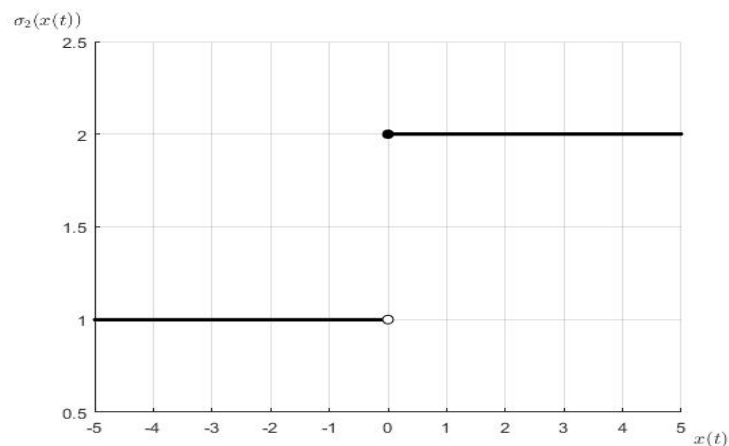


Figura 3.1: Ley de conmutación $\sigma_2(x(t)) : \mathbb{R} \rightarrow M = \{1, 2\}$

En este ejemplo se establece $x(t) = 0$ como la superficie de conmutación, entonces la

primer función que define el sistema conmutado esta activa cuando el valor del estado es negativo, cuando la dinámica de esta función llega a cero el sistema ya no es definido más por la primer función, sino que se activa la segunda función.

Como ejemplo adicional, consideremos el siguiente sistema conmutado:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma_3(x(t))}x(t) \quad (3.4)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^2$ y la ley de conmutación $\sigma_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow M = \{1, 2\}$ esta dada por:

$$\sigma_3(x(t)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1(t) < 0 \text{ y } x_2(t) < 0 \\ 1, & \text{si } x_1(t) > 0 \text{ y } x_2(t) > 0 \\ 2, & \text{si } x_1(t) \leq 0 \text{ y } x_2(t) \geq 0 \\ 2, & \text{si } x_1(t) \geq 0 \text{ y } x_2(t) \leq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

La conmutación se realiza entre las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La figura (3.2) muestra la ley de conmutación $\sigma_3(x(t))$ donde las regiones de operación se presentan como superficies en un espacio de \mathbb{R}^3

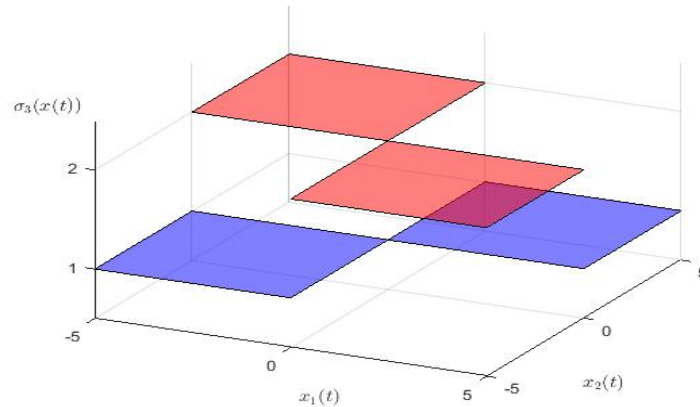


Figura 3.2: Ley de conmutación $\sigma_3(x(t)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow M = \{1, 2\}$

Para una mejor visualización de las áreas de operación de la ley de conmutación, podemos hacer una proyección de estos planos sobre el espacio de estados como se muestra en la figura (3.3), donde los bordes de las superficies de conmutación coinciden con los ejes que

cruzan por el origen de la gráfica, de modo que la función de conmutación es $\sigma_3(x(t)) = 1$ (es decir, la primer función estará activa) cuando la dinámica del sistema se ubique en el primer y tercer cuadrante, y $\sigma_3(x(t)) = 2$ (es decir, la segunda función esta activa) cuando la dinámica del sistema esté en el segundo y cuarto cuadrante.

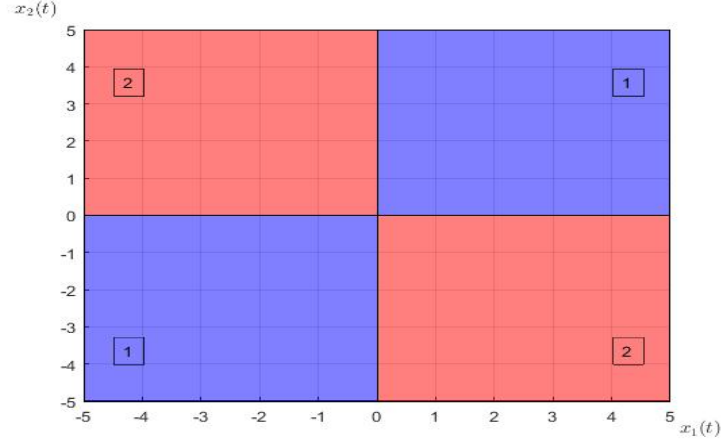


Figura 3.3: Proyección de la ley de conmutación $\sigma_3(x(t))$ en el espacio de estados

A continuación presentamos un ejemplo de de la conmutación dependiente de los estados, en un sistema no lineal. Considere el modelo del circuito de Chua definido por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= r(-x_1(t) + x_2(t) - \hat{g}(x_1(t))) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -qx_2(t)\end{aligned}\tag{3.6}$$

donde $\hat{g}(x_1(t)) = m_1x_1(t) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|)$, la cual puede escribirse como un conjunto de funciones $g_p(x_1(t))$ para $p = 1, 2, 3$ y que están definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}g_1(x_1(t)) &= m_0x_1(t) + m_1 - m_0 \\ g_2(x_1(t)) &= m_1x_1(t) \\ g_3(x_1(t)) &= m_0x_1(t) - m_1 + m_0\end{aligned}\tag{3.7}$$

Por lo que el sistema (3.6) se puede escribir como:

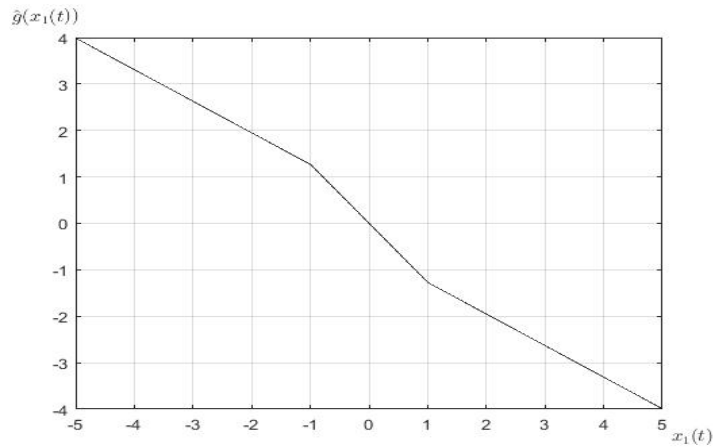
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} r(-x_1(t) + x_2(t)) \\ x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ -qx_2(t) \end{bmatrix} - rg_{\sigma_4(x_1(t))} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{3.8}$$

con la ley de conmutación $\sigma_4(x_1(t)) : \mathbb{R} \rightarrow M = \{1, 2, 3\}$ dependiente del primer estado, que

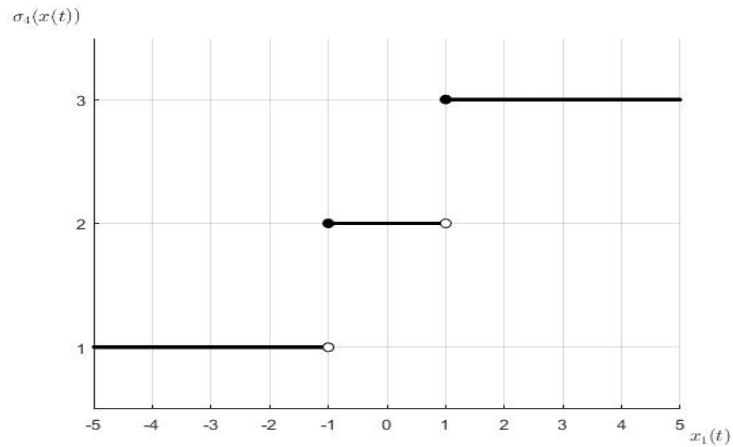
mapea al conjunto de índices de las funciones g_p , descrita por:

$$\sigma_4(x_1(t)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1(t) < -1 \\ 2, & \text{si } -1 \geq x_1(t) < 1 \\ 3, & \text{si } x_1(t) > 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

De esta manera el sistema conmuta entre los tres subsistemas lineales que la componen de acuerdo a la función de conmutación dependiente del primer estado $x_1(t)$, y cuyas gráficas se presentan en la figura (3.4).



(a) Función $\hat{g}(x_1(t))$



(b) Ley de conmutación $\sigma_4(x_1(t))$

Figura 3.4: Gráficas de la función $\hat{g}(x_1(t))$ y de $\sigma_4(x_1(t))$

Es conocido que esta conmutación y con los valores: $r = 10$, $q = 15$, $m_0 = -0.68$ y $m_1 =$

–1.27 el sistema genera un atractor extraño como se muestra en la figura (3.5), dadas condiciones iniciales suficientemente cerca del origen (nosotros usamos $x(0) = [-0.1, -0.1, 0.1]^T$).

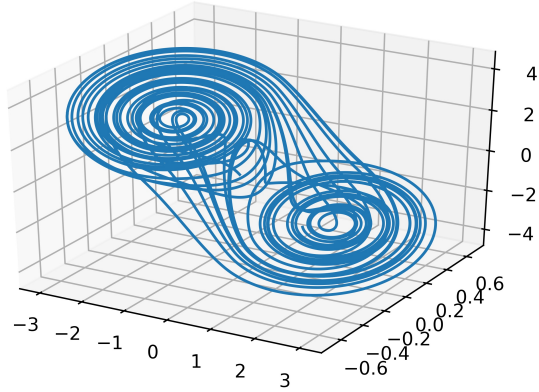


Figura 3.5: Dinámica del modelo del circuito de Chua

3.2. Conmutación dependiente del tiempo

La función de conmutación también puede depender exclusivamente del tiempo, de manera que la dinámica de la ley de conmutación tiene un número finito de discontinuidades en un lapso de tiempo acotado, a estas discontinuidades les llamamos tiempos de switcheo o conmutación. Un sistema conmutado con este tipo de ley de conmutación tiene la forma:

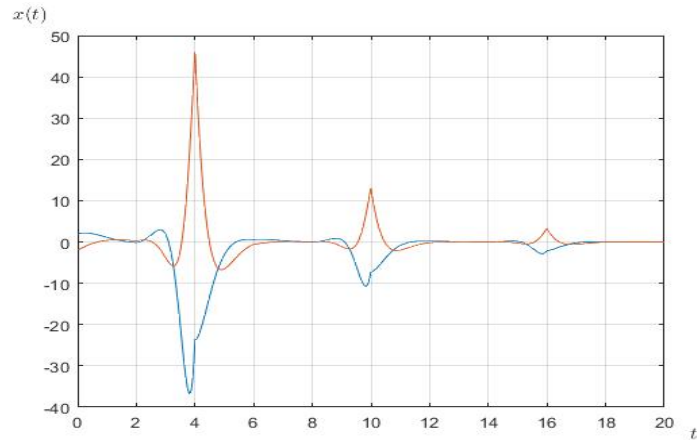
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_{\sigma(t)}(x(t)) \\ \sigma(t) : \mathbb{R}^+ &\rightarrow M \end{aligned} \tag{3.10}$$

Un sencillo ejemplo de una conmutación dependiente del tiempo se muestra en la figura 3.6, donde se considera el conjunto de índices $M = \{1, 2, 3\}$ y una conmutación regular y cíclica para el siguiente sistema lineal conmutado:

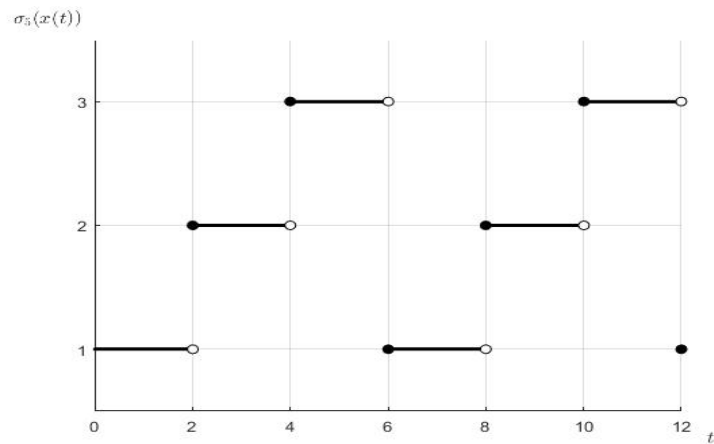
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma_5(t)}x(t) \\ \sigma_5(t) &= \begin{cases} 1, & \text{si } t \bmod 6 < 2 \\ 2, & \text{si } 2 \leq t \bmod 6 < 4 \\ 3, & \text{si } 4 \leq t \bmod 6 < 6 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$



(a) Dinámica del sistema conmutado



(b) Ley de conmutación $\sigma_5(t)$

Figura 3.6: Sistema conmutado dependiente del tiempo

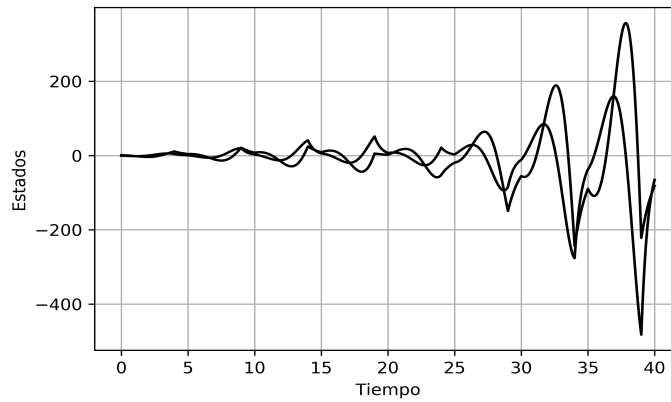
Consideremos ahora el siguiente sistema lineal conmutado donde la conmutación es dependiente del tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma_6} x(t) \\ \sigma_6(t) &= \begin{cases} 1, & \text{si } t \bmod 5 \leq 4 \\ 2, & \text{si } t \bmod 5 = 5 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

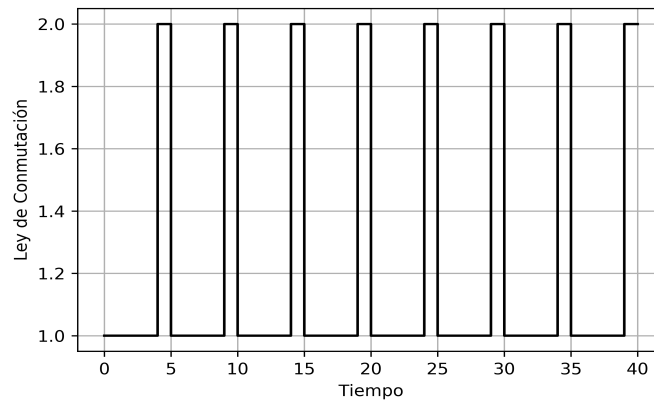
donde:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Fácilmente podemos obtener los eigenvalores de estas matrices, para la matriz A_1 son $\{0.5 + 1.322i, 0.5 - 1.322i\}$ y para la matriz A_2 son $\{-1, -2\}$; ya que ambos sistemas son lineales, tiene un punto de equilibrio común, el origen, y este punto de equilibrio es inestable para el primer sistema y estable para el segundo. La dinámica del sistema conmutado (3.12) con condiciones iniciales $x(0) = [1 \ -0.5]^T$ es:



(a) Dinámica del sistema conmutado



(b) Ley de conmutación $\sigma_6(t)$

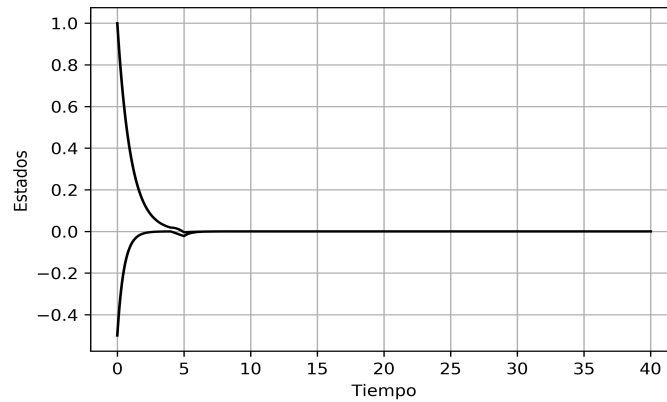
Figura 3.7: Sistema conmutado inestable dependiente del tiempo

De esta manera, mostramos que este sistema no es estable bajo conmutación arbitraria, sin embargo, encontramos que es posible proponer una ley de conmutación tal que las solución del sistema converja al punto de equilibrio asintóticamente. Consideremos ahora el

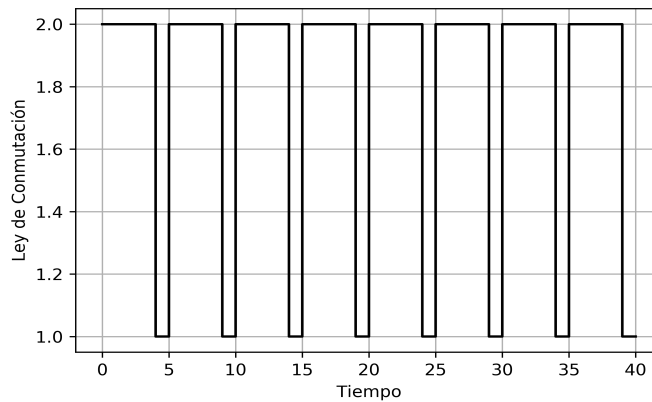
mismo conjunto de funciones lineales, pero con la ley de conmutación opuesta:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma_7} x(t) \\ \sigma_7(t) &= \begin{cases} 1, & \text{si } t \bmod 5 = 5 \\ 2, & \text{si } t \bmod 5 \leq 4 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

La dinámica del sistema conmutado y ley de conmutación se presentan a continuación:



(a) Dinámica del sistema conmutado



(b) Ley de conmutación $\sigma_7(t)$

Figura 3.8: Sistema conmutado estable dependiente del tiempo

En estos casos las conmutaciones son relativamente sencillas por lo que es posible utilizar herramientas como tiempo de residencia (tiempo que permanece en un mismo valor la ley de conmutación) o tiempo promediado, sin embargo, para muchos sistemas los tiempos de conmutación son irregulares, incluso arbitrarios, lo que complica el análisis de las propiedades de las soluciones del sistema conmutado.

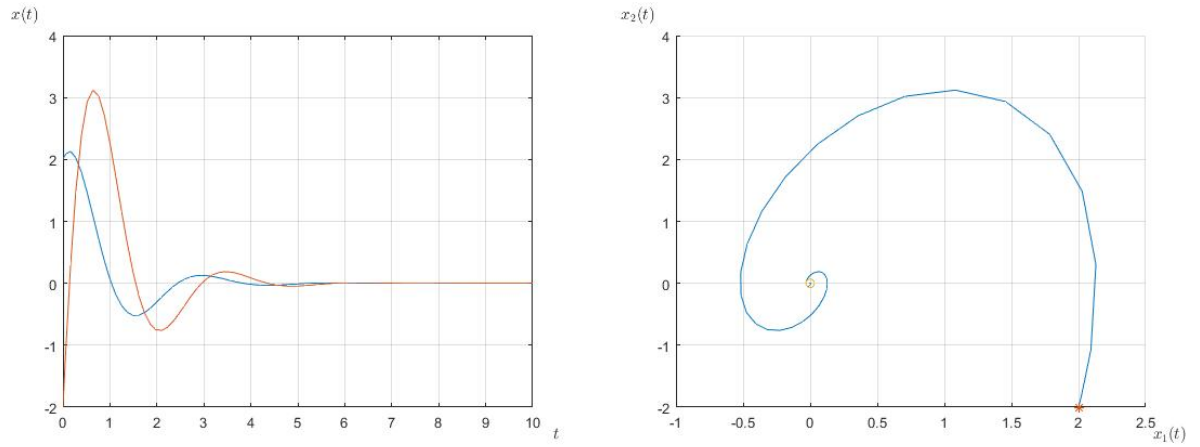
De lo anterior vemos que la estabilidad en los sistemas conmutados depende de que todos los sistemas compartan el mismo punto de equilibrio. Además surge la pregunta, si un sistema conmutado puede ser asintóticamente estable ante cualquier ley de conmutación, o si existe una ley de conmutación que haga un punto de equilibrio del sistema conmutado asintóticamente estable. A estos dos problemas les llamaremos estabilidad ante conmutación arbitraria y diseño de conmutación para estabilización o de estabilizabilidad [19].

3.3. Estabilizabilidad de sistemas conmutados

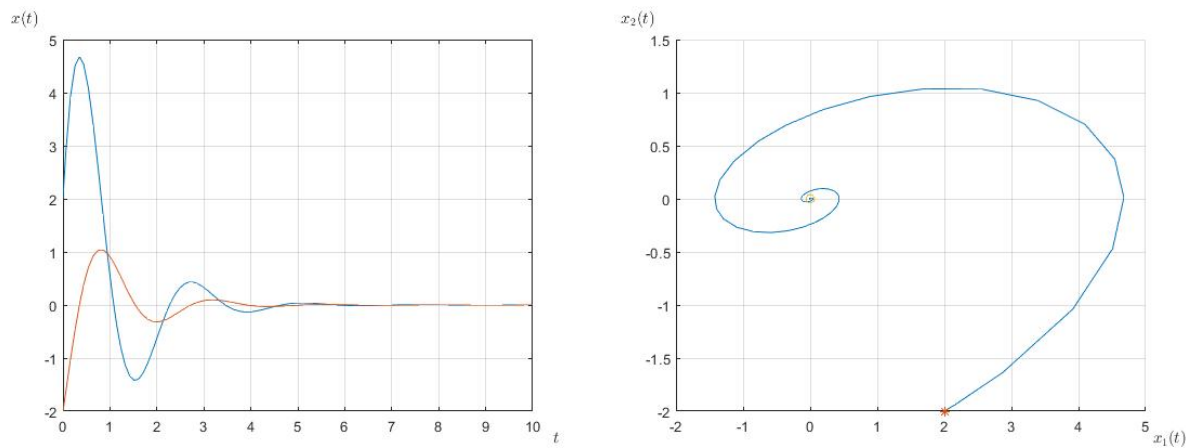
La estabilidad de las soluciones de un sistema conmutado no dependen de la estabilidad de las soluciones de cada miembro de la familia de funciones, sino que está íntimamente ligada a la ley de conmutación. Por lo tanto, si existe una ley de conmutación para un sistema conmutado tal que logre estabilizar sus soluciones, entonces decimos que el sistema es estabilizable, de otra manera decimos que es no estabilizable.

Cabe mencionar que en este momento no consideramos acción de control alguna, por lo que la estabilidad que buscamos es sobre los puntos de equilibrio, ciclos límites o alguna otra solución estable en el sentido de Lyapunov propias de cada subsistema, y no una impuesta por alguna fuerza externa. Podemos notar entonces, que una condición necesaria para que un sistema sea estabilizable es que todos los subsistemas deben compartir un punto de equilibrio, ciclo límite o solución.

Por ejemplo, consideremos el sistema (3.4). Los eigenvalores de estas matrices son $-1 \pm 2.23i$ y $-1 \pm 2.64i$ respectivamente, por lo que sus soluciones son asintóticamente estables. Las siguientes figuras corresponden a las simulaciones de cada una de las funciones tomando como condición inicial el punto $(2, -2)$:



(a) Solución del sistema con $\sigma_3 = 1$ para todo tiempo (en el tiempo -izquierda- y en espacio de estados -derecha-)



(b) Solución del sistema con $\sigma_3 = 2$ para todo tiempo (en el tiempo -izquierda- y en espacio de estados -derecha-)

Figura 3.8: Soluciones del sistema (3.4) con $\sigma_3(x(t))$ fija

Sin embargo, la solución del sistema bajo la conmutación $\sigma_3(x(t))$ es inestable como muestra la siguiente figura:

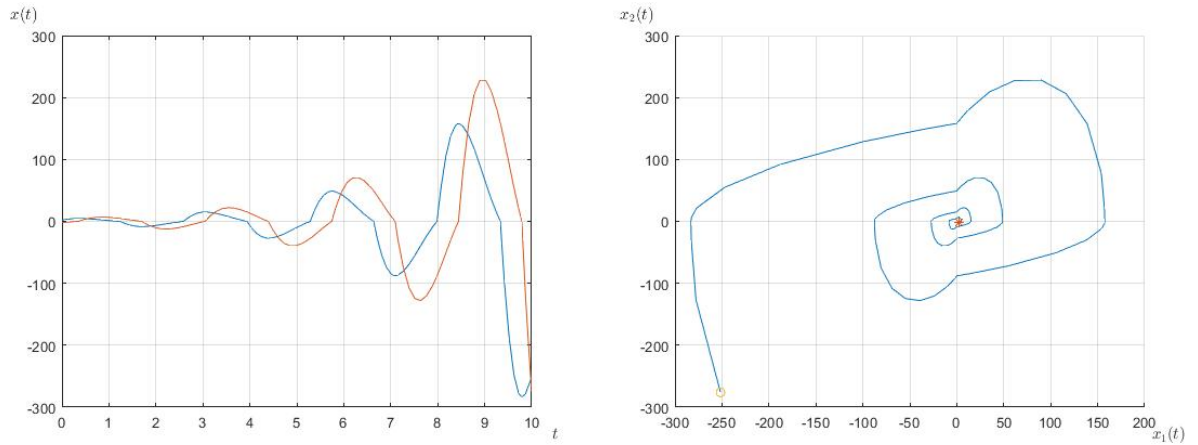


Figura 3.9: Solución del sistema conmutado (3.4) con $\sigma_3(x(t))$

Sin embargo, si usamos la ley de conmutación dependiente de los estados $\sigma_8(x(t))$ definida como:

$$\sigma_8(x(t)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1(t) < 0 \text{ y } x_2(t) > 0 \\ 1, & \text{si } x_1(t) > 0 \text{ y } x_2(t) < 0 \\ 2, & \text{si } x_1(t) \geq 0 \text{ y } x_2(t) \geq 0 \\ 2, & \text{si } x_1(t) \leq 0 \text{ y } x_2(t) \leq 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

entonces la solución del sistema conmutado con condición inicial en $x_0 = [2, -2]^T$ es inestable a pesar de que ambas funciones que la componen sea estables:

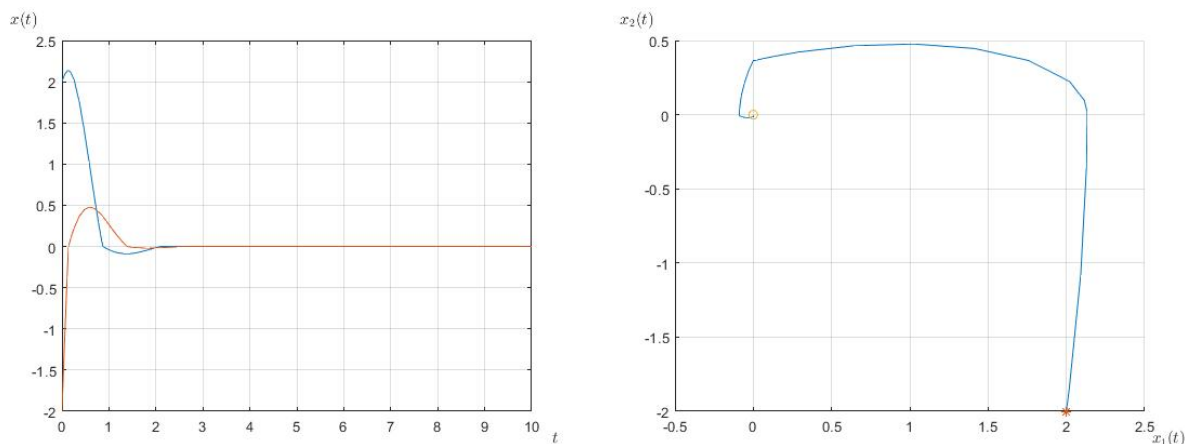


Figura 3.10: Solución del sistema conmutado (3.4) con $\sigma_8(x(t))$

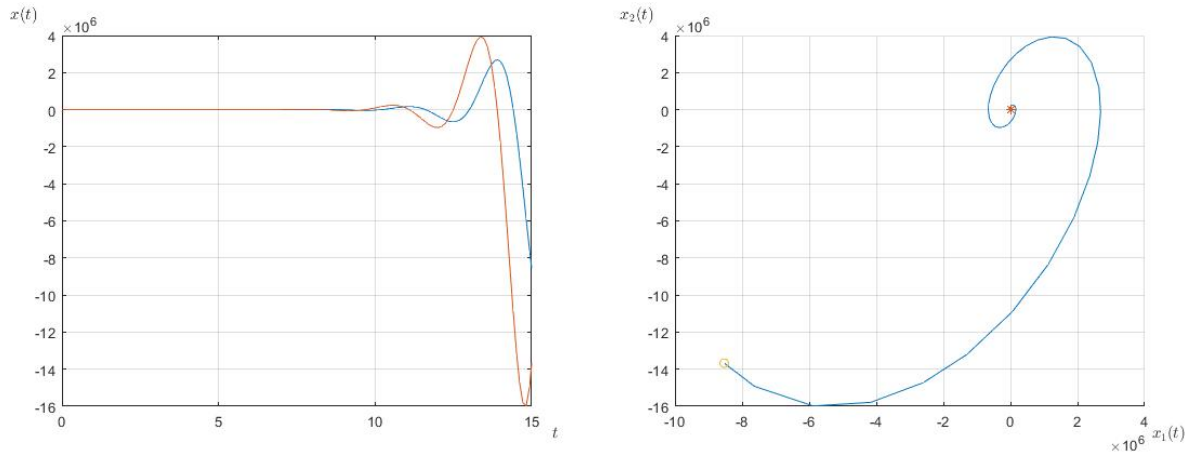
Consideremos ahora el sistema

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma_3(x(t))}x(t) \quad (3.15)$$

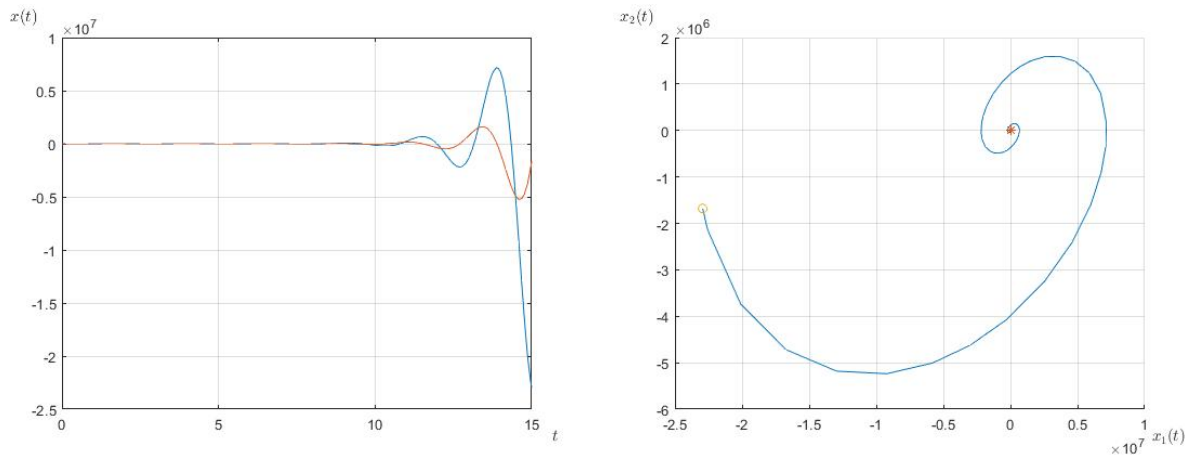
donde $x(t) \in \mathbb{R}^2$ y las matrices A_1 y A_2 son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

vemos que ambas matrices tienen eigenvalores con parte real negativa, por lo que son inestables, como se muestra en sus comportamientos individuales descritos en las siguientes figuras:



(a) Solución del sistema con $\sigma_3 = 1$ para todo tiempo (en el tiempo -izquierda- y en espacio de estados -derecha-)



(b) Solución del sistema con $\sigma_3 = 2$ para todo tiempo (en el tiempo -izquierda- y en espacio de estados -derecha-)

Figura 3.10: Soluciones del sistema (3.15) con $\sigma_3(x(t))$ fija

Sin embargo, si tomamos las mismas leyes de conmutación, $\sigma_3(x(t))$ y $\sigma_8(x(t))$, tenemos que para la primer ley ahora el sistema es estable y para la segunda es inestable:

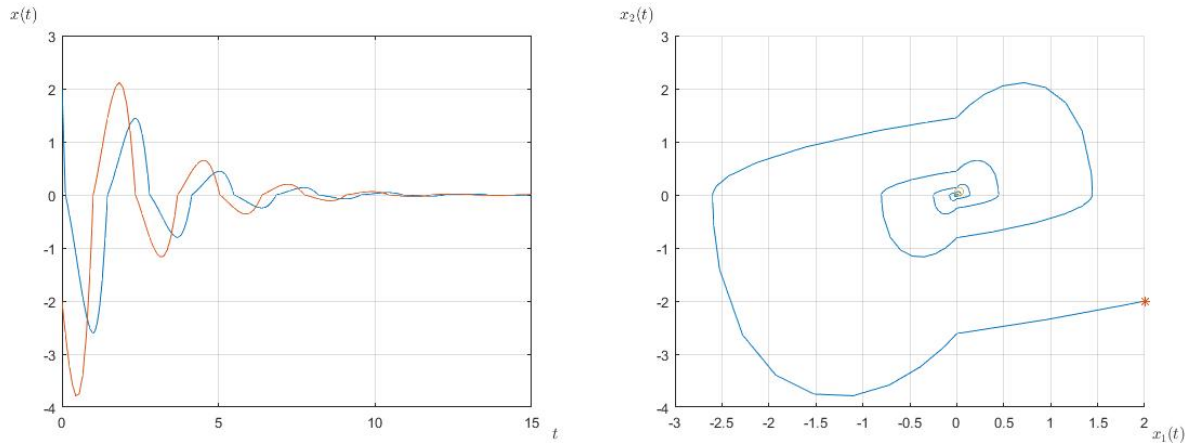


Figura 3.11: Solución del sistema conmutado (3.15) con $\sigma_3(x(t))$

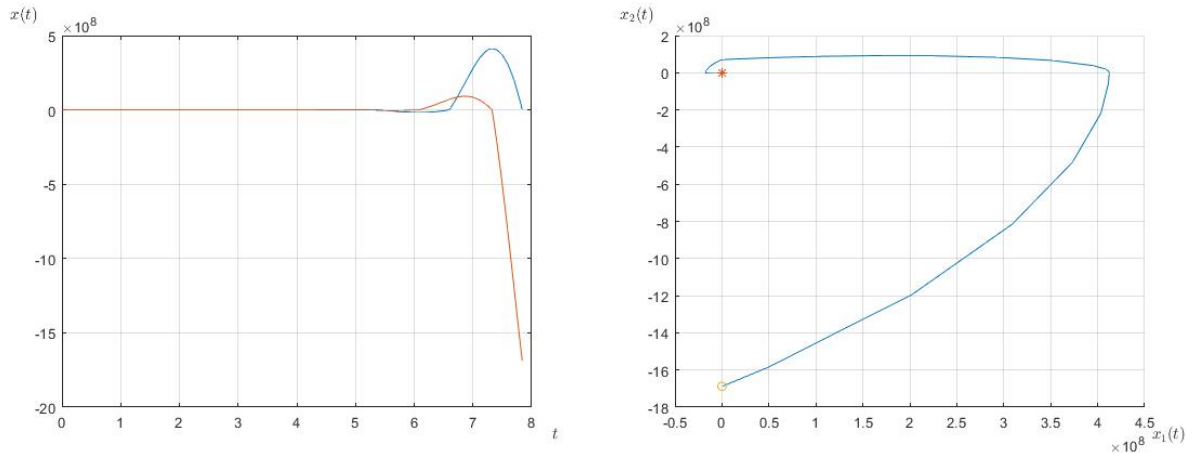


Figura 3.12: Solución del sistema conmutado (3.15) con $\sigma_8(x(t))$

De lo anterior podemos diferenciar dos problemas, uno de estabilizabilidad, es decir, si existe una ley de conmutación bajo la cual las soluciones del sistema sean estables, y el segundo de estabilidad ante conmutación arbitraria, es decir, en el que analizamos la estabilidad de las soluciones del sistema conmutado bajo cualquier ley de conmutación.

En este trabajo analizamos la estabilidad de una solución de un sistema bajo conmutación dependiente del tiempo. Además, consideramos que la conmutación es continua por la derecha para todo $t \geq 0$ y que la conmutación es arbitraria, es decir, no podemos predecir su comportamiento, ni el tiempo que permanecerá en cada configuración ni el orden del con-

mutación, por lo que en la siguiente sección revisamos algunos conceptos básicos en cuanto a este problema.

3.4. Estabilidad en sistemas conmutados

Un sistema conmutado es estable cuando sus soluciones son estables para toda ley de conmutación, es decir, bajo conmutación arbitraria, por lo que la estabilidad es independiente de la conmutación. La estabilidad bajo conmutación arbitraria requiere que todas las funciones entre las que se conmuta compartan un punto de equilibrio y además sea estable, ya que claramente vemos que si alguno de estos no lo fuera, y la función de conmutación permaneciera en este para todo tiempo, el sistema conmutado sería inestable.

Para establecer una definición formal de la estabilidad en sistemas conmutados, primeramente introduciremos algunas definiciones necesarias para este fin.

Definición 5. Una función $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ se dice que es de clase \mathcal{K} si es continua, estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Si además es desacotada, entonces se dice que es de clase \mathcal{K}_∞ .

Definición 6. Una función $\beta : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ se dice que es de clase \mathcal{KL} si $\beta(\cdot, t)$ es de clase \mathcal{K} para cualquier $t \geq 0$ fijo y $\beta(r, t)$ es decreciente a cero cuando $t \rightarrow \infty$ para cada $r \geq 0$ fijo.

Una vez definidas las funciones de clase \mathcal{K} y clase \mathcal{KL} podemos definir la estabilidad de un sistema conmutado de la siguiente manera:

Definición 7. Diremos que un sistema conmutado es *uniformemente asintóticamente estable* si existe una constante positiva δ y una función β de clase \mathcal{KL} tal que para toda función de conmutación $\sigma(t)$ las soluciones de (3.1) con $|x(0)| \leq \delta$ se satisface la desigualdad:

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t), \forall t \geq 0 \quad (3.16)$$

Si la función β toma la forma de $\beta(r, s) = cre^{-\lambda s}$ para algún $c, \lambda > 0$ entonces el sistema es uniformemente exponencialmente estable. Además si estas condiciones se satisfacen para cualquier condición inicial el sistema es globalmente uniformemente asintóticamente estable, o *GUAS* por sus siglas en inglés, y globalmente uniformemente exponencialmente estable, *GUES* por sus siglas en inglés, respectivamente [19].

Para el análisis de la estabilidad usaremos el Teorema de la función común de Lyapunov, en el cual dada una función positiva definida continuamente diferenciable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que es una *función común de Lyapunov* si existe una función continua positiva definida $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_p(x) \leq -W(x), \forall x, \forall p \in P \quad (3.17)$$

donde $f_p(x)$ representa a cada miembro de la familia de funciones (o subsistemas) que definen el sistema conmutado. Como lo menciona Liberzon en [19], el punto principal es que la tasa de decrecimiento de V no se vea afectada por la conmutación σ , en este sentido, el término *uniforme* es con respecto a la conmutación σ , en otras palabras, que sea independiente de la ley de conmutación.

Teorema 3.1. *Si todos los subsistemas en la familia 3.1 comparten una función común de Lyapunov radialmente desacotada, entonces el sistema conmutado es GUAS.*

La prueba de este Teorema se deriva directamente de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Si adicionalmente el sistema conmutado es lineal, es decir, tiene la forma:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \quad (3.18)$$

donde $\sigma(t)$ es alguna ley de conmutación dependiente del tiempo, entonces podemos usar la función de Lyapunov:

$$V = x^T(t)P(t)x(t) \quad (3.19)$$

que es una función común para todos los elementos de la familia de funciones del sistema (3.18) y cuya derivada es:

$$\dot{V} = \dot{x}^T(t)P(t)x(t) + x^T(t)\dot{P}(t)x(t) + x^T(t)P(t)\dot{x}(t) \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.18) en (3.20) y acomodando los términos tenemos:

$$\dot{V} = x^T(t)[\dot{P}(t) + A_{\sigma(t)}^T P(t) + P(t)A_{\sigma(t)}]x(t) \quad (3.21)$$

Así que en este caso podemos reescribir el Teorema 3.1 como:

Teorema 3.2. *El sistema lineal conmutado (3.18) es asintóticamente estable bajo conmutación arbitraria si existe una matriz positiva definida P tal que satisfaga:*

$$\dot{P}(t) + A_{\sigma(t)}^T P(t) + P(t)A_{\sigma(t)} < 0 \quad (3.22)$$

para todo $t \geq 0$ y para todos los los valores de la función de conmutación $\sigma(t)$.

En otras palabras, si se satisface la desigualdad de Lyapunov para todos los subsistemas con la misma función de Lyapunov el sistema conmutado es asintóticamente estable.

Como ilustración consideremos el siguiente sistema conmutado:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma_9(t)}x(t) \quad (3.23)$$

donde $\sigma_9(t)$ es una ley de conmutación arbitraria dependiente del tiempo, es decir, el tiempo que permanece en cada estado es aleatorio. Las matrices que definen el sistema son:

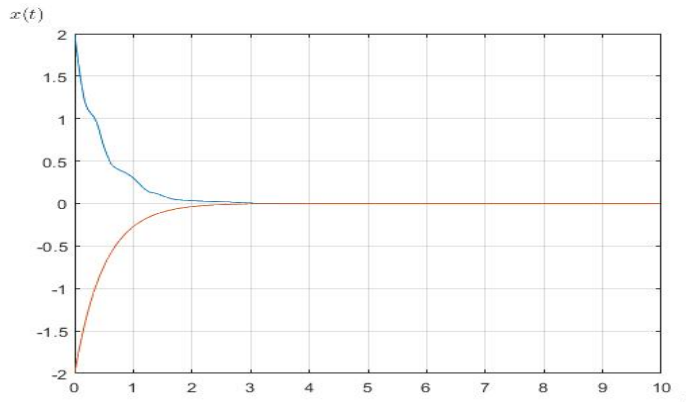
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Podemos fácilmente observar que ambas son definidas negativas, entonces lo que satisface la primer condición para que un sistema conmutado sea estable, esto es, que todos los subsistemas sean estables. Ahora, si usamos la función de Lyapunov $V = x^T(t)P(t)x(t)$ con $P(t) = I$ tenemos que la desigualdad (3.22) para A_1 y A_2 correspondientemente son:

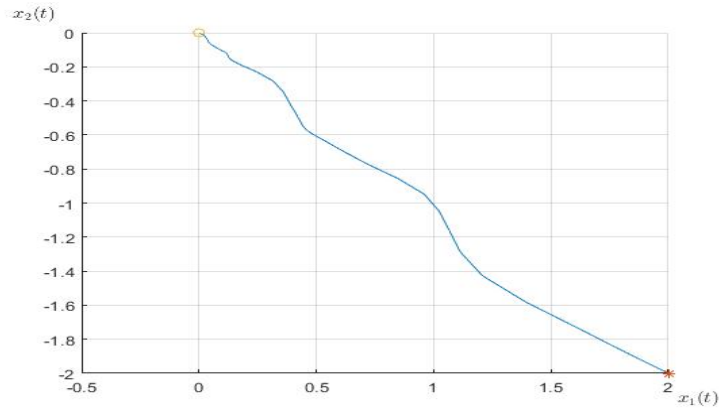
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} < 0 \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} < 0$$

como se satisface la desigualdad de Lyapunov del Teorema 3.2 para todos los subsistemas y para todo tiempo podemos decir que el sistema conmutado (3.23) es asintóticamente estable.

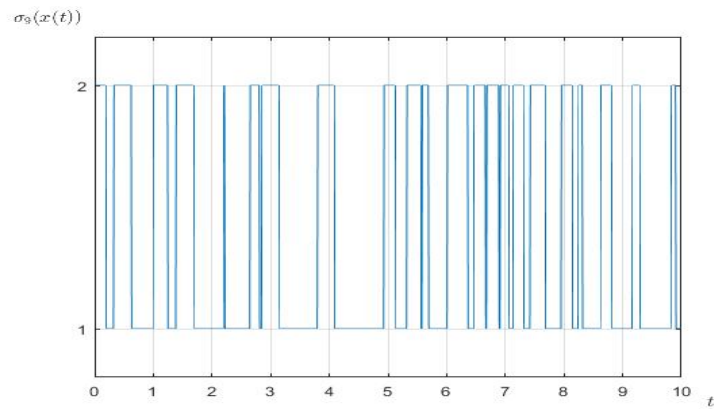
Las simulaciones del sistema (3.23) se muestran en las siguientes figuras:



(a) Solución del sistema (3.23) en el tiempo



(b) Solución del sistema (3.23) en el espacio de estados



(c) Ley de conmutación arbitraria

Figura 3.12: Solución del sistema conmutado (3.23) con $\sigma_9(t)$

En este trabajo consideramos las redes dinámicas con topología conmutada con una ley de conmutación arbitraria dependiente del tiempo. La conmutación es con respecto a la estructura de conexión de la red, es decir, consideramos una red dinámica cuya estructura cambia en el tiempo de acuerdo a las condiciones presentadas en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Redes con topología conmutada

Una red dinámica compleja con topología conmutada es un modelo matemático de un sistema que captura las propiedades de interés de su estructura y dinámica colectiva. En particular, la evolución estructural se describe como una conmutación arbitraria entre matrices difusivas de la misma dimensión, las cuales llamaremos topologías admisibles. Para este tipo de redes, resolveremos el problema de sincronización idéntica y control por pinning a un punto de equilibrio bajo conmutación arbitraria.

Consideremos una red dinámica compleja (2.6) con N nodos idénticos, con la diferencia que la matriz Laplaciana L , que describe la estructura de conexión externa de los nodos, conmuta arbitrariamente en el tiempo entre un conjunto finito de posibles configuraciones, de modo que la red tiene la forma:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}(t)) + c(L^{\sigma(t)} \otimes \Gamma)\mathbf{X}(t) \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{X}(t) = [x_1(t)^T, x_2(t)^T, \dots, x_N(t)^T]^T$ con $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{iN}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ son los estados de cada nodo de la red, $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}(t)) = [f^T(x_1(t)), f^T(x_2(t)), \dots, f^T(x_N(t))]^T$ es la dinámica aislada de cada nodo en la red, $c \in \mathbb{R}$ es la fuerza de acoplamiento uniforme, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de acoplamiento interno, $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$ es la función de conmutación.

La ley de conmutación, que indica cual matriz de acoplamiento externo esta activa en el instante de tiempo t , es arbitraria, dependiente del tiempo, continua por la derecha y constante por partes, además, en este capítulo colocamos la ley de conmutación como superíndice de las matrices conmutadas para escribir los índices de la posición de los elementos en las matrices como subíndices.

Las matrices Laplacianas *admisibles* en la conmutación, $L^k = (l_{ij}^k)^{N \times N}$, para toda $k \in M$, satisfacen lo siguiente: son reales, la suma por renglón es cero, los elementos de la diagonal

son el negativo de la suma de los elementos fuera de ella y al menos un elemento de cada fila es distinto de cero. Esto nos garantiza que los eigenvalores de las matrices L^k satisfacen el orden (2.7).

Podemos escribir (4.1) en términos de las ecuaciones de cada nodo tal como hicimos en el capítulo 2 en (2.5) pero incluyendo la conmutación de la estructura, de la forma:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}^{\sigma(t)} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.2)$$

Cabe destacar que los eigenvalores de las matrices admisibles cumplen con el orden mostrado en (2.7). Esta condición será de relevancia más adelante.

4.1. Sincronización en redes dinámicas con topología conmutada

El problema de sincronización de redes dinámicas complejas con topología conmutada (4.1), es similar al descrito para redes con topología fija, es decir, pedimos que se cumpla (2.10), para lograr que la red se sincronice bajo la definición (4) pero para una red conmutada.

Usamos una metodología similar a la seguida por [11] para redes con topología fija, es decir, definimos el error de sincronización de la red como $\eta = [\eta_1^T, \dots, \eta_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ donde $\eta_i(t) = x_i(t) - s(t)$ es el error de sincronización del i -ésimo nodo, de modo que determinar la estabilidad de la solución de sincronización equivale a determinar la estabilidad de la dinámica del error de sincronización:

$$\dot{\eta}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}^k \Gamma x_j(t) - f(s(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.3)$$

donde $\sigma(t) = k \in M$. Usamos una metodología similar a la seguida en el segundo capítulo donde aproximamos la dinámica de cada nodo alrededor de la solución $s(t)$ de manera que tenemos:

$$\dot{\eta}(t) = (I_N \otimes Df(s(t)) + cL^k \otimes \Gamma)\eta(t) \quad (4.4)$$

donde $Df(s(t))$ es la linealización de f evaluado en la solución de sincronización $s(t)$. Podemos separar (4.4) en sus ecuaciones por cada nodo de la siguiente manera:

$$\dot{\eta}_i = Df(s(t))\eta_i + c \sum_{j=1}^N l_{ij}^k \Gamma \eta_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

Proponemos tres enfoques para el análisis de la estabilidad de la dinámica del error de la red. En primer lugar supondremos la existencia de una matriz no singular Φ tal que permita cambiar las matrices de acoplamiento a una forma diagonal simultáneamente. En seguida, expondremos que es posible relajar esta condición si suponemos que existe una matriz no singular Ψ tal que permita triangularizar las matrices simultáneamente, método inspirado por [24]. Finalmente propondremos condiciones suficientes para garantizar la sincronización de la red sin el requerimiento de alguna de estas dos condiciones.

Primeramente, si suponemos que todas las matrices Laplacianas, L^k , comparten una matriz no singular $\Phi = (\phi_{ij})_{N \times N}$ tal que:

$$\Phi^{-1}L^k\Phi = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N^k \end{pmatrix} = \Lambda^k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.6)$$

entonces vemos que todas las matrices son simultáneamente diagonalizables, y además notamos que $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_N^k$ son los eigenvalores de la matriz de acoplamiento L^k y que satisfacen la desigualdad (2.7). Luego aplicamos el cambio de variable:

$$\omega(t) = (\Phi^{-1} \otimes I_n)\eta \quad (4.7)$$

a la ecuación (4.4) para tener:

$$\dot{\omega}(t) = (I_N \otimes Df(s(t)) + c\Lambda^k \otimes \Gamma)\omega(t) \quad (4.8)$$

para todo $k \in M$.

Así, de igual manera que una red con topología fija, podemos cambiar el problema de estabilidad de un sistema $N \times n$ dimensional, por el problema de estabilidad de N sistemas lineales n -dimensionales variantes en el tiempo, pero esta vez, conmutados, con la forma:

$$\dot{\omega}_i(t) = (Df(s(t)) + c\lambda_i^k \Gamma)\omega_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.9)$$

y el análisis de estabilidad se puede realizar usando el Teorema de la función común de Lyapunov.

Proponemos la función de Lyapunov $V = \sum_{i=1}^N V_i$, donde:

$$V_i = \omega_i(t)^T P(t)\omega_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.10)$$

es una función de Lyapunov común para todas las topologías.

De lo anterior encontramos que podemos usar el Teorema 2.1 para determinar la estabilidad de la i -ésima ecuación de (4.9) con el siguiente resultado

Teorema 4.1. *La i -ésima ecuación de (4.9) es asintóticamente estable a su punto de equilibrio, si existen las matrices variantes en el tiempo positivas definidas para todo tiempo, $P(t)$ y $Q(t)$, y la constante $d_i < 0$ tal que:*

$$\dot{P}(t) + (Df(s(t)) + d_i\Gamma)^T P(t) + P(t)(Df(s(t)) + d_i\Gamma) \leq -Q(t)$$

con $d_i \geq c\lambda_i^k$ para todo $k \in M$

Prueba. La derivada de (4.10) es:

$$\dot{V}_i = \omega_i^T(t) [\dot{P}(t) + (Df(s(t)) + c\lambda_i^k\Gamma)^T P(t) + P(t)(Df(s(t)) + c\lambda_i^k\Gamma)] \omega_i(t)$$

que será negativa si se toma d_i negativa y $d_i \geq \max_{1 \leq k \leq m} (c\lambda_i^k)$. ■

Ahora, como $\lambda_1^k, \forall k$ corresponde al estado sincronizado, basta probar que los $N - 1$ sistemas conmutados restantes son asintóticamente estables para determinar la estabilidad de la solución de sincronización, en otras palabras, para determinar si la red logra la sincronización bajo la conmutación arbitraria, además, el orden de los eigenvalores de las matrices de acoplamiento externo permite obtener el siguiente resultado:

Teorema 4.2. *La red dinámica conmutada (4.2) logra la sincronización idéntica si existen las matrices variantes en el tiempo positivas definidas para todo tiempo, $P(t)$ y $Q(t)$, y la constante $d_2 < 0$ tal que:*

$$\dot{P}(t) + (Df(s(t)) + d_2\Gamma)^T P(t) + P(t)(Df(s(t)) + d_2\Gamma) \leq -Q(t)$$

con $d_2 \geq \max_{1 \leq k \leq m} (c\lambda_2^k)$.

Prueba. Si $d_2 \geq \max_{1 \leq k \leq m} (c\lambda_2^k)$ entonces por el Teorema 4.1 la segunda ecuación de (4.9) es asintóticamente estable. Para asegurar que el resto de los sistemas de (4.9) también son estables, recordamos el orden de los eigenvalores descrito en (2.7), entonces

$$d_2 \geq c\lambda_2^k \geq \dots \geq c\lambda_N^k$$

Por lo tanto se satisface la desigualdad de Lyapunov para todos los nodos y todas las topologías por lo que la red se sincroniza bajo conmutación arbitraria. ■

Es claro que suponer que todas las matrices de acoplamiento externo sean simultáneamente diagonalizables es un requerimiento más fuerte que solicitar que sean únicamente simultáneamente triangularizables [24]. Por ello Jun Zhao, David Hill y Tao Liu investigaron la estabilidad de la solución de sincronización, teniendo esta suposición en cuenta. Inspirados en su investigación, también mostramos las condiciones necesarias para que una red dinámica con topología conmutada logre la sincronización idéntica.

Supongamos que existe una matriz $\Psi = (\psi_{ij})_{N \times N}$ tal que:

$$\Psi^{-1}L^k\Psi = \begin{pmatrix} b_{11}^k & b_{12}^k & \dots & b_{1N}^k \\ 0 & b_{22}^k & \dots & b_{2N}^k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{NN}^k \end{pmatrix} = \hat{\Lambda}^k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.11)$$

donde $\hat{\Lambda}^k$ son matrices triangulares con $b_{ii}^k = \hat{\lambda}_i^k$, es decir, los elementos de la diagonal son los eigenvalores de las matrices $L^k, k = 1, 2, \dots, m$, respectivamente, en otras palabras, todas las matrices de acoplamiento son simultáneamente triangularizables por la misma matriz Ψ .

Usamos el cambio de coordenadas $\mathbf{v}(t) = (\Psi^{-1} \otimes I_n)\boldsymbol{\eta}(t)$ en (4.4) para obtener:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = (I_N \otimes Df(s(t)) + c\hat{\Lambda}^k \otimes \Gamma)\mathbf{v}(t) \quad (4.12)$$

También podemos escribir (4.12) como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t)_1 &= (Df(s(t)) + c\hat{\lambda}_1^k \Gamma)\mathbf{v}(t)_1 + cb_{12}^k \Gamma \mathbf{v}(t)_2 + \dots + cb_{1N}^k \Gamma \mathbf{v}(t)_N \\ \dot{\mathbf{v}}(t)_2 &= (Df(s(t)) + c\hat{\lambda}_2^k \Gamma)\mathbf{v}(t)_2 + cb_{23}^k \Gamma \mathbf{v}(t)_3 + \dots + cb_{2N}^k \Gamma \mathbf{v}(t)_N \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{v}}(t)_N &= (Df(s(t)) + c\hat{\lambda}_N^k \Gamma)\mathbf{v}(t)_N \end{aligned} \quad (4.13)$$

Si suponemos que el Jacobiano $Df(s(t))$ está acotado, podemos establecer la estabilidad de (4.13) con la función de Lyapunov común invariante en el tiempo $V = \sum_{i=1}^N V_i$ donde:

$$V_i = \mathbf{v}^T(t) \hat{P} \mathbf{v}_i(t) \quad (4.14)$$

Por lo que bajo estas suposiciones podemos tener un resultado similar a [24]:

Teorema 4.3. *Considere la dinámica (4.13) y suponga que existe una matriz positiva defini-*

da $\hat{P} = \hat{P}^T > 0 \in \mathbb{R}^n \times n$ y las constantes $\hat{d} < 0$ y $\alpha > 0$ tal que:

$$(Df(s(t)) + \hat{d}\Gamma)^T \hat{P} + \hat{P}(Df(s(t)) + \hat{d}\Gamma) \leq -\alpha I_n, \forall t \geq 0$$

Y definiendo:

$$\mu_{ij} = 2 \max_{1 \leq q \leq m} |cb_{ij}^q| \|\Gamma \hat{P}_i\| \quad (4.15)$$

Si $\hat{d} \geq c\hat{\lambda}_2^k$ para todo k , y $\alpha - \sum_{j=i+1}^N \frac{N-1}{\alpha} \mu_{ij}^2 > 0$ entonces la red dinámica conmutada (4.2) se sincroniza bajo la conmutación arbitraria.

Prueba. La derivada de (4.14) es:

$$\dot{V}_i = \dot{v}_i^T(t) \hat{P} v_i + v_i^T \hat{P} \dot{v}_i(t) \quad (4.16)$$

Sustituyendo la i -ésima ecuación de (4.13) en (4.16) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & [(Df(s(t)) + cb_{ii}^k \Gamma) v_i(t) + cb_{i,i+1}^k \Gamma v_{i+1}(t) + \dots + cb_{iN}^k \Gamma v_N(t)]^T \hat{P} v_i(t) + \\ & v_i^T(t) \hat{P} [(Df(s(t)) + cb_{ii}^k \Gamma) v_i(t) + cb_{i,i+1}^k \Gamma v_{i+1}(t) + \dots + cb_{iN}^k \Gamma v_N(t)] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Reacomodando y agrupando los términos:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & v_i^T(t) (Df(s(t)) + cb_{ii}^k \Gamma)^T \hat{P} v_i(t) + cb_{i,i+1}^k v_{i+1}^T(t) \Gamma \hat{P} v_i(t) + \dots + cb_{iN}^k v_N^T(t) \Gamma \hat{P} v_i(t) + \\ & v_i^T(t) \hat{P} (Df(s(t)) + cb_{ii}^k \Gamma) v_i(t) + v_i^T(t) \hat{P} cb_{i,i+1}^k \Gamma v_{i+1}(t) + \dots + v_i^T(t) \hat{P} cb_{iN}^k \Gamma v_N(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como $cb_{a,b}^k v_b^T(t) \Gamma \hat{P} v_a(t) = cb_{ab}^k (\hat{P} v_a(t))^T (v_b^T(t) \Gamma)^T = cb_{ab}^k v_a^T(t) \hat{P} \Gamma v_b(t)$ y por otro lado $v_a^T(t) \hat{P} cb_{ab}^k \Gamma v_b(t) = cb_{ab}^k v_a^T(t) \hat{P} \Gamma v_b(t)$ luego:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & v_i^T(t) [(Df(s(t)) + cb_{ii}^k \Gamma)^T \hat{P} + \hat{P} (Df(s(t)) + cb_{ii}^k \Gamma)] v_i(t) + \\ & 2cb_{i,i+1}^k v_i(t) \hat{P} \Gamma v_{i+1}(t) + \dots + 2cb_{iN}^k v_i^T(t) \hat{P} \Gamma v_N(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Luego, como $v_a \hat{P} \Gamma v_b = \Gamma (v_a \hat{P})^T v_b = \Gamma \hat{P} v_a v_b$, entonces:

$$\dot{V}_i \leq -\alpha \|v_i(t)\|^2 + 2cb_{i,i+1}^k \|\Gamma \hat{P}\| \|v_i(t)\| \|v_{i+1}(t)\| + \dots + 2cb_{iN}^k \|\Gamma \hat{P}\| \|v_i(t)\| \|v_N(t)\| \quad (4.20)$$

además por la definición (4.15), lo anterior es equivalente a:

$$\dot{V}_i \leq -\alpha \|v_i(t)\|^2 + \sum_{j=i+1}^N \mu_{ij} \|v_i(t)\| \|v_j(t)\| \quad (4.21)$$

Por la desigualdad de Young:

$$\dot{V}_i \leq -\alpha \|\mathbf{v}_i(t)\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v}_i(t)\|^2 + \sum_{j=i+1}^N \frac{N-1}{2\alpha} \mu_{ij}^2 \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 \quad (4.22)$$

Por lo que la i -ésima derivada de V_i es

$$\dot{V}_i \leq -\frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v}_i(t)\|^2 + \sum_{j=i+1}^N \frac{N-1}{2\alpha} \mu_{ij}^2 \|\mathbf{v}_j(t)\|^2 \quad (4.23)$$

Ahora como definimos $V = \sum V_i$ tenemos:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\alpha \|\mathbf{v}_i\|^2 - \sum_{j=i+1}^N \frac{N-1}{\alpha} \mu_{ij}^2 \|\mathbf{v}_j\|^2 \right) < 0 \quad (4.24)$$

Lo que concluye la demostración. ■

Por otra parte, si no es posible asegurar la existencia de la matriz Φ que diagonalice simultáneamente todas las matrices de acoplamiento externo o de la matriz Ψ que las triangularice simultáneamente, entonces, para determinar si la red (4.2) se sincroniza, analizamos la dinámica del error linealizada (4.3) y determinamos las condiciones bajo las cuales el origen del error sea asintóticamente estable, al menos localmente.

Proponemos usar la metodología de la función de Lyapunov común sobre la ecuación de la dinámica del error linealizada, la cual es:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = (I_N \otimes Df(s(t)) + cL^k \otimes \Gamma)\boldsymbol{\eta}(t)$$

donde $\boldsymbol{\eta}(t) = [\eta_1^T, \eta_2^T, \dots, \eta_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ con $\eta_i(t) = x_i(t) - s(t)$. Proponemos usar la función de Lyapunov:

$$V = \boldsymbol{\eta}^t(t) P(t) \boldsymbol{\eta}(t) \quad (4.25)$$

Sin embargo, como hemos mostrado anteriormente, si el Jacobiano $Df(s(t))$ está acotado, podemos usar una función de Lyapunov invariante en el tiempo de la forma:

$$V = \boldsymbol{\eta}^T(t) \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}(t) \quad (4.26)$$

donde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ y cuya derivada es:

$$\dot{V} = \dot{\eta}^T(t) \mathbf{P} \eta(t) + \eta^T(t) \dot{\mathbf{P}} \eta(t) \quad (4.27)$$

Sustituyendo el valor de $\dot{\eta}(t)$ en (4.27) tenemos:

$$\dot{V} = [(I_N \otimes Df(s(t)) + cL^k \otimes \Gamma) \eta(t)]^T \mathbf{P} \eta + \eta^T(t) \mathbf{P} (I_N \otimes Df(s(t)) + cL^k \otimes \Gamma) \eta(t) \quad (4.28)$$

De lo anterior observamos que si la solución de sincronización es acotada y la ecuación (4.28) es negativa para todo tiempo y para todo valor de $k \in M$, entonces la dinámica del error es asintóticamente estable en el origen y la red se sincroniza bajo conmutación arbitraria. Por lo que obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.4. *La red dinámica conmutada (4.1) se sincroniza idénticamente si el Jacobiano $DF(s(t))$ esta acotado, existen las matrices definidas positivas \mathbf{P} , \mathbf{Q} y además una constante $d < 0$ tal que:*

$$(I_N \otimes Df(s(t)) + dI_N \otimes \Gamma)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (I_N \otimes Df(s(t)) + dI_N \otimes \Gamma) < -\mathbf{Q}$$

para todo $t \geq 0$.

Prueba: Acomodando los términos de (4.28) tenemos:

$$\dot{V} = \eta^T(t) [(I_N \otimes Df(s(t)) + cL^k \otimes \Gamma)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (I_N \otimes Df(s(t)) + cL^k \otimes \Gamma)] \eta(t)$$

La cual es negativa si

$$(I_N \otimes Df(s(t)) + cL^k \otimes \Gamma)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (I_N \otimes Df(s(t)) + cL^k \otimes \Gamma) \leq 0 \quad (4.29)$$

para todo $k \in M$ y para todo $t \geq 0$.

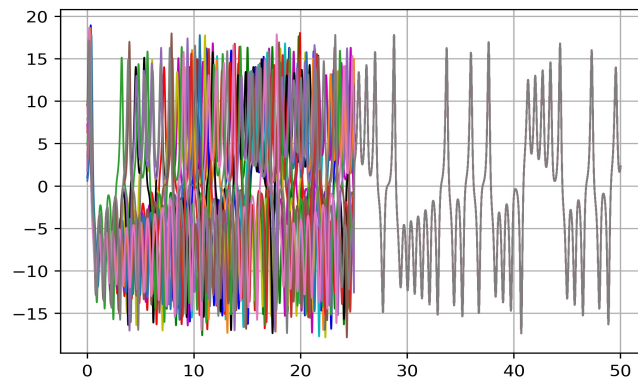
Definimos $\rho = \max_{1 \leq k \leq m} (c\lambda_2^k)$ donde λ_2^k es el eigenvalor más grande no nulo de la matriz Laplaciana L^k con $k \in M$. De manera que si:

$$(I_N \otimes Df(s(t)) + c\rho I_N \otimes \Gamma) \leq 0, \forall k \in M \text{ y } \forall t \geq 0 \quad (4.30)$$

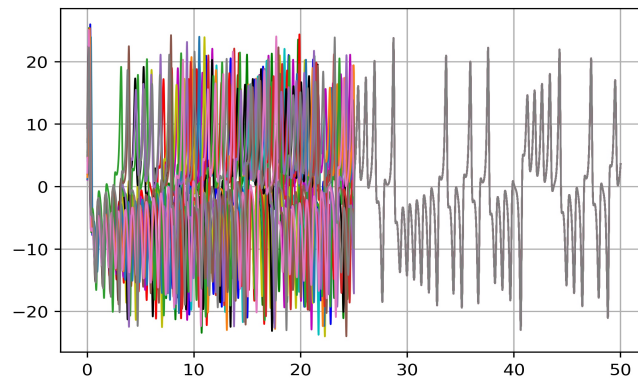
Entonces:

$$(I_N \otimes Df(s(t)) + cL^k \otimes \Gamma) \leq 0, \forall k \in M \text{ y } \forall t \geq 0 \quad (4.31)$$

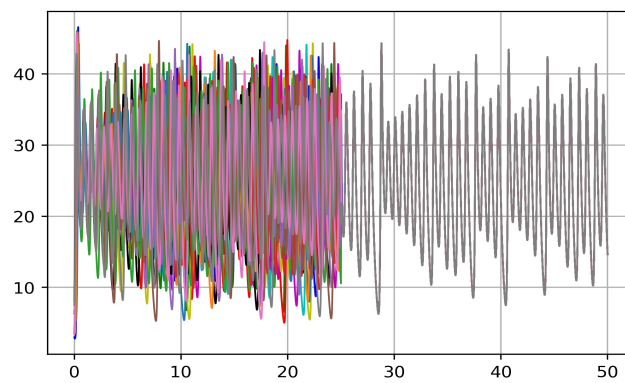
Si tomamos $d \geq c\rho$, entonces tenemos el resultado. ■



(a) Primer estado de la red (4.32)

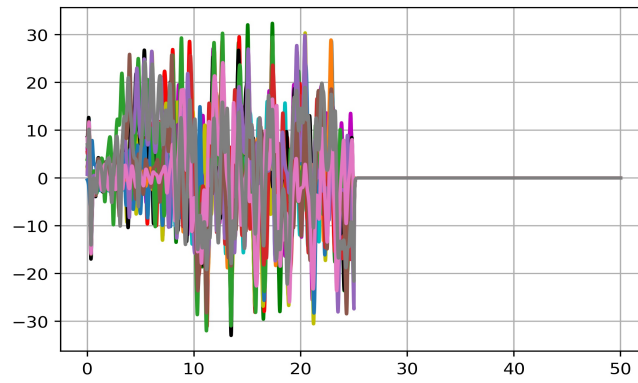


(b) Segundo estado de la red (4.32)

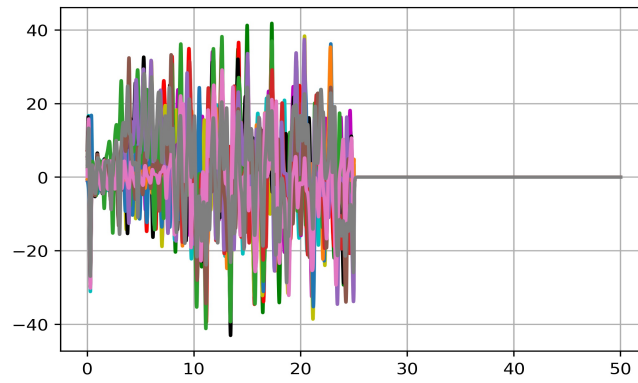


(c) Tercer estado de la red (4.32)

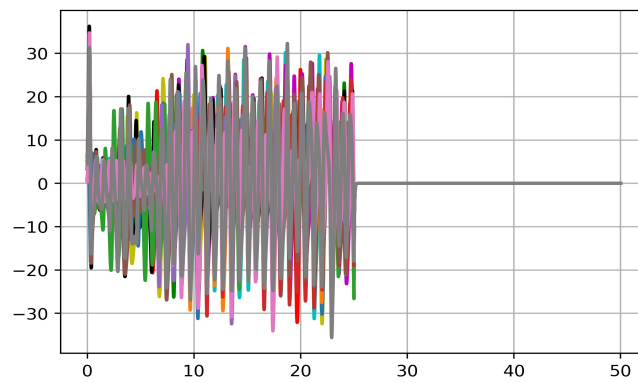
Figura 4.2: Dinámica de la red conmutada



(a) Error en el primer estado de la red (4.32)



(b) Error en el segundo estado de la red (4.32)



(c) Error en el tercer estado de la red (4.32)

Figura 4.3: Error de sincronización de la red conmutada

Finalmente presentamos el problema de control para redes dinámicas conmutadas. Se considera únicamente el caso donde existe una matriz no singular tal que diagonalice todas las matrices Laplacianas simultáneamente.

4.2. Regulación por pinning en redes dinámicas con topología conmutada

Ahora abordemos el problema de regulación de una red dinámica conmutada. El objetivo es llevar los estados de cada nodo de la red a un punto de equilibrio en común. Aplicaremos una retroalimentación lineal a un número reducido de nodos de modo que el punto de equilibrio común sea asintóticamente estable.

Primeramente consideremos una red 4.2 y aplicamos control a δ nodos con $\delta \ll N$, sin pérdida de generalidad asumamos que los nodos controlados son los primeros δ nodos de la red, de modo que la red controlada será:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}^{\sigma(t)} \Gamma x_j + u_i & i = 1, 2, \dots, \delta \\ \dot{x}_i &= f(x_i) + c \sum_{j=1}^N l_{ij}^{\sigma(t)} \Gamma x_j & i = \delta + 1, \delta + 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.33)$$

Por simplicidad usaremos control lineal por retroalimentación de estados $u_i = c\xi\Gamma(x_i - \bar{x})$ donde \bar{x} es el punto de equilibrio en común de la red y $\xi > 0$ es la ganancia de control. Queremos mostrar que es para que la red controlada se estabilice en el punto de equilibrio deseado.

Mostraremos que el problema de control es una simplificación del problema de sincronización, de manera que podemos cambiarlo a N problemas n -dimensionales invariantes en el tiempo.

El objetivo de control es que la dinámica de todos los nodos tiendan asintóticamente al punto de equilibrio cuando el tiempo tiende a infinito:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = \bar{x} \rightarrow \infty$$

de modo que el punto de equilibrio sea asintóticamente estable.

Definimos el error de control de la red como $\bar{\eta} = [\bar{\eta}_1^T, \dots, \bar{\eta}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ donde el i -ésimo error de control es $\bar{\eta}_i = x_i(t) - \bar{x}$ y entonces la dinámica del error linealizada alrededor del

punto de equilibrio \bar{x} y en forma vectorial es:

$$\dot{\eta} = (I_N \otimes Df(\bar{x}) + cB^k \otimes \Gamma)\eta, \quad k = 1, \dots, m \quad (4.34)$$

donde $B^k = L^k - \Xi$ y $\Xi = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ con $\xi_i = \xi$ si $i \leq \delta$ y $\xi_i = 0$ si $i > \delta$ y los eigenvalores de las matrices B^k son:

$$0 \leq \bar{\lambda}_1^k \leq \bar{\lambda}_2^k \leq \dots \leq \bar{\lambda}_N^k \quad (4.35)$$

Como se ha mencionado el punto de equilibrio debe ser un punto de equilibrio en común con todos los nodos, y ya que todos los nodos son idénticos, tenemos esta condición garantizada.

Supongamos que existe una matriz no singular $\bar{\Phi}$ tal que:

$$\bar{\Phi}^{-1} B^k \bar{\Phi} = \bar{\Lambda}^k = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_N^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

donde $0 \leq \bar{\lambda}_1^k \leq \dots \leq \bar{\lambda}_N^k$ son los eigenvalores de las matrices B^k .

Luego aplicando el cambio de variable $\eta = (\bar{\Phi} \otimes I_N)\bar{v}$ tenemos:

$$\dot{\bar{v}} = (I_N \otimes Df(\bar{x}) + c\bar{\Lambda}^k \otimes \Gamma)\bar{v} \quad (4.36)$$

donde cada fila de esta ecuación sería:

$$\dot{\bar{v}}_i = (Df(\bar{x}) + c\bar{\lambda}_i^k \Gamma)\bar{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.37)$$

Proponemos la función común de Lyapunov $\bar{V} = \sum_{i=1}^N \bar{V}_i$ con

$$\bar{V}_i = \bar{v}_i^T \bar{P} \bar{v}_i \quad (4.38)$$

Bajo estas definiciones y condiciones establecemos el siguiente Teorema:

Teorema 4.5. *Si se escoge ξ y δ tal que:*

$$(Df(\bar{x}) + c\bar{\lambda}_i^k \Gamma)^T \bar{P} + \bar{P} (Df(\bar{x}) + c\bar{\lambda}_i^k \Gamma) < -\bar{Q}, \quad \forall k \in M$$

donde \bar{P} y \bar{Q} son matrices positivas definidas, entonces la i -ésima ecuación de (4.37) es asintóticamente estable bajo conmutación arbitraria.

Prueba: La derivada de (4.38) es:

$$\dot{V}_i = \bar{v}_i^T [(Df(\bar{x}) + c\bar{\lambda}_i^k \Gamma)^T \bar{P} + \bar{P}(Df(\bar{x}) + c\bar{\lambda}_i^k \Gamma)] \bar{v}_i$$

Si escogemos ξ y δ tal que

$$d_i \geq c\bar{\lambda}_i^k, \forall k \in M$$

entonces (4.38) será negativa. ■

La red dinámica controlada conmutada (4.33) se regula en el punto de equilibrio si la dinámica del error de control (4.34) es asintóticamente estable en el origen, o lo que es equivalente, que las N ecuaciones de (4.37) sean asintóticamente estables. Para esto, el orden de los eigenvalores (4.35) es de utilidad para determinar la estabilidad de estas ecuaciones como lo muestra el siguiente resultado:

Teorema 4.6. *La dinámica conmutada (4.37) se regula al punto de equilibrio cero bajo conmutación arbitraria, si se escoge ξ y δ tal que:*

$$(Df(\bar{x}) + c\bar{\lambda}_1^k \Gamma)^T \bar{P} + \bar{P}(Df(\bar{x}) + c\bar{\lambda}_1^k \Gamma) < -\bar{Q}, \forall k \in M$$

donde \bar{P} y \bar{Q} son matrices positivas definidas.

Prueba: Si escogemos ξ y δ tal que

$$d_i \geq c\bar{\lambda}_1^k, \forall k \in M$$

entonces por el orden de los eigenvalores (4.35), también se satisface el Teorema 4.5 para todos los demás nodos, por tanto se satisface la desigualdad de Lyapunov para todas las topologías, de modo que el punto de equilibrio es asintóticamente estable bajo la conmutación arbitraria. ■

4.2.1. Ejemplo 4. Regulación por pinning en redes conmutadas

Consideremos la red dinámica compleja conmutada (4.33) con la ley de conmutación arbitraria en el tiempo siguiente:

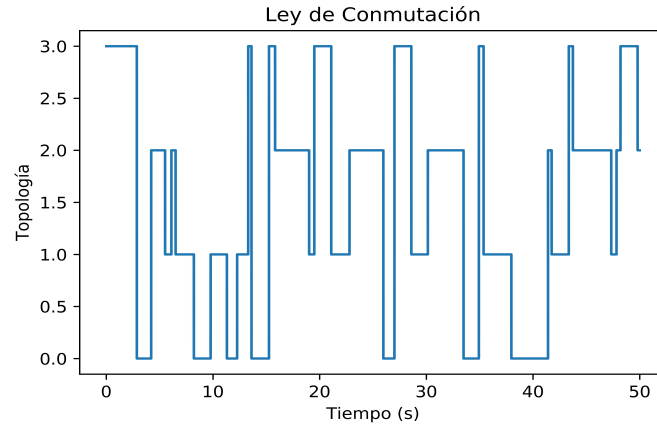
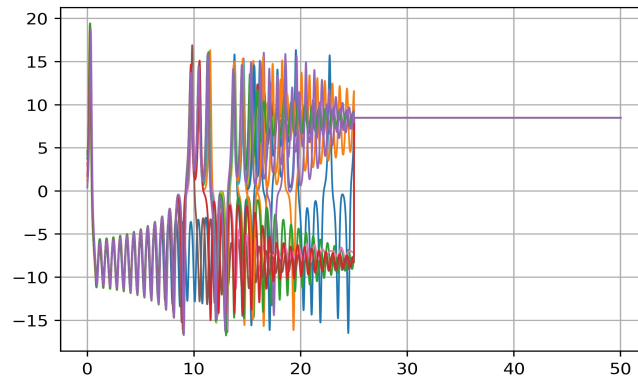
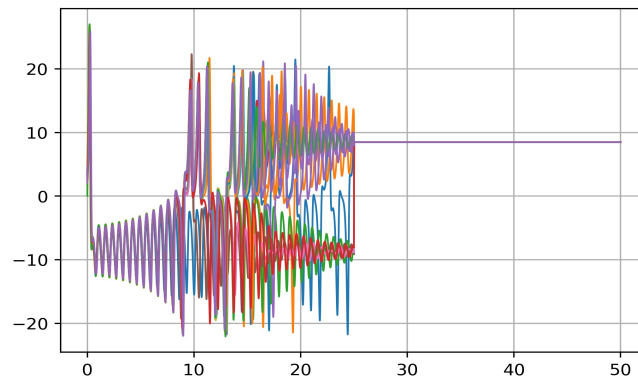


Figura 4.4: Ley de conmutación arbitraria en el tiempo

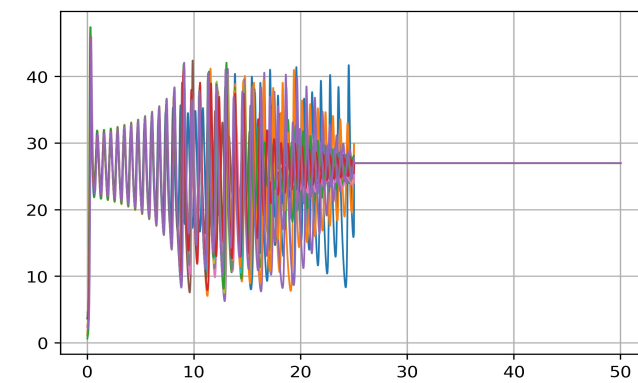
Escogimos condiciones iniciales entre $(0, 10)$ y una fuerza de acoplamiento inicial de $c = 0.1$ y una ganancia de control $\xi = 0$. En $t > 25$ los valores de ganancia de control son de $\xi = 20$ aplicado únicamente al primer nodo, $\delta = 1$, y una fuerza de acoplamiento $c = 12$ lo que satisface las condiciones del Teorema 4.6 y regula la red en el punto de equilibrio.



(a) Primer estado de la red (4.33)

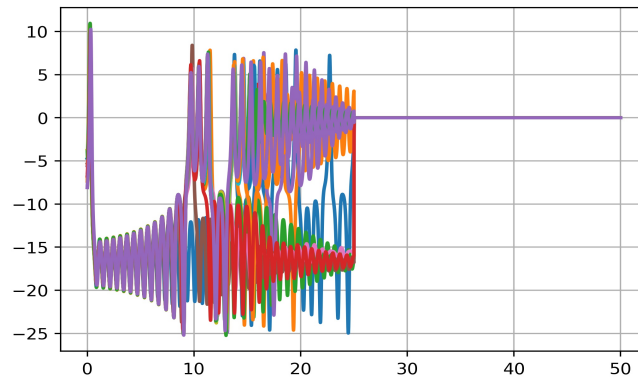


(b) Segundo estado de la red (4.33)

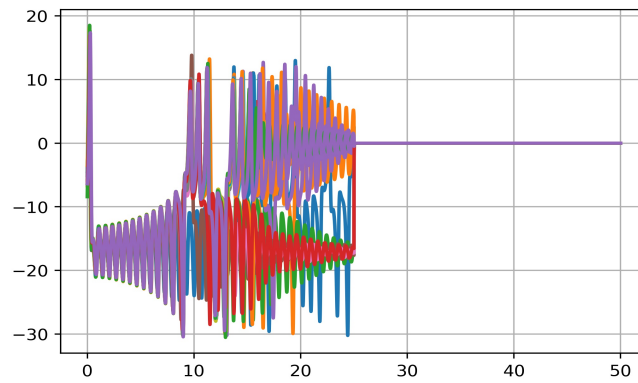


(c) Tercer estado de la red (4.33)

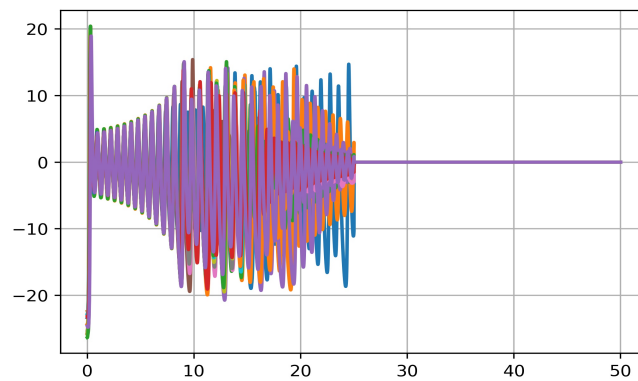
Figura 4.5: Dinámica de la red conmutada



(a) Error en el primer estado de la red (4.33)



(b) Error en el segundo estado de la red (4.33)



(c) Error en el tercer estado de la red (4.33)

Figura 4.6: Error de control de la red conmutada

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo analizamos la estabilidad de una solución de sincronización de una red dinámica compleja cuya estructura conmuta entre un número finito de topologías de la misma dimensión, difusivas, constantes y semidefinidas negativas. El cambio de topologías es definido por una ley de conmutación constante por partes y continua por la derecha, por lo que las conmutaciones son instantáneas y arbitrarias. En primer lugar analizamos la estabilidad de la solución de sincronización considerando la existencia de una matriz no singular que permita diagonalizar todas las matrices Laplacianas simultáneamente. Presentamos condiciones suficientes para garantizar la sincronización de la red bajo la conmutación arbitraria.

Dado que el solicitar que todas las matrices Laplacianas sean simultáneamente diagonalizables es una condición fuerte, se analiza el escenario cuando todas las topologías son simultáneamente triangularizables. En los dos escenarios se realizó un cambio de coordenadas de manera que se cambia de un problema Nn -dimensional a N sistemas n -dimensionales desacoplados lineales, variantes en el tiempo y conmutados. Se utilizó una función Lyapunov que es común a todas las topologías, de manera que se determina la estabilidad de la solución de sincronización bajo conmutación arbitraria. Si no es posible la diagonalización o triangularización simultánea entonces podemos usar directamente una función de Lyapunov común para determinar la estabilidad de la solución de sincronización.

En seguida abordamos el problema de regulación por pinning en la red dinámica conmutada. De manera similar al análisis de sincronización, se realiza un cambio de coordenadas asumiendo diagonalización simultánea de las topologías y obtenemos N sistemas n -dimensionales, invariantes en el tiempo y conmutados, por lo que este problema es una simplificación del problema de sincronización.

Diseñamos un control lineal por retroalimentación de estados a un número muy reducido de nodos y establecimos que si se escoge la cantidad de nodos y la ganancia adecuada

de retroalimentación el punto de equilibrio es asintóticamente estable bajo la conmutación arbitraria.

5.1. Trabajo futuro

La conmutación que se consideró fue únicamente en el conjunto de enlaces y entre topologías de la misma dimensión, sin embargo, los sistemas de la vida real pueden conmutar tanto en el conjunto de enlaces como en el de nodos, además que la dimensión puede variar, por lo que el trabajo a futuro es considerar una conmutación más abierta, inclusive el cambio en el número de nodos de la estructura de conexión.

Adicionalmente, el diseño del controlador para la red dinámica conmutada se realizó sin considerar cambios en el conjunto de nodos controlados, aunque es posible ampliar el trabajo implementando un control conmutado. Además se trabajó solamente la regulación de la dinámica, es decir, llevar los estados de la red a un punto de equilibrio, sin embargo, se puede extender el trabajo para considerar imponer un comportamiento variante en el tiempo, al mismo tiempo que se realizan conmutaciones arbitrarias considerando la extensión mencionada previamente.

Bibliografía

- [1] Strogatz, S., Exploring Complex Networks, *Nature*, Vol 410, 268-276, 2001.
- [2] Barrat, A., Barthelomy, M., Vespignani, A., **Dynamical Processes on Complex Networks**, Cambridge University Press, New York, 2008
- [3] Khalil, H. K., **Nonlinear Systems**, Prentice Hall, New Jersey, 2002
- [4] Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., Hwang, D.-U., Complex networks: Structure and Dynamics, *Physics Reports* 424 175-308, 2006.
- [5] Chen, G., Wang, X., Li, X., **Fundamentals of Complex Networks: Models, Structures and Dynamics**, Wiley, Singapore, 2015.
- [6] Newman, M. E. J., **Networks an Introduction**, Oxford University Press, New York, 2010
- [7] Dorogovtsev, S. N., **Lectures on Complex Networks**, Clarendon Press, Oxford, 2010.
- [8] Wu, C. W., Chua, L. O., Synchronization in an Array of Linearly Coupled Dynamical Systems, *IEEE Trans. Circ. Sys-I*, Vol 42, No. 8, 430-447, 1995
- [9] Albert, R., Barabasi, A.-L., Statistical Mechanics of Complex Networks, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 74, No. 1, 47-97, 2002.
- [10] Pecora, L., Carroll, T., Johnson, G., Mar, D., Fink, K. S., Synchronization Stability in Coupled Oscillator Arrays: Solution for Arbitrary Configurations, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol 10 No. 2, 273-290, 2000.
- [11] Wang, X. F., Chen, G., Synchronization in Scale Free Dynamical Networks: Robustness and Fragility, *IEEE Trans. Circ. Sys-I* Vol 49 No. 1, 54-62, 2002.
- [12] Lu, J., Yu, X., Chen, G., Cheng, D., Characterizing the Synchronizability of Small-World Dynamical Networks, *IEEE Trans. Circ. Sys-I* Vol 51 No. 4, 787-796, 2004.
- [13] Li, Z., Chen, G., Global Synchronization and Asymptotic of Complex Dynamical Networks *IEEE Trans. Circ. Sys-II* Vol. 53 No. 1, 28-33, 2006
- [14] Martínez de Castilla, I., Gago V., J., **Métodos Matemáticos para Estadística**, Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, IV ed., 2008

- [15] Wang, X., Chen, G., Pinning a Complex Control of a Scale-Free Dynamical Networks, *Physica A* 310, 521-531, 2002
- [16] Li, X., Wang, X., Chen, G., Pinning a Complex Dynamical Network to Its Equilibrium, *IEEE Trans. Circ. Sys-I* Vol 51 No. 10, 2074-2087, 2004.
- [17] Chen, T., Liu, X., Lu, W., Pinning Complex Networks by a Single Controller, *IEEE Trans. Circ. Sys-I* Vol 54 No. 6, 1317-1326, 2007.
- [18] Leng, H., Wu, Z., Impulsive Synchronization of a Network with Time-Varying Topology and Delay, *Advances in Difference Equations*, 2017:299, 2017
- [19] Liberzon, D., **Switching in Systems and Control**, Birkhäuser, Boston, 2003
- [20] Lu, W., Atay, F., Jost, J., Synchronization of Discrete-Time Dynamical Networks with Time-Varying Couplings, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 39, No. 4, 1231-1259, 2007
- [21] Lu, W., Chen, T., Synchronization of Networks with Time-Varying Couplings, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, Vol. 28, No. 4, 438-454, 2013
- [22] Liu, T., Zhao, J., Hill, D., Exponential Synchronization of Complex Delayed Dynamical Networks with Switching Topology, *Journal of LATEX Class files*, Vol. 6, No. 1, 1-11, 2007
- [23] Kim, S., Hill, D., Synchronization of a Complex Network with Switched Coupling *Proceedings of the 17th World Congress: The International Federation of Automatic Control*, 1559-1564, Seoul, Korea, 2008
- [24] Zhao, J., Hill, D., Liu, T., Synchronization of complex dynamical networks with switching topology: A switched system point of view, *Automatica*, Vol 45, 2502-2511, 2009.
- [25] Wang, L., Wang, Q., Synchronization in complex networks with switching topology, *Physics Letters A*, Vol 375, 3070-3074, 2011.
- [26] Zhao, J., Hill, D., Liu, T., Stability of dynamical networks with non-identical nodes: A multiple V-Lyapunov function method, *Automatica*, Vol 47, 2615-2625, 2011.