El siguiente capítulo fue publicado en *(2016) Tópicos Selectos de Matemáticas. Aportaciones en Matemáticas I (115-130). México: UATX.*

CAPÍTULO 1

Estabilidad de familias de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

Aguirre Hernández Baltazar[1], Campos Cantón Eric[2], Díaz González Edgar Cristian[1], Loredo Villalobos Carlos Arturo[1,2]

Departamento de Matemáticas, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, UAM-Iztapalapa, México[1],
División de Matemáticas Aplicadas, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A. C. San Luis Potosí, México[2]

RESUMEN

Para estudiar la estabilidad asintótica de familias de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales lineales, $\dot{x} = Ax$, con $A \in \mathcal{F}$, podemos analizar la localización de las raíces del polinomio característico, $p(t)$, asociado a la matriz A. En este capítulo se presentan diversos resultados para distintos tipos de familias.

1. Introducción

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{x} = Ax$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Podemos asociar a la matriz A un polinomio, $\det(A - \lambda I) = 0$ (polinomio característico asociado al sistema $\dot{x} = Ax$) cuyo conjunto de raíces (valores característicos de la matriz A) nos proporciona información cualitativa acerca del comportamiento de las soluciones del sistema. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que el polinomio característico es de la siguiente forma:

$$p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n.$$

Si todos los valores característicos de A tienen parte real negativa, entonces toda solución $x(t)$ de $\dot{x} = Ax$ tiende a cero cuando t tiende a infinito. Este tipo de estabilidad se conoce como *estabilidad asintótica*.

1.1 Polinomios Hurwitz de grado pequeño

Definición 1.1. Decimos que un polinomio de coeficientes reales es Hurwitz si todas sus raíces tienen parte real negativa, i.e., están en $\mathbb{C}^- = \{a+ib : a<0\}$.

Ejemplo 1.1.

1. $p(t) = t^2+3t+2$ es Hurwitz pues $p(t)$ = (t+2)(t+1) y $t=-2$, $t=-1$ son sus raíces.

2. $s(t) = t^3+t^2+t+1$ no es Hurwitz, ya que $s(t) = t^2(t+1)+t+1 = (t^2+1)(t+1)$ y sus raíces son $t=i$, $t=-i$ y $t=1$.

Teorema 1.1. *(Polinomio Hurwitz) El polinomio $p(t) = t+a_1$ es Hurwitz, si y sólo si, $a_1>0$.*

Teorema 1.2. *(Propiedades) El polinomio $p(t) = t^2+a_1t+a_2$ es Hurwitz, si y sólo si, $a_1>0$ y $a_2>0$.*

Ejemplo 1.2. Aplicando el Teorema 1.2, podemos decir que:

a) $p(t) = t^2+5t+7$ es Hurwitz.

b) $p(t) = t^2+2t-3$ no es Hurwitz.

Corolario 1.1.

a) *$f(t) = b_0t+b_1$ es Hurwitz, si y sólo si, b_0, b_1 son del mismo signo.*

b) *$p(t) = a_0t^2+a_1t+a_2$ es Hurwitz, si y sólo si, a_0, a_1 y a_2 son del mismo signo.*

Ejemplo 1.3. $p(t) = -2t^2-3t-2$ es Hurwitz.

1.1.1 Aplicación I

Ejemplo 1.4. (Oscilador armónico amortiguado) Considérese una masa m sujeta a un extremo de un resorte. Estiramos el resorte una cierta distancia y luego lo soltamos (ver fig. 1). El movimiento de la masa esta descrito por la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0,$$

donde $\beta > 0$ es la contante de amortiguamiento y $k > 0$ es la constante del resorte. La ecuación característica de la ecuación diferencial es

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0.$$

Cómo m, β, $k > 0$ entonces $p(\lambda)$ es Hurwitz. Luego cualquier solución $x(t)$ cumple que

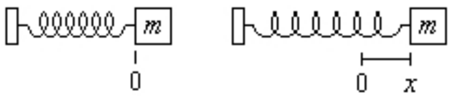

Figura 1. Oscilador armónico amortiguado.

$x(t) \to 0$ si $t \to \infty$.
Además:

1. Si λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ entonces $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$;
2. Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\alpha < 0$, entonces

$$x(t) = Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t.$$

Luego cualquier solución $x(t)$ cumple que $x(t) \to 0$ si $t \to \infty$.

1.1.2 Aplicación II

Ejemplo 1.5. (Circuitos eléctricos) Considere un circuito eléctrico donde E es el voltaje (medido en volts), R la resistencia (medida en Ohms), L la inductancia (medida en Henrios) y C la capacitancia (medida en Faradios), ver fig. 2. La variación del voltaje en un tiempo t está dada por la siguiente ecuación:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = \frac{dE}{dt}.$$

Si E es constante entonces $dE/dt = 0$. Bajo la suposición de que E es constante, la ecuación característica es

$$p(\lambda) = L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{c} = 0.$$

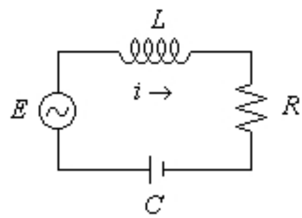

Figura 2. Circuito eléctrico.

Ya que L, R y c^{-1} son positivas, se tiene que $p(\lambda)$ es Hurwitz. Por lo tanto, podemos asegurar que $i(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Una explicación física de esto es que $i(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ debido al consumo de energía de la resistencia.

1.2 El criterio de Routh-Hurwitz

Teorema 1.3. *(Condiciones de Routh-Hurwitz) Dado un polinomio con coeficientes reales $f(t) = b_0t^n + b_1t^{n-1} + \cdots + b_{n-1}t + b_n$ definimos la matriz de Hurwitz asociada a este polinomio*

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & \cdots & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{n-2} & b_n \end{pmatrix},$$

donde $b_k = 0$ si $k > n$. Para que tal polinomio tenga todas sus raíces con parte real negativa, es necesario y suficiente que se satisfaga que $b_0\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $b_0\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0, \ldots,$ donde los $\Delta_i's$ son los menores principales de la matriz de Hurwitz. Si $b_0 = 1$ la condición simplemente dice que los menores principales deben ser positivos, i.e., $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

Ejemplo 1.6. Considérese $f(t) = t^5 + 7t^4 + 19t^3 + 25t^2 + 16t + 4$. **Solución:** Hacemos $b_0 = 1, b_1 = 7, b_2 = 19, b_3 = 25, b_4 = 16, b_5 = 4$ y construimos la matriz de Hurwitz de

f:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 7 & 25 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 25 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 19 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 25 & 4 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 7 > 0, \\
\Delta_2 &= 7(19) - 25 > 0, \\
\Delta_3 &= 25[7(19) - 25] - 7[7(16) - 4], \\
&= 2700 - 756 > 0, \\
\Delta_4 &= 16[2700] - 19[4(7(19) - 25) - 7(0)], \\
&\quad + [4(7(16) - 4) - 25(0)] > 0, \\
\Delta_5 &= 4\Delta_4 > 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.3, f es Hurwitz.

2. Familias de sistemas lineales

Consideremos el sistema $\dot{x} = Ax$, así tenemos el siguiente problema: ¿Bajo qué condiciones sobre A sus valores propios resultan con parte real negativa?

Definición 2.1. Una matriz A con la propiedad de que todos sus valores propios tienen parte real negativa se dice que es una matriz Hurwitz.

De acuerdo a la definición 2.1 y considerando al sistema $\dot{x} = Ax$, donde $A \in \mathcal{F}$, los valores de las entradas a_{ij} de la matriz A son constantes pero se desconocen sus valores exactos, solo se conocen sus límites mínimos y máximos: $\underline{a_{ij}}$ y $\overline{a_{ij}}$.

Problema 2.1. Supongamos que la matriz A pertenece a una *familia* $\mathcal{F}$, ¿bajo qué condiciones todos los elementos de la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ A = (a_{ij}) : a_{ij} \in \left[\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}} \right] \right\},$$

son matrices Hurwitz?

Una forma de determinar la estabilidad de una matriz es mediante su polinomio característico $P_A(t)$. Sin embargo, ahora los coeficientes del polinomio característico no son constantes, dependen de los posibles valores que pueda tomar el parámetro a_{ij}. Así, podemos definir distintos tipos de familias de polinomios, dependiendo de la estructura de las entradas de la matriz A y se pueden obtener diversos resultados que nos ayudan a determinar la estabilidad de éstas (ver [8]).

2.1 Bolas de polinomios estables

Denotamos por $\mathcal{P}_n$ al conjunto de polinomios de coeficientes reales de grado $\leq n$. Identificamos al polinomio $f(t) = b_0t^n + b_1t^{n-1} + \cdots + b_{n-1}t + b_n$ con el vector en $\mathbb{R}^{n+1}$: $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$. De esta manera, podemos hablar de una topología de $\mathcal{P}_n$.

Definición 2.2. Dado $P_0(t) \in \mathcal{P}_n$ definimos

$$B(P_0(t), r) = \{P(t) \in \mathcal{P}_n : ||P_0(t) - P(t)|| < r\}.$$

Podemos plantear el siguiente problema concerniente a la estabilidad de este tipo de familia.

Problema 2.2. Dado $P_0(t)$ Hurwitz, ¿existirá algún r tal que $B(P_0(t), r)$ sea una bola de polinomios Hurwitz? (ver [4]).

2.2 Polinomios tipo intervalo

Considerar la familia de polinomios $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \cdots + \delta_{n-1}s^{n-1} + \delta_n s^n$ donde los coeficientes satisfacen que $\delta_0 \in [x_0, y_0], \delta_1 \in [x_1, y_1], \ldots, \delta_n \in [x_n, y_n]$ donde cada $x_i \leq y_i$ con $i = 1, \ldots, n$. Se supone además que $0 \notin [x_n, y_n]$. Un polinomio de este tipo se conoce como polinomio intervalo.

Teorema 2.1. *(Teorema de Kharitonov) Todo polinomio de la familia $\delta(s)$ es Hurwitz, si y sólo si, los siguientes cuatro polinomios son Hurwitz:*

$$K^1(s) = x_0 + x_1 s + y_2 s^2 + y_3 s^3 + x_4 s^4 + x_5 s^5 + \cdots$$

$$K^2(s) = x_0 + y_1 s + y_2 s^2 + x_3 s^3 + x_4 s^4 + y_5 s^5 + \cdots$$

$$K^3(s) = y_0 + x_1 s + x_2 s^2 + y_3 s^3 + y_4 s^4 + x_5 s^5 + \cdots$$
$$K^4(s) = y_0 + y_1 s + x_2 s^2 + x_3 s^3 + y_4 s^4 + y_5 s^5 + \cdots$$

Ver [4], [7] y [9] para una demostración.

Ejemplo 2.1. Sea $P(t) = [1,2] + [5,6]t + [7,9]t^2 + [1,1]t^3$. En este caso:

$$\begin{aligned}
K_1(t) &= 1 + 5t + 9t^2 + t^3, \\
K_2(t) &= 1 + 6t + 9t^2 + t^3, \\
K_3(t) &= 2 + 5t + 7t^2 + t^3, \\
K_4(t) &= 2 + 6t + 7t^2 + t^3,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
&K_1(t) \in \mathcal{H} : 9(5) - 1 > 0, && K_2(t) \in \mathcal{H} : 9(6) - 1 > 0; \\
&K_3(t) \in \mathcal{H} : 7(5) - 2 > 0, && K_4(t) \in \mathcal{H} : 7(6) - 1 > 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, toda la familia es Hurwitz.

Ejemplo 2.2. Sea $P(t) = [8,12] + [15,20]t + [1,2]t^2 + [3,5]t^3 + [1,1]t^4$. En este caso:

$$\begin{aligned}
K_1(t) &= 8 + 15t + 2t^2 + 5t^3 + t^4, \\
K_2(t) &= 8 + 20t + 2t^2 + 3t^3 + t^4, \\
K_3(t) &= 12 + 15t + t^2 + 5t^3 + t^4, \\
K_4(t) &= 12 + 20t + t^2 + 3t^3 + t^4.
\end{aligned}$$

Analizando $K_1(t)$ tenemos que $5(2) - 15 = -5 < 0$ entonces $K_1(t)$ no es Hurwitz; por lo tanto, la familia no es Hurwitz.

2.3 El Teorema de las Aristas

Definición 2.3. Un polítopo en un espacio dimensional n es el casco convexo de un conjunto de puntos llamados generadores de este espacio. Es decir $U \subset \mathbb{R}^n$ es un polítopo, si U es el casco convexo de un número finito de puntos $a_1, \ldots, a_k$ en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2. *(Teorema de las aristas) Un polítopo de polinomios es Hurwitz, si y sólo si, todas sus aristas son Hurwitz estables.*

Observación 2.1. En el teorema se supone que los elementos del polítopo son del mismo grado (ver [3]).

2.4 Rayos y Conos de polinomios

Una familia de polinomios del tipo $P_0(t)+\lambda P_1(t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ se conoce como rayo de polinomios.

Problema 2.3. Dado $P_0(t)$ Hurwitz, ¿qué polinomios $P_1(t)$ cumplen que $P_0(t)+\lambda P_1(t)$ es Hurwitz $\forall \lambda \geq 0$?

Ejemplo 2.3. Considere los polinomios Hurwitz:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= t^3+6t^2+11t+6=(t+1)(t+2)(t+3), \\ P_1(t) &= 6t^2+5t+216. \end{aligned}$$

Con ellos construimos el rayo de polinomios

$$P_0(t)+\lambda P_1(t)=t^3+6t^2+11t+6+\lambda(6t^2+5t+216),$$

el cual no es Hurwitz para todo $\lambda \geq 0$. Sin embargo, tenemos que:

a) Para $\lambda \in \left[0, 2-\sqrt{2}\right)$ es Hurwitz.

b) Para $\lambda \in \left[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right]$ no es Hurwitz.

c) Para $\lambda \in \left(2+\sqrt{2}, \infty\right)$ es Hurwitz.

Problema 2.4. Dado $P_0(t)$ Hurwitz de grado n y K un cono convexo de polinomios de grado $\leq n$, ¿$P_0(t)+K$ podría ser un cono de polinomios Hurwitz?

En [8] se presenta un criterio para que p_0+K sea un conjunto de polinomios Hurwitz.

2.5 Segmentos de polinomios

Considere el segmento de polinomios

$$\lambda P_0(t) + (1-\lambda)P_1(t), \quad \lambda \in [0,1].$$

Problema 2.5. Dados $P_0(t)$ y $P_1(t)$ Hurwitz, un problema a discutir es bajo que condiciones el segmento $\lambda P_0(t) + (1-\lambda)P_1(t)$ es Hurwitz para todo $\lambda \in [0,1]$.

Ejemplo 2.4. Sean $P_0(t)$ y $P_1(t)$ polinomios Hurwitz

$$\begin{aligned} P_0(t) &= t^3 + 6t^2 + 11t + 6, \\ P_1(t) &= 6t^2 + 5t + 216. \end{aligned}$$

El segmento de polinomios es

$$\lambda P_0(t) + (1-\lambda)P_1(t) = \lambda(t^3 + 6t^2 + 11t + 6) + (1-\lambda)(6t^2 + 5t + 216),$$

el cual no es Hurwitz para todo $\lambda \geq 0$. Sin embargo, tenemos que:

a) Para $\lambda \in \left[0, \frac{5-\sqrt{2}}{7}\right)$ es Hurwitz.

b) Para $\lambda \in \left[\frac{5-\sqrt{2}}{7}, \frac{5+\sqrt{2}}{7}\right]$ no es Hurwitz.

c) Para $\lambda \in \left(\frac{5+\sqrt{2}}{7}, 1\right]$ es Hurwitz.

Criterios para la estabilidad de segmentos

La estabilidad de segmentos ha sido muy bien estudiada, los siguientes criterios son los más comunes para determinarla:

1. El Teorema de Bialas.
2. El Lema del Segmento.
3. Las Condiciones de Rantzer.

2.5.1 El Teorema de Bialas

Teorema 2.3. *Si p_0 es Hurwitz y $gr(p_0) > gr(p_1)$ entonces $P(t,\lambda) = \lambda p_0(t) + (1-\lambda)p_1(t)$ es Hurwitz para todo $\lambda \in [0,1]$, si y sólo si, la matriz $H^{-1}(p_0)H(p_1)$ no tiene valores propios en $(-\infty,0)$, donde $H^{-1}(p_0)$ y $H(p_1)$ son las matrices de Hurwitz de p_0 y p_1, respectivamente.*

Ver [2] y [5] para una demostración.

2.5.2 El Lema del Segmento

Dado un polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$, definimos

$$\begin{aligned} p^{even}(t) &= a_0 + a_2 t^2 + \cdots, \\ p^{odd}(t) &= a_1 t + a_3 t^3 + \cdots, \end{aligned}$$

entonces $p(t) = p^{even}(t) + p^{odd}(t)$ y $p(i\omega)$ puede ser escrito como

$$\begin{aligned} p(i\omega) &= p^e(\omega) + i\omega p^0(\omega), \text{ donde} \\ p^e(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \cdots, \\ p^o(\omega) &= a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \cdots. \end{aligned}$$

Lema 2.1. *(Del Segmento) Sean $p_1(t)$ y $p_2(t)$ polinomios Hurwitz de grado n con coeficientes principales del mismo signo. Entonces el segmento de polinomios $[p_1(t), p_2(t)]$ es Hurwitz, si y sólo si, no existe $\omega > 0$ que cumpla las tres condiciones siguientes:*

1) $p_1^e(\omega)p_2^o(\omega) - p_2^e(\omega)p_1^o(\omega) = 0.$

2) $p_1^e(\omega)p_2^e(\omega) \leq 0.$

3) $p_1^o(\omega)p_2^o(\omega) \leq 0.$

Ver [6] para una demostración.

2.5.3 Las Condiciones de Rantzer

Las condiciones tipo Rantzer son las siguientes: Supongamos que p_0 es un polinomio Hurwitz y que p_1 es semiestable (sus raíces tienen parte real ≤ 0), entonces el segmento de polinomios $[p_0(t), p_1(t))$ consiste de polinomios Hurwitz si se tiene una de las siguientes cuatro condiciones:

i) La diferencia $d = p_1 - p_0$ satisface

$$\frac{\partial \arg(\mathrm{d}(i\omega))}{\partial \omega} < 0, \, \omega \in \{\omega > 0 | \, \mathrm{d}(i\omega) \neq 0\}.$$

ii) Cada uno de los polinomios p_0, p_1 tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}^-$ y

$$\frac{\partial \arg(\mathrm{d}(i\omega))}{\partial \omega} < \left| \frac{\mathrm{sen}\,(2 \arg[\mathrm{d}(i\omega)])}{2\,\omega} \right|, \, \omega \in \{\omega > 0 \,|\, \mathrm{d}(i\omega) \neq 0\}.$$

iii) Cada uno de los polinomios p_0, p_1 tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}^-$ y

$$\frac{\partial \arg(\mathrm{d}(i\omega))}{\partial \omega} \leq 0, \, \omega \in \{\omega > 0 \,|\, \mathrm{d}(i\omega) \neq 0\}.$$

iv) Cada uno de los polinomios p_0, p_1 tiene al menos dos raíces en $\mathbb{C}^-$ y

$$\frac{\partial \arg(\mathrm{d}(i\omega))}{\partial \omega} \leq \left| \frac{\mathrm{sen}\,(2 \arg[\mathrm{d}(i\omega)])}{2\,\omega} \right|, \, \omega \in \{\omega > 0 \,|\, \mathrm{d}(i\omega) \neq 0\}.$$

Ver [10] para una demostración.

2.5.4 Una desigualdad matricial

Dado un polinomio $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$, definimos la matriz $E_{(n,n)} \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)}$ como

$$E_{(n,n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Teorema 2.4. *Sea $p_1 = c_1 t^n + c_2 t^{n-1} + \cdots + c_{n+1}$ un polinomio de grado n. Si los polinomios $p_0(t)$ y $p_1(t)$ son Hurwitz y el vector $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+1})^T \succeq 0$ satisface el sistema de desigualdades lineales*

$$E_{(n,n)} c \overset{\succ}{\neq} 0, \tag{2}$$

entonces $\lambda p_0(t) + (1-\lambda) p_1(t)$ es Hurwitz para todo $\lambda \in [0,1]$, Aquí el símbolo $\succeq 0 (\preceq 0)$ significa que todas las componentes de un vector dado son $\geq o (\leq 0)$ y el símbolo $\overset{\succ}{\neq}$ significa que todas las componentes de un vector dado son ≥ 0 pero hay al menos una componente > 0.

2.5.5 Caso para grado de $p_1 = n - 1$

Un caso similar se obtiene si grado$(p_1(t)) = n - 1$. En tal caso la matriz $E_{(n,n-1)} \in \mathcal{M}_{(n+1)\times n}$ esta definida por

$$E_{(n,n-1)} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & -a_4 & a_3 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

y la correspondiente desigualdad es

$$E_{(n,n-1)} c \overset{\succ}{\neq} 0. \tag{4}$$

2.5.6 Relación entre Rayos y Segmentos de Polinomios

Si $p_0(t) + k p_1(t)$ es Hurwitz para todo $k \geq 0$ entonces $\left(\frac{1}{1+k}\right) p_0(t) + \left(\frac{k}{1+k}\right) p_1(t)$ es Hurwitz para todo $k \geq 0$, de donde si p_1 es Hurwitz se tiene que la estabilidad del rayo $p_0(t) + k p_1(t)$ es equivalente a la estabilidad del segmento $[p_0(t), p_1(t)]$.

Un análisis en términos de rayos de polinomios fue hecho en [1].

2.5.7 Otras desigualdades matriciales

Para grado$(p_1(t)) = n$, $D_{(n,n)} \in \mathcal{M}_{n\times(n+1)}$ es la matriz

$$D_{(n,n)} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & -a_4 & a_3 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Para grado$(p_1(t)) = n-1$, $D_{(n,n-1)} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es la matriz

$$D_{(n,n-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Para grado$(p_1(t)) = n-2$, $D_{(n,n-2)} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}$ es la matriz

$$D_{(n,n-2)} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & -a_4 & a_3 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Reescribiendo los resultados de [1] en términos de segmentos de polinomios se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Considerar el polinomio Hurwitz $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$. Si $p_1(t)$ es Hurwitz con* grado$(p_1(t)) = n, (n-1)$ *ó* $(n-2)$ *y el vector de coeficientes c satisface el sistema de desigualdades lineales*

$$Dc \overset{\succ}{\neq} 0, \tag{8}$$

entonces el polinomio $\lambda p_0(t) + (1-\lambda)p_1(t)$ es Hurwitz para todo $\lambda \in [0,1]$; donde la matriz D esta definida por el grado de $p_1(t)$ y es alguna de las matrices $D_{(n,n)}, D_{(n,n-1)}$ ó $D_{(n,n-2)}$.

Ejemplo 2.5. Considerar el polinomio Hurwitz $p_0(t) = t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 5t + \frac{1}{2}$. El vector de coeficientes c del polinomio $p_1(t) = t^3 + 37t^2 + \frac{11}{2}t + 1$ es solución del sistema de desigualdades (2)

$$E_{(3,3)}c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 37 \\ \frac{11}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ \frac{17}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el segmento $[p_0, p_1]$ es Hurwitz. Sin embargo, c no es una solución de (8)

$$D_{(3,3)}c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 5 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 37 \\ \frac{11}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{73}{2} \\ \frac{731}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

Y tampoco se verifican las condiciones de Rantzer:
Para la diferencia $d = p_1 - p_0 = \frac{73}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ se tiene

$$\frac{\partial \arg(\mathrm{d}(i\omega))}{\partial \omega} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{73}{4}\omega^2}{\left[\frac{1}{2} - \frac{73}{2}\omega^2\right]^2 + \frac{1}{2}\omega^2} > 0$$

y

$$\frac{\operatorname{sen}(2\arg[\mathrm{d}(i\omega)])}{2\,\omega} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{73}{4}\omega^2}{\left[\frac{1}{2} - \frac{73}{2}\omega^2\right]^2 + \frac{1}{2}\omega^2}.$$

2.5.8 El Mínimo Extremo Izquierdo y el Máximo Extremo Derecho

Sea P_0 un polinomio Hurwitz. Existen segmentos de polinomios Hurwitz conteniendo a P_0, ver fig. 3, ¿Cuál es el mayor segmento? Dada la dirección P_1 considerar $P_0 + qP_1, q \in \mathbb{R}$.

Problema 2.6. ¿Cómo calcular q^+_{max} y q^-_{min}? donde $P_0 + qP_1$ es Hurwitz para todo $q \in (q^-_{min}, q^+_{max})$

Figura 3. Segmento de polinomios Hurwitz.

En particular $P_0 + q_{min}^{-} P_1$ y $P_0 + q_{max}^{+} P_1$ no son Hurwitz, donde

$$\begin{aligned} q_{max}^{+} &= \frac{1}{\lambda_{max}^{+}(-H^{-1}(P_0)H(P_1))}, \\ q_{min}^{-} &= \frac{1}{\lambda_{min}^{-}(-H^{-1}(P_0)H(P_1))}. \end{aligned} \tag{9}$$

Se considera que $grado(P_0) > grado(P_1)$.

Teorema 2.6. *(criterio del valor propio) Considere el polinomio $P_0 + qP_1$, con P_0 con coeficientes positivos y Hurwitz estable, y suponga que $grado(P_0) > grado(P_1)$. Entonces el máximo intervalo de estabilidad está descrito por $q \in (q_{min}^{-}, q_{max}^{+})$ donde q_{min}^{-} y q_{max}^{+} son dadas por (9).*

Ver [2] para una demostración.

2.6 Familias de polinomios con coeficientes de tipo polinomial

2.6.1 El principio de exclusión del cero

Teorema 2.7. *Supongamos que tenemos una familia de polinomios $f(p,t) = f_1(p) + f_2(p)t + \cdots + f_n(p)t^n$, tal que, $p \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ donde Ω es un conjunto arco-conexo. La* *familia es de grado constante y al menos hay un polinomio Hurwitz. Entonces la familia es Hurwitz, si y sólo si, $f(p, i\omega) \neq 0 \ \forall \omega \in \mathbb{R}$ y $\forall p \in \Omega$.*

Ejemplo 2.6. Sea $f(t) = t^3 + kt^2 + 2t + 3, k > 0$, evaluando en el eje imaginario:

$$f(i\omega) = (3 - k\omega^2) + i\omega(2 - \omega^2), f(i\omega) \neq 0,$$

para toda $k \in (\frac{3}{2}, \infty)$ y toda $\omega \in \mathbb{R}$. Cuando $k = 2$ obtenemos el polinomio $f_2(t) = t^3 + 2t^2 + 2t + 3$ donde $2(2) - 3 > 0$ entonces $f_2(t)$ es Hurwitz. Por el Principio de Exclusión del Cero toda la familia es Hurwitz.

2.6.2 Generalización del Teorema de Bialas

Sea $P(t,q) = P_0(t) + qP_1(t) + q^2P_2(t) + \cdots + q^mP_m(t)$ donde $P_0(t)$ es Hurwitz y grado$(P_0) >$ grado(P_i) para $i = 1, 2, \ldots, m$. Sea H_i la matriz de Hurwitz de P_i para $i = 0, 1, 2, \ldots, m$. Si

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ -H_0^{-1}H_m & -H_0^{-1}H_{m-1} & -H_0^{-1}H_{m-2} & \cdots & -H_0^{-1}H_2 & -H_0^{-1}H_1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_{min}^{-}(M) &= \text{ mínimo eigenvalor negativo de M}, \\ \lambda_{max}^{+}(M) &= \text{máximo eigenvalor positivo de M}, \\ q_{min} &= \frac{1}{\lambda_{min}^{-}(M)}, \\ q_{max} &= \frac{1}{\lambda_{max}^{+}(M)}. \end{aligned}$$

Entonces $P(t,q)$ es Hurwitz para todo $q \in (q_{min}, q_{max})$.

3. Conclusión

En este capítulo se presentaron diversos resultados que nos ayudan a determinar la estabilidad asintótica de diversas familias de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, tales como, bolas de polinomios, polinomios tipo intervalo, polítopos, segmentos, rayos y conos de polinomios, además de familias de polinomios con coeficientes de tipo polinomial.

Agradecimientos

El autor C. Loredo desea agradecer a CONACYT por el apoyo otorgado mediante la beca del programa de estancias posdoctorales nacionales.

Referencias

[1] Aguirre, B., Ibarra, C., Suárez, R. (2002). *Sufficient algebraic conditions for stability of cones of polynomials*. Systems and Control Letters, **Vol 46**, pp. 255-263.

[2] Barmish, B.R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems*. New York, N. Y.: Macmillan Publishing Co.

[3] Bartlet, A. C.,Hollot, C. V. and Huang, L. (1988). *Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges*. Mathematics of Control, Signal and Systems, **Vol. 1**, pp. 61-71.

[4] Bhattacharayya, S.P.; Chapellat, H.; and Keel, L. H. (1995). *Robust Control. The Parametric Approach*. NJ. USA: Prentice-Hall, Upper Saddle River.

[5] Bialas, S. (1985). *A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices*. Bulletin of Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, **Vol 33**, pp. 473-480.

[6] Chapellat, H.; Bhattacharyya, S. P. (1989). *An alternative proof of Kharitonov's theorem*. IEEE Trans. on Automatic Control, **Vol 34**, No. 4, pp. 448-450.

[7] Díaz González, E.C. (2010) *El Teorema de Hermite–Biehler*. México, D. F: Tesis de Maestría, UAM-Iztapalapa.

[8] Hinrichsen, D. and Kharitonov, V. L. (1995) *Stability of polynomials with conic uncertainty*. Math. Control Signal Systems **Vol. 8**, pp. 97-117.

[9] Kharitonov, V.L. (1979) *Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations*. Differential Equations, **Vol. 14**, pp. 1483 - 1485.

[10] Rantzer, A. (1992). *Stability conditions for polytopes of polynomials*. IEEE Trans. on Aut. Cont., **Vol 37**, pp. 79-89.

Correos electrónicos:
bahe@xanum.uam.mx (Baltazar Aguirre Hernández),
eric.campos@ipicyt.edu.mx (Eric Campos Cantón),
edgardazgonzlez@yahoo.com.mx (Edgar Cristian Díaz González),
calv@xanum.uam.mx (Carlos Arturo Loredo Villalobos),