

IPICYT

**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN NANOCIENCIAS Y MATERIALES

**Generalización Paramétrica de la Espiral de Cornu
en Difracción Óptica**

Tesis que presenta

Elizabeth Flores Garduño

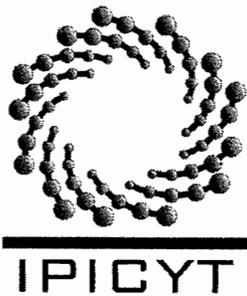
Para obtener el grado de

Maestro en Nanociencias y Materiales

Director de la Tesis:

Dr. Haret-Codratian Rosu

San Luis Potosí, S.L.P., Julio de 2016



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "**Generalización Paramétrica de la Espiral de Cornu en Difracción Óptica**" presentada para obtener el Grado de Maestra en Nanociencias y Materiales fue elaborada por **Elizabeth Flores Garduño** y aprobada el **doce de julio de dos mil dieciséis** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Materiales Avanzados del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus
Director de la tesis

Dr. José Salomé Murguía Ibarra
Miembro del Comité Tutorial

Dr. Braulio Gutiérrez Medina
Miembro del Comité Tutorial

Dr. Vicente Rodríguez González
Miembro del Comité Tutorial



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Materiales Avanzados del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Haret-Codratian Rosu.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 335207 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 019 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Nanociencias y Materiales está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 12 días del mes de julio del año 2016, se reunió a las 12:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. José Salomé Murguía Ibarra
Dr. Vicente Rodríguez González
Dr. Braulio Gutiérrez Medina
Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus

Presidente
Secretario
Sinodal
Sinodal

UASLP
IPICYT
IPICYT
IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRA EN NANOCIENCIAS Y MATERIALES

sustentó la C.

Elizabeth Flores Garduño

sobre la Tesis intitulada:

Generalización Paramétrica de la Espiral de Cornu en Difracción Óptica

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 13:15 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 12 días del mes de julio de 2016.

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



*“¿Podrías decirme, por favor, qué camino debo seguir para salir de aquí?
Esto depende en gran parte del sitio al que quieras llegar -dijo el Gato.
No me importa mucho el sitio -dijo Alicia.
Entonces tampoco importa mucho el camino que tomes -dijo el Gato.
Siempre que llegue a alguna parte -añadió Alicia como explicación.
¡Oh, siempre llegarás a alguna parte -aseguró el Gato- si caminas lo suficiente!”*

Lewis Carroll

“¿En qué se parece un cuervo a un escritorio?”

Lewis Carroll

En iyi arkadaim, kocasi, sevgilisi ve arkadasi Max

Agradecimientos

El presente trabajo de investigación fue realizado bajo la supervisión del Dr. Haret-Codratian Rosu, a quién me gustaría expresar mi más profundo agradecimientos, por hacer posible la realización de este estudio. Además de agradecer su paciencia, su tiempo y su dedicación que tuvo para que esto saliera de manera exitosa. Gracias por su apoyo, por ser parte de la columna vertebral de esta tesis.

También un agradecimiento al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica IPICYT y en particular a la División de Materiales Avanzados por haberme permitido formarme en ella, gracias a todas las personas que fueron partícipe de este proceso, ya sea de manera directa o indirecta.

A mis maestros, que compartieron conmigo sus conocimientos para convertirme en una profesionalista, por su tiempo, dedicación y pasión.

Tabla de Contenidos

| | |
|---|-----------|
| 1. Antecedentes Históricos | 2 |
| 1.1. Sucesos Históricos de la Difracción | 2 |
| 1.2. Una Breve Descripción del Desarrollo de las Rejillas de Difracción . . . | 4 |
| 1.3. Acontecimientos Históricos hacia el Efecto Talbot | 5 |
| 1.4. Difracción en la Actualidad | 6 |
| 1.4.1. Redes de Difracción | 6 |
| 1.4.2. Técnicas de Difracción | 7 |
| 1.4.3. Difracción en la Medicina | 8 |
| 2. Descripción General del Fenómeno de Difracción | 10 |
| 2.1. Principio de Huygens | 10 |
| 2.2. Teoría de la Difracción Escalar | 12 |
| 2.3. Fórmula Integral de Fresnel-Kirchhoff | 14 |
| 2.4. Difracción de Fraunhofer y Fresnel | 15 |
| 3. Patrones de Difracción de Fraunhofer | 19 |
| 3.1. Consideraciones para la Difracción de Fraunhofer | 19 |
| 3.2. Una Sola Rendija | 21 |
| 3.3. Abertura Rectangular | 24 |
| 3.4. Doble Rendija | 26 |
| 3.5. Múltiples Rendijas | 28 |
| 4. Patrones de Difracción de Fresnel | 33 |
| 4.1. Zonas de Fresnel | 33 |
| 4.2. Abertura Rectangular | 36 |
| 4.3. Espiral de Cornu | 48 |
| 4.4. Difracción de Fresnel para una Sola Rendija | 53 |
| 4.5. Difracción de Fresnel en un Borde Recto | 54 |
| 5. Solución de la Ecuación Diferencial de Tercer Orden Asociada a la Difracción de Campo Cercano | 56 |
| 5.1. Desarrollo Matemático | 56 |
| 5.2. Resultados y Análisis | 58 |
| 5.2.1. Análisis de $\text{Re}(v(z))$ | 59 |
| 5.2.2. Análisis de $\text{Im}(v(z))$ | 63 |

| | |
|--|-----------|
| 5.2.3. Espiral de Cornu | 66 |
| 6. Conclusiones | 71 |
| A. Retratos de los investigadores importantes en el estudio de la difracción | 78 |
| B. Deducción del Número de Fresnel a partir de la Fórmula de Curvatura del Frente de Onda | 81 |
| C. Diagramas de Amplitud-Fase en el Régimen de Difracción de Campo Lejano | 82 |
| D. Funciones Auxiliares Asociadas a las Integrales de Fresnel | 84 |

Índice de tablas

| | |
|--|----|
| 4.1. Tabla para diferentes valores de la longitud de arco s y sus correspondientes valores de las integrales de Fresnel. | 52 |
|--|----|

Índice de figuras

| | | |
|-------|---|----|
| 2.1. | Construcción y consideración del principio de Huygens. | 11 |
| 2.2. | Geometría de la superficie de integración del teorema integral de Kirchhoff. | 13 |
| 2.3. | Geometría para la formulación del teorema integral de Fresnel-Kirchhoff. | 14 |
| 2.4. | Diferencia cualitativa entre la región de Fresnel y la región de Fraunhofer mediante el cambio de la irradiancia (módulo cuadrado de la perturbación óptica) de acuerdo a la distancia que se encuentra el punto de observación de la abertura. | 16 |
| 2.5. | Geometría para obtener la curvatura del frente de onda para describir cuantitativamente los regímenes de difracción. | 16 |
| 3.1. | Arreglo experimental para observar la difracción de Fraunhofer. | 19 |
| 3.2. | Geometría de una rendija única. | 21 |
| 3.3. | Gráfico de irradiancia y franjas de difracción de una sola rendija en la región de Fraunhofer. | 22 |
| 3.4. | Gráfico de irradiancia y franjas de difracción de una sola rendija de ancho $b = 1 \text{ mm}$ y usando un láser rojo de He-Ne. | 23 |
| 3.5. | Gráfico de irradiancia y franjas de difracción de una sola rendija de ancho $b = 10 \text{ nm}$ y usando un láser rojo de He-Ne. | 23 |
| 3.6. | Geometría de una abertura rectangular para la difracción de Fraunhofer y en la pantalla de observación se presenta el patrón de difracción de la misma abertura. | 24 |
| 3.7. | Gráfico de irradiancia y patrón de difracción de una abertura rectangular en la región de campo lejano. | 25 |
| 3.8. | Gráfico de irradiancia y acercamiento de los picos secundarios de una abertura cuadrada. | 26 |
| 3.9. | Geometría para la difracción en campo lejano para la doble rendija. | 27 |
| 3.10. | Gráfico de irradiancia y franjas de difracción de la doble rendija en la región de campo lejano, usando los parámetros $b = 1$ y $h = 2$ | 28 |
| 3.11. | Geometría para la difracción de campo lejano mediante una rejilla de N rendijas. | 29 |
| 3.12. | Gráfico de irradiancia para $N = 3, 5, 7$ rendijas en una rejilla de difracción. | 31 |
| 3.13. | Patrón de difracción para $N = 3, 4, 5, 7$ rendijas de una rejilla de difracción para el régimen de campo lejano. [53] | 32 |
| 4.1. | Zonas de Fresnel. | 33 |

| | |
|---|----|
| 4.2. Geometría de una abertura rectangular para la difracción de Fresnel. | 37 |
| 4.3. Gráficos del coseno y seno de Fresnel. | 39 |
| 4.4. Gráficos de irradiancia de una abertura cuadrada con $a = 2$ y $b = 2$ y número de Fresnel $F = 0,1$ | 41 |
| 4.5. Gráficos de irradiancia de una abertura cuadrada con $a = 2$ y $b = 2$ y número de Fresnel $F = 1$ | 42 |
| 4.6. Gráficos de irradiancia de una abertura cuadrada con $a = 2$ y $b = 2$ y número de Fresnel $F = 10$ | 42 |
| 4.7. Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 10$ y número de Fresnel $F = 0,1$ | 43 |
| 4.8. Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 10$ y número de Fresnel $F = 1$ | 44 |
| 4.9. Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 10$ y número de Fresnel $F = 10$ | 44 |
| 4.10. Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 20$ y número de Fresnel $F = 0,1$ | 45 |
| 4.11. Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 20$ y número de Fresnel $F = 1$ | 46 |
| 4.12. Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 20$ y número de Fresnel $F = 10$ | 46 |
| 4.13. Gráficos de irradiancia de una abertura cuadrada con $a = b = 2$ y además $\xi = \eta$ para los números de Fresnel $F = 0,1$, $F = 1$ y $F = 10$ | 47 |
| 4.14. Subdivisión de un plano en bandas infinitesimales. | 48 |
| 4.15. Construcción de la espiral de Cornu. | 48 |
| 4.16. Esquema de la espiral de Cornu. | 50 |
| 4.17. La espiral de Cornu. El factor s se marca en la curva. | 51 |
| 4.18. Gráfico de irradiancia para una rejilla única con $a = 1\text{ mm}$ y $b = 50\text{ mm}$ para diferentes números de Fresnel. | 53 |
| 4.19. Geometría de la difracción en un borde recto. | 54 |
| 4.20. Gráfico de irradiancia para la difracción de campo cercano de un borde recto [66]. | 55 |
| 4.21. Difracción electrónica de Fresnel en un borde plano de un cristal de MgO [66]. | 55 |
| 5.1. Gráficos del coseno y seno de Fresnel. | 59 |
| 5.2. Comportamiento de la parte real de la solución $v(z)$ con diferentes valores negativos de μ | 60 |
| 5.3. Comportamiento de la parte real de la solución $v(z)$ con diferentes valores negativos de μ | 60 |
| 5.4. Comportamiento de la parte real de la solución $v(z)$ con diferentes valores positivos de μ | 61 |
| 5.5. Comportamiento de la parte real de la solución $v(z)$ con diferentes valores positivos de μ | 62 |
| 5.6. Comportamiento de la parte imaginaria de la solución $v(z)$ con diferentes valores negativos de μ | 63 |

| | |
|---|----|
| 5.7. Comportamiento de la parte imaginaria de la solución $v(z)$ con diferentes valores negativos de μ | 64 |
| 5.8. Comportamiento de la parte imaginaria de la solución $v(z)$ con diferentes valores positivos de μ | 65 |
| 5.9. Comportamiento de la parte imaginaria de la solución $v(z)$ con diferentes valores positivos de μ | 65 |
| 5.10. Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores negativos de μ . | 66 |
| 5.11. Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores negativos de μ . | 67 |
| 5.12. Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores negativos de μ . | 67 |
| 5.13. Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores negativos de μ . | 68 |
| 5.14. Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores positivos de μ . | 68 |
| 5.15. Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores positivos de μ . | 69 |
| 5.16. Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores positivos de μ . | 69 |
| | |
| A.1. De la óptica de Euclides a las ecuaciones de Maxwell. | 79 |
| A.2. Pioneros en la fabricación de las rejillas de difracción. | 80 |
| A.3. Los fundadores del efecto Talbot. | 80 |
| | |
| C.1. Diagrama de los fasores para $N = 3$. U_{T_0} representa la amplitud de la perturbación óptica [69]. | 83 |
| C.2. Gráfico de irradiancia y valores para algunos ángulos en radianes por el método de los fasores para tres rendijas. | 83 |
| | |
| D.1. Funciones auxiliares $f(z)$ y $g(z)$ asociadas a las integrales de Fresnel. | 84 |
| D.2. Comparación entre las integrales coseno y seno de Fresnel y las asociadas con las funciones auxiliares $f(z)$ y $g(z)$ | 85 |

Resumen

El objetivo general de este estudio fué realizar una revisión matemática detallada de las formulaciones básicas del fenómeno de difracción óptica.

Es por ello que en el Capítulo 1 se presenta una descripción de diferentes sucesos en el estudio del fenómeno de difracción óptica. Además de dar una breve descripción de como se relaciona el fenómeno de difracción en diferentes áreas de aplicación como en las rejillas de difracción y medicina.

En el Capítulo 2 se proporcionan las bases de la teoría de la difracción escalar en la que se presenta la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff que es la se utiliza para la realización del análisis matemático de las diferentes rendijas y aberturas resentadas, tanto para el régimen de difracción de campo lejano como el régimen de difracción de campo cercano.

En el Capítulo 3 se analiza las bases de la difracción para el régimen de campo lejano o difracción de Fraunhofer para una sola rendija, la abertura rectangular, la doble rendija y para múltiples rendijas.

Posteriormente en el Capítulo 4, se analiza el régimen de difracción de campo cercano para el caso de una rendija rectangular en el que se introduce una forma general del número de Fresnel en los límites de integración de las integrales de Fresnel que son soluciones de estas aberturas. Realizando un análisis sistemático mediante gráficos de irradiancia para diferentes números de Fresnel y variando el tamaño de las aberturas.

En el Capítulo 5, se obtiene una solución general de la ecuación diferencial lineal ordinaria de tercer orden que satisfacen las integrales de Fresnel como soluciones particulares, más una función error suplementaria que está afectada por un parámetro de deformación. Donde además se estudia el comportamiento de las espirales de Cornu debido al parámetro de deformación introducido por la solución general obtenida anteriormente.

Finalmente en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones y aportaciones obtenidas en esta investigación.

Palabras Clave: Difracción de Fresnel, ecuación diferencial de tercer orden asociada a la difracción, número de Fresnel, integrales de Fresnel, espiral de Cornu

Capítulo 1

Antecedentes Históricos

En este primer capítulo se presenta una breve descripción de las contribuciones históricas acerca de la difracción de la luz desde tres puntos de vista:

- *Sucesos Históricos de la Difracción*
- *Una Breve Descripción de las Rejillas de Difracción*
- *Acontecimientos Históricos hacia el Efecto Talbot*

1.1. Sucesos Históricos de la Difracción

En la Grecia antigua fué el matemático y geómetra **Euclides de Alejandría** (325 a.C - 265 a.C.) [1], que en su tratado *Óptica* [2], realizó un estudio de la luz elaborando postulados importantes dentro de la óptica geométrica, tan cerca de la geometría que fue estudio predilecto de los griegos antiguos, relativos a la naturaleza de la luz y afirmando que la luz viaja en línea recta, además de describir las leyes matemáticas para describir el fenómeno de la *reflexión* [3].

Pasando al período helenístico, para el estudio de la luz, se destaca el ingeniero y matemático **Herón de Alejandría** (10 a.C - 75 d.C) [4], autor de un libro sobre óptica llamado *Catóptrica*, en el cuál indica que la luz recorre el camino más corto de todos los posibles entre dos puntos [3,4].

Después de 1000 años, destacó el físico persa **Al-Haitham** (965-1039), conocido en occidente como **Alhazen**, para algunos considerado el *padre de la óptica* [5]. Él suponía que la luz es un flujo de pequeñas partículas que se reflejan sobre los objetos y viajan en línea recta hasta el ojo [3]. Realizó los primeros estudios de la dispersión de la luz por la descomposición de sus colores. Fue el primero en analizar correctamente los principios de la cámara oscura que consiste en un cuarto o cajón oscuro que tiene en una de sus paredes un pequeño orificio, en la pared opuesta se forma una imagen invertida de los objetos exteriores; éste aparato es el antecesor de la moderna cámara fotográfica [5].

A través de los años, surgieron diferentes avances en el campo de la óptica, pero es de especial interés el año de 1648 cuando **Francesco Maria Grimaldi** (1618-1663) matemático y físico italiano [6], realizó un experimento en el que dejó penetrar la luz del Sol en un cuarto oscuro a través de un pequeño orificio en una cartulina, descubriendo que la luz proyectaba una mancha de mayor tamaño que la esperada si la propagación de la luz fuera rectilínea. En algunos otros experimentos observó que la orilla de la sombra en lugar de estar bien definida, mostraba algunas franjas claras y oscuras. Estos fenómenos los atribuyó debido a la naturaleza ondulatoria de la luz, a la que Grimaldi le dió el nombre de *diffractio* [7]. En 1665, publicó sus observaciones en *Physicomathesis de lumine, coloribus, et iride, aliisque annexis*. [6]

En 1678, el matemático, astrónomo y físico holandés **Christian Huygens** (1629-1695) [8], postuló que la luz era de naturaleza ondulatoria [7], partiendo del concepto de que cada punto luminoso de un frente de ondas puede considerarse un nuevo frente de ondas, a esta construcción se le conoce como *Principio de Huygens*. Con base en esta teoría presentó de forma cualitativa los fenómenos de reflexión, refracción y doble refracción de la luz en su obra *Traité de la lumière* [9].

Posteriormente **Sir Isaac Newton** (1642-1727), matemático y físico inglés [10], a partir de 1664 estudia diferentes problemas relacionados con la óptica y el comportamiento de la naturaleza de la luz [11]. Entre 1670 y 1672, Newton mediante varios experimentos en un cuarto oscuro y valiéndose de una lámpara y un prisma, demostró que la luz blanca al pasar a través del mismo, ésta se descompone en una banda de colores (rojo, naranja, amarillo, verde, cian, azul y violeta) como en el arcoiris. Consecuencia de este estudio y aunado a sus conocimientos en telescopios, concluye que cualquier telescopio refractor sufrirá algún tipo de aberración conocida como aberración cromática, y para evitar este problema inventó un telescopio reflector [10, 12]. En 1704, escribió su obra *Optiks*, en la que exponía sus estudios de reflexión, refracción y dispersión de la luz, y además explica la naturaleza corpuscular de la misma la cual se propaga en línea recta y no por medio de ondas. Esta teoría fué severamente criticada en gran parte por Hooke y Huygens quienes sostenían ideas diferentes, desacreditándola totalmente. Aunque posteriormente gracias a los trabajos de Max Planck (1858-1947) y Albert Einstein (1879-1955) se concluyó la naturaleza dual de la luz, siendo ésta la base de la mecánica cuántica [11-13].

En 1801 en Inglaterra **Thomas Young** (1773-1829), médico de profesión y arqueólogo de gran éxito [14], presentó en la Royal Society su investigación *Sobre la Teoría de la Luz y los Colores* [15], en el que describió algunos experimentos, entre los más importantes era el de la doble rendija, que muestra que la luz al penetrar por una doble rendija produce un patrón de interferencia que se registra en una pantalla de observación idéntico al que produciría cualquier otra onda. En consecuencia, dice Young, la luz se comporta como una onda y no como una partícula [15]. Con este experimento Young trató de hacer resurgir la teoría ondulatoria, que ya casi se había olvidado para entonces, y con lo que demostró la existencia de la interferencia de la luz [7].

El establecimiento definitivo de una teoría ondulatoria transversal de la luz más formal se obtuvo alrededor de 1823 [7] gracias a **Augustín Jean Fresnel** (1778-1827), físico francés que contribuyó a establecer la base matemática y conceptual de la teoría ondulatoria de la luz [16], muestra que la difracción puede ser explicada aplicando la construcción de Huygens. Posteriormente en 1883 **Gustav Kirchhoff** (1824-1887) extendió los resultados teóricos de Fresnel a un formalismo que se utiliza hoy en día [7].

En 1864, el físico escocés **James Clerk Maxwell** (1831-1879) [17], se da cuenta de la relación que existe entre la electricidad, el magnetismo y la luz desarrollando la formulación matemática del campo electromagnético que se concreta en las famosas ocho ecuaciones de Maxwell [3]. Maxwell tuvo tanto éxito con su teoría que pudo explicar cualitativa y cuantitativamente todos los fenómenos ópticos y electromagnéticos conocidos hasta entonces [7].

1.2. Una Breve Descripción del Desarrollo de las Rejillas de Difracción

Las rejillas de difracción han sido uno de los más valiosos instrumentos en la historia de la ciencia y la tecnología. Por un lado, nos permiten estudiar los cuerpos celestes, y por otro lado, ha sido una herramienta crucial en el estudio de estructuras atómicas y moleculares [18].

Las rejillas de difracción surgieron en el siglo dieciocho creadas por el astrónomo americano **David Rittenhouse** (1732-1796) en 1785 [18], quién construyó rejillas de difracción planas usando finos alambres a través de un marco con una de estas rejillas observó seis ordenes de espectros, obteniendo buenas aproximaciones para el desplazamiento angular y la ley que rige estos desplazamientos [19]. También esta simple rejilla fue suficiente para demostrar el efecto de la difracción de la luz [20].

Pero no fue hasta 1813 que el físico alemán **Joseph von Fraunhofer** (1787-1826) formuló las primeras reglas de ingeniería para crear rejillas derivando las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dispersivo de las rejillas de difracción [18]. La perseverancia de Fraunhofer resultó en rejillas de suficiente calidad que le permitieron medir líneas de absorción del espectro solar, ahora conocidas como líneas de Fraunhofer [7].

En 1850, **Friedrich Adolph Nobert** (1806-1881), un fabricante de instrumentos, empezó a suministrar a los científicos con rejillas de calidad superior a las de Fraunhofer [21]. Alrededor de 1870, el escenario del desarrollo de las rejillas regresó a América, donde **Lewis Morris Rutherfurd** (1816-1892) [22], un abogado de Nueva York con un ávido interés en la astronomía, comenzó a interesarse en las rejillas. En 1862, Rutherfurd aprendió a elaborar rejillas en aleaciones metálicas de cobre y estaño que fueron muy superiores a las que Nobert había hecho. Rutherfurd desarrollo rejillas más finas en comparación con los prismas de la época para el uso en los análisis espectroscópicos. Pero debido a su dedicación de medio tiempo, sólo hizo unas pocas rejillas, así que su uso fue muy limitado [20].

Entre los personajes más destacados en la creación de las rejillas de difracción fué **Henry Augustus Rowland** (1848-1901) profesor de física, diseño e implemento una serie de reglas de ingeniería [20], cada una mecánicamente superior a su predecesora, incorporando ideas avanzadas de control de temperatura. Con esas ideas de ingeniería, Rowland fue capaz de producir rejillas del tamaño de 7.5 pulgadas y con ello mejorando la resolución de los diseños experimentales. La mayor parte de las rejillas se usaron esencialmente para suministrar a la comunidad científica durante casi 50 años [23].

1.3. Acontecimientos Históricos hacia el Efecto Talbot

En 1832, después de haber sido elegido como miembro de la Royal Society, el matemático inglés **Henry Fox Talbot** (1800-1877) [24, 25] hizo investigaciones para hacer que las imágenes fueran más duraderas en un pedazo de papel. De estos experimentos surgió su fama, llegando a ser reconocido como uno de los pioneros de la fotografía debido a su técnica del calotipo.

Mediante un diseño experimental que consiste en hacer incidir un haz de luz a través de una lente de aumento y después éste se dispersa mediante un patrón periódico, Talbot se dió cuenta que la imagen de la rejilla entraba en foco a una cierta distancia a la que se le conoce como *distancia Talbot* (z_T) [24, 26]. Y a éste fenómeno es conocido como *efecto Talbot*.

Hoy en día este singular fenómeno se le conoce como **Efecto Talbot**. El diseño experimental es muy sencillo y consta en incidir un haz de luz a través de una lente de aumento (que se usa para una mejor observación del fenómeno) y después se dispersa mediante un patrón periódico (rejilla de difracción). Talbot se dió cuenta que la imagen de la rejilla entraba en foco a una cierta distancia a la que se le conoce como **distancia Talbot** (z_T) [24, 26].

Talbot, publicó los resultados de algunos de sus observaciones en 1836, pero no continuó desarrollando el tema, dedicó todo su tiempo e investigación al área de la fotografía.

Así mismo el efecto Talbot fue olvidado por 45 años, hasta que fue retomado por **Lord Rayleigh** (1842-1919) [27] en 1881. Rayleigh explicó la naturaleza del fenómeno como consecuencia de la difracción de Fresnel, y demostró que la **distancia Talbot** (z_T) esta dada por: $z_T = \frac{a^2}{\lambda}$, donde a es el período de la rejilla y λ es la longitud de onda de la luz incidente [26].

1.4. Difracción en la Actualidad

La difracción por ser un fenómeno característico de cualquier tipo de ondas, desde ondas longitudinales como las ondas sonoras o acústicas como el sonido hasta las ondas transversales como las ondas electromagnéticas como la luz, se hace presente en diferentes áreas de aplicación mencionando algunas como las redes o rejillas de difracción, difracción en rayos X, de electrones y neutrones, en el funcionamiento y generación de imágenes en el ojo humano y en el campo de la medicina como en la microscopia y la tomografía, por mencionar algunas.

1.4.1. Redes de Difracción

Una rejilla de difracción es un dispositivo óptico que consiste no solamente de una sino de varias aberturas. Por ejemplo, la llamada máquina de Rowland usaba una punta de diamante fino para trazar o grabar en el vidrio de la rejilla con alrededor de 15,000 líneas por pulgada. Actualmente las rejillas de difracción tienen alrededor de 100,000 líneas por pulgada. Las rendijas en una rejilla de difracción no son simplemente orificios sino que pueden tener otras geometrías; y lo más interesante que se observa de ellas es cuando estas redes son iluminadas por un haz de luz monocromático ya que en la pantalla de observación se produce un espectro con una serie de máximos de difracción. [28, 29]

Ahora si se incide un haz de luz policromática, cada una de estas aberturas difracta el haz de luz, y estas ondas difractadas experimentan una interferencia constructiva que a su vez estos patrones de interferencia constructiva hacen posible observar las componentes del espectro de forma separada, permitiendo observar y analizar las características de la estructura de los átomos y las moléculas de la composición química de estrellas y/o diferentes materiales. Siendo esta la aplicación más importante de las rejillas de difracción. [28, 29]

1.4.2. Técnicas de Difracción

Las técnicas de difracción en el conocimiento de los materiales generan información indirecta sobre la estructura interna del material mediante los patrones de difracción que producen, los cuáles proporcionan características cristalinas tales como tipo de red, tamaño o parámetro de red, posición o distribución de los átomos.

La aplicación de la difracción al estudio de materiales implica longitudes de onda de las radiaciones electromagnéticas utilizadas del orden de $0,1 \text{ nm}$ ya que corresponde con las magnitudes existentes, tales como parámetros de red o distancias entre planos en las redes cristalinas y permiten que la radiación electromagnética pueda difractarse en el interior del cristal y dar lugar al fenómeno de difracción. En este orden de magnitud se encuentran los rayos X, electrones y neutrones.

La condición necesaria para que las ondas difractadas estén en fase, es que la diferencia de recorrido entre ellas sea múltiplo de la longitud de onda de la radiación, conocida como la *Ley de Bragg*

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (1.1)$$

donde d es la distancia entre planos, θ es el ángulo de difracción, n es el orden de difracción y λ es la longitud de onda. A partir de la ley de Bragg se deduce la distancia entre planos y con ello el parámetro de red, el radio atómico, así como otras características del material [30].

Difracción de rayos X

Los rayos X son ondas de luz con longitudes de onda corta que están entre 10 a 0.1 nm , correspondiendo a frecuencias en el rango de 30 a 30000 PHz , es decir de 50 a 5000 veces la frecuencia de la luz visible [31]. Cuando se irradia un material sólido cristalino, estos se difractan con los átomos en el cristal. Pero debido a que la característica de un cristal es tener los átomos igualmente espaciados, es posible usar los patrones de difracción producidos para determinar las posiciones y las distancias entre átomos. [32]

Existen tres diferentes métodos de difracción de rayos X utilizados, como lo son: El método de Laue, el método de movimiento y el método de polvos, pero en todos los casos el resultado es un patrón de difracción cuyo análisis e interpretación requiere de una base de datos de patrones de referencia, clasificados según la línea más intensa para el valor dado de d . [30]

Mediante la difracción de rayos X también es posible estudiar distintos aspectos de los materiales, tales como dilatación térmica, naturaleza de las soluciones sólidas, fases de una aleación, ablandamiento, endurecimiento, tensiones en los granos, etc. [30]

Difracción de electrones

Es posible realizar diagramas de difracción con electrones mediante la generación de los mismos desde una fuente de electrones y su posterior aceleración al aplicar una diferencia de potencial determinada. Su longitud de onda viene dada por la diferencia del potencial aplicado, lo que permite controlar la energía del haz.

La técnica de difracción de electrones se aplica a muestras para el estudio de estructuras, que deben ser películas muy finas o muestras diluidas, como son los gases. La difracción de electrones es diferente a la de rayos X y a la de neutrones, ya que no se limita solamente al estudio de la geometría de las moléculas en los cristales, sino que lo hace también para los gases [30].

En otras aplicaciones, la difracción de electrones permite el análisis de superficies e investigación de películas originadas por la corrosión [30].

Difracción de neutrones

Dado que los neutrones presentan longitudes de onda próximas a $0,1 \text{ nm}$ deben de disponer de velocidades muy elevadas. Para ello se necesitan fuentes capaces de producir neutrones con ese nivel de velocidades, lo que se consigue en los reactores nucleares.

Este tipo de difracción presenta la ventaja, frente a los rayos X, de detectar con excelente precisión la posición de los átomos ligeros como son el hidrógeno y el deuterio. Además permite obtener información sobre las características magnéticas de los sólidos [30].

1.4.3. Difracción en la Medicina

Difracción en el ojo humano

En ingeniería óptica es frecuente evaluar la calidad de imagen de un sistema óptico mediante el cálculo de las desviaciones que sufren rayos paralelos con respecto a las trayectorias ideales. En un sistema óptico perfecto, todos los rayos que entran por la pupila inciden en el mismo punto en el plano imagen, que en el caso del ojo, se trataría de la retina.

Un sistema óptico perfecto transforma un frente de onda plano en un frente de onda esférico, que converge en la imagen de un punto limitada por difracción. Un sistema óptico con aberraciones distorsiona el frente de onda con respecto al frente de onda esférico.

Para un ojo perfecto, esto es sin aberraciones, y por aberración de onda se entiende la diferencia entre el frente de onda distorsionado y el frente de onda ideal. El error cuadrático medio del frente de onda (RMS) constituye una métrica global de calidad óptica del ojo. La aberración de onda se suele describir como expansión en polinomios

de Zernike. Los coeficientes de Zernike de orden inferior remiten a errores de refracción, los coeficientes de primer orden son equivalentes a los efectos de dispersión de un prisma y los de segundo representan un desenfoque que caracteriza a la miopía, hipermetropía y astigmatismo. [33]

Microscopía óptica

El microscopio es uno de los instrumentos de mayor utilidad en medicina, y es fundamental en la patología. Una amplificación mayor de mil veces, permite el estudio de células (citología) y de tejidos (histología). La amplificación del microscopio de luz se puede variar, cambiando las lentes que lo conforman, sin embargo, la amplificación está limitada por la longitud de onda de la luz que se utiliza, en este caso el rango de la luz visible que abarca de los 400 a los 700 nm limita al microscopio para la resolución de objetos de hasta $0.2 \mu m$. Objetos menores a esta resolución no se pueden distinguir, pero la mayor parte de las células tienen dimensiones de entre $0.2 \mu m$ hasta $300 \mu m$.

Si colocamos un conjunto de células en un microscopio para ser observadas, lo más seguro es que no se pueda observar algo a menos que se pinten con una tinta especial, de otra manera son incoloras en su mayoría.

El microscopio de contraste hace uso del hecho de que la luz se refracta de manera diferente al pasar por las distintas partes que componen la muestra en estudio. Este haz que pasa a través de la muestra se combina con otro haz (de referencia) que no pasa a través de la muestra, produciendo zonas claras y oscuras debido a la interferencia de la luz, y tiene la ventaja de que no requiere que la muestra se entinte. [34]

Tomografía de difracción

La tomografía es una reconstrucción tridimensional de un objeto a partir de imágenes tomadas a diferentes ángulos. Cada imagen que se crea en un proceso de tomografía muestra los órganos, los huesos y otros tejidos, y se usa extensamente para diagnosticar enfermedades y padecimientos del sistema circulatorio, enfermedades inflamatorias y lesiones en el esqueleto.

La incorporación explícita de la naturaleza ondulatoria de la luz influye en el mejoramiento de la reconstrucción de la distribución del índice de refracción de los objetos.

Por ejemplo, el tejido orgánico no afecta a la dirección de propagación de los rayos X, por tanto, la aproximación de la propagación de la luz en línea recta para la tomografía computacional es válida. Sin embargo, los pequeños cambios del índice de refracción dentro de las células conducen a la difracción de la luz visible, lo que requiere un modelo más general. La tomografía de difracción considera la naturaleza de propagación de las ondas y se puede aplicar a un conjunto de datos que se obtienen con longitudes de onda grandes, siendo lo ideal para resolver el problema del índice de refracción en las estructuras subcelulares utilizando el espectro de la luz visible [35].

Capítulo 2

Descripción General del Fenómeno de Difracción

Si un objeto opaco es colocado entre una fuente de luz y una pantalla, en esta se observa que la sombra que emite el objeto esta lejos de una nitidez perfecta como lo predice la óptica geométrica. Una observación cerca de los bordes de la sombra revela que existen zonas de luz y zonas de oscuridad, que siguen la geometría del objeto. También este fenómeno se puede observar cuando la luz pasa a través de una pequeña abertura conocida como “pinhole” o una rendija angosta, como en el experimento de Young. El nombre que se le dió a este fenómeno de formación de franjas en estas observaciones fue de *Difracción*. [36]

En este capítulo se consideran algunos de los principios de la *Teoría de Difracción Escalar*. Notese que la teoría discutida aquí es suficientemente general para ser aplicada en otros campos, como las ondas acústicas y la propagación de ondas de radio [37], pero la principal aplicación para los capítulos subsecuentes será en la rama de la física óptica.

2.1. Principio de Huygens

Para explicar el fenómeno de difracción, Christian Huygens propuso una construcción geométrica en la cuál se considera que:

Cada punto de un frente de onda, actúa como una onda esférica secundaria que se esparce en todas direcciones, y la envolvente de todas estas ondas secundarias es un nuevo frente de onda. [38]

Para verificar como el principio de Huygens explica el fenómeno de difracción, considere un conjunto de frentes de ondas planas que se aproximan a un obstáculo desde la izquierda, y este obstáculo contiene una abertura que es menor a la longitud de onda de la misma onda. En todos los puntos excepto en la abertura la onda será reflejada o absorbida por el obstáculo, pero en la abertura será libre de producir una perturbación óptica. [39]

Después de pasar por la abertura, se suman las ondas secundarias produciendo un nuevo frente de onda que coincide con la envolvente de dichas ondas secundarias. Esta suma es tal que en un punto sobre su envolvente se cancelan entre sí los efectos laterales quedando sólo los que tienen la dirección de propagación de la onda [38].

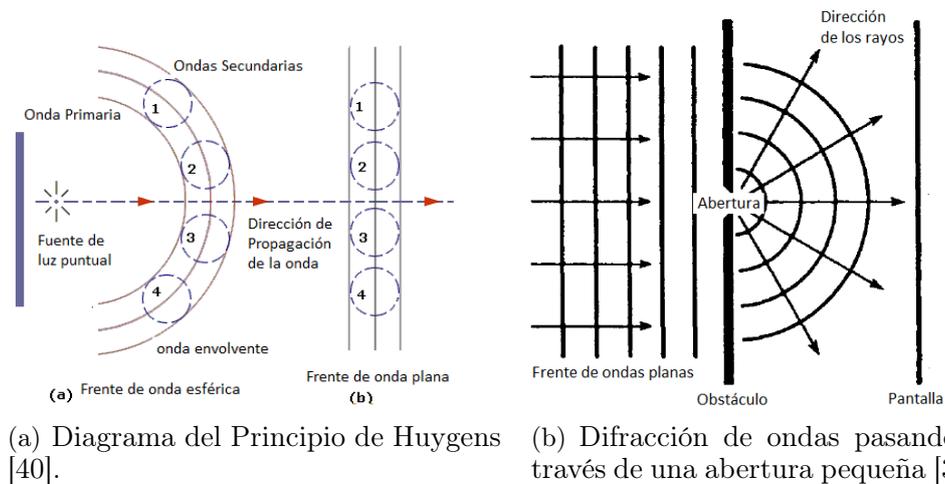


FIGURA 2.1: Construcción y consideración del principio de Huygens.

Después de un siglo de que Huygens propuso su construcción fué modificada por Fresnel suponiendo además que los frentes de onda interferían unos con otros según las leyes de la interferencia. Esto es, en cualquier punto del espacio se deben tomar en cuenta la amplitud y la fase de las perturbaciones de cada frente de onda secundario [41]. A esta nueva construcción se le conoce como el *Principio de Huygens-Fresnel*.

Así se pueden explicar las intensidades sobre la pantalla en que se observa la difracción, incluyendo la presencia de franjas. Sin embargo, esta teoría tiene el defecto de no poder explicar por qué las ondas secundarias se propagan en la dirección de la onda primaria y no hacia atrás [38, 41]. Esta dificultad fue resuelta por Fresnel al demostrar matemáticamente que las ondas en retroceso tienen energía nula y, por tanto, así se explica que las ondas elementales no se propaguen hacia atrás.

2.2. Teoría de la Difracción Escalar

A partir de la ecuación de Helmholtz [42]

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (2.1)$$

donde φ representa una perturbación óptica en el espacio complejo. Y como es bien sabido la ecuación de Helmholtz es una ecuación de onda que nos sirve para caracterizar el movimiento de una perturbación óptica en un medio.

Para resolver la ecuación (2.1), se usa el segundo teorema de Green [43], considerando que U, V son dos funciones escalares, entonces

$$\int \int_S (V \nabla U - U \nabla V) \cdot dS = \int \int \int_V (V \nabla^2 U - U \nabla^2 V) dW \quad (2.2)$$

donde ∇f representa el gradiente de la función f , dS es el diferencial de área y dW es un diferencial de volumen.

Si en particular U, V son funciones de onda, deben satisfacer la ecuación de onda [44]

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} . \quad (2.4)$$

Donde U y V son soluciones de la ecuación de Helmholtz [42]

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla^2 V + k^2 V = 0 , \quad (2.6)$$

entonces inmediatamente se sigue que:

$$\int \int_S (V \nabla U - U \nabla V) \cdot dS = 0 \quad (2.7)$$

siendo $U = \varphi$, una perturbación óptica escalar no específica [42]. Con $V = V_0 \frac{e^{i(kr + \omega t)}}{r}$ una función de tipo de onda esférica, donde r se mide desde el punto de observación P .

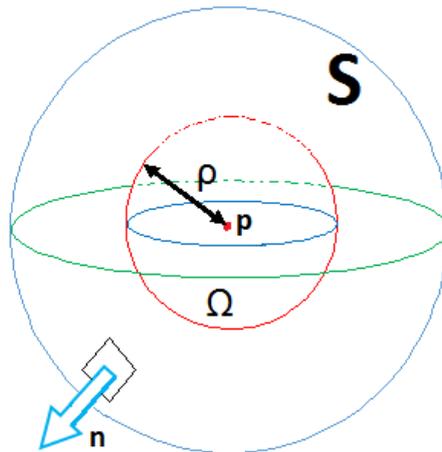


FIGURA 2.2: Geometría de la superficie de integración del teorema integral de Kirchhoff.

Existe una singularidad en el punto P en $r = 0$, de tal modo que es rodeada con una pequeña esfera, a fin de excluir a P de la región encerrada por S . La ecuación (2.7) queda ahora como

$$\int \int \left(\frac{e^{ikr}}{r} \nabla U - U \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS - \int \int \left(\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - U \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \right)_{r=\rho} \rho^2 d\Omega = 0 \quad (2.8)$$

donde $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido de la esfera centrada en P y $\rho^2 d\Omega$ es el correspondiente elemento de área. Notese que $V_0 e^{i\omega t}$ se puede factorizar.

Cuando ρ tiende a cero, entónces la segunda integral se aproxima al valor de U en el punto P , al que se le nombra U_P , así

$$\int \int \left(\frac{e^{ikr}}{r} \nabla U - U \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS - 4\pi U_P = 0 \quad (2.9)$$

esto es,

$$U_P = -\frac{1}{4\pi} \int \int \left(U \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla U \right) dS. \quad (2.10)$$

Esta ecuación se conoce como *Teorema Integral de Kirchhoff*. Sin embargo, la teoría de Kirchhoff es aún incompleta a pesar de obtener resultados sorprendentemente bien aproximados a la realidad. Los resultados exactos solo se obtienen usando la teoría electromagnética [45].

2.3. Fórmula Integral de Fresnel-Kirchhoff

A partir de la ecuación (2.10). Considerando \vec{r}' el vector que va de la fuente S a un punto P_1 de la abertura a , \vec{r} el vector que va del punto P_1 de la abertura a un punto de observación P y \hat{n} un vector unitario normal a la abertura a [46]. Tal como se muestra en la Figura (2.3)

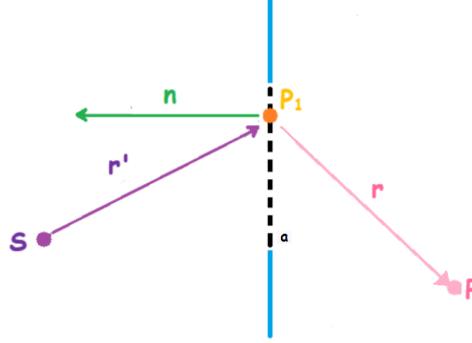


FIGURA 2.3: Geometría para la formulación del teorema integral de Fresnel-Kirchhoff.

Sustituyendo una perturbación óptica esférica $U = U_0 \frac{e^{i(kr' - \omega t)}}{r'}$ en el teorema de la integral de Kirchhoff (2.10) [47], la ecuación cambia a

$$U_P = -\frac{U_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) dS. \quad (2.11)$$

Por definición de gradiente de una función, se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \frac{e^{ikr}}{r} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \\ &= \cos(\hat{n}, \vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (2.12)$$

y

$$\begin{aligned} \nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} &= \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ikr'}}{r'} \hat{r}' \\ &= \cos(\hat{n}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ikr'}}{r'} \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde \hat{r} y \hat{r}' son vectores unitarios, y (\hat{n}, \vec{r}) , (\hat{n}, \vec{r}') son los ángulos entre (\hat{n}, \vec{r}) y (\hat{n}, \vec{r}') , respectivamente. Así

$$\nabla \frac{e^{ikr}}{r} = \left[\frac{ik e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right] \cos(\hat{n}, \vec{r}) \quad (2.14)$$

$$\nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} = \left[\frac{ik e^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'^2} \right] \cos(\hat{n}, \vec{r}'). \quad (2.15)$$

Estas dos últimas ecuaciones se sustituyen en la ecuación (2.11), donde se obtiene que la perturbación óptica en el punto P que está dada por

$$U_P = -\frac{ikU_0e^{-i\omega t}}{4\pi} \int \int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \kappa(\theta) dS \quad (2.16)$$

o cambiando $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$U_P = -\frac{ikU_0e^{-i\omega t}}{2\lambda} \int \int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \kappa(\theta) dS \quad (2.17)$$

siendo esta ecuación conocida como la *Fórmula Integral de Fresnel-Kirchhoff*, y es la que se utilizará para cálculos posteriores tanto en la difracción de Fraunhofer como para la difracción de Fresnel.

Recordando que k es el número de onda, U_0 es la perturbación óptica de la fuente, ω es la frecuencia de la onda, y el factor

$$\kappa(\theta) = \cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \quad (2.18)$$

es comúnmente llamado el *Factor de Oblicuidad* [46, 47].

2.4. Difracción de Fraunhofer y Fresnel

Imaginemos un obstáculo con una abertura a iluminada por una fuente de onda S , y un plano de observación P que es una pantalla paralela a a . Se proyecta sobre la pantalla una imagen de la abertura, al que llamaremos *patrón de difracción*.

De manera cualitativa diremos que se tiene *Difracción de Fraunhofer* o de *Campo Lejano* cuando las ondas incidentes y difractadas se consideran planas, es decir, tanto la fuente S como la pantalla P están lo suficientemente alejadas de la abertura a [48, 49].

De manera análoga se considera *Campo Cercano* o *Difracción de Fresnel*, cuando es significativa la curvatura de las ondas incidentes y difractadas, esto es, están lo suficientemente cerca de la abertura a [48, 49].

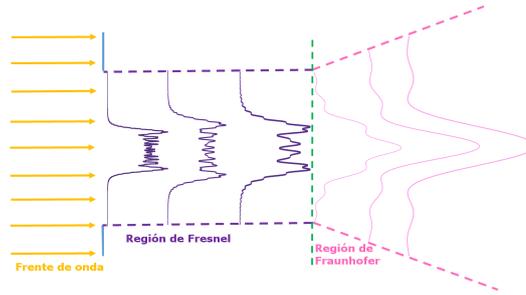


FIGURA 2.4: Diferencia cualitativa entre la región de Fresnel y la región de Fraunhofer mediante el cambio de la irradiancia (módulo cuadrado de la perturbación óptica) de acuerdo a la distancia que se encuentra el punto de observación de la abertura.

En la Figura (2.4), se muestra de manera esquemática y cualitativa la diferencia entre las regiones de campo cercano y de campo lejano mediante los gráficos de irradiancias de acuerdo a diferentes números de Fresnel que a su vez están relacionados con la distancia a la que se encuentra el punto de observación con respecto a la abertura. En el Capítulo 4 se dará una descripción más detallada de estos gráficos de irradiancia y su relación con el número de Fresnel.

Para distinguir de manera cuantitativa entre campo cercano y campo lejano, se hace uso de las siguientes conceptos:

- *Curvatura del frente de onda:*

Considere el esquema de la Figura (2.5)

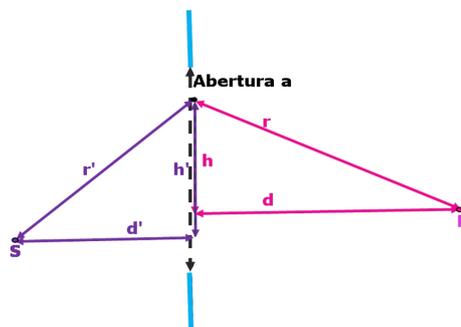


FIGURA 2.5: Geometría para obtener la curvatura del frente de onda para describir cuantitativamente los regímenes de difracción.

siendo S una fuente luminosa, d' es la distancia de la fuente a la abertura perpendicular a la misma, h' es la altura entre el eje perpendicular d' y un punto cualquiera de la abertura, P es el punto de observación, d es la distancia perpendicular entre la abertura y el punto de observación, h es la altura entre el eje perpendicular d y un punto cualquiera de la abertura, y finalmente a es el tamaño de la abertura.

A partir de la Figura (2.5) se ve que la variación Δ de la cantidad $r + r'$ de un borde de la abertura al otro esta dado por

$$\Delta = \sqrt{d'^2 + (h'^2 + a^2)} - \sqrt{d'^2 + h'^2} + \sqrt{d^2 + (h^2 + a^2)} - \sqrt{d^2 + h^2} \quad (2.19)$$

usando la primera aproximación de la expansión binomial de la raíz cuadrada $((1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{x}{2})$, la ecuación (2.19) se cambia a la forma

$$d' \left(1 + \frac{(h' + a)^2}{2d'^2} \right) + d \left(1 + \frac{(h + a)^2}{2d^2} \right) - d' \left(1 + \frac{h'^2}{2d'^2} \right) - d \left(1 + \frac{h^2}{2d^2} \right) \quad (2.20)$$

desarrollando, simplificando y factorizando los términos de la ecuación (2.20) se obtiene

$$a \left(\frac{h'}{d'} + \frac{h}{d} \right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) + \dots \quad (2.21)$$

donde el término cuadrático mide la curvatura del frente de onda, éste debe ser menor con respecto a la longitud de onda para que se considere régimen de Fraunhofer [48], es decir

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) a^2 \ll \lambda, \quad (2.22)$$

por el contrario si la desigualdad se invierte se dice que se esta en el régimen de Fresnel [48], esto es

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) a^2 \gg \lambda. \quad (2.23)$$

Si se tiene una longitud de onda cualquiera λ y si suponemos que d' y d son lo suficientemente grandes, es decir $d' \rightarrow \infty$ y $d \rightarrow \infty$, esto implica que $\frac{1}{d'} \rightarrow 0$ y $\frac{1}{d} \rightarrow 0$, entonces no importa el tamaño de la abertura a , la operación $(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}) a^2 \rightarrow 0$, y esto será siempre mucho menor que la longitud de onda λ por muy pequeña que ésta sea, satisfaciendose así la difracción de campo lejano o de Fraunhofer.

Por el contrario si suponemos que d' y d son lo suficientemente pequeñas, esto es $d' \rightarrow 0$ y $d \rightarrow 0$, entonces $\frac{1}{d'} \rightarrow \infty$ y $\frac{1}{d} \rightarrow \infty$, de igual manera no importa el tamaño de la rendija la operación $(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}) a^2 \rightarrow \infty$ y esto será mucho mayor que la longitud de onda λ por muy grande que ésta sea, satisfaciendose así la difracción de campo cercano o de Fresnel.

■ *Número de Fresnel:*

El *número de Fresnel* F depende del diámetro del haz, el radio de curvatura de la fase del frente de onda, y de la distancia al punto de observación, siendo éste siempre un número adimensional [50].

Si un haz es perfectamente colimado, tendrá un número de Fresnel dado por [50]

$$F = \frac{2}{\lambda} \left[\sqrt{d^2 + a^2} - d \right] = \frac{2d}{\lambda} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{d^2}} - 1 \right] \quad (2.24)$$

usando la primera aproximación de la expansión binomial de la raíz cuadrada, el número de Fresnel se simplifica por

$$F = \frac{a^2}{\lambda d} \quad (2.25)$$

donde a es el tamaño radial del haz, d es la distancia de la abertura al punto de observación y λ es la longitud de onda incidente. Notese que el número de Fresnel es inversamente proporcional a la distancia d , esto es, cuando d es grande, es decir el punto de observación está lo suficientemente alejado de la abertura, el número de Fresnel F será pequeño, y viceversa, cuando d es pequeña, es decir cuando la distancia entre la abertura y el punto de observación esten cerca, el número de Fresnel F será grande.

Por ejemplo, si se tiene una abertura de 1 mm y se hace incidir un haz de He-Ne de longitud de onda de $632,8 \text{ nm}$, y si $d = 0,01 \text{ m}$ entonces $F = 158$, ahora si $d = 1 \text{ m}$ entonces $F = 1,58$, y si $d = 10 \text{ m}$ entonces $F = 0,158$.

En esencia si el número de Fresnel es mucho menor que 1 ($F \ll 1$) se considera que el régimen de difracción es de campo lejano, pero si el número de Fresnel es mayor o cerca de 1 ($F \gtrsim 1$) se considera que régimen de difracción es de campo cercano [50].

Capítulo 3

Patrones de Difracción de Fraunhofer

Resulta evidente que el patrón de difracción será diferente dependiendo de la distancia a la que se encuentre el punto de observación de la abertura, en este sentido la difracción de Fraunhofer es la que se observa a distancias “lejanas” de la abertura difractante. En este capítulo se calcula la perturbación óptica para algunas aberturas sencillas como la rendija única, la abertura rectangular y su caso particular la abertura cuadrada, la doble rendija y finalmente las rendijas múltiples, usando el formalismo de la teoría de la difracción escalar, que para el caso de campo lejano se verá que es mucho más sencillo de trabajar en comparación con el campo cercano.

3.1. Consideraciones para la Difracción de Fraunhofer

Un arreglo experimental usual para observar la difracción de Fraunhofer, se muestra en la Figura (3.1). Una fuente de luz monocromática coherente ilumina una abertura, frente a ella se coloca un lente colimador y una segunda lente detrás de la abertura, este arreglo de lentes eliminara de forma efectiva que los frentes de onda sean divergentes y no estrictamente planos ya que el tratamiento teórico se volvería más complejo [51].

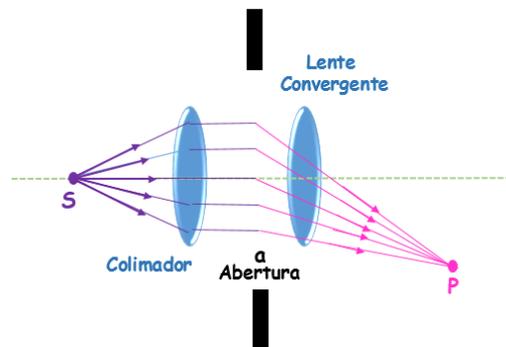


FIGURA 3.1: Arreglo experimental para observar la difracción de Fraunhofer.

A partir de la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff:

$$U_P = -\frac{ikU_0e^{-i\omega t}}{4\pi} \int \int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \left[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \right] dS \quad (3.1)$$

para realizar el cálculo de los patrones de difracción, se hacen las siguientes consideraciones [52]:

- Debido a que el ángulo de la luz difractada es suficientemente pequeño como para que la variación del factor de oblicuidad $\left[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \right]$ sea apreciable sobre la abertura, este se puede considerar constante y salir de la integral.
- La cantidad $\frac{e^{ikr'}}{r'}$ es prácticamente constante ya que $r' \rightarrow \infty$, y también puede salir de la integral.
- La variación del factor $\frac{1}{r}$ es despreciable con respecto a la variación de las oscilaciones de la exponencial e^{ikr} por tanto este puede salir de la integral.

Consecuentemente la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff se reduce a una ecuación más simple

$$U_P = C \int \int e^{ikr} dS \quad (3.2)$$

donde

$$C = -\frac{ikU_0e^{-i\omega t}e^{ikr'} \left[\cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}') \right]}{4\pi rr'} \quad (3.3)$$

representa todos los factores constantes que están fuera de la integral.

La fórmula (3.2) indica que la distribución de la luz difractada se obtiene simplemente integrando el factor de fase e^{ikr} y este depende de la geometría del sistema.

3.2. Una Sola Rendija

Considere una rendija de largo b y ancho L siendo este mucho menor que b , tal como se observa en la Figura (3.2)

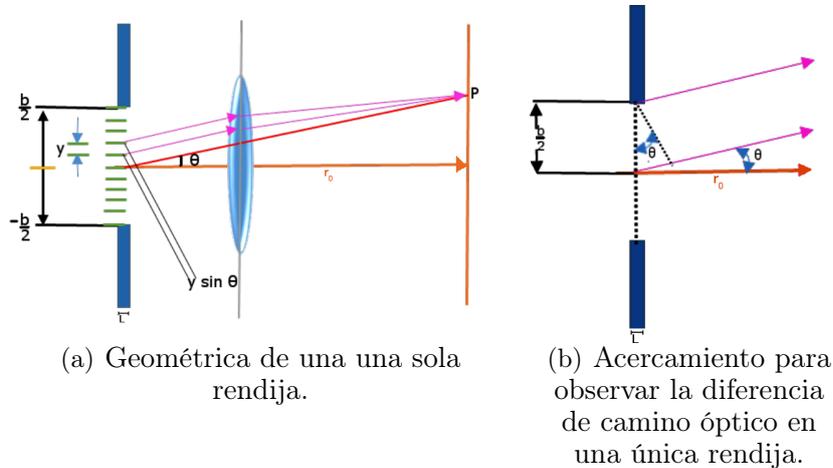


FIGURA 3.2: Geometría de una rendija única.

Donde el elemento de área $dS = Ldy$, y además r se puede expresar como $r = r_0 + y \sin \theta$, donde r_0 es el valor de r cuando $y = 0$, y θ es el ángulo que se muestra [52]. Así la ecuación (3.2) cambia:

$$U_P = LCe^{ikr_0} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky \sin \theta} dy \quad (3.4)$$

Resolviendo la integral por medio de cambio de variable $u =iky \sin \theta$, y reorganizando los términos se obtiene

$$\begin{aligned} U_P &= LCe^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left(e^{iky \sin \theta} \Big|_{-b/2}^{b/2} \right) \\ U_P &= LCe^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left(e^{i\frac{1}{2}kb \sin \theta} - e^{-i\frac{1}{2}kb \sin \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Usando la identidad de Euler como $e^{i\zeta} = \cos \zeta + i \sin \zeta$, la última ecuación se simplifica como

$$\begin{aligned} U_P &= LCe^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left(2i \sin \left(\frac{1}{2}kb \sin \theta \right) \right) \\ U_P &= 2LCe^{ikr_0} \left(\frac{\sin \left(\frac{1}{2}kb \sin \theta \right)}{k \sin \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

multiplicando por $\frac{b}{2}$ arriba y abajo de la ecuación, finalmente se tiene la perturbación óptica en el punto de observación P como función de la variable β

$$U_P = LCbe^{ikr_0} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kb \sin \theta\right)}{\frac{1}{2}kb \sin \theta}$$

$$U_P(\beta) = LCbe^{ikr_0} \frac{\sin \beta}{\beta} \quad (3.7)$$

con $\beta = \frac{1}{2}kb \sin \theta$. O escrito de manera más compacta

$$U_P(\beta) = C' \text{sinc} \beta \quad (3.8)$$

donde $C' = LCbe^{ikr_0}$ y $\text{sinc} \beta = \frac{\sin \beta}{\beta}$, recordando que k es el número de onda y θ es el ángulo de difracción.

De aquí se calcula la irradiancia en el plano de observación dada por $I_P(\beta) = |U_P(\beta)|^2$ como:

$$I_P(\beta) = I_0 \text{sinc}^2 \beta \quad (3.9)$$

con $I_0 = |CbLe^{ikr_0}|^2$ que es la irradiancia para $\theta = 0$. La distribución de la irradiancia se muestra en la Figura (3.3)

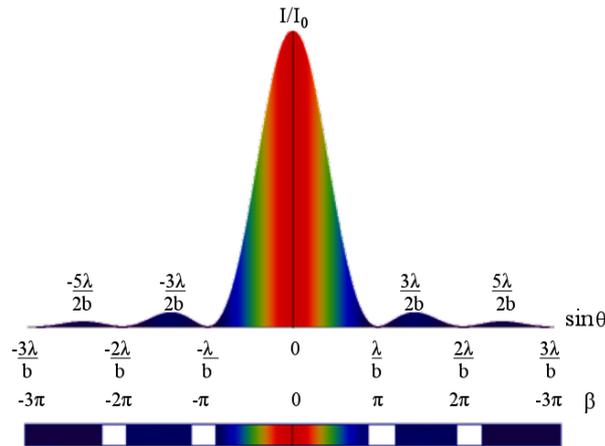


FIGURA 3.3: Gráfico de irradiancia y franjas de difracción de una sola rendija en la región de Fraunhofer.

Se observa que el pico más alto está en color rojo y los picos de menor tamaño se representan hacia el color azul, el valor máximo ocurre cuando $\sin \theta = 0$, esto es cuando $\theta = 0$, esto implica que $\frac{\sin \beta}{\beta} = 1$. Los máximos secundarios se observan cuando $\sin \theta = \pm \frac{3}{2} \frac{\lambda}{b}$, $\pm \frac{5}{2} \frac{\lambda}{b}$, \dots , $\pm \frac{n}{2} \frac{\lambda}{b}$. Y los valores mínimos ocurren cuando $\sin \theta = \pm n \frac{\lambda}{b}$ con n el orden de difracción, o de forma equivalente $\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$.

Si se considera el caso para un láser rojo de He-Ne con longitud de onda de $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ y el ancho de la rendija $b = 1 \text{ mm}$, entonces se obtiene una irradiancia como se muestra en la Figura (3.4), donde el horizontal $\sin \theta$ está en un orden de magnitud

de 10^{-4} y los valores máximos se encuentran en $\pm 9,4, \pm 15,8, \dots$. Y los valores mínimos se encuentran en $\pm 6,3, \pm 12,7, \pm 19,0, \dots$

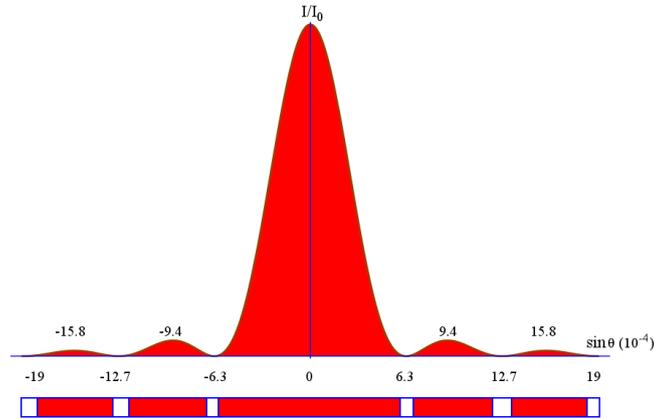


FIGURA 3.4: Gráfico de irradiancia y franjas de difracción de una sola rendija de ancho $b = 1 \text{ mm}$ y usando un láser rojo de He-Ne.

Otro ejemplo que se muestra en la Figura (3.5) es usando un láser rojo de He-Ne con longitud de onda de $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ y ancho de rendija $b = 10 \text{ nm}$, donde se observa en el eje horizontal que los valores máximos y mínimos se encuentran en $\pm 63,2, \pm 126,4, \dots$ y $\pm 63,2, \pm 126,4, \pm 189,6, \dots$ respectivamente.

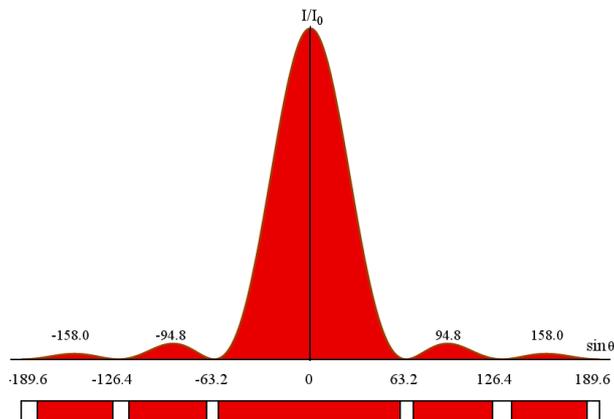


FIGURA 3.5: Gráfico de irradiancia y franjas de difracción de una sola rendija de ancho $b = 10 \text{ nm}$ y usando un láser rojo de He-Ne.

3.3. Abertura Rectangular

Se considera una abertura rectangular de largo a y ancho b , en un marco de referencia (x, y) , como se muestra en la Figura (3.6)

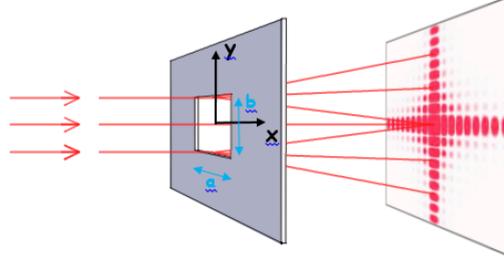


FIGURA 3.6: Geometría de una abertura rectangular para la difracción de Fraunhofer y en la pantalla de observación se presenta el patrón de difracción de la misma abertura.

El tratamieneto matemático se realiza de manera similar al caso de la única rendija, donde ahora se considera $s = s_0 + x \sin \phi$ para el eje x y $r = r_0 + y \sin \theta$ para el eje y y $dA = dx dy$ el elemento de área [52], entonces la fórmula de Fresnel-Kirchhoff cambia a

$$U_P = C \int e^{iks} dS \int e^{ikr} dS$$

$$U_P = C e^{iks_0} e^{ikr_0} \int_{-a/2}^{+a/2} e^{ikx \sin \phi} dx \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky \sin \theta} dy \quad (3.10)$$

Resolviendo ambas integrales por medio de los cambios de variable con $u = ikx \sin \phi$ para x y $v = ik y \sin \theta$ para y , obteniendo

$$U_P = C e^{iks_0} e^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \phi} e^{ikx \sin \phi} \Big|_{-a/2}^{a/2} \right) \left(\frac{1}{ik \sin \theta} e^{iky \sin \theta} \Big|_{-b/2}^{b/2} \right)$$

$$U_P = C e^{iks_0} e^{ikr_0} \frac{1}{ik \sin \phi} \frac{1}{ik \sin \theta} \times (e^{ik \frac{a}{2} \sin \phi} - e^{-ik \frac{a}{2} \sin \phi}) \times \quad (3.11)$$

$$(e^{ik \frac{b}{2} \sin \theta} - e^{-ik \frac{b}{2} \sin \theta}) \quad (3.12)$$

usando la identidad de Euler y multiplicando por $\frac{a}{2}$ el término dependiente de ϕ y por $\frac{b}{2}$ el término dependiente de θ , la ecuación se simplifica de la siguiente manera:

$$U_P = abC e^{iks_0} e^{ikr_0} \left(\frac{\sin \left(\frac{1}{2} ka \sin \phi \right)}{\frac{1}{2} ka \sin \phi} \right) \left(\frac{\sin \left(\frac{1}{2} kb \sin \theta \right)}{\frac{1}{2} kb \sin \theta} \right) \quad (3.13)$$

$$U_P(\alpha, \beta) = abC e^{iks_0} e^{ikr_0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta} \quad (3.14)$$

donde $\alpha = \frac{1}{2}ka \sin \phi$ y $\beta = \frac{1}{2}kb \sin \theta$. De manera compacta se puede escribir como:

$$U_P(\alpha, \beta) = C' \operatorname{sinc} \alpha \operatorname{sinc} \beta \quad (3.15)$$

con $C' = abCe^{iks_0}e^{ikr_0}$ el término constante. Recordando que las dimensiones de la abertura son a y b y los ángulos ϕ y θ definen la dirección del haz difractado para el eje x y el eje y en el marco de referencia de la abertura respectivamente.

A su vez, también se calcula la irradiancia $I_P(\alpha, \beta) = |U_P(\alpha, \beta)|^2$, con $I_0 = |C'|^2$, obteniendo

$$I_P(\alpha, \beta) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \alpha \operatorname{sinc}^2 \beta \quad (3.16)$$

El patrón de difracción resultante que se muestra en la Figura (3.7), cuyo valor máximo se obtiene cuando $\phi = \theta = 0$ y sus valores mínimos se alcanzan cuando $\alpha = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$ y $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$.

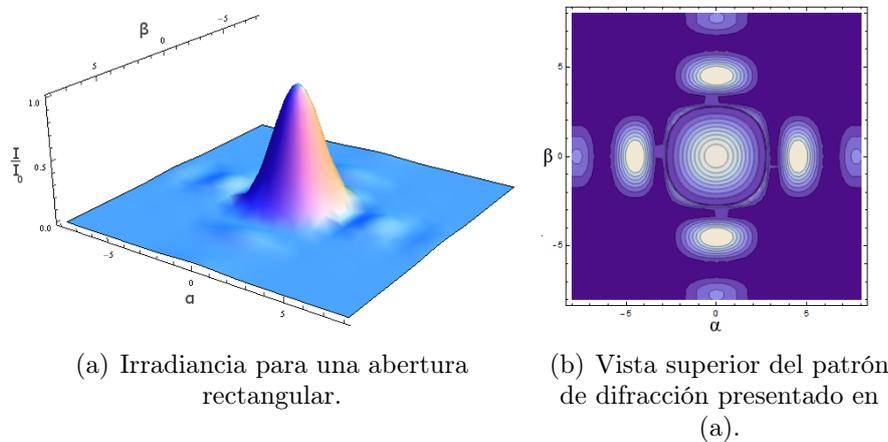


FIGURA 3.7: Gráfico de irradiancia y patrón de difracción de una abertura rectangular en la región de campo lejano.

Notese que a partir de la ecuación (3.13)

$$U_P = abCe^{iks_0}e^{ikr_0} \left(\frac{\sin \left(\frac{1}{2}ka \sin \phi \right)}{\frac{1}{2}ka \sin \phi} \right) \left(\frac{\sin \left(\frac{1}{2}kb \sin \theta \right)}{\frac{1}{2}kb \sin \theta} \right). \quad (3.17)$$

Si se considera una abertura cuadrada donde $a = b$, esta ecuación se modifica a:

$$U_P = C' \left[\frac{\sin \left(\frac{1}{2}ka \sin \phi \right)}{\frac{1}{2}ka \sin \phi} \right] \left[\frac{\sin \left(\frac{1}{2}ka \sin \theta \right)}{\frac{1}{2}ka \sin \theta} \right] \quad (3.18)$$

y si se considera el caso más sencillo cuando los ángulos $\phi = \theta$, se tiene

$$U_P = C' \left[\frac{\sin \left(\frac{1}{2}ka \sin \theta \right)}{\frac{1}{2}ka \sin \theta} \right] \left[\frac{\sin \left(\frac{1}{2}ka \sin \theta \right)}{\frac{1}{2}ka \sin \theta} \right]. \quad (3.19)$$

Si usamos el término $\alpha = \frac{1}{2}ka \sin \theta$, la ecuación se simplifica como sigue

$$U_P(\alpha) = C' \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right] \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right] \quad (3.20)$$

$$U_P(\alpha) = C' \operatorname{sinc}^2 \alpha . \quad (3.21)$$

Por lo tanto la irradiancia $I_P(\alpha) = |U_P(\alpha)|^2$ estaría dada por

$$I_P(\alpha) = C'^2 \operatorname{sinc}^4 \alpha . \quad (3.22)$$

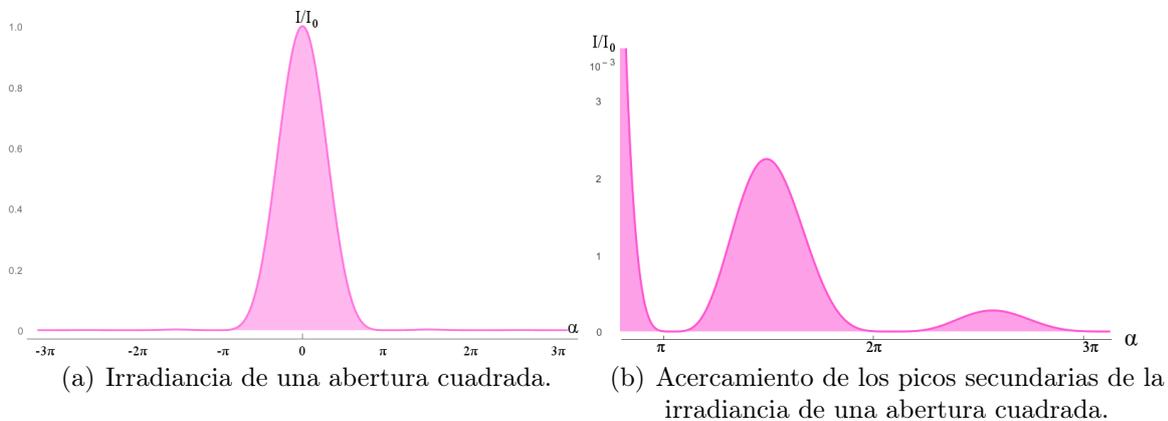


FIGURA 3.8: Gráfico de irradiancia y acercamiento de los picos secundarios de una abertura cuadrada.

Notese que debido a que la función sinc está elevada a la cuarta potencia, el pico más alto para $\alpha = 0$ corresponde a una irradiancia normalizada a 1, mientras que los siguientes picos secundarios tienen valores máximos de irradiancia del orden de 10^{-3} , es por ello que en el gráfico (a) de la Figura (3.8) no se observan estos picos. Los valores mínimos siguen siendo cuando $\alpha = \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

3.4. Doble Rendija

Considere una abertura de difracción que consista en dos rendijas paralelas, cada una de ancho b y a una distancia de separación h , tal como se muestra en la Figura (3.9)

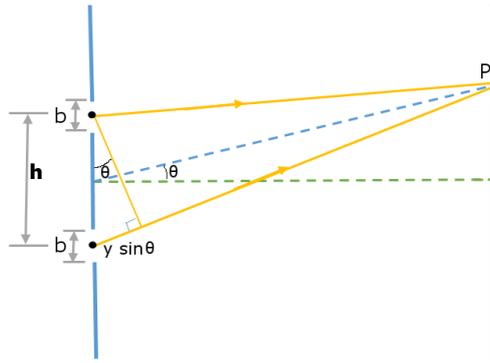


FIGURA 3.9: Geometría para la difracción en campo lejano para la doble rendija.

De manera similar como en el caso de la rendija simple, se tratará el caso como un problema unidimensional donde $r = r_0 + y \sin \theta$ y $dS = Ldy$ el elemento de área y usando la ecuación de Fresnel-Kirchhoff (3.1) [52], se tiene

$$U_P = C e^{ikr_0} \int e^{iky \sin \theta} L dy$$

$$U_P = LC e^{ikr_0} \int e^{iky \sin \theta} dy \quad (3.23)$$

donde los límites de integración son

$$U_P = LC e^{ikr_0} \left[\int_0^b e^{iky \sin \theta} dy + \int_h^{h+b} e^{iky \sin \theta} dy \right]. \quad (3.24)$$

Resolviendo las integrales mediante el cambio de variable $u =iky \sin \theta$ y $du = ik \sin \theta dy$, se tiene

$$U_P = LC e^{ikr_0} \left[\left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) e^{iky \sin \theta} \Big|_0^b + \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) e^{iky \sin \theta} \Big|_h^{h+b} \right]$$

$$U_P = LC e^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) [e^{ikb \sin \theta} - e^{ik0 \sin \theta} + e^{ik(h+b) \sin \theta} - e^{ikh \sin \theta}]$$

$$U_P = LC e^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) (e^{ikb \sin \theta} - 1) (1 + e^{ikh \sin \theta}) \quad (3.25)$$

Sustituyendo $e^{ikb \sin \theta} = e^{ik \frac{b}{2} \sin \theta} e^{ik \frac{b}{2} \sin \theta}$ y $e^{ikh \sin \theta} = e^{ik \frac{h}{2} \sin \theta} e^{ik \frac{h}{2} \sin \theta}$ en ecuación (3.25) y usando las definiciones de $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ y $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, se simplifica de la siguiente manera

$$U_P = LC e^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left[\frac{e^{ik \frac{b}{2} \sin \theta}}{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \theta}} - 1 \right] \left[1 + \frac{e^{ik \frac{h}{2} \sin \theta}}{e^{-ik \frac{h}{2} \sin \theta}} \right]$$

$$U_P = LC e^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left[\frac{e^{ik \frac{b}{2} \sin \theta} - e^{-ik \frac{b}{2} \sin \theta}}{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \theta}} \right] \left[\frac{e^{ik \frac{h}{2} \sin \theta} + e^{-ik \frac{h}{2} \sin \theta}}{e^{-ik \frac{h}{2} \sin \theta}} \right] \quad (3.26)$$

Multiplicando tanto arriba como abajo del primer cociente por $\frac{b}{2}$, nombrando $\beta = \frac{1}{2}kb \sin \theta$ y $\gamma = \frac{1}{2}kh \sin \theta$ y reorganizando los términos, se llega a

$$U_P(\beta, \gamma) = 2LC e^{ikr_0} e^{i\beta} e^{i\gamma} \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \gamma . \quad (3.27)$$

De forma simplificada, haciendo $C' = 2LC e^{ikr_0} e^{i\beta} e^{i\gamma}$

$$U_P(\beta, \gamma) = C' \operatorname{sinc} \beta \cos \gamma . \quad (3.28)$$

De aquí la irradiancia es:

$$I_P(\beta, \gamma) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \beta \cos^2 \gamma . \quad (3.29)$$

Aquí el factor $\operatorname{sinc}^2 \beta$ previamente conocido de la sección de una sola rendija, será el envolvente de la distribución de las franjas de interferencia consecuencia de la parte de la función $\cos^2 \gamma$, como se muestra en la Figura (3.10).

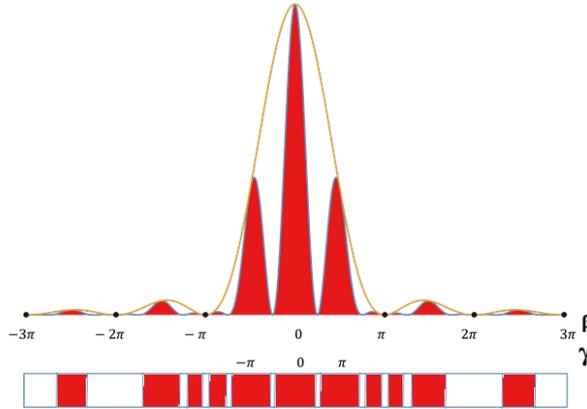


FIGURA 3.10: Gráfico de irradiancia y franjas de difracción de la doble rendija en la región de campo lejano, usando los parámetros $b = 1$ y $h = 2$.

Las franjas luminosas ocurren para valores de $\gamma = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$, la separación angular entre franjas está dada por $\Delta\gamma = \pi = \frac{1}{2}kh \sin \theta$, entonces en términos de $\sin \theta$, se tiene $\sin \theta = \frac{\lambda}{h}$, escrito de otra manera quedaría como $h \sin \theta = \lambda$, siendo esta ecuación equivalente al resultado del análisis del experimento de la doble rendija de Young.

3.5. Múltiples Rendijas

Considere una rejilla con un número N de múltiples rendijas idénticas y paralelas entre sí con ancho b y separación h . El cálculo a partir de la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff, se realiza de manera similar al de la doble abertura.

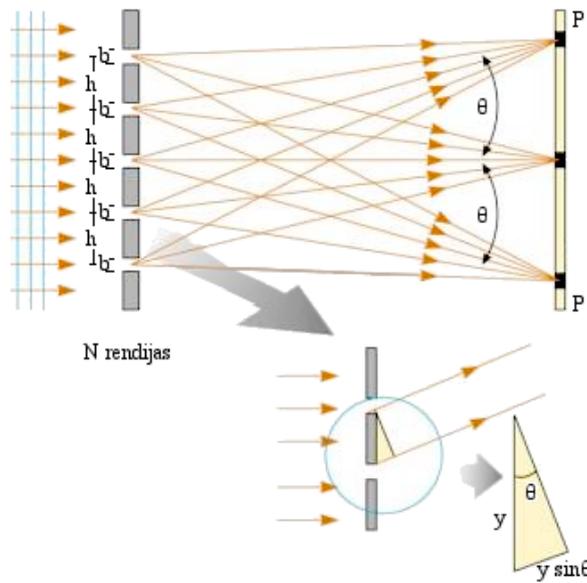


FIGURA 3.11: Geometría para la difracción de campo lejano mediante una rejilla de N rendijas.

Entonces la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff cambia a [52]:

$$U_P = CL e^{ikr_0} \left[\int_0^b e^{iky \sin \theta} + \int_h^{h+b} e^{iky \sin \theta} + \int_{2h}^{2h+b} e^{iky \sin \theta} + \dots + \int_{(N-1)h}^{(N-1)h+b} e^{iky \sin \theta} \right] \quad (3.30)$$

nuevamente resolviendo las integrales con el cambio de variable $u = iky \sin \theta$, se tiene

$$\begin{aligned} U_P &= \frac{CL e^{ikr_0}}{ik \sin \theta} \left[e^{iky \sin \theta} \Big|_0^b + \dots + e^{iky \sin \theta} \Big|_0^{(N-1)h+b} \right] \\ U_P &= \frac{CL e^{ikr_0}}{ik \sin \theta} \times \quad (3.31) \\ &\times \left[e^{ikb \sin \theta} - 1 + e^{ik(h+b) \sin \theta} - e^{ikh \sin \theta} + \dots + e^{ik((N-1)h+b) \sin \theta} - e^{ik(N-1)h \sin \theta} \right] \end{aligned}$$

Factorizando

$$\begin{aligned} U_P &= \frac{CL e^{ikr_0}}{ik \sin \theta} [e^{ikb \sin \theta} - 1] [1 + e^{ikh \sin \theta} + e^{ik2h \sin \theta} + \dots + e^{ik(N-1)h \sin \theta}] \\ U_P &= \frac{CL e^{ikr_0}}{ik \sin \theta} [e^{ikb \sin \theta} - 1] \left[\frac{1 - e^{ikN h \sin \theta}}{1 - e^{ikh \sin \theta}} \right] \\ U_P &= CL e^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left[\frac{e^{ik \frac{b}{2} \sin \theta}}{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \theta}} - 1 \right] \left[\frac{1 - \frac{e^{ikN \frac{h}{2} \sin \theta}}{e^{-ikN \frac{h}{2} \sin \theta}}}{1 - \frac{e^{ik \frac{h}{2} \sin \theta}}{e^{-ik \frac{h}{2} \sin \theta}}} \right] \quad (3.32) \end{aligned}$$

reordenando los términos y usando $\beta = \frac{1}{2}kb \sin \theta$ y $\gamma = \frac{1}{2}kh \sin \theta$ se tiene que la perturbación óptica es

$$U_P(\beta, \gamma) = CbLe^{ikr_0} e^{i\beta} e^{i(N-1)h} \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin(N\gamma)}{\sin \gamma} \quad (3.33)$$

escrito de forma compacta con $C' = CbLe^{ikr_0} e^{i\beta} e^{i(N-1)h}$, se tiene

$$U_P(\beta, \gamma) = C' \operatorname{sinc} \beta \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} . \quad (3.34)$$

O también se puede escribir como

$$\begin{aligned} U_P(\beta, \gamma) &= C' \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin N\gamma}{N\gamma} N \frac{\gamma}{\sin \gamma} \\ U_P(\beta, \gamma) &= NC' \operatorname{sinc} \beta \operatorname{sinc} N\gamma \operatorname{sinc}^{-1} \gamma . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Obteniéndose la irradiancia como:

$$I_P(\beta, \gamma) = I_0 (\operatorname{sinc} \beta)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{N \sin \gamma} \right)^2 . \quad (3.36)$$

El factor N en el cociente ha sido introducido para normalizar la expresión, haciendo que $I_P(\beta, \gamma) = I_0$ cuando $\theta = 0$.

Nuevamente como en el caso de la doble rendija, el factor $\operatorname{sinc} \beta$ aparece como envolvente del patrón de difracción. Los máximos principales ocurren dentro de la envolvente cuando $\gamma = \pm n\pi$ con $n = \pm 0, 1, 2, \dots$, esto es $n\lambda = h \sin \theta$ la cuál es la fórmula de difracción para las rejillas donde existe una relación entre la longitud de onda y el ángulo de difracción. Y n es un número entero que se conoce como orden de difracción.

Los máximos secundarios ocurren en $\gamma = \pm\frac{3}{2}\frac{\pi}{N}, \pm\frac{5}{2}\frac{\pi}{N}, \dots$. Los valores mínimos ocurren cuando $\gamma = \pm 1\frac{\pi}{N}, \pm 2\frac{\pi}{N}, \dots$

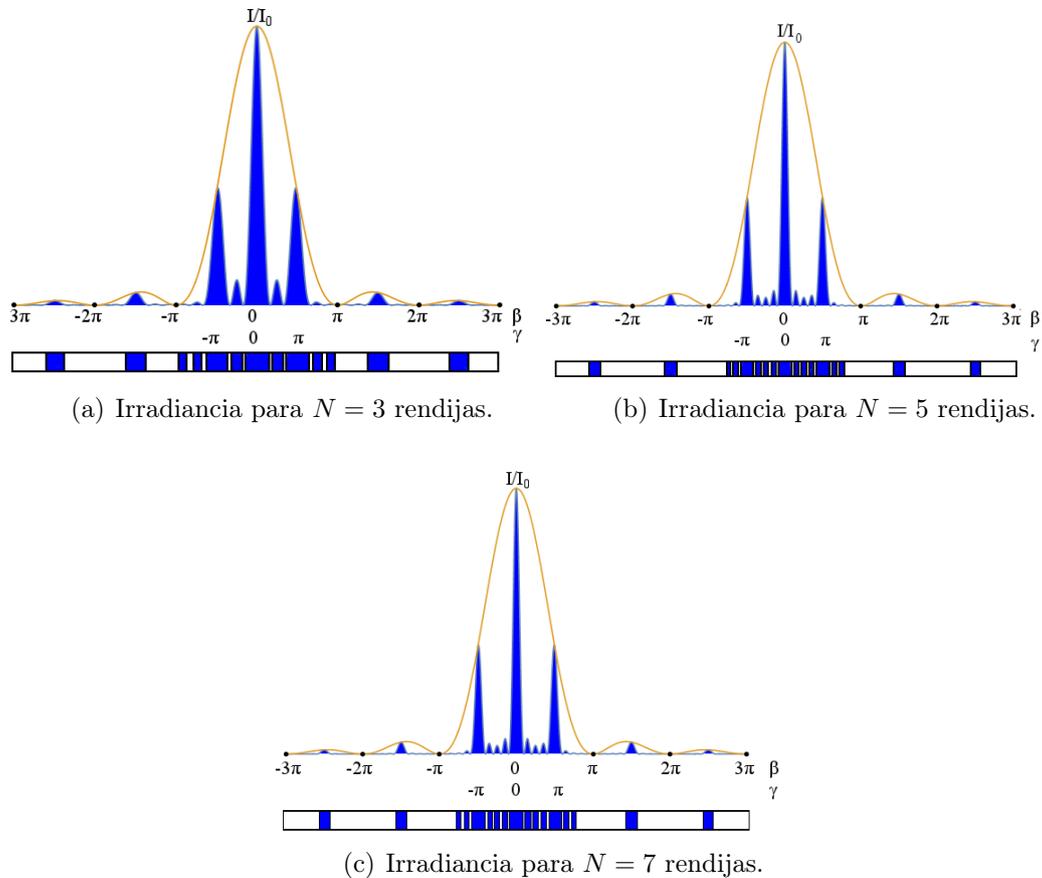


FIGURA 3.12: Gráfico de irradiancia para $N = 3, 5, 7$ rendijas en una rejilla de difracción.

En la Figura (3.12) se muestra una gráfica de la irradiancia para 3, 5 y 7 rendijas. Notese que los valores máximos de γ son los mismos no importa el número de rendijas, el cambio se observa en que entre mayor sea el número de rendijas de una rejilla, más angostas serán estos picos máximos que se encuentran dentro de la envolvente y las ondas secundarias van decreciendo en amplitud.

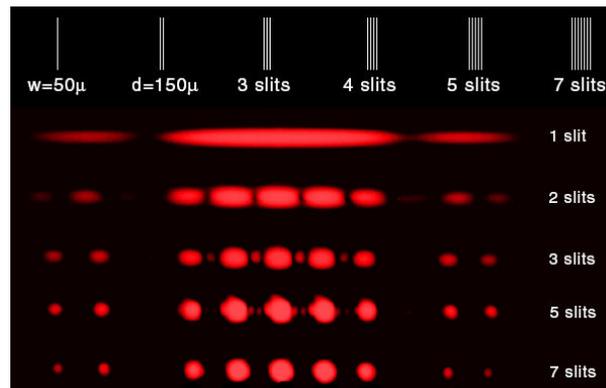


FIGURA 3.13: Patrón de difracción para $N = 3, 4, 5, 7$ rendijas de una rejilla de difracción para el régimen de campo lejano. [53]

En la Figura(3.13) se muestran los patrones de difracción para varios números de rendijas ($N = 3, 4, 5, 7$), con un láser He-Ne, el ancho de todas las rendijas es de $50\mu m$ y el espaciamento entre las rendijas es de $150\mu m$. Se observa que para la localización del máximo no importa el número de rendijas, es decir está en la misma posición para todos los casos. Además el patrón de difracción de una sola rendija actúa como envolvente del patrón de difracción para los diferentes números de rendijas, tal como se explicó en las secciones anteriores.

Capítulo 4

Patrones de Difracción de Fresnel

La difracción de Fraunhofer o de campo lejano, es un patrón de difracción de una onda cuyo punto de observación se encuentra suficientemente alejado del obstáculo, por lo que sobre la pantalla incidirán ondas planas. La difracción de campo lejano es un caso particular de la difracción de Fresnel o de campo cercano, y en este régimen de difracción el punto de observación se encuentra lo suficientemente cerca del obstáculo.

4.1. Zonas de Fresnel

Examinemos ahora la propagación de una onda esférica monocromática que viaja a la derecha emitida por una fuente puntual S , y se desea saber cuál es el resultado de este efecto en un punto de observación P . Para ello se divide el frente de onda en zonas anulares de espesor $\lambda/2$ [54], formando así un conjunto de anillos concéntricos cuyo centro corresponde al centro geométrico O de la abertura y cada anillo se nombra $s_1, s_2, s_2, \dots, s_m$ que estarán media longitud de onda más lejos de P . Si la distancia $PO = b$, entonces los discos estarán a una distancia $b + \lambda/2, b + 2\lambda/2, b + 3\lambda/2, \dots, b + m\lambda/2$ de P [55, 56].

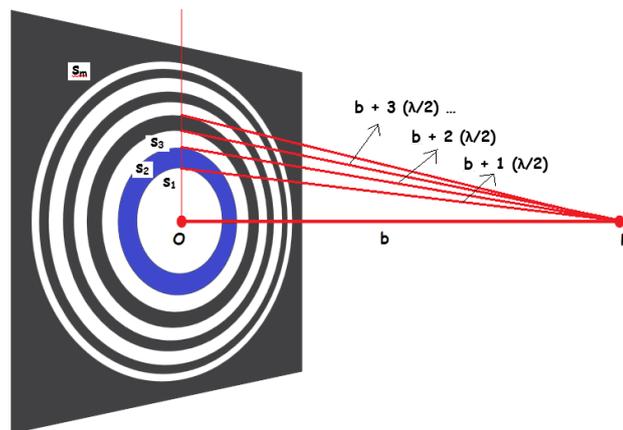


FIGURA 4.1: Zonas de Fresnel.

entonces los radios asociados a los discos serían,

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \sqrt{\left(b + \frac{1}{2}\lambda\right)^2 - b^2} \\
 R_2 &= \sqrt{\left(b + \frac{2}{2}\lambda\right)^2 - b^2} \\
 R_3 &= \sqrt{\left(b + \frac{3}{2}\lambda\right)^2 - b^2} \\
 &\vdots \\
 R_m &= \sqrt{\left(b + \frac{m}{2}\lambda\right)^2 - b^2}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

de aquí el área asociada a cada disco es,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \pi R_1^2 = \pi \left[\left(b + \frac{1}{2}\lambda\right)^2 - b^2 \right] = \pi b\lambda + \frac{1}{4}\pi\lambda^2 \\
 A_2 &= \pi R_2^2 = \pi \left[\left(b + \frac{2}{2}\lambda\right)^2 - b^2 \right] = 2\pi b\lambda + 2\frac{1}{4}\pi\lambda^2 \\
 A_3 &= \pi R_3^2 = \pi \left[\left(b + \frac{3}{2}\lambda\right)^2 - b^2 \right] = 3\pi b\lambda + 3\frac{1}{4}\pi\lambda^2 \\
 &\vdots \\
 A_m &= \pi R_m^2 = \pi \left[\left(b + \frac{m}{2}\lambda\right)^2 - b^2 \right] = m\pi b\lambda + m\frac{1}{4}\pi\lambda^2
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

debido a que λ es pequeña comparada con b , se obtienen las aproximaciones de las áreas

$$\begin{aligned}
 A_1 &\approx \pi b\lambda \\
 A_2 &\approx 2\pi b\lambda \\
 A_3 &\approx 3\pi b\lambda \\
 &\vdots \\
 A_m &\approx m\pi b\lambda
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

de aquí se deduce que todos los anillos $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$ tienen la misma área, es decir

$$\begin{aligned}
 s_1 &= A_1 = \pi b\lambda \\
 s_2 &= A_2 - A_1 = 2\pi b\lambda - \pi b\lambda = \pi b\lambda \\
 s_3 &= A_3 - A_2 = 3\pi b\lambda - 2\pi b\lambda = \pi b\lambda \\
 &\vdots \\
 s_m &= A_m - A_{m-1} = m\pi b\lambda - (m-1)\pi b\lambda = \pi b\lambda
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

puede observarse que la contribución de cualquier número par de zonas de Fresnel en el punto de observación P será nula, mientras que si tendrá contribución en el punto de observación P si se tiene un número impar de zonas de Fresnel.

Si se bloquean las zonas de número impar, las zonas 2, 4, 6, ... contribuirán a la luz que llega al punto P , y se convertirá en el centro de la proyección [54]

$$\frac{R_m^2}{R_1^2} = \frac{(b^2 + \frac{1}{2}m\lambda)^2 - b^2}{(b^2 + \frac{1}{2}\lambda)^2 - b^2} = m \quad (4.5)$$

esto es,

$$R_m = \sqrt{m}R_1 \quad (4.6)$$

lo que significa que la frontera entre las zonas tienen radio proporcional a la raíz cuadrada de números naturales [54].

Ahora si se considera que una perturbación óptica P se puede calcular en términos de las contribuciones de las amplitudes de las zonas de Fresnel $U_1, U_2, U_3, \dots, U_m$ se obtiene [57]:

$$U_P = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + U_5 \dots \pm U_m; \quad m = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4.7)$$

donde U_m adquiere el signo positivo cuando m es impar y U_m es negativo cuando m es par. La alternancia de los signos positivos y negativos en la suma se debe a la diferencia de fase de $\Delta\phi = k \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$ entre dos zonas consecutivas.

Considerando a m un número impar, la serie (4.7) se puede reescribir como [57]:

$$U_P = \frac{U_1}{2} + \left(\frac{U_1}{2} - U_2 + \frac{U_3}{2} \right) + \left(\frac{U_3}{2} - U_4 + \frac{U_5}{2} \right) + \dots + \left(\frac{U_{m-2}}{2} - U_{m-1} + \frac{U_m}{2} \right) + \frac{U_m}{2}. \quad (4.8)$$

El hecho de que los paréntesis sean positivos o negativos, tienen que ver con la rapidez de cambio de $\kappa(\theta)$ (factor de oblicuidad) [56]. Si se considera que los términos en paréntesis de la ecuación (4.8) son positivos, implica que la amplitud total U_P es

$$U_P > \frac{U_1 + U_m}{2}. \quad (4.9)$$

Por otro lado, la suma (4.7) también se puede reescribir de la siguiente manera [57]

$$U_P = U_1 - \frac{U_2}{2} - \left(\frac{U_2}{2} - U_3 + \frac{U_4}{2} \right) - \left(\frac{U_4}{2} - U_5 + \frac{U_6}{2} \right) - \dots - \left(\frac{U_{m-3}}{2} - U_{m-2} + \frac{U_{m-1}}{2} \right) - \frac{U_{m-1}}{2} + U_m \quad (4.10)$$

entonces la amplitud total U_P es

$$U_P < U_1 - \frac{U_2 + U_{m-1}}{2} + U_m. \quad (4.11)$$

Ya que el factor de oblicuidad va de 1 a 0 en muchas zonas, se puede despreciar cualquier variación entre zonas adyacentes, es decir, $U_1 \approx U_2$ y $U_{m-1} \approx U_m$ [56], y de las ecuaciones (4.9) y (4.11) se nota que

$$\frac{U_1 + U_m}{2} < U_P < \frac{U_1 + U_m}{2} \quad (4.12)$$

lo que significa que para m impar se tiene

$$U_P = \frac{U_1 + U_m}{2} . \quad (4.13)$$

Se puede efectuar el mismo razonamiento considerando ahora m par, y entonces la amplitud total U_P sería [57]

$$U_P = \frac{U_1 - U_m}{2} . \quad (4.14)$$

Por tanto, se obtiene que las contribuciones de las zonas de Fresnel son las ecuaciones (4.13) y (4.14) para m impar y m par respectivamente [55], y además considerando que los términos de los paréntesis en (4.8) son positivos.

Ahora si se considera que los términos en los paréntesis son negativos se utilizará el mismo tratamiento matemático hecho anteriormente, pero a diferencia del tratamiento anterior, se encuentra que se invierten las desigualdades, esto es

$$U_P < \frac{U_1 + U_m}{2} \quad (4.15)$$

y

$$U_P > U_1 - \frac{U_2 + U_{m-1}}{2} + U_m \quad (4.16)$$

lo que conlleva a que el resultado final anteriormente obtenido no sea alterado.

Cuando se suma un número muy grande de zonas de Fresnel, esto es, cuando $m \rightarrow \infty$, entonces la última amplitud U_m es despreciable debido al factor de oblicuidad y la amplitud total en el punto de observación no es otra cosa que la onda incidente original. Por lo que de la ecuación (4.13) se obtiene que $U_P = \frac{U_1}{2}$ esto es $U_1 = 2U_P$. Entonces la amplitud de la primera zona de Fresnel es el doble de la amplitud incidente y tiene la misma fase que la onda incidente. [57]

4.2. Abertura Rectangular

Considere la Figura (4.2) una abertura rectangular de largo $2a$ y de ancho $2b$ que es iluminada por una onda monocromática de amplitud unitaria S , donde dS es un elemento de área situado en algún punto arbitrario Q cuyo sistema de coordenadas cartesianas son (x, y) y además de la geometría se observa que en el punto de observación $R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ [58–60]. Y se considera un marco de referencia con coordenadas cartesianas (ξ, η) en el punto de observación P .

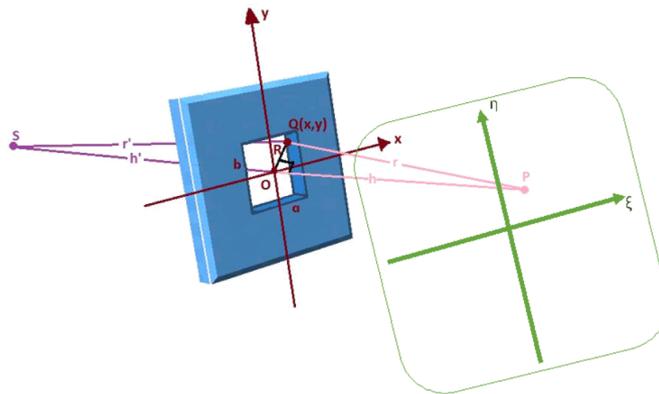


FIGURA 4.2: Geometría de una abertura rectangular para la difracción de Fresnel.

La perturbación óptica en un punto de observación P , esta dada por la fórmula de Fresnel-Kirchhoff dada por

$$U_P = -\frac{ikU_0e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \kappa(\theta) dS . \quad (4.17)$$

Notése que $\kappa(\theta)$ y $\frac{1}{rr'}$ no varían tan rápido en comparación con $e^{ik(r+r')}$ [58], así que pueden salir de la integral y la fórmula (4.17) quedaría como

$$U_P = -\frac{ikU_0e^{-i\omega t} \kappa(\theta)}{4\pi rr'} \iint e^{ik(r+r')} dS \quad (4.18)$$

ya que el término fuera de la integral es practicamente constante nombremoslo C_1 , entonces

$$U_P = C_1 \iint e^{ik(r+r')} dS . \quad (4.19)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos SOQ y POQ se obtiene

$$r = \sqrt{h^2 + R^2} \quad r' = \sqrt{h'^2 + R^2} \quad (4.20)$$

entonces

$$\begin{aligned} r + r' &= \sqrt{h^2 + R^2} + \sqrt{h'^2 + R^2} \\ &= h \left[\left(1 + \frac{R^2}{h^2} \right) \right]^{1/2} + h' \left[\left(1 + \frac{R^2}{h'^2} \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

recurriendo a la primera aproximación de la serie binomial de la raíz cuadrada, se tiene

$$r + r' = h + h' + \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right) \quad (4.22)$$

donde el término $L = \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right)^{-1}$, así

$$r + r' = h + h' + \frac{1}{2L}((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2). \quad (4.23)$$

Entonces se tiene

$$U_P = C_1 \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} e^{ik \left[h + h' + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2L} \right]} dx dy \quad (4.24)$$

Así la integral a calcular es

$$U_P = C_2 \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} e^{ik \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2L}} dx dy \quad (4.25)$$

Donde $C_2 = C_1 e^{ik(h+h')}$ es un término constante. De aquí la integral se puede separar en el producto de dos integrales unidimensionales [59] y cambiando $k = 2\pi/\lambda$, se tiene

$$U_P = C_2 \int_{x_1}^{x_2} e^{i\pi(x - \xi)^2/\lambda L} dx \int_{y_1}^{y_2} e^{i\pi(y - \eta)^2/\lambda L} dy \quad (4.26)$$

se observa que si h' tiende a infinito, esto es, se consideran ondas planas incidentes, se redefine como $L = \left(\frac{1}{h}\right)^{-1}$.

Para resolver las integrales anteriores se hace el cambio de variable $u = (x - \xi)\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ y $v = (y - \eta)\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ [58, 59]. Entonces las integrales en (4.26) se convierten en

$$U_P = \frac{C_U}{2} \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u'^2/2} du' \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v'^2/2} dv' \quad (4.27)$$

con $C_U = C_2 \lambda L$. Donde los límites de integración son:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}(a + \xi) \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}(a - \xi) \quad (4.28)$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}(b + \eta) \quad v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}(b - \eta) \quad (4.29)$$

recordando que a y b son el largo y el ancho de la abertura. En este punto se define el *Número de Fresnel* como $F = \frac{ab}{\lambda L}$ como una forma general a lo usualmente encontrado en la literatura, modificando los intervalos de integración de la siguiente manera:

$$u_1 = -\sqrt{2F} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{\xi}{\sqrt{ab}} \right) \quad u_2 = +\sqrt{2F} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{\xi}{\sqrt{ab}} \right) \quad (4.30)$$

$$v_1 = -\sqrt{2F} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{\eta}{\sqrt{ab}} \right) \quad v_2 = +\sqrt{2F} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\eta}{\sqrt{ab}} \right) \quad (4.31)$$

Si se tiene el caso particular de una abertura cuadrada cuando $a = b$ entonces los límites de integración cambian a

$$u_1 = -\sqrt{2F} \left(1 + \frac{\xi}{a}\right) \quad u_2 = +\sqrt{2F} \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \quad (4.32)$$

$$v_1 = -\sqrt{2F} \left(1 + \frac{\eta}{b}\right) \quad v_2 = +\sqrt{2F} \left(1 - \frac{\eta}{b}\right) \quad (4.33)$$

Entonces las integrales de la ecuación (4.27) para una abertura rectangular cambian a

$$U_P = \frac{C_U}{2} \int_{-\sqrt{2F}(\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{\xi}{ab}})}^{+\sqrt{2F}(\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{\xi}{ab}})} e^{i\pi u^2/2} du \int_{-\sqrt{2F}(\sqrt{\frac{b}{a} + \frac{\eta}{ab}})}^{+\sqrt{2F}(\sqrt{\frac{b}{a} - \frac{\eta}{ab}})} e^{i\pi v^2/2} dv \quad (4.34)$$

y la ecuación (4.27) para una abertura cuadrada queda como:

$$U_P = \frac{C_U}{2} \int_{-\sqrt{2F}(1 + \frac{\xi}{a})}^{+\sqrt{2F}(1 - \frac{\xi}{a})} e^{i\pi u^2/2} du \int_{-\sqrt{2F}(1 + \frac{\eta}{b})}^{+\sqrt{2F}(1 - \frac{\eta}{b})} e^{i\pi v^2/2} dv . \quad (4.35)$$

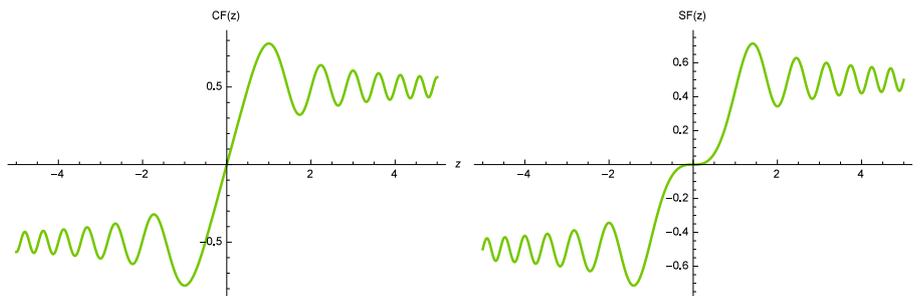
Las integrales de (4.27) se evalúan en términos de la integral

$$\int_0^s e^{i\pi w^2/2} dw = C_F(s) + iS_F(s) \quad (4.36)$$

donde $C_F(s)$ y $S_F(s)$ se conocen como las *Integrales de Fresnel* [58–60]

$$C_F(s) = \int_0^s \cos(\pi w^2/2) dw \quad (4.37)$$

$$S_F(s) = \int_0^s \sin(\pi w^2/2) dw \quad (4.38)$$



(a) Coseno de Fresnel.

(b) Seno de Fresnel.

FIGURA 4.3: Gráficos del coseno y seno de Fresnel.

Así la perturbación óptica se puede expresar como

$$U_P(u, v) = \frac{C_U}{2} [C_F(u) + iS_F(u)]_{u_1}^{u_2} [C_F(v) + iS_F(v)]_{v_1}^{v_2} \quad (4.39)$$

de otra forma,

$$U_P(u, v) = \frac{C_U}{2} \{[C_F(u_2) - C_F(u_1)] + i[S_F(u_2) - S_F(u_1)]\} \times \{[C_F(v_2) - C_F(v_1)] + i[S_F(v_2) - S_F(v_1)]\} \quad (4.40)$$

donde

$$\frac{C_U}{2} = -\frac{1}{2} \frac{ik\lambda L U_0 \kappa(\theta) e^{i[k(h+h')-\omega t]}}{4\pi r r'}$$

Las matemáticas se vuelven complejas si se calcula la perturbación óptica en todos los puntos del plano de observación, dejando fija la posición de la abertura. En su lugar, se fija la línea *SOP* y se mueve la abertura mediante pequeños desplazamientos en el plano de la abertura. Esto tiene el efecto de trasladar el origen *O* con respecto a la abertura fija, barriendo así la perturbación óptica a lo largo de la abertura. Cada nueva posición de *O* corresponde a una nueva serie de ubicaciones relativas de los límites x_1 , x_2 , y_1 y y_2 , que a su vez, dan nuevos valores para u_1 , u_2 , v_1 y v_2 , los cuáles, cuando se sustituyen en la ecuación (4.39) proporciona un nuevo valor para U_P [60].

Recordando que la cantidad física medible es la irradiancia $I_P(u, v) = |U_P(u, v)|^2 = (U_P(u, v)U_P(u, v)^*)^2$ [58, 60] que está dada por

$$I_P(u, v) = \frac{I_0}{4} \{[C_F(u_2) - C_F(u_1)]^2 + [S_F(u_2) - S_F(u_1)]^2\} \times \{[C_F(v_2) - C_F(v_1)]^2 + [S_F(v_2) - S_F(v_1)]^2\} \quad (4.41)$$

donde $I_0 = C_U^2$ es la irradiancia no obstruida en *P*.

A continuación se presenta un análisis de los gráficos de irradiancia (I/I_0) utilizando la ecuación (4.41) con los límites de integración presentados en las ecuaciones (4.30-4.33), que se muestra en las Figuras (4.4-4.6) para una abertura cuadrada con $a=2$, $b=2$; (4.7-4.9) para una abertura rectangular con $a=2$, $b=10$; y las Figuras (4.10-4.12) para una abertura rectangular con $a=2$, $b=20$ y números de Fresnel $F=0.1$ que representa el régimen de campo lejano, $F=1$ que muestra la zona de transición entre difracción de Fraunhofer y Fresnel, y $F=10$ que representa la difracción en el régimen de campo cercano, en todos los casos presentados.

En la parte (a) de todas las figuras se muestra una vista tridimensional de la distribución de irradiancia variando los parámetros χ y η ; en la parte (b) se muestran tres imagenes diferentes, de las cuáles la de la esquina superior izquierda representa una vista superior del mismo gráfico tridimensional presentado en la parte (a), la segunda imagen que está en la esquina superior derecha es una gráfica de contorno del gráfico de irradiancia, y la tercera imagen que está en la parte inferior centrada es la misma gráfica de contorno pero representando el tamaño de la abertura en la pantalla de observación.

El código de colores tanto para la vista tridimensional como para las vistas superior y de contorno de la irradiancia, van hacia rojo para los picos con mayor valor de intensidad de irradiancia, y hacia el azul representando valores mínimos para las oscilaciones de la irradiancia.

Por simplicidad en el análisis, se nombrara a la abertura cuadrada como C1, a la abertura rectangular con $a=2$ y $b=10$ como R2, y a la abertura rectangular con $a=2$ y $b=20$ como R3, con las características y consideraciones anteriormente señaladas.

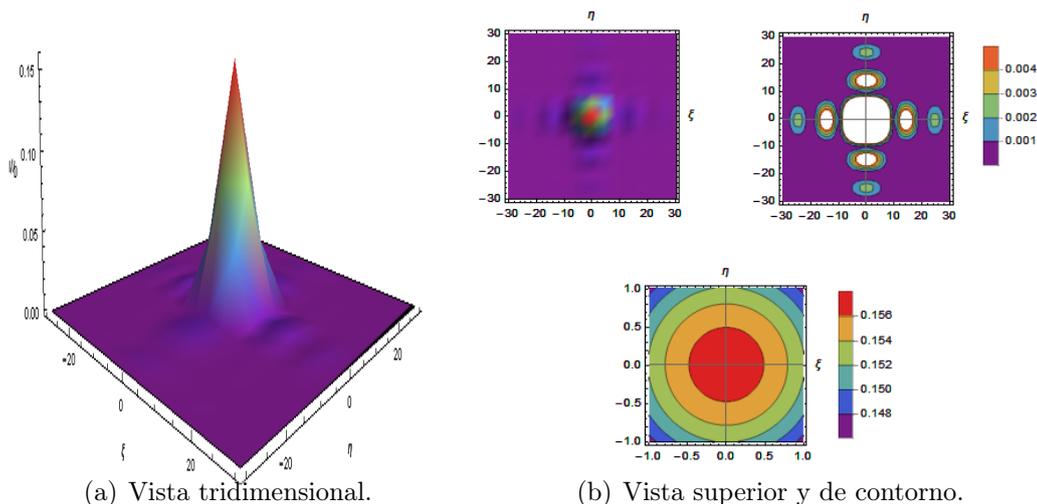


FIGURA 4.4: Gráficos de irradiancia de una abertura cuadrada con $a = 2$ y $b = 2$ y número de Fresnel $F = 0,1$.

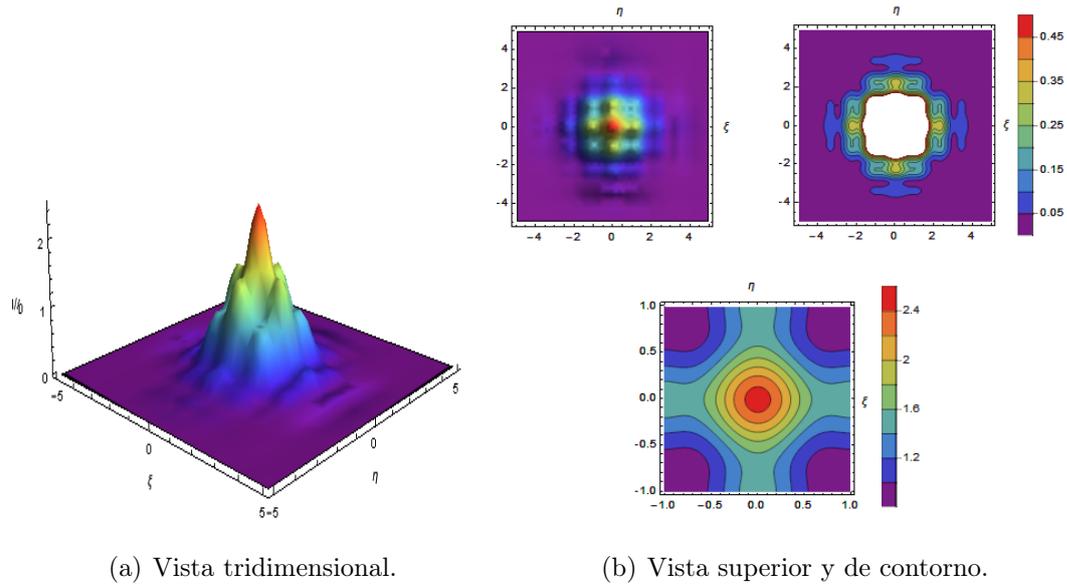


FIGURA 4.5: Gráficos de irradiancia de una abertura cuadrada con $a = 2$ y $b = 2$ y número de Fresnel $F = 1$.

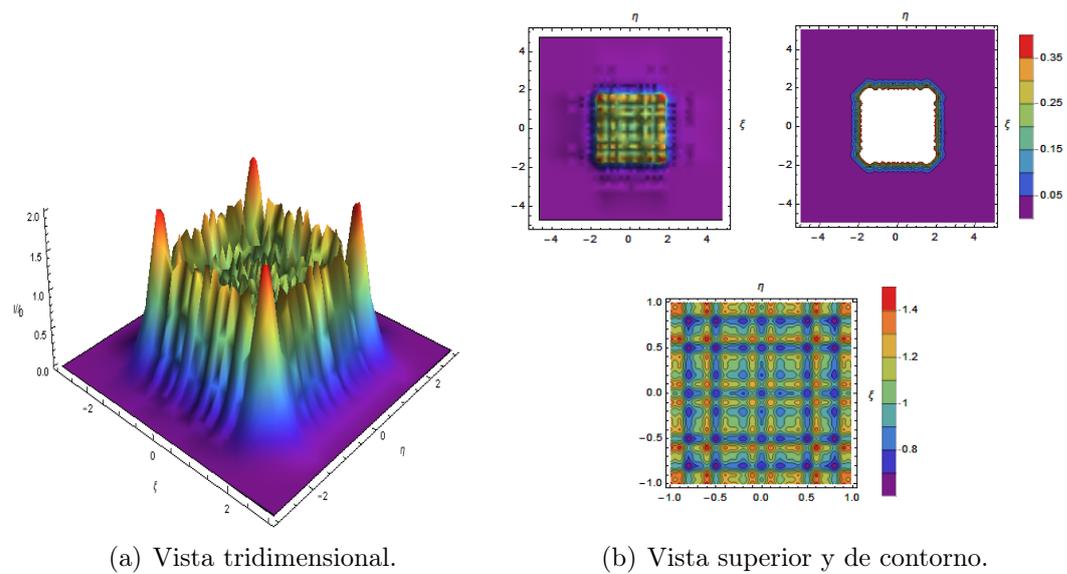


FIGURA 4.6: Gráficos de irradiancia de una abertura cuadrada con $a = 2$ y $b = 2$ y número de Fresnel $F = 10$.

Primeramente se hace el análisis para $C1$ cuando $F=0.1$, el pico principal tiene forma de una función sinc^2 , cuyo valor máximo de irradiancia es de 0,158 y las oscilaciones secundarias tienen un valor de irradiancia de 0,001. Además si se hace un corte transversal en el pico principal, como se muestra en la gráfica de contorno del tamaño de la rendija, se observan formas (lobulos) circulares que verifican que el pico es de forma cónica.

Si $F=1$, el valor máximo de irradiancia es de 2,4, alrededor de este pico máximo se observan unos picos (hombros) secundarios (de color verde y azul claro) cuyos valores de irradiancia están entre 1,6 para el verde y 1,2 para el azul claro. Y las oscilaciones más pequeñas están en valores de irradiancia relativa de 0,05

Ahora para $F=10$, el pico central decae a un nivel de irradiancia relativa de 0,75, y esta pérdida de irradiancia central se redistribuye de manera simétrica donde los picos de máxima irradiancia se observan en las esquinas cuyo valor relativo es de 2,0, además de varios picos secundarios entre los picos máximos cuyo valor de irradiancia relativa está entre 1,4 y 1,2. Fuera de la zona cuadrada central $a=2$ y $b=2$, se presentan todavía oscilaciones de muy baja amplitud llegando a niveles relativos de 0,05.

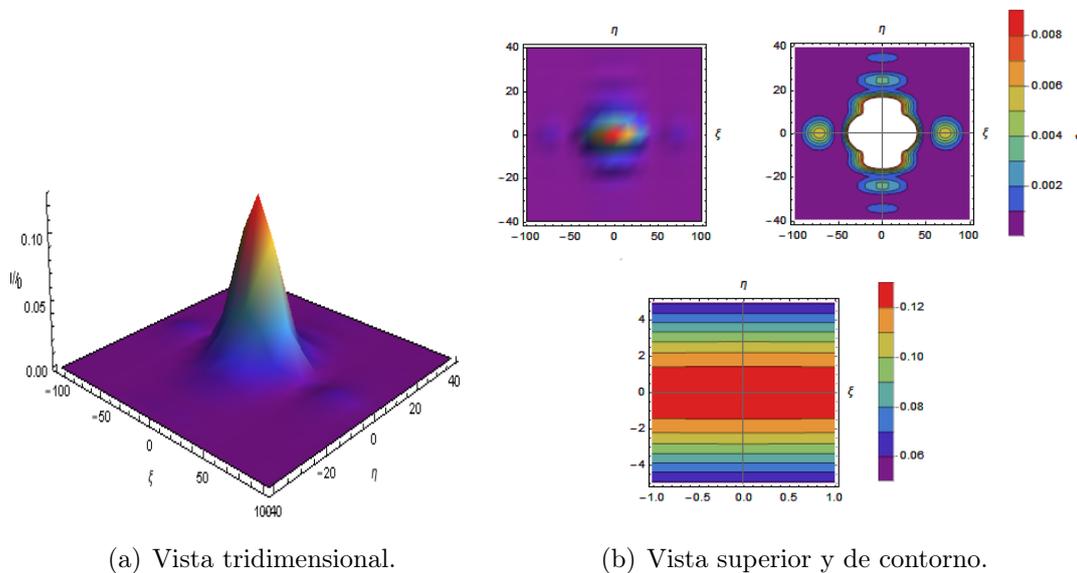


FIGURA 4.7: Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 10$ y número de Fresnel $F = 0,1$.

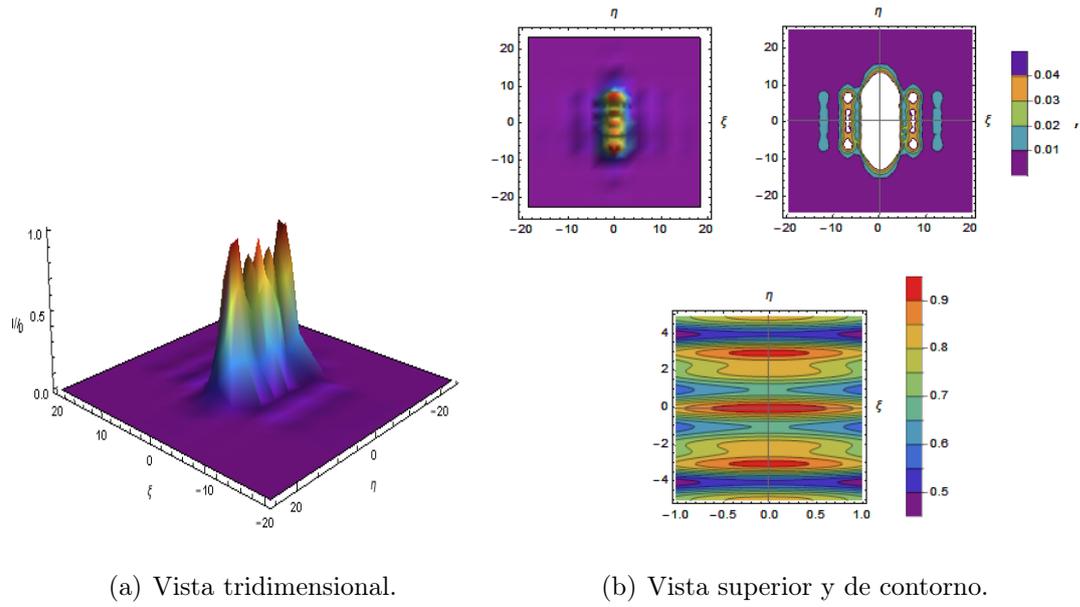


FIGURA 4.8: Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 10$ y número de Fresnel $F = 1$.

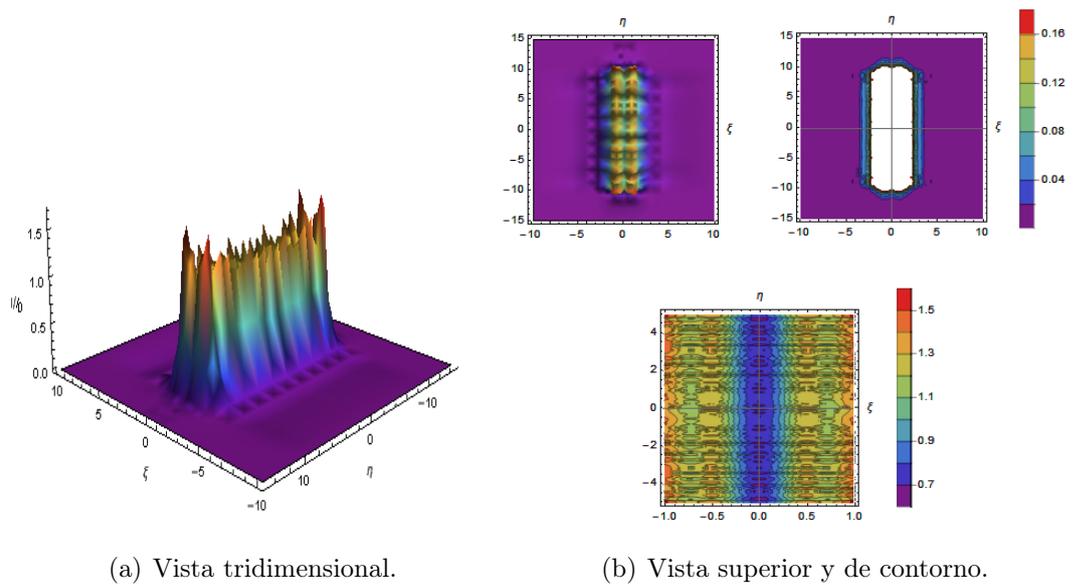


FIGURA 4.9: Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 10$ y número de Fresnel $F = 10$.

Ahora si analizamos a R2 con $F=0.1$, se percibe un pico principal parecido a la función sinc^2 , pero si se hace un corte como se muestra en la gráfica de contorno del tamaño de la rendija, se observa que este pico principal está alargado, cuya área máxima representada en color rojo tiene un valor de irradiancia de 0,12. Y las oscilaciones más pequeñas fuera de la zona central que se representan por azul oscuro hacia el morado tienen un valor de irradiancia relativa de 0,002.

Si $F=1$, se observa un pico principal alargado en el eje η destacando unos picos cuyos valores de irradiancia es de 1,0 para los representados en rojo que están en las orillas y entre 0,9 y 0,8 para los picos secundarios que se encuentran en medio de los picos de mayor valor de irradiancia. Así mismo las oscilaciones más pequeñas que se encuentran fuera de la zona central tienen un valor de irradiancia relativa de 0,01.

Finalmente para $F=10$ para este caso con R2, se alarga aún más el pico principal con respecto al caso anterior y se genera una serie de relieves con diferentes valores de irradiancia que están entre 1,7 para los representados en rojo y 1,3 para los que se ven en amarillo. Para las oscilaciones pequeñas que están fuera de la zona central que se representan en colores azul oscuro tienen un valor de irradiancia relativa de 0,04.

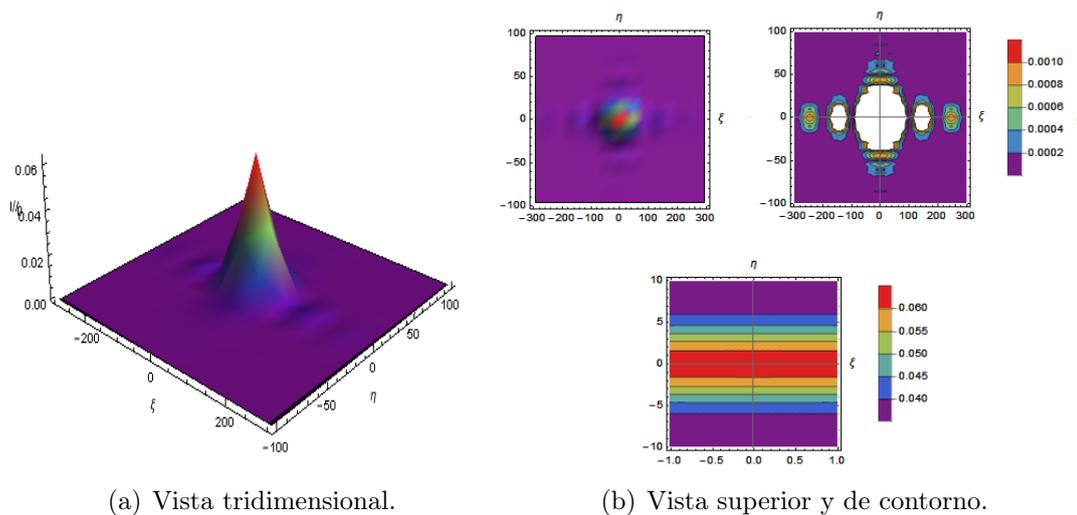


FIGURA 4.10: Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 20$ y número de Fresnel $F = 0,1$.

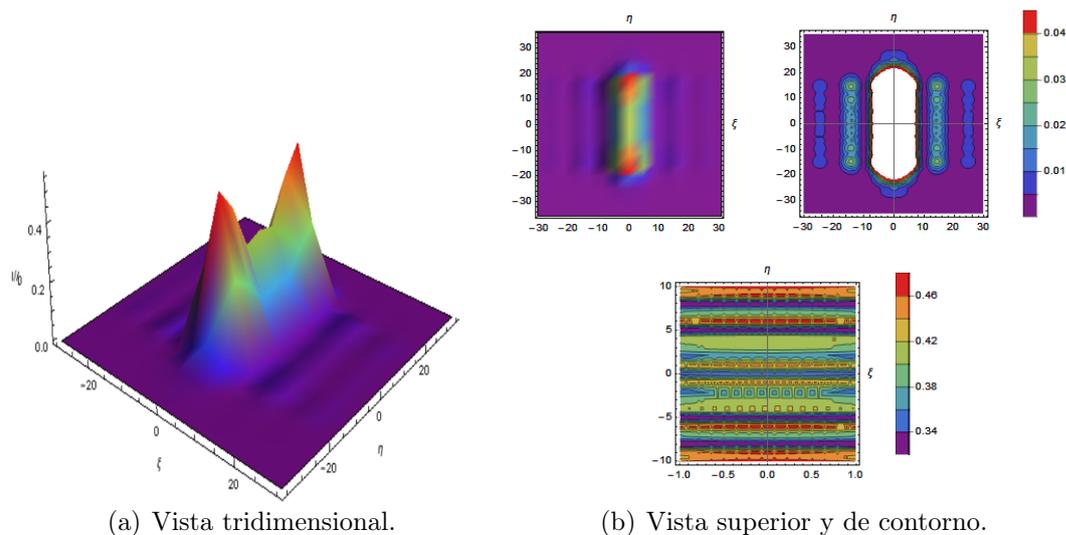


FIGURA 4.11: Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 20$ y número de Fresnel $F = 1$.

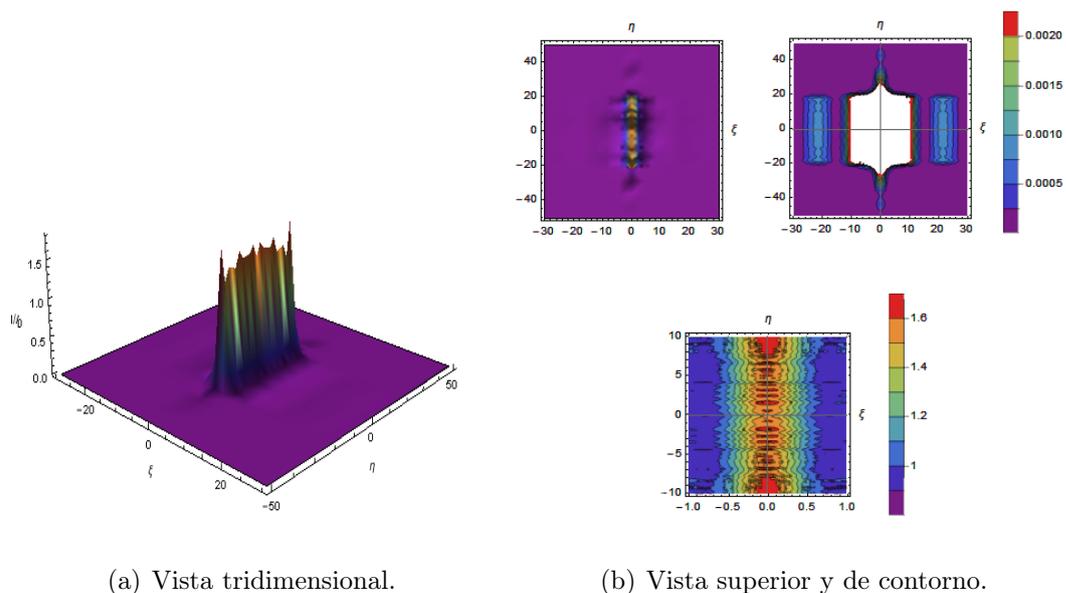


FIGURA 4.12: Gráficos de irradiancia de una abertura rectangular con $a = 2$ y $b = 20$ y número de Fresnel $F = 10$.

Por último se analiza el caso para R3 empezando con $F=0.1$, que es muy semejante al caso R2, en el que se percibe un pico principal en forma de la función sinc^2 y de igual manera si se hace un corte como se muestra en la gráfica de contorno del tamaño de la rendija, se observa que este pico principal está alargado, cuya área máxima representada en color rojo tiene un valor de irradiancia de 0,06. Y las oscilaciones más

pequeñas que se representan por azul oscuro tienen un valor de irradiancia de 0,0002.

Con $F=1$ se observa que el pico principal está alargado en el eje η destacando dos picos a las orillas cuyos valores de irradiancia son 0,4. Y las oscilaciones secundarias que se ven en color azul oscuro tienen una irradiancia de 0,01.

Y finalmente para $F=10$ para este caso con R3, se observa un pico principal más angosto con respecto al caso del número de Fresnel anterior y aún más con respecto a R2, y de igual manera genera una serie de relieves con diferentes valores de irradiancia que están entre 1,6 para los representados en rojo y 1,4 para los que se ven en amarillo. Y las oscilaciones pequeñas representadas en azul oscuro tienen un valor de irradiancia de 0,0005.

Por otro lado, a partir de la ecuación (4.41) si consideramos el caso cuando $\xi = \eta$ para el caso de una abertura cuadrada, se obtienen las irradiancias que se muestran en la Figura (4.13). Estos gráficos de irradiancia corresponden al caso más sencillo para una abertura cuadrada y que además coinciden con lo reportado en la literatura [59], pero en este caso usando la generalización obtenida para la ecuación (4.41).

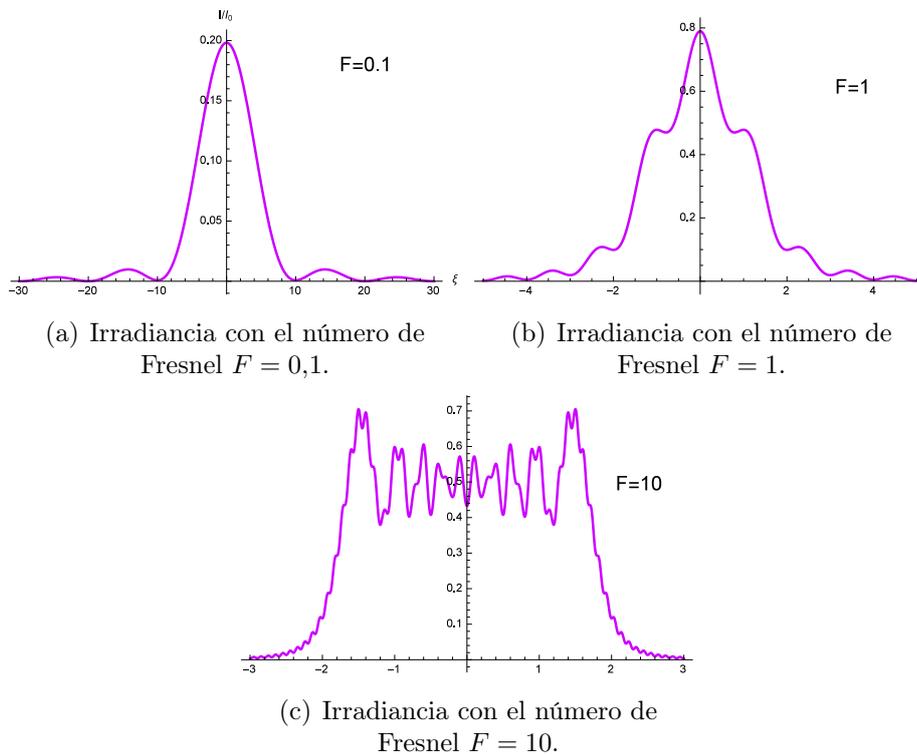


FIGURA 4.13: Gráficos de irradiancia de una abertura cuadrada con $a = b = 2$ y además $\xi = \eta$ para los números de Fresnel $F = 0,1$, $F = 1$ y $F = 10$.

4.3. Espiral de Cornu

Se considera una porción de un frente de onda plana como en la Figura (4.14)

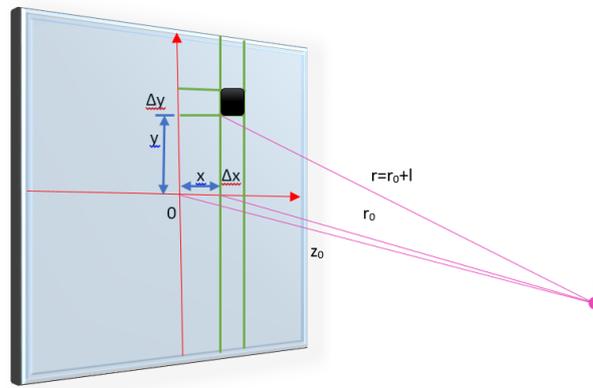


FIGURA 4.14: Subdivisión de un plano en bandas infinitesimales.

Y un sistema de coordenadas cartesianas con los ejes x y y en el plano de la onda, el origen en O y con el eje z que pasa por el punto de observación P . Sea z_0 la distancia desde P hasta la superficie de onda. Se desea calcular la perturbación óptica producida en P por ondas secundarias, para ello se consideran porciones infinitesimales paralelos al eje y , y estas ondas secundarias llegan a P con diferentes fases [61].

Para investigar la forma de la curva asociada a la perturbación óptica debido a estas porciones infinitesimales, se considera un elemento de la porción que va de y a $y + \Delta y$, y además un elemento de arco BB' .

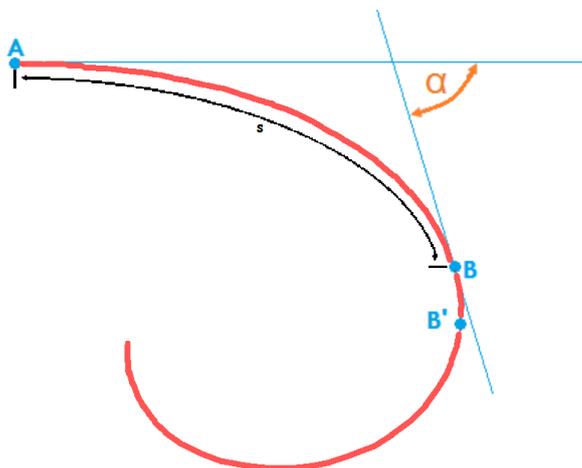


FIGURA 4.15: Construcción de la espiral de Cornu.

También supongamos que x y y son pequeños comparados con z_0 . Entonces calculando la amplitud de la perturbación óptica producida en P por el elemento $\Delta x \Delta y$, podemos ignorar el factor de oblicuidad y considerar la distancia del elemento $\Delta x \Delta y$

respecto a P . Entonces la amplitud de la perturbación óptica y la longitud del arco representativo BB' son proporcionales al área $\Delta x \Delta y$ [61].

De aquí se deduce que la longitud s del arco AB correspondiente a la porción $\Delta x \Delta y$ y es proporcional al área $y \Delta x$. Y la perturbación óptica originada en el punto de coordenadas (x, y) está retrasada con respecto a aquellas que han sido originadas en el punto de coordenadas $(x, 0)$ en un ángulo α dado por:

$$\alpha = 2\pi \frac{r - r_0}{\lambda} \quad (4.42)$$

donde r y r_0 son las distancias entre los dos puntos y P ; también α representa el ángulo formado por las tangentes a la curva entre los puntos B y A . Por el teorema de Pitágoras se tiene $r^2 = r_0^2 + y^2$ y notese que $r = r_0 + l$, así

$$(r_0 + l)^2 = r_0^2 + y^2 \quad (4.43)$$

esto es,

$$2r_0l + l^2 = y^2 \quad (4.44)$$

De acuerdo a la suposición, se sabe que $x \ll z_0$ y $y \ll z_0$, lo que implica que l^2 es muy pequeña comparada con r_0 y en consecuencia se obtiene la siguiente aproximación

$$2r_0l \approx y^2 \quad (4.45)$$

entonces se concluye que

$$r - r_0 = l \approx \frac{y^2}{2r_0} . \quad (4.46)$$

Si se sustituye la ecuación (4.46) en la ecuación (4.42) se tiene:

$$\alpha \approx \frac{\pi}{r_0 \lambda} y^2 . \quad (4.47)$$

De este modo α es proporcional a y^2 ; y como y es proporcional a la longitud de arco s de la curva, implica que α es proporcional a s^2 , tal que se puede escribir

$$\alpha = K s^2 \quad (4.48)$$

con K una constante.

Recordando que el radio de curvatura esta definido por:

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| \quad (4.49)$$

se obtiene

$$\frac{1}{\rho} = 2K s . \quad (4.50)$$

La curva definida por las ecuaciones (4.48) o (4.50) es conocida como la *Espiral de Cornu* [61], o también conocida como *Clotoide* del verbo griego $\kappa\lambda\omega\theta\omega$ que significa torcer, girar o rotar y el sustantivo $\epsilon\iota\delta\omicron\zeta$ que significa forma [62]. O también conocida como *Espiral de Euler* [63].

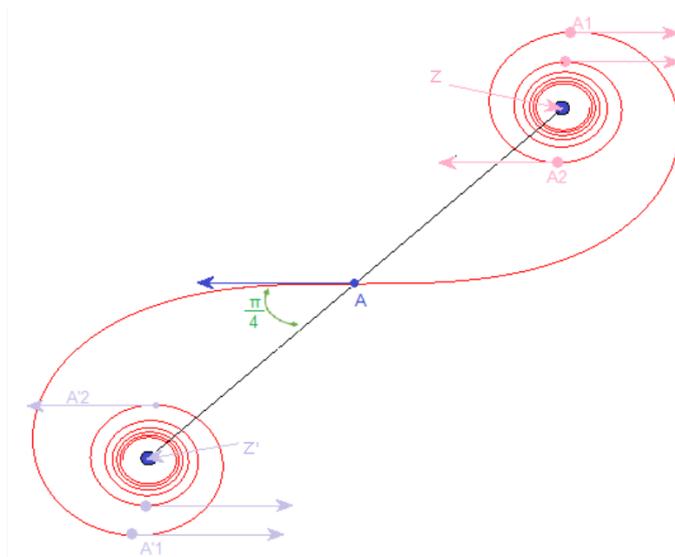


FIGURA 4.16: Esquema de la espiral de Cornu.

El punto medio A donde el radio de curvatura es infinito corresponde a la intersección de la porción infinitesimal con el eje x , es decir para $y = 0$ y por consiguiente $s = 0$. La parte de A a Z de la curva, corresponde a la porción infinitesimal para la cual $y > 0$. Los puntos A_1 y A'_1 donde las tangentes a la curva son antiparalelas a la tangente en A , en los que $\alpha = \pi$, corresponden a los puntos de la porción infinitesimal para los cuales $r - r_0 = \frac{\lambda}{2}$. Los puntos A_2 y A'_2 en los que $\alpha = 2\pi$, corresponden a los puntos de la porción infinitesimal para los cuales $r - r_0 = \lambda$, etcétera [61].

Si se quiere un trazado riguroso de la espiral de Cornu debe verse la Figura (4.17).

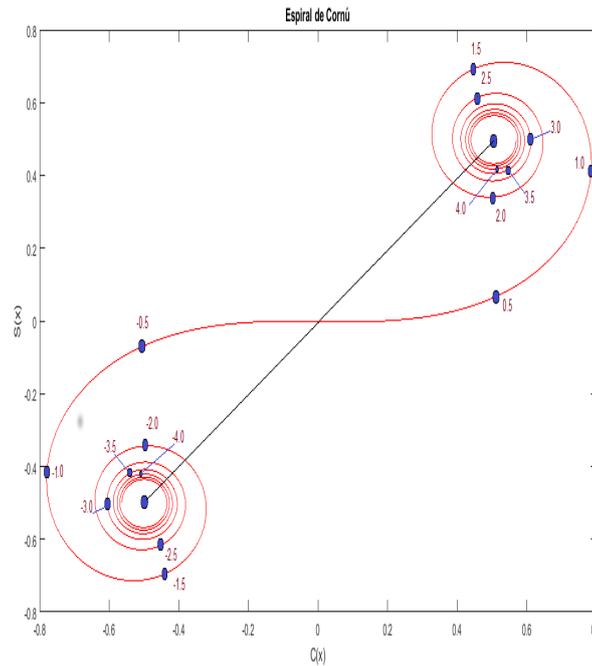


FIGURA 4.17: La espiral de Cornu. El factor s se marca en la curva.

La espiral de Cornu fue nombrada así por *Marie Alfred Cornu* (1841-1902), profesor de la École Polytechnique de París [64], quien propuso una descripción geométrica de las integrales de Fresnel. La espiral es un gráfico en el plano complejo de la relación $\int_0^s e^{i\pi\omega^2/2} d\omega = C_F(s) + iS_F(s)$, donde s adquiere todos los valores posibles desde 0 hasta $\pm\infty$, esto es, se representa $C_F(s)$ en el eje horizontal (real) y $S_F(s)$ en eje vertical (imaginario) [65].

Cuando s se acerca a $\pm\infty$, la curva se mueve en espiral hacia sus valores límite $\pm\frac{1}{2}$ [58]. La pendiente de la espiral

$$\frac{dS_F}{dC_F} = \frac{\sin(\pi w^2/2)}{\cos(\pi w^2/2)} = \tan\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) \quad (4.51)$$

La espiral de Cornu puede usarse como herramienta conveniente para determinaciones cuantitativas o para conseguir una descripción cualitativa de un patrón de difracción [65]. La Tabla (4.1), muestra los valores numéricos para diferentes longitudes de arco y los valores de sus correspondientes integrales de Fresnel.

| s | $C_F(s)$ | $S_F(s)$ | s | $C_F(s)$ | $S_F(s)$ |
|--------|----------|----------|--------|----------|----------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 2.6076 | 0.3864 | 0.5428 |
| 0.1051 | 0.1051 | 0.0006 | 2.7077 | 0.3961 | 0.4461 |
| 0.2052 | 0.2051 | 0.0045 | 2.8078 | 0.4751 | 0.3898 |
| 0.3053 | 0.3047 | 0.0149 | 2.9079 | 0.5685 | 0.4151 |
| 0.4054 | 0.4027 | 0.0347 | 3.0080 | 0.6054 | 0.5043 |
| 0.5055 | 0.4974 | 0.0669 | — | — | — |
| 0.6056 | 0.5858 | 0.1136 | 3.1081 | 0.5548 | 0.5862 |
| 0.7057 | 0.6637 | 0.1761 | 3.2082 | 0.4588 | 0.5900 |
| 0.8058 | 0.7259 | 0.2543 | 3.3083 | 0.4046 | 0.5111 |
| 0.9059 | 0.7665 | 0.3454 | 3.4084 | 0.4452 | 0.4246 |
| 1.0060 | 0.7798 | 0.4443 | 3.5085 | 0.5403 | 0.4189 |
| 1.1061 | 0.7618 | 0.5423 | 3.6086 | 0.5881 | 0.5009 |
| 1.2062 | 0.7114 | 0.6281 | 3.7087 | 0.5341 | 0.5787 |
| 1.3063 | 0.6329 | 0.6892 | 3.8088 | 0.4416 | 0.5597 |
| 1.4064 | 0.5367 | 0.7138 | 3.9089 | 0.4257 | 0.4669 |
| 1.5065 | 0.4393 | 0.6949 | 4.0090 | 0.5074 | 0.4210 |
| 1.6066 | 0.3613 | 0.6337 | 4.1091 | 0.5759 | 0.4846 |
| 1.7067 | 0.3228 | 0.5426 | 4.2092 | 0.5337 | 0.5676 |
| 1.8068 | 0.3363 | 0.4447 | 4.3093 | 0.4432 | 0.5471 |
| 1.9069 | 0.4002 | 0.3695 | 4.4094 | 0.4439 | 0.4547 |
| 2.0070 | 0.4953 | 0.3436 | 4.5095 | 0.5345 | 0.4385 |
| 2.1071 | 0.5871 | 0.3787 | 4.6096 | 0.5642 | 0.5253 |
| 2.2072 | 0.6379 | 0.4627 | 4.7097 | 0.4819 | 0.5650 |
| 2.3073 | 0.6232 | 0.5596 | 4.8098 | 0.4351 | 0.4870 |
| 2.4074 | 0.5480 | 0.6222 | 4.9099 | 0.5100 | 0.4360 |
| 2.5075 | 0.4506 | 0.6161 | 5.0000 | 0.5636 | 0.4992 |

TABLA 4.1: Tabla para diferentes valores de la longitud de arco s y sus correspondientes valores de las integrales de Fresnel.

4.4. Difracción de Fresnel para una Sola Rendija

Se puede analizar la difracción de Fresnel para una rendija única como una extensión del problema de la abertura rectangular. Basta con alargar el rectángulo, haciendo que $v_1 \rightarrow -\infty$, $v_2 \rightarrow \infty$ [65], entonces la perturbación óptica cambia a

$$U_P(u) = \frac{C_U}{2} \{ [C_F(u_2) - C_F(u_1)] + i [S_F(u_2) - S_F(u_1)] \} \times \left\{ \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] + i \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.52)$$

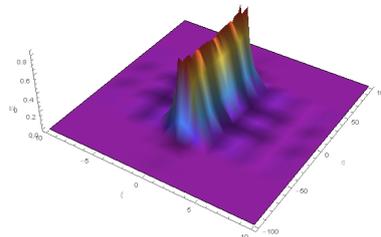
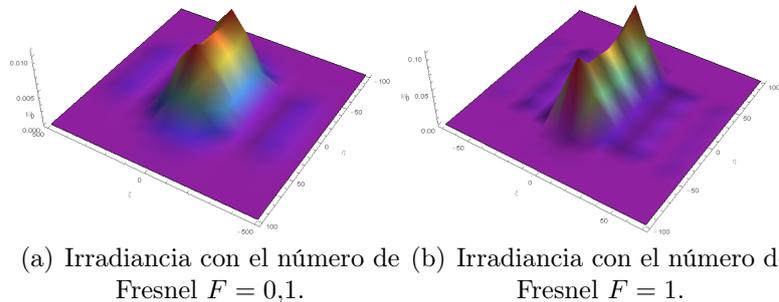
recordando que $C_F(+\infty) = S_F(+\infty) = \frac{1}{2}$ y $C_F(-\infty) = S_F(-\infty) = -\frac{1}{2}$. Así

$$U_P(u) = \frac{1+i}{2} C_U \{ [C_F(u_2) - C_F(u_1)] + i [S_F(u_2) - S_F(u_1)] \} \quad (4.53)$$

Y la irradiancia $I_P(u)$ quedaría como

$$I_P(u) = \frac{I_0}{2} \{ [C_F(u_2) - C_F(u_1)]^2 + [S_F(u_2) - S_F(u_1)]^2 \} \quad (4.54)$$

Por ejemplo, si se considera una rejilla de difracción con líneas de 1 mm de ancho y 1 mm de separación y $50 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ el tamaño de la rejilla, la irradiancia se muestra en la Figura (4.18).



(c) Irradiancia con el número de Fresnel $F = 10$.

FIGURA 4.18: Gráfico de irradiancia para una rejilla única con $a = 1 \text{ mm}$ y $b = 50 \text{ mm}$ para diferentes números de Fresnel.

4.5. Difracción de Fresnel en un Borde Recto

Consideremos los fenómenos de difracción observados cerca del extremo de la sombra geométrica producida por un borde recto de una pantalla opaca plana. Supongamos que la onda incidente es plana y paralela al plano de la pantalla [66], como se muestra en la Figura 4.19

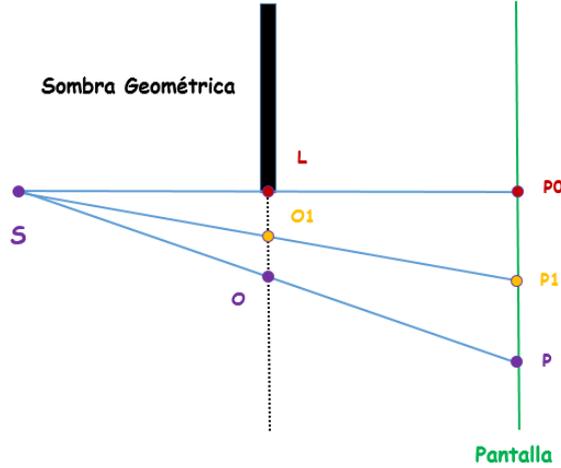


FIGURA 4.19: Geometría de la difracción en un borde recto.

Se presenta L como el borde de la sombra geométrica, con P_0 el punto de observación en la dirección de la punta de la sombra geométrica.

Para calcular la perturbación óptica, se parte de las consideraciones hechas a partir de la rendija única donde $v_1 \rightarrow -\infty$ y $v_2 \rightarrow \infty$ y además $u_2 \rightarrow \infty$ [66], se tiene

$$U_P(u_1) = \frac{1+i}{2} C_U \left\{ \left[\frac{1}{2} - C_F(u_1) \right] + i \left[\frac{1}{2} - S_F(u_1) \right] \right\} \quad (4.55)$$

y la irradiancia $I_P(u_1)$ es:

$$I_P(u_1) = \frac{I_0}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} - C_F(u_1) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S_F(u_1) \right]^2 \right\}. \quad (4.56)$$

Para P_0 que está frente del borde se tiene $C_F(0) = S_F(0) = 0$ ya que $u_1 = 0$, esto implica

$$I_P(u_1) = \frac{I_0}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \right]^2 \right\},$$

$$\frac{I_P(u_1)}{I_0} = \frac{1}{4}. \quad (4.57)$$

Entonces la irradiancia se reduce a un cuarto, esto es lo que ocurre en el punto (3) de la Figura (4.20). Moviéndose dentro de la región de la sombra geométrica hacia el

punto (2) y sucesivamente hacia el punto (1) la irradiancia cae rápidamente. Por otro lado, a partir del punto (3), las oscilaciones llegan a un máximo denotado por el punto (4) y posteriormente estas oscilaciones disminuyen gradualmente en magnitud, como en el punto (5) y en adelante.

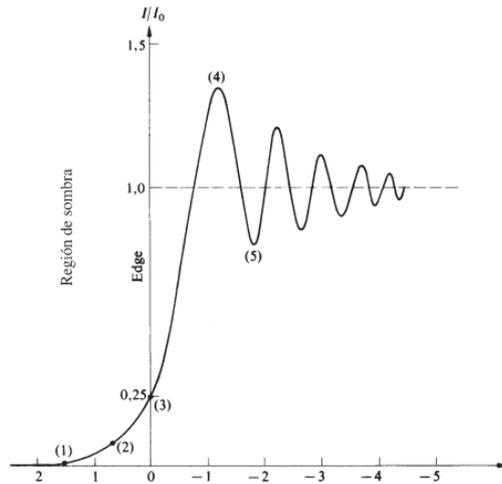


FIGURA 4.20: Gráfico de irradiancia para la difracción de campo cercano de un borde recto [66].

El patrón de difracción de borde recto puede observarse utilizando cualquier tipo de rejilla, por ejemplo, en la física de materiales se ha reportado en la difracción electrónica de Fresnel en un borde plano de un cristal de óxido de magnesio (MgO), ver la Figura (4.21).

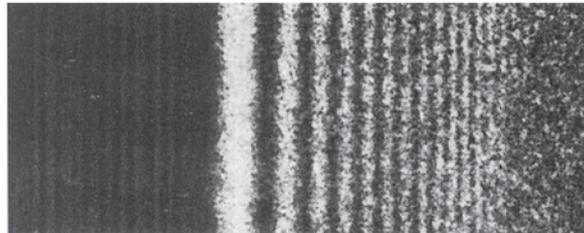


FIGURA 4.21: Difracción electrónica de Fresnel en un borde plano de un cristal de MgO [66].

Capítulo 5

Solución de la Ecuación Diferencial de Tercer Orden Asociada a la Difracción de Campo Cercano

5.1. Desarrollo Matemático

De la literatura [67, 68] se conoce que las integrales de Fresnel $S_F(z)$ y $C_F(z)$ satisfacen la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal de tercer orden:

$$zw'''(z) - w''(z) + \pi^2 z^3 w'(z) = 0 \quad (5.1)$$

cuya solución es $w(z) = c_1 S_F(z) + c_2 C_F(z) + c_3$, donde $w(z)$ es una función de la variable z y c_1, c_2, c_3 son constantes. [67, 68]

Resolviendo la ecuación (5.1) por medio de reducción de orden a través de $y(z) = w'(z)$, arreglando los términos se tiene

$$y'' - \frac{1}{z}y' + \pi^2 z^2 y = 0 . \quad (5.2)$$

Para solucionar la ecuación (5.2), se realiza un cambio de variable dependiente $\zeta = \frac{y'}{y}$ y se sustituye en ecuación (5.2), obteniendo

$$\zeta' + \zeta^2 - \frac{\zeta}{z} + \pi^2 z^2 = 0 . \quad (5.3)$$

Notese que la ecuación (5.3) es una ecuación no lineal de Riccati. Para obtener la solución general $\zeta_g = \zeta_p + \frac{1}{u}$ se necesita $\zeta_p = \varphi$ una solución particular y $\frac{1}{u}$ una solución de la parte homogénea de la ecuación. Entonces la primera derivada de ζ_g es

$$\zeta'_g = \varphi' - \frac{u'}{u^2} . \quad (5.4)$$

Sustituyendo ζ_g y ζ'_g en la ecuación (5.3) y reorganizando los términos, se tiene

$$\varphi' + \varphi^2 - \frac{\varphi}{z} + \pi^2 z^2 = \frac{u'}{u^2} - \frac{2\varphi}{u} - \frac{1}{u^2} + \frac{1}{zu}. \quad (5.5)$$

Notese que basta con resolver la parte derecha de la ecuación anterior para ello se considera $e^{\int(\frac{1}{z}-2\varphi)dz}$ como el factor de integración, y con ello se obtiene

$$\frac{1}{u} = \frac{e^{\int(\frac{1}{z}-2\varphi)dz}}{\mu + \int e^{\int(\frac{1}{z}-2\varphi)dz} dz} \quad (5.6)$$

donde la ecuación (5.6) es solución de la parte homogénea de la ecuación de Riccati, con μ una constante de integración real.

Ahora si usamos como solución particular $w(z) = \int e^{i\frac{\pi}{2}z^2} dz$, entonces $\zeta = \frac{y'}{y} = i\pi z$. Entonces la solución general de Riccati que se obtiene es

$$\zeta_g = i\pi z + \frac{ze^{-i\pi z^2}}{\mu + \int ze^{-i\pi z^2} dz}. \quad (5.7)$$

Haciendo $\zeta_g = \frac{y'}{y} = \frac{d}{dz} \ln(y)$, se obtiene

$$\zeta_g = \frac{d}{dz} \ln(y) = \frac{d}{dz} \left(\ln(e^{i\frac{\pi}{2}z^2}) \right) + \frac{d}{dz} \ln \left(\mu + \int ze^{-i\pi z^2} dz \right). \quad (5.8)$$

Resolviendo (5.8) y regresando a la variable original con los cambios de variable anteriormente realizados $w' = y = \frac{dw}{dz}$ se obtiene que la solución general de la ecuación diferencial de tercer orden (5.1) es

$$w(z) = C_2 \int e^{i\frac{\pi}{2}z^2} dz + \int \left(\frac{C_2}{\mu} e^{i\frac{\pi}{2}z^2} \int ze^{-i\pi z^2} dz \right) dz \quad (5.9)$$

donde C_2 es una constante de integración. Notando que $\mathfrak{F}(z) = \int e^{i\frac{\pi}{2}z^2} dz$ contiene las integrales de Fresnel, se obtiene la solución general de la forma

$$\frac{w(z)}{C_2} = \mathfrak{F}(z) - \frac{1}{2i\pi\mu} \int e^{-i\frac{\pi}{2}z^2} dz. \quad (5.10)$$

Debido a que C_2 es solo una constante, esta es solo un parámetro de escalamiento, así que sin pérdida de generalidad se puede considerar $C_2 = 1$ o se puede considerar una función $v(z) = \frac{w(z)}{C_2}$, esto es

$$v(z) = \mathfrak{F}(z) - \frac{1}{2i\pi\mu} \int e^{-i\frac{\pi}{2}z^2} dz. \quad (5.11)$$

Aquí se puede hacer mención que al resolver la integral $\frac{1}{2i\pi\mu} \int e^{-i\frac{\pi}{2}z^2} dz$ su solución esta asociada a una función error, que se puede considerar como función o factor de perturbación para el sistema dado por las integrales de Fresnel, y que a su vez está afectado por un parámetro constante μ , esto es

$$\frac{1}{2i\pi\mu} \int e^{-i\frac{\pi}{2}z^2} dz = -\frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) \operatorname{erf} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \sqrt{\pi} z \right]}{\pi\mu}. \quad (5.12)$$

Así la solución completa se puede escribir de la siguiente manera

$$v(z) = \int \cos\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)dz + i \int \sin\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)dz + \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) \operatorname{erf}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\sqrt{\pi}z\right]}{\pi\mu}. \quad (5.13)$$

Y finalmente se calcula la primera, segunda y tercera derivada de la función $v(z)$ y se sustituye estas derivadas en la ecuación (5.1) cuyo resultado obtenido es cero, con lo que se comprueba que la función $v(z)$ es solución de la ecuación diferencial de tercer orden y por tanto se verifica que el análisis matemático realizado es correcto.

5.2. Resultados y Análisis

Notese que la función error puede ser expresada en términos de las integrales de Fresnel, así la ecuación (5.13) se puede escribir como

$$v(z) = \frac{(i + 2\pi\mu)C_F(z) + S_F(z) + 2i\mu\pi S_F(z)}{2\pi\mu} \quad (5.14)$$

Para analizar mejor la función $v(z)$, se separa la ecuación (5.14) en una parte real $Re(v(z))$ y en una parte imaginaria $Im(v(z))$, tal como

$$Re(v(z)) = C_F(z) + \frac{1}{2\pi\mu}S_F(z) \quad (5.15)$$

$$Im(v(z)) = S_F(z) + \frac{1}{2\pi\mu}C_F(z) \quad (5.16)$$

Primeramente hay que enfatizar que si $\mu = 0$ se tiene una discontinuidad, ya que el cociente quedaría indeterminado. Por otro lado, cuanto más pequeño es el valor de μ , esto es cuando $\mu \rightarrow 0$, la perturbación de la segunda parte de las ecuaciones (5.15) y (5.16) es cada vez más significativa, y viceversa cuanto más grande es el valor de μ , esto es cuando $\mu \rightarrow \infty$, la perturbación producida por la segunda parte de las ecuaciones (5.15) y (5.16) será prácticamente nula con lo que se llega a que la parte real de la función queda determinada por el coseno de Fresnel y la parte imaginaria de la función queda determinada por el seno de Fresnel.

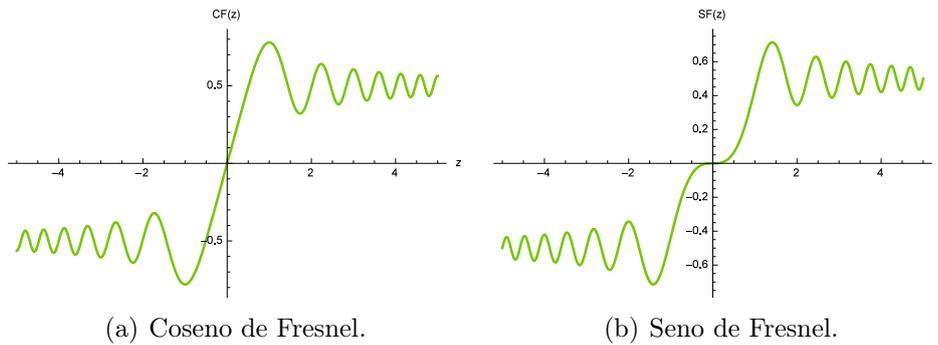


FIGURA 5.1: Gráficos del coseno y seno de Fresnel.

A continuación se analizan las funciones $Re(v(z))$ e $Im(v(z))$ cuyos gráficos son similares al coseno de Fresnel y al seno de Fresnel respectivamente, pero con ciertas deformaciones debido al valor del parámetro μ .

5.2.1. Análisis de $Re(v(z))$

En la Figura (5.3), se analiza la función $Re(v(z))$ contra la variable z para valores de μ negativos, donde se observa que para valores entre $(0, -0,01]$ no se observan cambios en la forma de la curva, solamente cambia la escala del eje vertical según el número de dígitos que tenga μ después del punto decimal. Cuando $\mu = -0,02$ empieza a deformarse la curva, intersectándose con el eje horizontal. De $[-0,03, -0,1]$ las oscilaciones de las ramificaciones que se encuentran en los cuadrantes II y IV empiezan a crecer. En $\mu = -0,2$ las oscilaciones de las ramificaciones empiezan a intersectar el eje horizontal, como si la curva estuviese tratando de desplazarse a través de los cuadrantes, es decir, la ramificación del cuadrante II pareciese desplazarse al cuadrante III y la ramificación del cuadrante IV pareciese desplazarse al cuadrante I. Aquí cabe señalar que antes del valor $\mu = -0,2$ se observa una perturbación en la pendiente que une las oscilaciones de las ramificaciones y cuando $\mu = -0,2$ de manera clara se observa que deja de aparecer esta perturbación. Para valores de $[-0,3, -1,1]$ las oscilaciones de las ramificaciones decrecen para tomar lugar en los cuadrantes I y III. Para $\mu = -1,2$ solamente se percibe un último cambio en la escala del eje vertical. Finalmente para $[-1,2, -\infty)$ ya no existen cambios en la forma de la curva ni en la escala del eje vertical. Concluyendo así que para la ecuación (5.15) el coseno de Fresnel se ve afectado significativamente para valores negativos de μ entre $(0, -1,2]$.

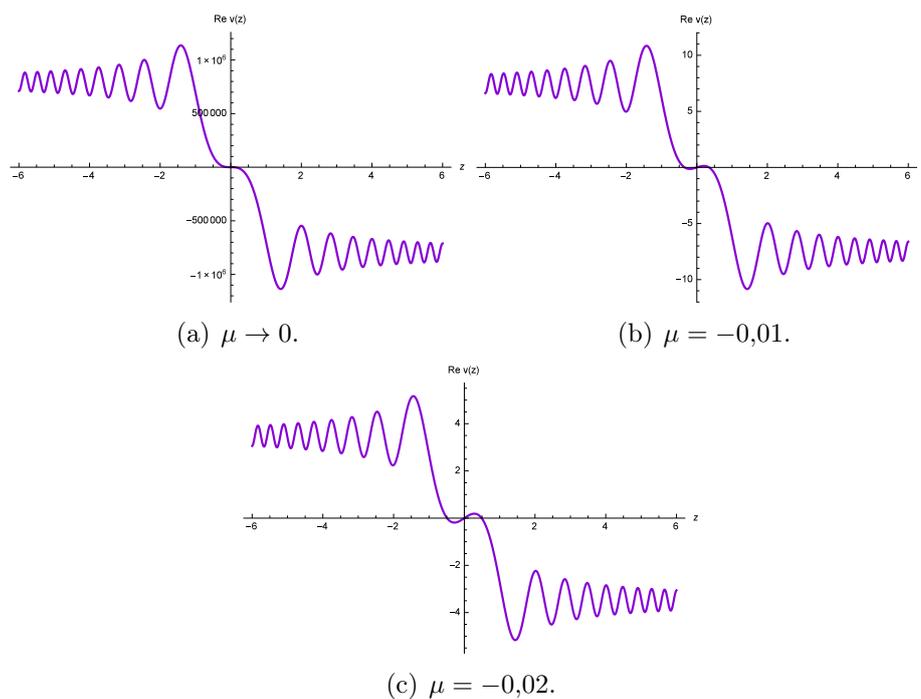


FIGURA 5.2: Comportamiento de la parte real de la solución $v(z)$ con diferentes valores negativos de μ .

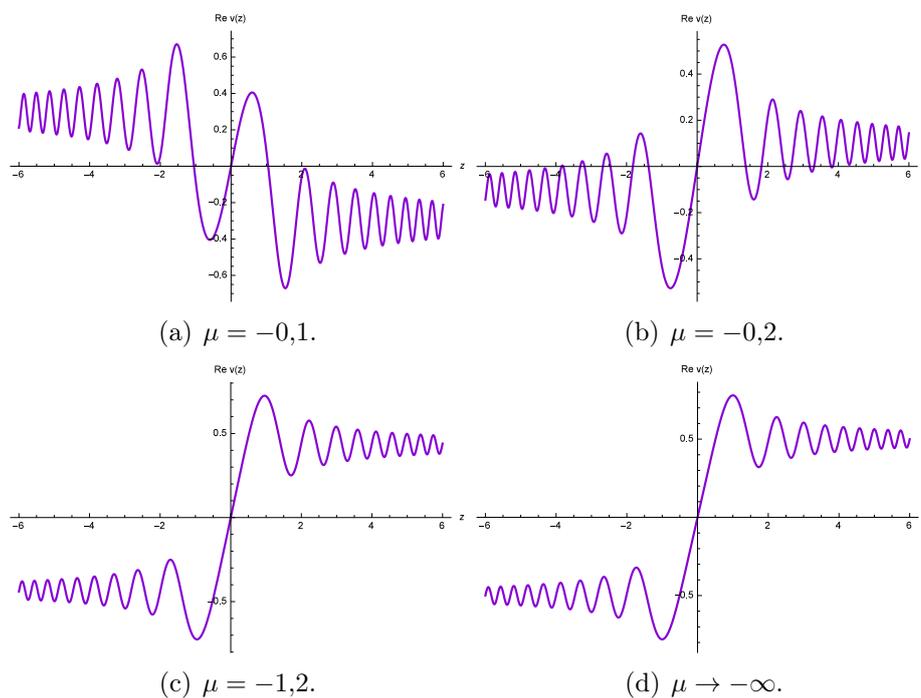


FIGURA 5.3: Comportamiento de la parte real de la solución $v(z)$ con diferentes valores negativos de μ .

Para valores positivos de μ la función $Re(v(z))$ se muestra en la Figura (5.5), donde para valores entre $(0, 0,01]$ la forma de la curva parece invariante solo existe un cambio en la escala del eje vertical de acuerdo al número de dígitos que tenga μ después del punto decimal, aunque cabe recalcar que el perfil de la función presenta una perturbación en la pendiente que une las oscilaciones de las ramificaciones de los cuadrantes I y III. Cuando $\mu = 0,02$ la perturbación de la pendiente empieza a suavizarse. Para valores $[0,03, 0,1]$ se sigue suavizando de manera muy paulatina la perturbación de la pendiente, y la escala del eje vertical decrece. En $\mu = 0,2$ ya no se observa perturbación en la pendiente. Entre $[0,3, 1,1]$ ya no se presenta un cambio en la forma de la curva, solo existen cambios en la escala del eje vertical. Cuando $\mu = 1,2$ es el último cambio de la escala. Y finalmente para $[1,2, +\infty)$ ya no existen cambios ni en la forma de la curva ni en la escala.

Cabe mencionar que a diferencia del caso cuando μ es negativo, aquí no se observa un desplazamiento entre los cuadrantes por parte de las oscilaciones de las ramificaciones en el perfil de la función.

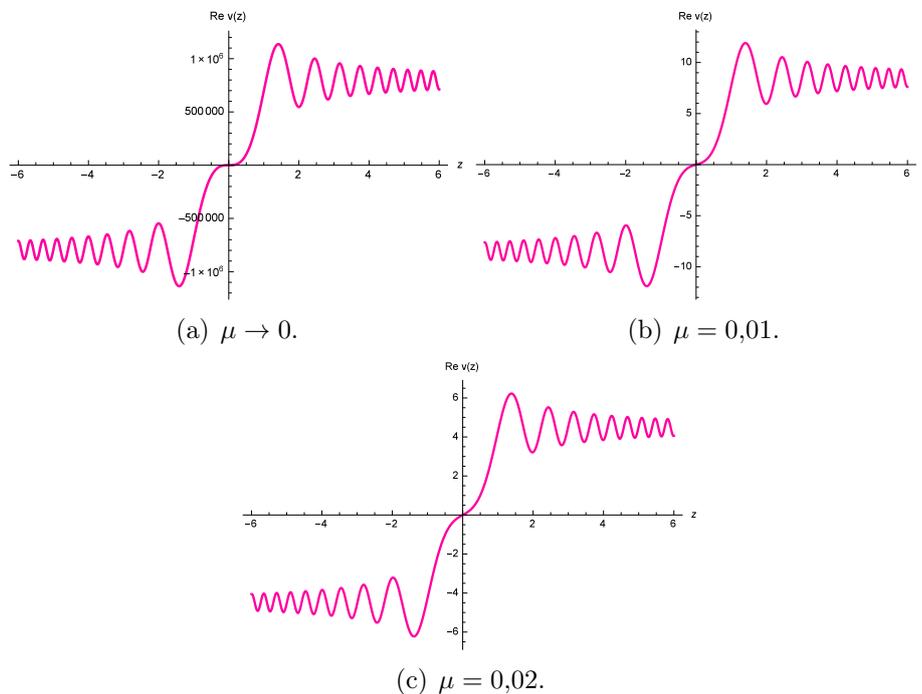


FIGURA 5.4: Comportamiento de la parte real de la solución $v(z)$ con diferentes valores positivos de μ .

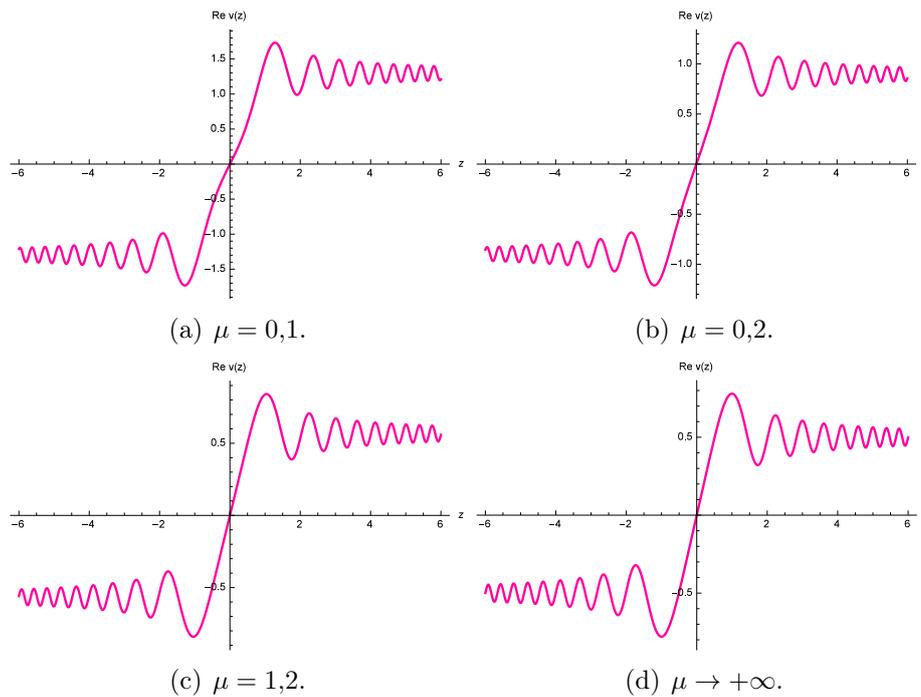


FIGURA 5.5: Comportamiento de la parte real de la solución $v(z)$ con diferentes valores positivos de μ .

En conclusión, la perturbación debido al efecto del parámetro μ es significativa dentro del rango de valores de $[-1,2,1,2]$, con una singularidad en $\mu = 0$. Además de presentarse un desplazamiento entre los cuadrantes por parte de las oscilaciones de las ramificaciones de la curva para valores negativos de μ .

5.2.2. Análisis de $\text{Im}(v(z))$

Primero se analiza para valores de μ negativos, como se muestra en la Figura (5.7) donde se grafica la función $\text{Im}(v(z))$ contra la variable z . Para el intervalo de valores $(0, -0,001]$ la forma de la curva no cambia, solo se observa como decrece la escala del eje vertical; aquí también se observa que las oscilaciones en las ramificaciones de la curva toman lugar en los cuadrantes II y IV. Cuando $\mu = -0,02$ se sigue observando cambios en la escala del eje vertical, pero además empiezan a crecer las oscilaciones en las ramificaciones de la curva. Entre $[-0,003, -0,09]$ siguen creciendo las oscilaciones de las ramificaciones de la curva. y en $\mu = -0,1$ las oscilaciones empiezan a intersectar el eje horizontal. Y cuando $\mu = -0,2$ se presenta un cambio abrupto en la forma de la curva y pareciese que las oscilaciones de las ramificaciones se desplazan de un cuadrante al otro, es decir, las oscilaciones del cuadrante II toman lugar en el cuadrante III y las oscilaciones del cuadrante IV toman lugar en el cuadrante I. Entre los valores $-0,3, -1,9$ las oscilaciones de las ramificaciones decrecen hasta estar totalmente acomodadas en cada uno de los cuadrantes correspondientes, además de presentar una perturbación en la pendiente que une estas ramificaciones. Se presenta el último cambio en la forma de la curva y en su escala para $\mu = -2$. Y en $(\mu = -2, -\infty)$ la curva ya no presenta ningún tipo de modificación.

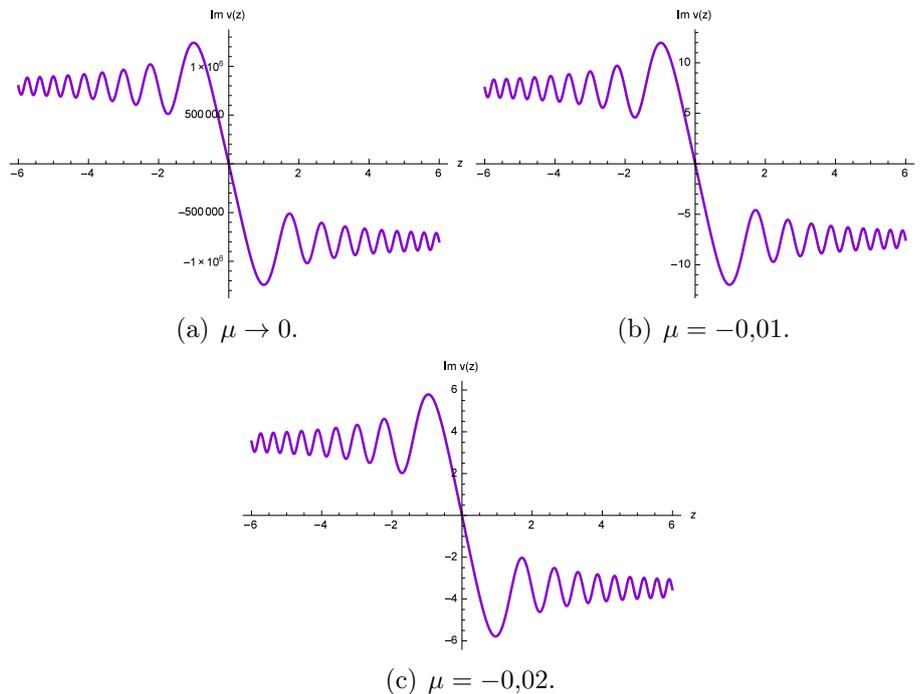


FIGURA 5.6: Comportamiento de la parte imaginaria de la solución $v(z)$ con diferentes valores negativos de μ .

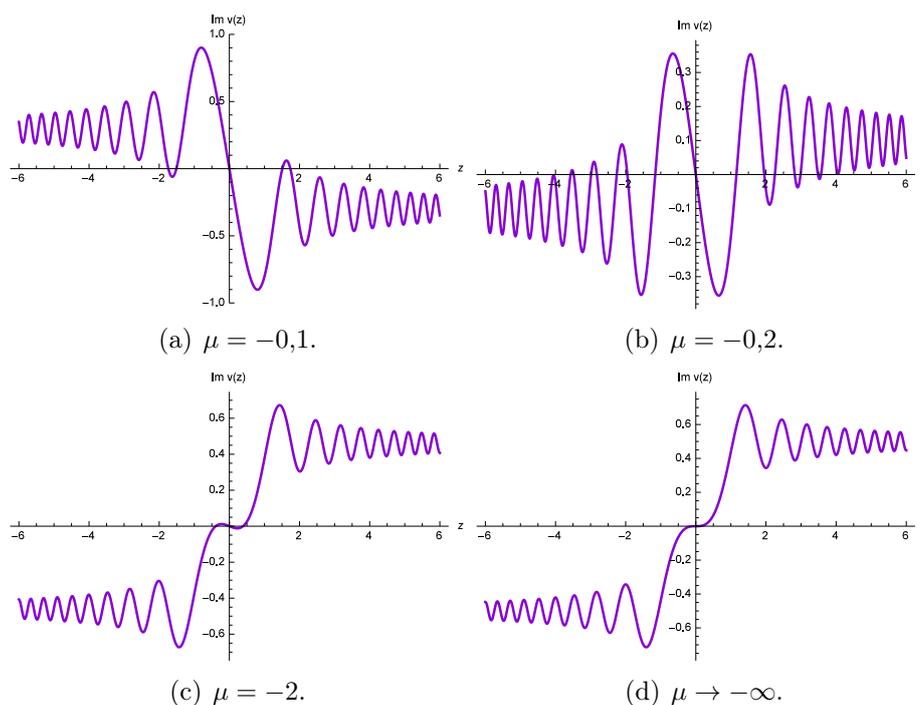


FIGURA 5.7: Comportamiento de la parte imaginaria de la solución $v(z)$ con diferentes valores negativos de μ .

En la Figura (5.9) se analiza la función $Im(v(z))$ contra z para valores de μ positivos. Entre $(0, 0,1]$ la forma no presenta algún cambio, solo hay cambios en la escala del eje vertical. Para $\mu = 0,2$ empieza a observarse una deformación en la pendiente que une las oscilaciones de las ramificaciones de la curva. Entre $[0,3, 3,0]$ la deformación en la pendiente es cada vez más evidente. En $\mu = 3,0$ deformación de la pendiente alcanza el máximo. Finalmente para $[3, +\infty)$ ya no se observan cambios en la escala del eje vertical, ni en la forma de la curva.

Además hay que señalar que cuando μ es positivo, la curva no presenta cambios de desplazamiento entre los cuadrantes.

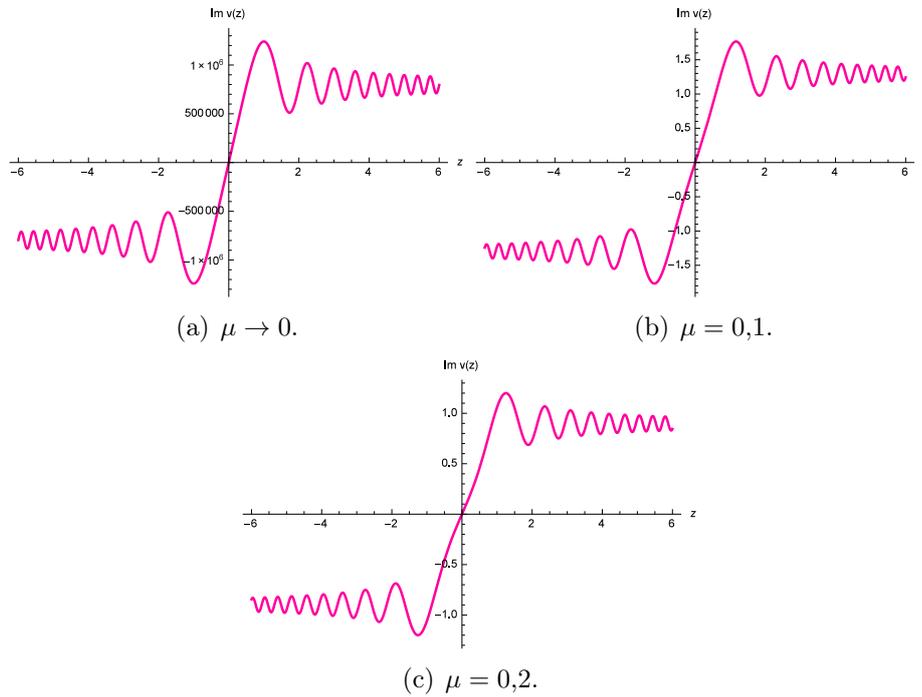


FIGURA 5.8: Comportamiento de la parte imaginaria de la solución $v(z)$ con diferentes valores positivos de μ .

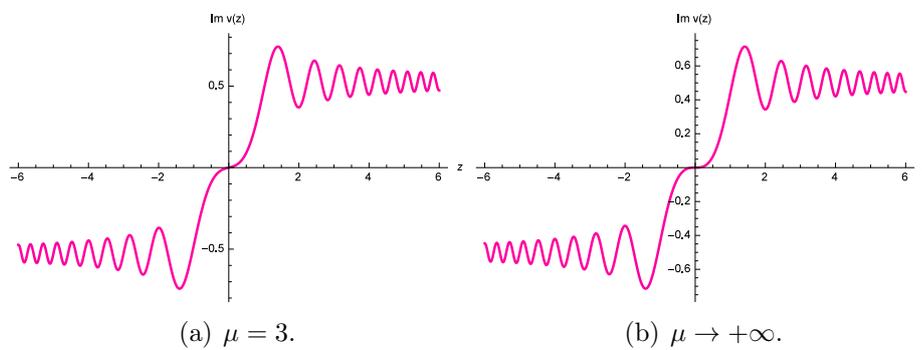


FIGURA 5.9: Comportamiento de la parte imaginaria de la solución $v(z)$ con diferentes valores positivos de μ .

En conclusión, la deformación debido al efecto del término que contiene el parámetro μ es significativa dentro del rango de valores de $[-2, 0)$ cuando μ es negativo, además de presentarse un desplazamiento entre los cuadrantes por parte de las oscilaciones de las ramificaciones de la curva; por otro lado cuando μ es positivo la deformación es significativa en el rango $(0, 3]$.

5.2.3. Espiral de Cornu

A partir de las funciones $Re(v(z))$ e $Im(v(z))$ ya previamente analizadas, se puede trazar la espiral de Cornu, como comunmente se hace en la literatura, graficando la parte imaginaria (eje vertical) contra la parte real (eje horizontal) de la función $v(z)$. Observando una deformación en la espiral debido al parámetro μ .

Se empieza analizando para valores de μ negativos, presentados en la Figura (5.13). De $(0, -0,01]$ no existen cambios en la forma de la espiral, solo se muestran cambios en la escala del eje vertical, y la espiral parece estar como vista por un espejo al parecer a 45 grados con respecto a la horizontal. En $\mu = -0,02$ las ramas de la curva empiezan a intersectar el eje vertical. Para $[-0,03, -0,09]$ se elongan tanto las ramas como la parte de la espiral de la curva. Y cuando $\mu = -0,1$ esta tan deformada la curva que la parte de la espiral empieza a intersectarse con el eje horizontal. Para $\mu = -0,2$ existe un cambio drástico en la deformación de la curva, y de alguna manera una rotación para adoptar la forma en la que usualmente es presentada la espiral. Entre $[-0,3, -3]$ se contraen tanto las ramas como la espiral de la curva hasta adoptar la forma habitual conocida en la literatura. Y por último en $[-3, -\infty)$ ya no ocurren cambios tanto en la escala como en la forma de la curva, manteniendo su forma clásica.

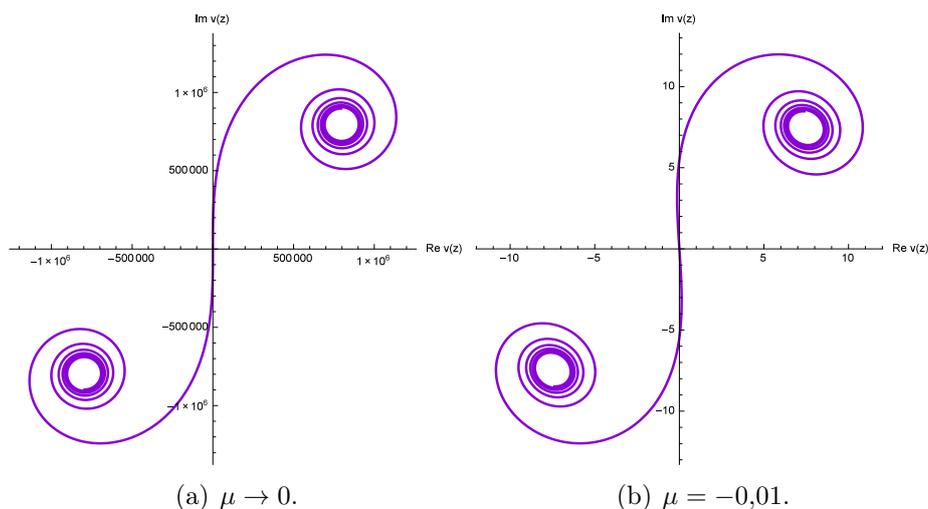
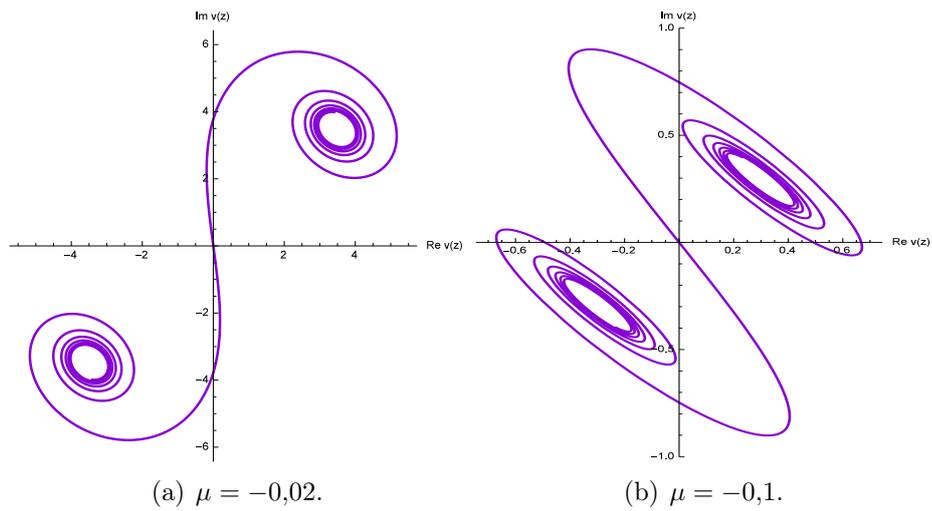
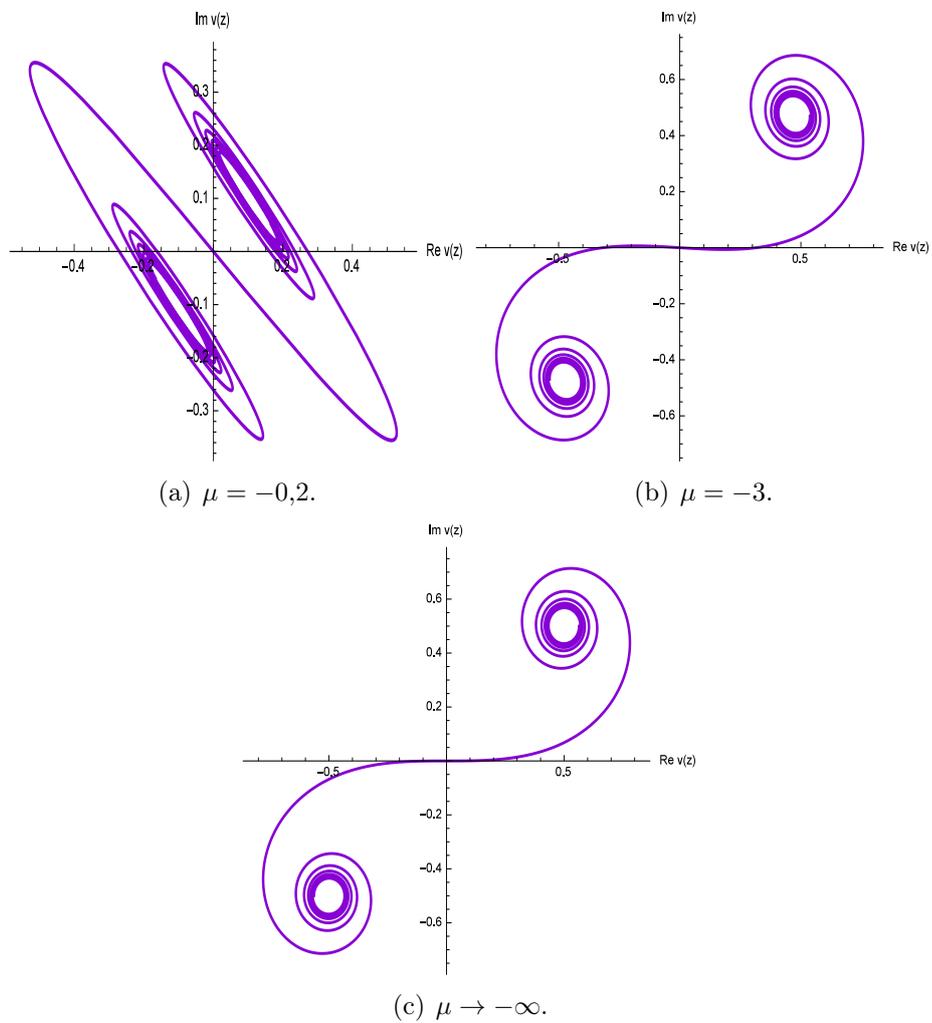
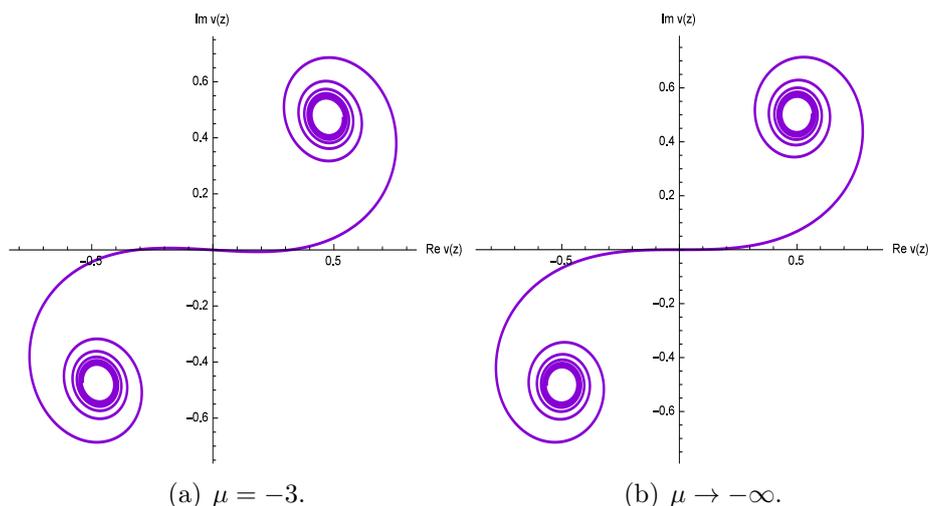
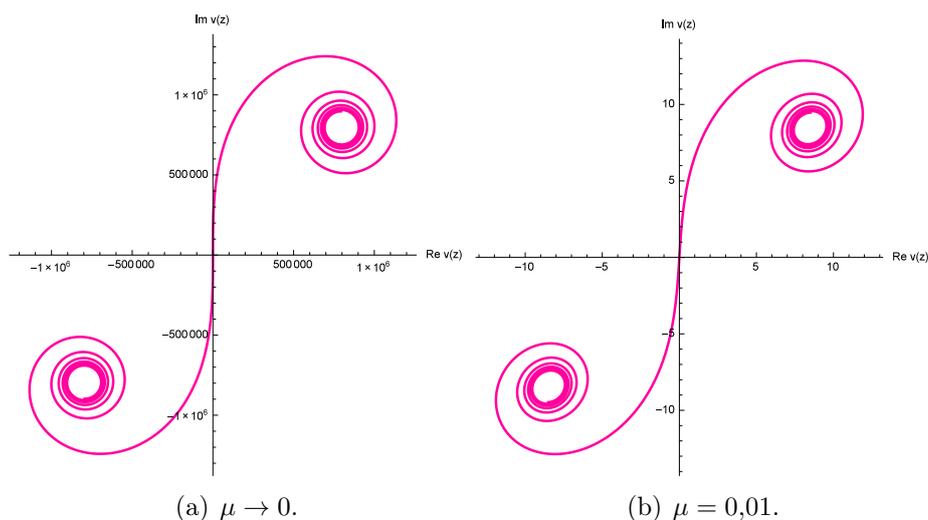


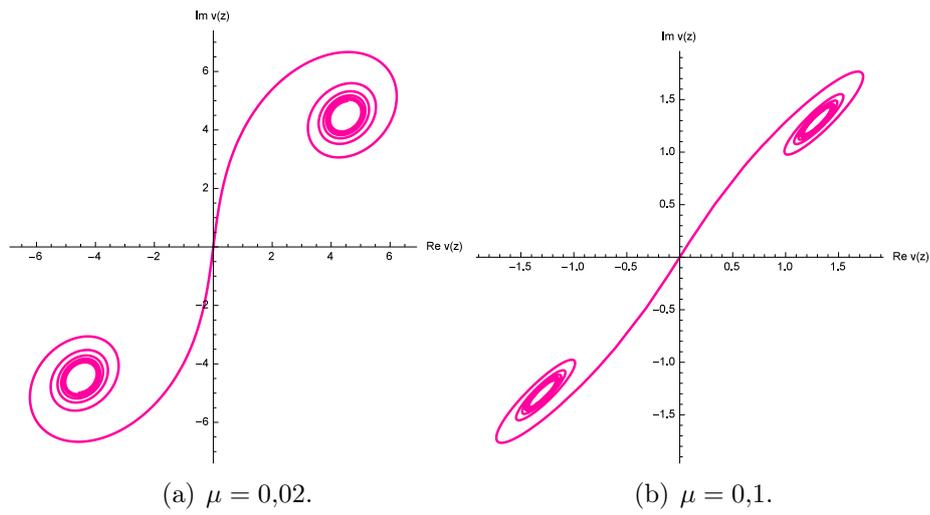
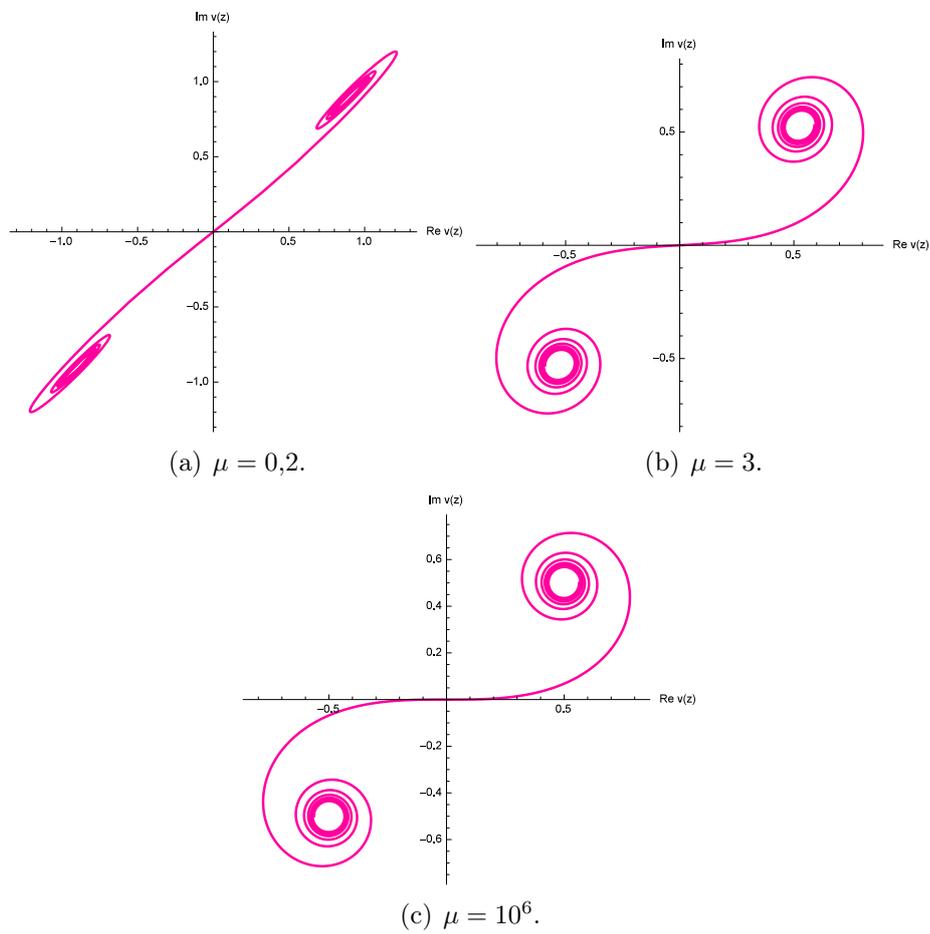
FIGURA 5.10: Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores negativos de μ .

FIGURA 5.11: Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores negativos de μ .FIGURA 5.12: Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores negativos de μ .

FIGURA 5.13: Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores negativos de μ .

En la Figura (5.16), se analiza la espiral de Cornu para valores de μ positivos. Notese que de $(0, 0,01]$ la forma de la curva se mantiene igual pero existe cambio en la escala en el eje vertical, y además de observarse como si la espiral estuviese vista por un espejo. Cuando $\mu = 0,02$ empieza a notarse un giro en la espiral alrededor de un eje que está a 45 grados con respecto al eje horizontal. Entre $[0,03, 0,1]$ continúa la rotación de la espiral. Y cuando $\mu = 0,2$ se encuentra totalmente paralelo a este eje. Para el rango de $[0,3, 3]$ continúa girando la curva hasta obtener la posición habitual de una espiral de Cornu clásica. Y finalmente para el intervalo $(3, +\infty)$ la curva ya no presenta cambios ni en la forma ni en la escala del eje vertical.

FIGURA 5.14: Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores positivos de μ .

FIGURA 5.15: Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores positivos de μ .FIGURA 5.16: Deformación de la espiral de Cornu para diferentes valores positivos de μ .

En conclusión, la deformación en la espiral de Cornu debido al efecto del parámetro μ es significativa dentro del rango de valores de $[-3, 0)$, cuando μ es negativo, donde se presenta una espiral vista como en un espejo cerca del cero y las ramas y la espiral de la curva se elongan y se contraen hasta obtener la forma y posición de la espiral de Cornu clásica. Y cuando μ es positivo es significativa la deformación para el rango entre $(0, 3]$, donde también se muestra una espiral vista como en un espejo cerca del cero, y posteriormente se observa una rotación alrededor de un eje que está a 45 grados con respecto de la horizontal, hasta obtener la forma y la posición de la espiral de Cornu clásica.

Hasta aquí se ha observado que el parámetro μ produce una deformación en las curvas tanto de las funciones $Re(v(z))$ e $Im(v(z))$ como la espiral de Cornu, por tanto nombraremos a éste como parámetro de deformación.

Capítulo 6

Conclusiones

A partir del formalismo matemático para el régimen de difracción de campo cercano para una abertura rectangular, se generalizó el parámetro conocido como número de Fresnel como factor de escalamiento asociado al área de la misma abertura rectangular dentro de los límites de integración para calcular tanto la perturbación óptica como la irradiancia producida por este tipo de abertura.

A partir de esta generalización del número de Fresnel, se realizó un análisis sistemático de la irradiancia variando el largo y el ancho de la abertura y con diferentes números de Fresnel. Dichos valores del número de Fresnel representaron los tres regímenes de difracción: el régimen de campo lejano, la zona de transición entre regímenes y el régimen de campo cercano.

En dichos gráficos de irradiancia se observó que al aumentar el número de Fresnel, se genera una serie de relieves o picos secundarios cada vez más finos en el pico principal con valores de irradiancia similares entre estos picos secundarios. Además se observó un alargamiento debido a la variación del ancho de la abertura sobre el eje vertical en la pantalla de observación, en cuanto mayor es el ancho de la abertura mayor era el alargamiento en el pico principal.

Por otro lado, se obtuvo una solución general de la ecuación diferencial lineal ordinaria de tercer orden asociada a la difracción de campo cercano, en la que se presentaron las integrales de Fresnel como soluciones particulares de esta ecuación diferencial tal como se menciona en la literatura, además como parte de la solución general se encontró una función suplementaria asociada a la función error, que esta condicionada por un parámetro de deformación.

A partir de esta solución general, se realizó un análisis sistemático mediante gráficos que mostraron la deformación tanto de la parte real e imaginaria de la solución general como de la espiral de Cornu debido a la variación del valor del parámetro μ de deformación. En los que se observó que la deformación de la parte real de la solución general es significativa en el rango de $-1,2$ a $+1,2$. Para la parte imaginaria el rango significativo fue entre -2 a $+3$. Y finalmente el rango significativo de la deformación para la espiral de Cornu fue en el rango de $-1,2$ a $+1,2$. Además de presentarse un desplazamiento de las oscilaciones de las ramificaciones de las curvas entre los cuadrantes del eje cartesiano, solo para el caso de valores negativos de μ , dicho desplazamiento se observa tanto en la parte real e imaginaria como en la espiral de Cornu.

Bibliografía

- [1] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <https://es.wikipedia.org/wiki/Euclides>
- [2] H.E. Harry Edwin Burton (1945) *The Optiks of Euclid*. Journal of the Optical Society of America. Vol. **35**, 5. pp. 357-372.
- [3] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <https://dotorqantico.wordpress.com/2011/11/30/que-es-la-mecanica-cuantica-una-historia-de-la-luz/>
- [4] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://es.slideshare.net/sabrinadechima1/hern-de-alejandra-30500074>
- [5] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/OptGeometrica/historia/Historia.htm>
- [6] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <https://ztfnews.wordpress.com/2013/12/28/francesco-maria-grimaldi-y-la-difraccion-de-luz/>
- [7] Daniel Malacara (1997) *Óptica Tradicional y Moderna*. 2a Edición. La ciencia para todos, Fondo de Cultura Económica.
- [8] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/huygens.htm>
- [9] [Consulta: 3 de Julio de 2016] https://es.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens
- [10] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/>
- [11] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <https://www.newton.ac.uk/about/isaac-newton/life>
- [12] [Consulta: 3 de Julio de 2016] https://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
- [13] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/>
- [14] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/OptGeometrica/historia/Historia.htm>

-
- [15] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://www.thecult.es/juego-de-espejos/el-experimento-de-interferencia-de-thomas-young.html>
- [16] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://www.fisicanet.com.ar/biografias/cientificos/f/fresnel.php>
- [17] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/2079/James%20Clerk%20Maxwell>
- [18] [Consulta: 3 de Julio de 2016] http://www.scholarpedia.org/article/Diffraction_gratings
- [19] [Consulta: 3 de Julio de 2016] http://www.encyclopedia.com/topic/David_Rittenhouse.aspx
- [20] Christopher Palmer, Erwin Loewen. (2005) *Diffraction Grating Handbook*. Sixth Edition, Newport Corporation.
- [21] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://www.meduniwien.ac.at/user/rainer.demartin/nobert.htm>
- [22] [Consulta: 3 de Julio de 2016] https://en.wikipedia.org/wiki/Lewis_Morris_Rutherford
- [23] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://snl.mit.edu/pub/papers/WP/Nanoruler-White-Paper.pdf>
- [24] Masud Mansuripur (2009) *Classical Optics and its Applications*. Second Edition, Cambridge University Press.
- [25] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://global.britannica.com/biography/William-Henry-Fox-Talbot>
- [26] Robert J. Wild *Efecto Talbot*, Tesis de Maestría. Department of Physics, Arizona University, bajo la dirección del Dr. A. Cronin.
- [27] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://www.fisicanet.com.ar/biografias/nobelfisica/bibliografias1/rayleigh.php>
- [28] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://www.scienceclarified.com/everyday/Real-Life-Physics-Vol-2/Diffraction-Real-life-applications.html>
- [29] [Consulta: 3 de Julio de 2016] http://pendientedemigracion.ucm.es/info/opticaf/OPT_FIS/apuntes_sueltos_prov/pdf/Tema6.pdf
- [30] Segundo Barroso Herrero, José Ramón Gil Bercero, Ana Ma. Camacho López (2010) *Introducción al conocimiento de los materiales y sus aplicaciones*. 1a Edición. Universidad Nacional de Educación a Distancia Madrid, UNED Cuadernos.
- [31] [Consulta: 3 de Julio de 2016] https://es.wikipedia.org/wiki/Rayos_X
-

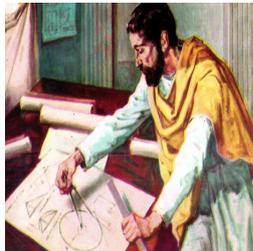
- [32] [Consulta: 3 de Julio de 2016] <http://science.jrank.org/pages/2063/Diffraction.html>
- [33] Susana Marcos (2005) *Calidad óptica del ojo*. Investigación y Ciencia. Universidad de Salamanca. pp. 66-74.
- [34] [Consulta: 3 de Julio de 2016] http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/37/htm/sec_12.htm
- [35] Paul Müller, Mirjam Schürmann y Jochen Guck (2016) *The Theory of Diffraction Tomography*. Biotechnology Center, Technische Universität Dresden, Dresden, Germany.
- [36] Grant R. Fowles (1975) *Introduction to Modern Physics*. Second Edition, Dover Publications Inc, New York, p. 106.
- [37] Joseph W. Goodman (1996) *Introduction to Fourier Optics*. Second Edition, McGraw-Hill Companies Inc, p. 32.
- [38] Daniel Malacara (1989) *Óptica Básica*. Primera Edición. Fondo de Cultura Económica, México, pp. 333.
- [39] Francis A. Jenkins (2001) *Fundamentals of Optics*. Fourth Edition. McGraw-Hill Companies, pp.260-261.
- [40] [Consulta: 4 de Julio de 2016] <http://www.tutorvista.com/content/physics/physics-iv/optics/huygens-wave-theory.php>
- [41] Eugene Hecht (2000) *Óptica*. Tercera Edición. Addison Wesley Iberoamericana, pp. 441-444.
- [42] Eugene Hecht (2000) *Óptica*. Tercera Edición. Addison Wesley Iberoamericana, p. 662.
- [43] Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba (2004) *Cálculo Vectorial*. Quinta Edición. Pearson, Addison Wesley, p. 554.
- [44] Grant R. Fowles (1975) *Introduction to Modern Physics*. Second Edition, Dover Publications Inc, New York, pp. 106-108.
- [45] Daniel Malacara (1989) *Óptica Básica*. Primera Edición. Fondo de Cultura Económica, México, pp. 335.
- [46] Min Gu (2000) *Advanced Optical Imaging Theory*. First Edition. Springer, pp. 14-15.
- [47] Grant R. Fowles (1975) *Introduction to Modern Physics*. Second Edition, Dover Publications Inc, New York, pp. 108-111.
- [48] Grant R. Fowles (1975) *Introduction to Modern Physics*. Second Edition, Dover Publications Inc, New York, pp. 112-114.

-
- [49] Eugene Hecht (2000) *Óptica*. Tercera Edición. Addison Wesley Iberoamericana, pp. 445-447.
- [50] Zemax (2011) *Optical Design Program. User's Manual*. Radiant Zemax LLC. pp. 628-629.
- [51] Francis A. Jenkins (2001) *Fundamentals of Optics*. Fourth Edition. McGraw-Hill Companies, pp. 315-316.
- [52] Grant R. Fowles (1975) *Introduction to Modern Physics*. Second Edition, Dover Publications Inc, New York, pp. 114-124.
- [53] [Consulta: 4 de Julio de 2016] <http://labman.phys.utk.edu/phys136/modules/m9/diff.htm>
- [54] [Consulta: 4 de Julio de 2016] <http://depts.washington.edu/jrphys/ph331/share/zone.pdf>
- [55] Francis A. Jenkins (2001) *Fundamentals of Optics*. Fourth Edition. McGraw-Hill Companies. p. 380.
- [56] Eugene Hecht (2000) *Óptica*. Tercera Edición. Addison Wesley Iberoamericana, pp. 485-489.
- [57] <http://www.nptel.ac.in/courses/112105165/lec24.pdf>
- [58] Grant R. Fowles (1975) *Introduction to Modern Physics*. Second Edition, Dover Publications Inc, New York, pp. 129-132.
- [59] Joseph W. Goodman (1996) *Introduction to Fourier Optics*. Second Edition, McGraw-Hill Companies Inc, pp. 84-87.
- [60] Eugene Hecht (2000) *Óptica*. Tercera Edición. Addison Wesley Iberoamericana, pp. 497-499.
- [61] Bruno Rossi (2003) *Fundamentos de Óptica*. Editorial Reverté, S. A. pp. 180-189.
- [62] Anthony Lo Bello (2013) *Origins of Mathematical Words: A Comprehensive Dictionary of Latin, Greek, and Arabic Roots*. The Johns Hopkins University Press.
- [63] [Consulta: 4 de Julio de 2016] <http://mathworld.wolfram.com/CornuSpiral.html>
- [64] Francis A. Jenkins (2001) *Fundamentals of Optics*. Fourth Edition. McGraw-Hill Companies. p. 389.
- [65] Eugene Hecht (2000) *Óptica*. Tercera Edición. Addison Wesley Iberoamericana, pp. 500-504.
- [66] Eugene Hecht (2000) *Óptica*. Tercera Edición. Addison Wesley Iberoamericana, pp. 507-508.
-

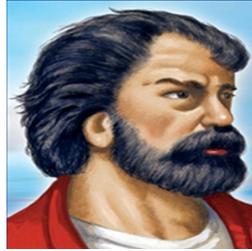
- [67] Raafat R. Rizkalla, Seham Sh. Tantawy and Mahmoud H. Taha (2014) *Applications on differential transform method for some non-linear functions and for solving volterra integral equations involving Fresnel integrals*. Journal of Fractional Calculus and Applications (6th. Symp. Frac. Calc. Apply. August 4,2014). Vol 5 (3S) No. 23, pp. 1-14.
- [68] [Consulta: 4 de Julio de 2016]
<http://functions.wolfram.com/GammaBetaErf/FresnelS/introductions/FresnelIntegrals/ShowA>
- [69] Rands S. Worland y Matthew J. Moelter (1997) *Hands-on phasors and multiple slit interference*. The Physics Teacher Vol. **35**, 486. pp 486-488
- [70] A.G. Klein y L.J. Martin (1977) *Fresnel integrals*. Am. J. Physics. **45**, 298-299.

Apéndice A

Retratos de los investigadores importantes en el estudio de la difracción



(a) Euclides de Alejandría
(325 a.C - 265 a.C)



(b) Herón de Alejandría
(10 a.C - 75 d.C)



(c) Al-Haitham
(965 - 1039)



(d) F. M. Grimaldi
(1618 - 1663)



(e) C. Huygens
(1629 - 1695)



(f) Sir I. Newton
(1642 - 1727)



(g) T. Young (1773 - 1829)



(h) A. J. Fresnel
(1778 - 1827)



(i) J. C. Maxwell
(1831 - 1879)

FIGURA A.1: De la óptica de Euclides a las ecuaciones de Maxwell.



FIGURA A.2: Pioneros en la fabricación de las rejillas de difracción.



FIGURA A.3: Los fundadores del efecto Talbot.

Apéndice B

Deducción del Número de Fresnel a partir de la Fórmula de Curvatura del Frente de Onda

Notese que a partir de la ecuación de la curvatura del frente de onda $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) a^2 \ll \lambda$ se puede deducir el número de Fresnel, haciendo las siguientes consideraciones:

- Si $d = d'$ entonces para el régimen de difracción de campo lejano se tiene $\frac{a^2}{\lambda d} \ll 1$, es decir $F \ll 1$. Y para el caso del régimen de difracción de campo cercano se llega a que $\frac{a^2}{\lambda d} \gg 1$, es decir $F \gg 1$. Tal como se describe al final de la sección.
- Ahora si se considera $d' \rightarrow \infty$, se tiene $F \ll 2$ y $F \gg 2$ para la difracción de campo lejano y la difracción de campo cercano respectivamente.
- Y finalmente si $d' \neq d$, para difracción de campo lejano se llega a

$$F \ll \frac{2}{1 + \frac{d}{d'}} \quad (\text{B.1})$$

la cual la reescribimos de la siguiente manera

$$F_q \ll \frac{2}{1 + q} \quad (\text{B.2})$$

Analogamente para la difracción de campo cercano se tiene

$$F_q \gg \frac{2}{1 + q} \quad (\text{B.3})$$

donde $q = \frac{d}{d'}$ es un parámetro que depende de las distancias que existen entre la fuente, la abertura y la pantalla de observación.

Apéndice C

Diagramas de Amplitud-Fase en el Régimen de Difracción de Campo Lejano

Adicionalmente al análisis algebraico estándar de la difracción en campo lejano, la técnica de los fasores puede ser una herramienta tanto para visualizar o determinar la irradiancia de un patrón de difracción para un número arbitrario N de rendijas idénticas igualmente espaciadas.

Se considera una situación física en la cuál las ondas planas están linealmente polarizadas con una longitud de onda λ y frecuencia angular ω inciden sobre un número N de rendijas estrechas con una distancia de separación b .

La irradiancia resultante I es proporcional al módulo al cuadrado de la perturbación óptica total U_T , donde U_T es igual a la suma de las perturbaciones de cada rendija, es decir, $U_T = U_1 + U_2 + \dots + U_N$ [69].

Dado que la luz al atravesar cada una de las rendijas viaja una distancia con una diferencia de camino óptico $b \sin \theta$ la fase de cada perturbación óptica están dadas por $\gamma = kd \sin \theta = 2\pi d \frac{\sin \theta}{\lambda}$.

Así la irradiancia correspondiente está dada por

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(N \frac{\gamma}{2} \right)}{N^2 \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right)} \quad (\text{C.1})$$

donde I_0 es la irradiancia uniforme a partir de una sola rendija y γ es una función del ángulo de observación θ . Así se puede usar la ecuación (C.1) para predecir las posiciones de los máximos y mínimos de irradiancia.

En este método de los fasores, la luz que proviene de la n -ésima rendija se representa por una suma geométrica de la rotación de vectores de amplitud U_0 y un ángulo $\omega t + n\gamma$ con respecto a la horizontal, como se muestra en la Figura (C.1). La proyección vertical del vector resultante produce una perturbación óptica instantánea $U_T(t)$. Sin embargo como la irradiancia observada es proporcional al cuadrado de la perturbación óptica promediada en el período T_0 del haz incidente, entonces estamos interesados solo en la amplitud promedio U_{T_0} [69].

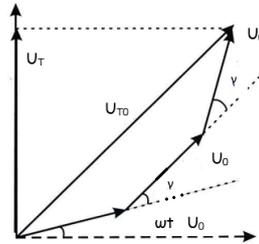
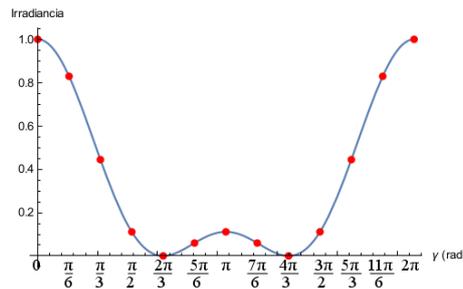


FIGURA C.1: Diagrama de los fasores para $N = 3$. U_{T_0} representa la amplitud de la perturbación óptica [69].

A continuación en la Figura (C.2) se construye el gráfico de la irradiancia para algunos valores del ángulo γ para el caso de tres rendijas.



(a) Gráfico de la irradiancia por el método de fasores para tres rendijas.

| γ (rad) | I (Irradiancia) |
|------------------|-----------------|
| 0 | 1.00 |
| $\frac{\pi}{6}$ | 0.80 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 0.43 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 0.11 |
| $\frac{2}{3}\pi$ | 0.00 |
| $\frac{5}{6}\pi$ | 0.06 |
| π | 0.11 |

(b) Valores de irradiancia para algunos ángulos [69].

FIGURA C.2: Gráfico de irradiancia y valores para algunos ángulos en radianes por el método de los fasores para tres rendijas.

Apéndice D

Funciones Auxiliares Asociadas a las Integrales de Fresnel

Otra forma de encontrar las integrales de Fresnel es mediante las funciones auxiliares [70]

$$f(z) = \frac{1 + 0,926z}{2 + 1,792z + 3,104z^2} + \epsilon_1(z) \quad (\text{D.1})$$

$$g(z) = \frac{1}{2 + 4,142z + 3,492z^2 + 6,670z^3} + \epsilon_2(z) \quad (\text{D.2})$$

donde los errores $\epsilon_1(z)$ y $\epsilon_2(z)$ son $|\epsilon(z)| < 2 \times 10^{-3}$ sobre todo el rango de z , dando una buena aproximación para propósitos prácticos [70].

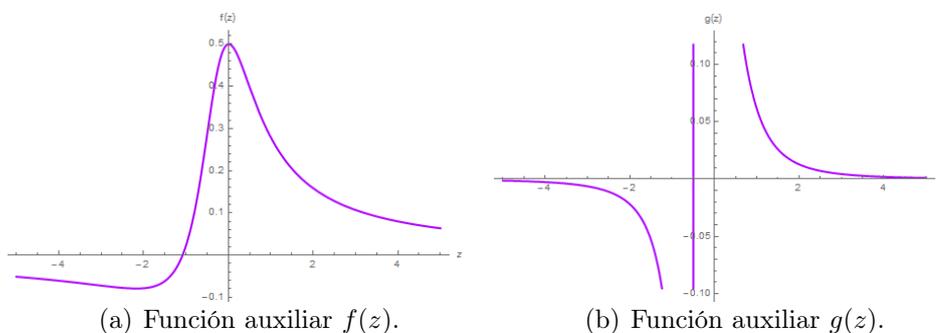


FIGURA D.1: Funciones auxiliares $f(z)$ y $g(z)$ asociadas a las integrales de Fresnel.

Así las integrales de Fresnel se pueden escribir de la forma

$$C_F(z) = \frac{1}{2} + f(z) \sin\left(\frac{\pi z^2}{2}\right) - g(z) \cos\left(\frac{\pi z^2}{2}\right) \quad (\text{D.3})$$

$$S_F(z) = \frac{1}{2} - f(z) \cos\left(\frac{\pi z^2}{2}\right) - g(z) \sin\left(\frac{\pi z^2}{2}\right) \quad (\text{D.4})$$

En la Figura (D.2), se muestra la comparación entre el coseno y seno de Fresnel clásicos y las gráficas entre el coseno y seno de Fresnel mediante las funciones auxiliares $f(z)$ y $g(z)$ presentadas anteriormente.

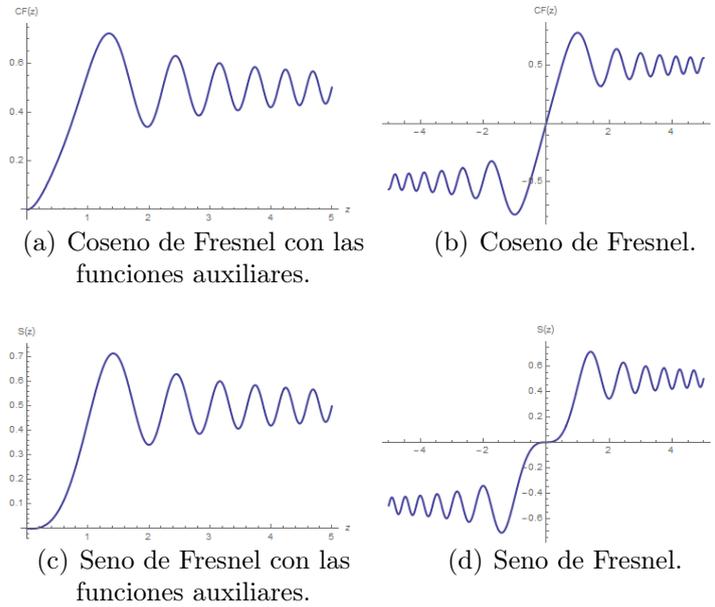


FIGURA D.2: Comparación entre las integrales coseno y seno de Fresnel y las asociadas con las funciones auxiliares $f(z)$ y $g(z)$.

Esto es, las integrales coseno y seno de Fresnel están relacionadas con las funciones trigonométricas básicas seno y coseno, multiplicadas por dichas funciones auxiliares $f(z)$ y $g(z)$ que se expresan mediante cocientes de polinomios de grado a lo más tres. Teniendo en cuenta que esta aproximación racional de las funciones auxiliares solo es válida en el rango de $0 \leq z \leq \infty$ [70].