



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN NANOCIENCIAS Y MATERIALES**

**Métodos Supersimétricos en la Física de Medios Materiales**

Tesis que presenta

**Josué Domingo de la Cruz Díaz**

Para obtener el grado de

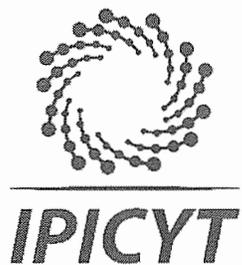
**Maestro en Nanociencias y Materiales**

**Director de la Tesis:**

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus

San Luis Potosí, S.L.P., Julio de 2019





## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "***Métodos supersimétricos en la física de medios materiales***" presentada para obtener el Grado de Maestro en Nanociencias y Materiales fue elaborada por **Josué Domingo de la Cruz Díaz** y aprobada el **once de julio de dos mil diecinueve** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Materiales Avanzados del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

**Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus**  
Director de la tesis

**Dr. Eric Campos Cantón**  
Miembro del Comité Tutorial

**Dr. José Salomé Murguía Ibarra**  
Miembro del Comité Tutorial



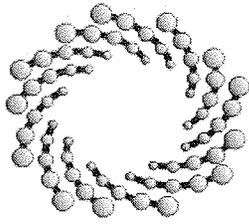


## Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Materiales Avanzados del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (634079) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.





**IPICYT**

# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 049 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Nanociencias y Materiales está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 11 días del mes de julio del año 2019, se reunió a las 13:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

**Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus**

**Presidente**

**IPICYT**

**Dr. Eric Campos Cantón**

**Secretario**

**IPICYT**

**Dr. José Salomé Murguía Ibarra**

**Sinodal externo**

**UASLP**

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN NANOCIENCIAS Y MATERIALES**

sustentó el C.

**Josué Domingo de la Cruz Díaz**

sobre la Tesis intitulada:

*Métodos supersimétricos en la física de medios materiales*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus**

El Jurado, después de deliberar, determinó

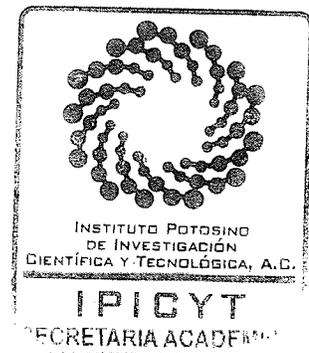
**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 14:45 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 11 días del mes de julio de 2019.

**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

  
**Dr. Marcial Bonilla Marín**  
Secretario Académico





# Dedicatoria

*“A mi familia y amigos”*



# Agradecimientos

*“Nada puede malir sal”*

A mi asesor Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus y a los miembros de mi comité tutorial Dr. Eric Campos Cantón y Dr. José Salomé Murguía Ibarra aparte del CONACyT por la beca de maestría.



# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	xv
<b>Índice de cuadros</b>	xvii
<b>Resumen</b>	xix
<b>Abstract</b>	xxi
<b>1. Introducción</b>	1
1.1. Transición mecánica clásica-mecánica cuántica (vía Dirac)	1
1.2. Fundamentos de mecánica cuántica	2
1.3. La transformada de Darboux y la factorización isoespectral de Mielnik	3
<b>2. Generalización de potenciales isoespectrales</b>	5
2.1. Introducción	5
2.2. Ilustración del método	8
Caso: oscilador armónico cuántico	8
2.2.1. Límite estándar del oscilador armónico cuántico	9
2.2.2. Normalización de los estados $ \psi_{n,\epsilon}\rangle$	10
2.3. Propiedades de las funciones $ \psi_{n,\epsilon}\rangle$	10
2.4. Estado base del Hamiltoniano isoespectral	12
2.5. Potencial deformado	14
2.6. Efecto del desplazamiento en los operadores sobre el oscilador isoespectral	16
2.7. Restricciones paramétricas	17
2.7.1. Ejemplo: Oscilador de Mielnik	19
2.8. Conclusión de capítulo	21
<b>3. Potenciales Periódicos</b>	23
3.1. Introducción	23
3.2. Potencial Deformado	25
3.3. Periodicidad de $V(x, \epsilon, \gamma)$	26
3.4. Invarianza de $\hat{H}, (\hat{T}_R)^n$	27
3.5. Eigenfunciones en sistemas periódicos	29
3.5.1. Caso de estudio	29

<b>4. La transformada Darboux y el rompimiento de simetría en <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>31</b>
4.1. Factorización estrictamente isospectral en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	31
4.2. Grupos de simetría . . . . .	36
4.3. Isometrías en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	36
4.4. Rompimiento de simetría . . . . .	38
<b>5. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>
<b>Anexos</b>	<b>49</b>
1. Teorema de Darboux . . . . .	51
2. Cálculos eigenfunciones oscilador desplazado . . . . .	51
3. Normalización del oscilador desplazado . . . . .	52
4. Eigenfunciones del oscilador isoespectral con desplazamiento $\epsilon$ . . . . .	54
5. Oscilador de Mielnik desplazado . . . . .	56
6. Una metamorfosis 2 isoespectral . . . . .	58

# Índice de figuras

2.1. (a) Funciones normalizadas $ \psi_{0,\epsilon}\rangle$ para valores distintos de $\epsilon$ y (b) Densidades de probabilidad. . . . .	11
2.2. (a) Funciones normalizadas $ \psi_{1,\epsilon}\rangle$ para valores distintos de $\epsilon$ y (b) Densidades de probabilidad. . . . .	11
2.3. (a) Funciones normalizadas $ \psi_{2,\epsilon}\rangle$ para valores distintos de $\epsilon$ y (b) Densidades de probabilidad. . . . .	12
2.4. (a) Funciones normalizadas $ \psi_{3,\epsilon}\rangle$ para valores distintos de $\epsilon$ y (b) Densidades de probabilidad. . . . .	12
2.5. (a) Funciones base normalizadas $ \psi_{0,\gamma,\epsilon}\rangle$ para valores distintos de $\epsilon$ y (b) Densidades de probabilidad. . . . .	13
2.6. (a) Funciones no normalizadas $ \psi_{1,\gamma,\epsilon}\rangle$ para valores distintos de $\epsilon$ y (b) Densidades de probabilidad. . . . .	13
2.7. (a) Funciones no normalizadas $ \psi_{2,\gamma,\epsilon}\rangle$ para valores distintos de $\epsilon$ y (b) Densidades de probabilidad. . . . .	14
2.8. (a) Funciones no normalizadas $ \psi_{3,\gamma,\epsilon}\rangle$ para valores distintos de $\epsilon$ y (b) Densidades de probabilidad. . . . .	14
2.9. Simetría de los potenciales deformados $V_{\gamma,\epsilon}(x) = V_{-\gamma,-\epsilon}(x)$ . . . . .	15
2.10. Gráficos $\mathbb{R}^3$ para diversos valores de $\gamma$ en $-5 \leq x, \epsilon \leq 5$ . . . . .	16
2.11. Gráficos de contorno para diversos valores de $\gamma$ en $-5 \leq x, \epsilon \leq 5$ . . . . .	16
2.12. Relación entre los parámetros $\epsilon$ y $\gamma$ , el exterior del rectángulo delimitado por las líneas rojas indican el conjunto de valores que puede tomar el parámetro $\gamma$ al seleccionar un valor para $\epsilon$ tal que los potenciales biparamétricos sean regulares. . . . .	17
2.13. Gráficos de contorno para diversos valores de $\epsilon$ en $-5 \leq x, \gamma \leq 5$ . . . . .	18
2.14. Relación entre los parámetros $\epsilon$ y $\gamma$ calculado numéricamente, los puntos contenidos en las regiones sin colorear indican los valores permitidos para una coordenada de los parámetros de deformación, mientras que las zonas coloreadas indican regiones que generarán singularidades en el potencial. . . . .	19
2.15. $x_{s,\gamma_s,\epsilon}$ para dos valores de $\gamma$ y $\epsilon = 0$ , se observa que el punto $f(x_{s,\gamma_s,\epsilon})$ donde cruza la gráfica con los valores de $\gamma_s$ son simétricos respecto al origen. . . . .	20
2.16. $x_{s,\gamma_s,\epsilon}$ para dos valores de $\gamma$ y $\epsilon = 0.5$ , el punto $f(x_{s,\gamma_s,\epsilon})$ donde cruza la gráfica con los valores de $\gamma_s$ son asimétricos respecto al origen. . . . .	20
2.17. El potencial $V_{\gamma,\epsilon}(x)$ donde se muestran las singularidades en los puntos $x_s$ . . . . .	20

3.1. Potencial periódico $V(x) = \text{Tan}^2(x)$ .	23
3.2. Comparativas de $V(x, \epsilon, \gamma)$ y $V(x)$ para diferentes valores de $\epsilon$ .	26
3.3. Familia de potenciales biparamétricos periódicos $V(x, \gamma, \epsilon)$ .	28
3.4. Gráficas para el estado base con valores: $\gamma = 0$ , en $( \frac{\pi}{2}  \leq x)$ .	30
4.1. Proyecciones al plano para 2 funciones.	36
4.2. Acción del grupo de simetría sobre el vector $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix})$ .	37
4.3. Mosaicos con simetría $P_{4m}$ .	37
4.4. Mosaicos con simetría $P_m$ .	38
4.5. Rompimiento de simetría en la vecindad de: $\gamma_1 = \gamma_2 \in \{\gamma_s \pm 10\}$ .	40
4.6. Contornos para potenciales deformados.	42
4.7. Contornos para la función $\phi'(x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2)$ .	44
1. En términos de los polinomios de Hermite $ \psi_{1,\epsilon}(x)\rangle(H_1(x) + 2\epsilon) \psi_{0,\epsilon}(x)\rangle$ .	51
2. En términos de los polinomios de Hermite es $ \psi_{2,\epsilon}(x)\rangle = (H_2(x) + 4H_1(x)\epsilon + 4H_0\epsilon^2) \psi_{0,\epsilon}(x)\rangle$ .	53
3. En términos de los polinomios de Hermite $ \psi_{3,\epsilon}(x)\rangle = (H_3(x) + 6H_2(x)\epsilon + 12H_1\epsilon^2 + 8H_0\epsilon^3) \psi_{0,\epsilon}(x)\rangle$ .	53
4. Eigenfunciones no normalizadas para los estados $\psi_{0,\epsilon}(x)$ y $\psi_{1,\epsilon}(x)$ .	54
5. Eigenfunción no normalizada para el estado $\psi_{2,\epsilon}(x)$ .	54
6. Eigenfunción no normalizada para el estado $\psi_{3,\epsilon}(x)$ .	55
7. Región de convergencia, $\epsilon = 0.5$ , podemos ver que el centro del potencial se desplaza hacia la izquierda la cantidad $\epsilon$ .	56
8. Potenciales deformados con (a) $\gamma = 1.2$ , (b) $\gamma = -1.2$ y $\epsilon = 0.5$ .	56
9. Simetría Mielnik para $V_{\pm 6/5, 1/2}(x)$ .	57
10. Escher, M.C. Exploring the Infinite; Abrams: New York, NY, USA, 1989.	58
11. Metamorphose 2 versión: mosaicos isoenergéticos.	59

# Índice de cuadros

2.1. Condiciones en que $\gamma$ y $\epsilon$ generan potenciales singulares.	18
---	----



## Resumen

Métodos supersimétricos en la física de medios materiales:

En los capítulos 2 y 3 se propone una generalización al método uniparamétrico ( $\gamma$ -deformado) de factorización estrictamente isoespectral a un caso biparamétrico incluyendo un desplazamiento  $\epsilon$  en los operadores de factorización estándar que producirá una deformación extra en los potenciales  $\gamma$ -deformados.

En el capítulo 4 se aborda la relación entre el rompimiento de simetría para potenciales isoespectrales uniparamétricos periódicos en dos dimensiones generados mediante una proyección al plano obteniendo los grupos de simetría antes y después de aplicar la transformación isoespectral, se encontró un rompimiento de simetría que se da cuando los parámetros de deformación ( $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ ) toman valores cercanos al del valor del punto singular del potencial deformado.

Palabras clave: Supersimetría, grupos de simetría, rompimiento de simetría, transformación espectral.



## Abstract

Supersymmetric methods in the physics of material media:

In Chapters 2 and 3 was proposed a generalization to the one-parameter method ( $\gamma$ -deformed) of strictly isospectral factorization to a bi-parametric case. The generalization introduce an  $\epsilon$  arbitrary displacement in the standard factorization operators which produce an extra deformation in the  $\gamma$ -deformed potential .

Chapter 4 was studied the relation between the symmetry breaking encompassed the uni-parametric periodic potentials in two dimensions was studied. It was used the symmetry groups related at the original potential and the deformed one. It was found that the symmetry breaking appears when the deformation parameters  $\gamma_1, \gamma_2$  takes values near the singular point of the deformed potential.

keywords; Supersymmetry, symmetry breaking, spectral transformation, symmetry groups.



# Capítulo 1

## Introducción

*Se presenta de manera breve los conceptos básicos de mecánica cuántica y el surgimiento de la mecánica cuántica supersimétrica en física teórica.*

### 1.1. Transición mecánica clásica-mecánica cuántica (vía Dirac)

La transición de la física clásica a la física cuántica data de principios del siglo XX, cuando Max Planck propuso una solución para el problema de la radiación de cuerpo negro que le valió el premio Nobel de física en 1918: “*in recognition of the services he rendered to the advancement of Physics by his discovery of energy quanta*”<sup>[1]</sup> [1].

Tal problema es una introducción obligada para un primer curso de mecánica cuántica ya que para dicho fenómeno no se tiene una explicación clásica.

La transición entre la antigua mecánica y la naciente mecánica cuántica daría lugar al desarrollo de tecnologías innovadoras que incluyen los reactores nucleares (el primero en 1942), los láseres (el primero en 1962) y los reactores de fusión nuclear donde se quiere producir energía a través de los iones confinados por campos magnéticos de manera semejante a lo que pasa de manera natural en las estrellas.

La mecánica clásica se puede estudiar completamente desde la perspectiva del formalismo Hamiltoniano, que consiste en proponer una función de energía que contiene la información de como se mueve una partícula en algún potencial dado, es decir toma la suma de las energías que componen el sistema a estudiar, ya que de manera general la energía de un sistema puede considerarse de dos tipos: cinética y potencial, la energía cinética es la relacionada con el movimiento de la partícula considerada, mientras que la potencial es una energía asociada a la interacción de un campo con la partícula.

La meta de la mecánica Hamiltoniana es describir las ecuaciones de movimiento del sistema modelado usando la conservación en el tiempo de la función Hamiltoniana.

Restringiéndonos al contexto no relativista, la función Hamiltoniana tiene dos variables básicas, el momento dado por  $p = m\dot{q}$  y la posición por  $q$ , donde  $q$  representa la posición y  $m$  la masa de la partícula, con la siguiente forma general.

---

<sup>1</sup> “*En reconocimiento a los servicios que prestó para el avance de la física por su descubrimiento del cuanto de energía* ”

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

Donde  $V(q)$  es el operador de energía potencial, las ecuaciones que especifican el movimiento del sistema son las siguientes y se conocen como las ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Estas ecuaciones nos dan la información completa de la dinámica de un sistema clásico, lo que en tiempos anteriores a 1833 se obtenía solamente resolviendo las ecuaciones de Newton o bien las ecuaciones correspondientes a la mecánica Lagrangiana.

Es importante recalcar que las ecuaciones de Newton son ecuaciones en términos de fuerza, mientras que las funciones Lagrangianas y Hamiltonianas son funciones de energía, esta es una de las razones para utilizar funciones Hamiltonianas al trabajar en mecánica cuántica ya que en mecánica cuántica nos interesa la cuantización de la energía, lo que nos lleva a cambiar el tipo de cálculo a una versión de operadores.

Tal formulación fue propuesta por los pioneros de la mecánica cuántica en la década de los 20's del siglo pasado y permite relacionar el corchete de Poisson  $\{u, v\}$  con un análogo de operadores  $[\hat{u}, \hat{v}]$  llamado conmutador introduciendo un álgebra de operadores [2].

$$\{u, v\} \rightarrow i\hbar[\hat{u}, \hat{v}] = i\hbar(\hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u}).$$

## 1.2. Fundamentos de mecánica cuántica

Como se mencionó anteriormente uno de los conceptos que surgen con el desarrollo de la teoría cuántica es el de la cuantización de la energía, que rompe con la intuición clásica de que la energía es continua.

Una demostración de esta cuantización se dio con la explicación de Einstein para el efecto fotoeléctrico que le valió el premio Nobel de física en el año de 1921: “*for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect*”<sup>2</sup> [1].

Formalmente la cuantización de la energía se obtiene al factorizar un Hamiltoniano dado con dos operadores, que se pueden llamar de creación y aniquilación respectivamente y usando además un tercer operador conocido como operador de número.

En concreto, para una ecuación de Schrödinger unidimensional y estacionaria

$$\hat{H}\psi = [-D_x^2 + V(x)]\psi,$$

se pueden usar los siguientes operadores de creación y aniquilación

---

<sup>2</sup>“*Por sus servicios a la física teórica, y especialmente por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico*”

$$\hat{a}^\dagger = -D_x + R, \quad \hat{a} = D_x + R.$$

Para cuantización canónica (no supersimétrica) se procede de la manera siguiente, donde  $R$  es la solución a la ecuación de Riccati  $R'(x) + R^2(x) = 0$

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}] \psi = [-D_x + R][D_x + R] \psi,$$

y se aplican los operadores desde la derecha a la izquierda

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = [-D_x + R][\psi' + R\psi] = -\psi'' - R'\psi - R\psi' + R\psi' + v^2\psi = -\psi'' - R'\psi + R^2\psi.$$

Lo que nos lleva a la siguiente igualdad

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}] \psi = [-D_x^2 - R' + R^2] \psi = [\hat{H} - R'] \psi$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + R' = \hat{N} + R',$$

donde el producto  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  es el operador de número  $\hat{N}$ .

El problema de eigenvalores del operador de número nos puede proporcionar un conjunto discreto de energías para el sistema considerado

$$\hat{N} \psi_n = E_n \psi_n.$$

Las funciones que solucionan el problema  $\psi_n(x) \in \mathbb{L}^2$  son llamadas eigenfunciones y tienen las propiedades siguientes

- $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)| dx = 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx < \infty$

Este tipo de funciones también son conocidas en el área de señales como funciones de energía finita.

### 1.3. La transformada de Darboux y la factorización iso-espectral de Mielnik

Una manera de deformar un sistema cuántico y por lo tanto su potencial con solución analítica es a través de las perturbaciones, lo que lleva a considerar la teoría cuántica de perturbaciones [19].

En este trabajo estamos interesados en un tipo de deformaciones para los potenciales que se obtienen a través de las llamadas transformadas de Darboux, provenientes de la teoría de ecuaciones diferenciales [4], [5].

La idea de generar nuevos potenciales solubles en el caso de la mecánica cuántica resulta atractiva debido a que en esta no se cuenta con una variedad amplia de potenciales que acepten soluciones analíticas.

A través de ellas se pueden generar nuevos potenciales deformados para los cuales el espectro de energía no se modifica.

Un formalismo equivalente a las transformadas Darboux originado en la mecánica cuántica que también recupera esa deformación al potencial que deja el espectro invariante esta dado por las técnicas supersimétricas de mecánica cuántica [\[3\]](#). El primer registro del uso de la supersimetría en sistemas cuánticos data del año de 1976 en un artículo escrito por Nikolai [\[8\]](#) donde aplicó la supersimetría a sistemas con espín, posteriormente se utilizó en teoría de campos por Witten en el año de 1981 [\[9\]](#). El método algebraico de Nikolai fue retomado en el año de 1984 por Mielnik [\[10\]](#) que aplicó el método algebraico al oscilador armónico obteniendo un oscilador iso-espectral con potencial distinto al estándar ( $x^2$ ), este último trabajo resulto ser muy influyente en el campo de la mecánica cuántica supersimétrica. Posteriormente se generalizó el método a una amplia variedad de problemas de mecánica cuántica [\[12\]](#), [\[13\]](#), [\[14\]](#), gracias a esto se ha logrado obtener un gran número de potenciales exactamente solubles partiendo de otros ya conocidos, como en el caso de los potenciales exactamente solubles fundamentales de la mecánica cuántica de una dimensión para los cuales los compañeros supersimétricos están presentados por ejemplo en [\[10\]](#), [\[12\]](#), [\[14\]](#).

---

<sup>3</sup>un estudio auto contenido se puede encontrar en el libro de Bagchi [\[7\]](#).

# Capítulo 2

## Generalización de potenciales isoespectrales

*En este capítulo se introduce el método de factorización isoespectral para potenciales que obedecen a una ecuación lineal de Schrödinger. Desarrollamos el método con un parámetro extra a la factorización de Mielnik [10]. La introducción de tal parámetro introduce una deformación adicional de los potenciales deformados de Mielnik. Para un potencial arbitrario  $V(x)$  aplicamos nuestra idea de generalización biparamétrica al tratamiento formal del método supersimétrico y al final llevamos la solución encontrada al límite Mielnik de un solo parámetro.*

### 2.1. Introducción

Comenzaremos proponiendo dos enunciados generales que deben cumplirse en la factorización isoespectral de un Hamiltoniano dado:  $\hat{H}|\psi_0\rangle = [-D_x^2 + V(x)]|\psi_0\rangle = 0$ , considerando factorizaciones para el caso de su estado base ( $|\psi_0\rangle$ ).

**Teorema 1.** *Para todo potencial  $V(x)$  en una ecuación de Schrödinger, existe una transformación llamada transformada Darboux ( $DT_1$ ) tal que el potencial original  $V(x)$  se transforma en uno paramétrico  $V(x, \gamma)$  con el parámetro  $\gamma \in \mathbb{R}$ , junto con una transformación ( $DT_2$ ) de las funciones propias del Hamiltoniano.*

$$(DT_1)V(x) \longrightarrow V(x) - 2D_x(\phi(x, \gamma)), \quad (2.1)$$

$$(DT_2)|\psi_n(x)\rangle \longrightarrow e^{-\int \phi(x, \gamma) dx} |\psi_n(x)\rangle, \quad (2.2)$$

*que no modifican el espectro de eigenvalores del sistema cuántico considerado, cuando  $\phi(x, \gamma)$  es solución de la ecuación lineal de primer orden obtenida por linealización de Bernoulli en la ecuación de Riccati correspondiente a la factorización de parámetro  $\gamma$  del Hamiltoniano dado.*

**Teorema 2** (Restricción). *Para todo potencial deformado  $V(x, \gamma)$  proveniente de la transformación isoespectral  $DT_1$ , existe un conjunto de valores para el parámetro  $\gamma$*

( $\{\gamma_i\}$ ) tal que las potenciales correspondientes a esos valores  $V(x, \gamma_i)$  son singulares:

$$\exists \{\gamma_i\} \in [a_0, \dots, a_n] \text{ tal que } V(x, \gamma_i) \rightarrow \infty,$$

$$[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{R}.$$

Dicho lo anterior, comenzaremos proponiendo un Hamiltoniano inicial y después buscaremos las transformaciones  $DT_1, DT_2$  que mantienen el espectro invariante, fijando también la deformación del potencial inicial y de las eigenfunciones.

$$\hat{H}|\psi\rangle = [-D_x^2 + V(x)]|\psi\rangle; \quad V(x) = F^2(x) \quad (2.3)$$

Proponemos los siguientes operadores para factorizar el Hamiltoniano anterior con  $F(x) \rightarrow F$ , el término  $\epsilon$  se introduce para tener un escalar de energía en el estado base [14]:

$$\hat{a}_\epsilon^\dagger \equiv (-D_x + F + \epsilon), \quad \hat{a}_\epsilon \equiv (D_x + F + \epsilon) \quad (2.4)$$

El procedimiento para factorizar el Hamiltoniano dado en (3.1) se realiza de la siguiente manera [7].

$$\begin{aligned} \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon |\psi\rangle &= (-D_x + F + \epsilon)(D_x + F + \epsilon)|\psi\rangle \\ \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon |\psi\rangle &= (-D_x + F + \epsilon)(\psi' + F\psi + \epsilon\psi) \\ \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon |\psi\rangle &= (-\psi'' - F'\psi + F^2\psi + 2F\epsilon\psi + \epsilon^2\psi) \\ \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon |\psi\rangle &= (-D_x^2 + [F + \epsilon]^2 - F')|\psi\rangle \end{aligned}$$

Y para su compañero supersimétrico

$$\begin{aligned} \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger |\psi\rangle &= (D_x + F + \epsilon)(-D_x + F + \epsilon)|\psi\rangle \\ \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger |\psi\rangle &= (D_x + F + \epsilon)(-\psi' + F\psi + \epsilon\psi) \\ \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger |\psi\rangle &= (-\psi'' + F'\psi + F^2\psi + 2F\epsilon\psi + \epsilon^2\psi) \\ \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger |\psi\rangle &= (-D_x^2 + [F + \epsilon]^2 + F')|\psi\rangle \end{aligned}$$

De tal forma que se pueda expresar el Hamiltoniano inicial y su compañero supersimétrico en términos de los operadores de factorización propuestos

$$\hat{H}_F = \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon + F' \quad (2.5)$$

$$\hat{H}_B = \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger - F' \quad (2.6)$$

Para el caso cuando  $F(x) = x$  se tienen los conmutadores:

$$[\hat{a}_\epsilon, \hat{a}_\epsilon^\dagger] = 2 \quad [\hat{a}_\epsilon^\dagger, \hat{a}_\epsilon] = -2.$$

Por otro lado, el Hamiltoniano estrictamente isoespectral de (2.6) se puede obtener usando la factorización de Mielnik <sup>[1]</sup>, y viene dado por la siguiente ecuación

$$\hat{b}_\epsilon \hat{b}_\epsilon^\dagger |\psi\rangle = (-D_x^2 + \beta_\epsilon^2 + \beta'_\epsilon) |\psi\rangle \quad (2.7)$$

con  $\beta_\epsilon = \beta_\epsilon(x)$ .

$$\hat{b}_\epsilon^\dagger \equiv (-D_x + \beta_\epsilon), \quad \hat{b}_\epsilon \equiv (D_x + \beta_\epsilon) \quad (2.8)$$

Nuestra meta es encontrar espectros idénticos a los que se obtienen al aplicar los operadores  $\hat{a}_\epsilon, \hat{a}_\epsilon^\dagger$ , sobre un estado  $|\psi\rangle$ , para que esto suceda las partes izquierdas de las ecuaciones (3.4) y (3.7) deben ser idénticas:

$$(-D_x^2 + \beta_\epsilon^2 + \beta'_\epsilon) |\psi\rangle = (-D_x^2 + (F + \epsilon)^2 + F') |\psi\rangle$$

Eliminando términos semejantes llegamos a la siguiente ecuación de Riccati

$$\beta_\epsilon^2 + \beta'_\epsilon = (F + \epsilon)^2 + F' \quad (2.9)$$

Y tiene como solución particular:  $\beta_{\epsilon,p}(x) = F + \epsilon$ .

La solución general se da en la forma propuesta por D. Bernoulli:

$$\beta_{\epsilon,g} = \beta_{\epsilon,p} + \phi$$

Para resolver de manera completa el sistema planteado en la ecuación de Riccati debemos sustituir la forma general de la solución en el ecuación (2.9), realizada tal sustitución obtenemos una ecuación diferencial no lineal de primer orden:

$$\phi^2 + 2(F + \epsilon)\phi + \phi' = 0$$

Para transformarla en una ecuación de primer orden hacemos un cambio de variable  $y = \frac{1}{\phi}$ , así la ecuación no lineal se transforma en la ecuación:

$$y' - 2(F + \epsilon)y - 1 = 0 \quad (2.10)$$

Este tipo de ecuaciones se resuelven con el método de factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int_0^x -2(F+\epsilon)dx'} = e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^x -2Fdx'}$$

$$D_x[\mu(x)y] = \mu(x)$$

$$[\mu(x)y] = \gamma + \int_0^x \mu(x')dx' \Rightarrow y = \frac{\gamma + \int_0^x \mu(x')dx'}{\mu(x)}; \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo  $\mu(x)$ :

$$y(x) = \frac{\gamma + \int_0^x e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^x -2Fdx'} dx'}{e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^x -2Fdx'} dx'} \quad (2.11)$$

---

<sup>1</sup> Los operadores  $\hat{b}_\epsilon^\dagger, \hat{b}_\epsilon$  son los operadores de factorización propuestos por Mielnik <sup>[10]</sup>

Finalmente se regresa a la variable original  $\phi(x)$ .

$$\phi_{\gamma,\epsilon}(x) = \frac{e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^x -2F dx'}}{\gamma + \int_0^x e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^x -2F dx'} dx'}$$

Con este resultado podemos dar la solución general de (2.9).

$$\beta_g(x) = \beta_{\gamma,\epsilon}(x) = F + \epsilon + \frac{e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^x -2F dx'}}{\gamma + \int_0^x e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^x -2F dx'} dx'} \quad (2.12)$$

## 2.2. Ilustración del método

### Caso: oscilador armónico cuántico

Una completa descripción de un sistema cuántico se hace en el espacio de funciones llamado espacio de Hilbert ( $\mathbb{L}^2$ ) que contiene todas las funciones complejas de módulo cuadrado integrable. Para cada sistema cuántico se debe determinar un conjunto de funciones que forman una base en el espacio de Hilbert a partir de las cuales se obtiene la información asociada a la probabilidad de encontrar electrones en el potencial estudiado. Uno de los potenciales fundamentales que tiene soluciones analíticas en mecánica cuántica es el del oscilador armónico, que tiene un análogo clásico muy estudiado tanto a nivel de fuerzas (ley de Hooke) como al nivel de la integral de movimiento de energía. Este sistema ha sido ampliamente estudiado debido a su fácil adaptación como primera aproximación armónica en el caso de sistemas oscilantes más complejos como son los sistemas anarmónicos (que no cumplen con la ley de movimiento lineal).

Como otro aporte de este trabajo de investigación y como se mencionó anteriormente se construirá la transformación isoespectral del oscilador armónico cuántico con un parámetro adicional al parámetro de Mielnik, de aquí en adelante denotado por la letra  $\epsilon$ . Además vamos a recuperar los resultados de Mielnik en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

El primer objetivo es obtener el estado base ( $|\psi_0\rangle$ ) del oscilador armónico cuántico de dos parámetros de nuestro modelo.

Para esto aplicaremos el operador de aniquilación  $\hat{a}_\epsilon$  sobre él mismo para obtener el cero de energía.

La acción del operador de aniquilación  $\hat{a}_\epsilon = (D_x + x + \epsilon)$  sobre el estado  $|\psi_0\rangle$  se traduce en la siguiente ecuación diferencial.

$$\psi'_0 + x\psi_0 + \epsilon\psi_0 = 0 \rightarrow \psi'_0 = -(x + \epsilon)\psi_0$$

Cuya solución está dada por:

$$|\psi_{0,\epsilon}\rangle = A_{0,\epsilon} e^{-\epsilon x - x^2/2}$$

El espacio completo de funciones propias se puede obtener de manera algebraica como una combinación de estados inferiores con un escalamiento  $\epsilon^j$  aplicando el operador de creación  $\hat{a}^\dagger$  a los estados inmediatamente inferiores al que se quiera calcular.

$$|\psi_{n+1,\epsilon}\rangle = \hat{a}^\dagger, \epsilon |\psi_{n,\epsilon}\rangle$$

Los cálculos completos se presentan en el apéndice [2](#), el estudio de las funciones nos permite formular la siguiente relación entre el estado excitado  $|\psi_{n,\epsilon}(x)\rangle$  y todos los estados de orden inferior  $|\psi_{n-j,\epsilon(x); j < n}\rangle$ .

$$|\psi_{n,\epsilon}\rangle = \sum_{j=0}^n 2^j \binom{n}{j} H_{n-j}(x) \epsilon^j |\psi_{0,\epsilon}\rangle, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (2.13)$$

Donde  $H_{n-j}(x)$  son los polinomios de Hermite de orden  $n-j$  y los primeros 4 vienen dados por las siguientes expresiones

- $H_0(x) = 1$
- $H_1(x) = 2x$
- $H_2(x) = 4x^2 - 2$
- $H_3(x) = 8x^3 - 12x$

Usando la ecuación [\(2.13\)](#) obtenemos para los primeros estados excitados:

$$\begin{aligned} |\psi_{1,\epsilon}\rangle &= \left[ 2^0 \binom{1}{0} H_{1-0}(x) \epsilon^0 + 2^1 \binom{1}{1} H_{1-1}(x) \epsilon^1 \right] |\psi_{0,\epsilon}\rangle \\ &= [H_1(x) + 2H_0(x)\epsilon] |\psi_{0,\epsilon}\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\psi_{2,\epsilon}\rangle &= \left[ 2^0 \binom{2}{0} H_{2-0}(x) \epsilon^0 + 2^1 \binom{2}{1} H_{2-1}(x) \epsilon^1 + 2^2 \binom{2}{2} H_{2-2}(x) \epsilon^2 \right] |\psi_{0,\epsilon}\rangle \\ &= [H_2(x) + 4H_1(x)\epsilon + 4H_0\epsilon^2] |\psi_0^\epsilon\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\psi_{3,\epsilon}\rangle &= \left[ 2^0 \binom{3}{0} H_{3-0}(x) \epsilon^0 + 2^1 \binom{3}{1} H_{3-1}(x) \epsilon^1 + 2^2 \binom{3}{2} H_{3-2}(x) \epsilon^2 + 2^3 \binom{3}{3} H_{3-3}(x) \epsilon^3 \right] |\psi_{0,\epsilon}\rangle \\ &= [H_3(x) + 6H_2(x)\epsilon + 12H_1\epsilon^2 + 8H_0\epsilon^3] |\psi_{0,\epsilon}\rangle \end{aligned}$$

### 2.2.1. Límite estándar del oscilador armónico cuántico

Es importante recalcar el límite estándar ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) de los estados dados para ver como se recupera los resultados estándar del oscilador armónico cuántico. Al tomar tal límite obtenemos que los estados excitados vienen dados en correspondencia total con los resultados bien conocidos del oscilador armónico cuántico [\[11\]](#).

$$|\psi_{1,0}\rangle = H_1(x)|\psi_0\rangle$$

$$|\psi_{2,0}\rangle = H_2(x)|\psi_0\rangle$$

$$|\psi_{3,0}\rangle = H_3(x)|\psi_0\rangle$$

La cantidad mas importante que se puede obtener de tales estados es la densidad de probabilidad que nos proporciona la probabilidad de encontrar una partícula en el estado  $|\psi_{n,\epsilon}\rangle$  y se calcula usando eigenfunciones normalizadas como se muestra a continuación.

### 2.2.2. Normalización de los estados $|\psi_{n,\epsilon}\rangle$

La descripción completa de las bases para el espacio de soluciones es normalizando las funciones base, esto es debido a que si recordamos que la solución para el estado base involucra una constante de escalamiento  $A_{0,\epsilon}$ , que aparece en la solución al surgir de una ecuación diferencial de primer orden, debemos encontrar el valor numérico de esa constante para introducirlo en la función ya encontrada anteriormente, para de esta manera dar la solución completa al problema de las eigenfunciones.

Para normalizar los estados excitados (y el base) se debe cumplir la siguiente condición de normalización, en notación “bra-ket”:

$$\langle A_{n,\epsilon}\psi_{n,\epsilon} | A_{n,\epsilon}\psi_{n,\epsilon} \rangle = A_{n,\epsilon}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_{n,\epsilon}} \psi_{n,\epsilon} dx = A_{n,\epsilon}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_{n,\epsilon})^2 dx = 1$$

Esta integral tiene la interpretación física siguiente.

Para una partícula que ocupa el estado  $|\psi_{n,\epsilon,\gamma}\rangle$  se tiene que la probabilidad de que se encuentre en el espacio definido por los límites de la integral (en este caso en toda la recta real) es uno, es decir, la partícula en ese estado invariablemente se encontrará en la recta real, pero la forma del cuadrado de la función nos dará información acerca de donde es más probable que sea localizada

$$A_{n,\epsilon}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n 2^j \binom{n}{j} H_{n-j}(x) e^j e^{-\epsilon x - x^2/2} \right)^2 dx = 1 .$$

Para el estado base  $A_{0,\epsilon}$  resulta

$$A_{0,\epsilon}^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x - x^2/2} dx = A_{0,\epsilon}^2 \sqrt{\pi} e^{\epsilon^2} = 1 \Rightarrow A_{0,\epsilon} = \frac{\sqrt{e^{-\epsilon^2}}}{\pi^{1/4}} = \frac{e^{-\epsilon^2/2}}{\pi^{1/4}} .$$

Las constantes de normalización para los estados excitados fueron obtenidas usando integración numérica, la instrucción se muestra en el anexo [3](#).

## 2.3. Propiedades de las funciones $|\psi_{n,\epsilon}\rangle$

Las funciones estándar  $|\psi_n\rangle$  están contenidas en el conjunto  $\{|\psi_{n,\epsilon}\rangle\}$  como el subconjunto  $\{|\psi_{n,0}\rangle\}$ , lo que se puede apreciar de las figuras [2.1](#)[2.2](#)[2.3](#)[2.4](#) donde se ve que la acción del parámetro  $\epsilon$  (introducido en los operadores de factorización) en las funciones propias del potencial considerado produce un desplazamiento sobre el eje

$x$ . Esta observación es importante que la recalcamos debido a que el Hamiltoniano es invariante bajo traslaciones espaciales, este dato nos servirá en los capítulos posteriores.

Este resultado ha sido utilizado con anterioridad en trabajos relacionados con la factorización isoespectral de Mielnik, como el realizado por Drigo Filho en 1988 [14], donde se utiliza la deformación escalar en los operadores de factorización para obtener una energía del vacío igual a cero en el oscilador Morse.

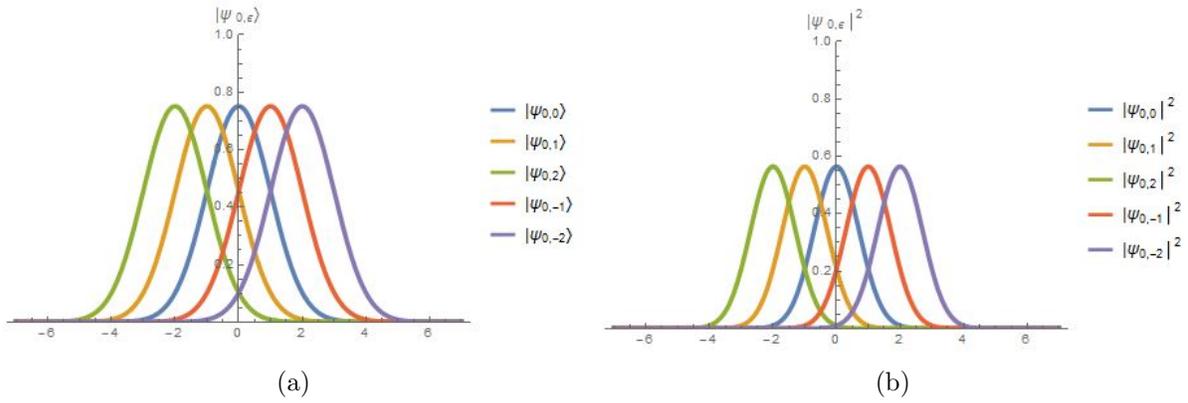


Figura 2.1: (a) Funciones normalizadas  $|\psi_{0,\epsilon}\rangle$  para valores distintos de  $\epsilon$  y (b) Densidades de probabilidad.

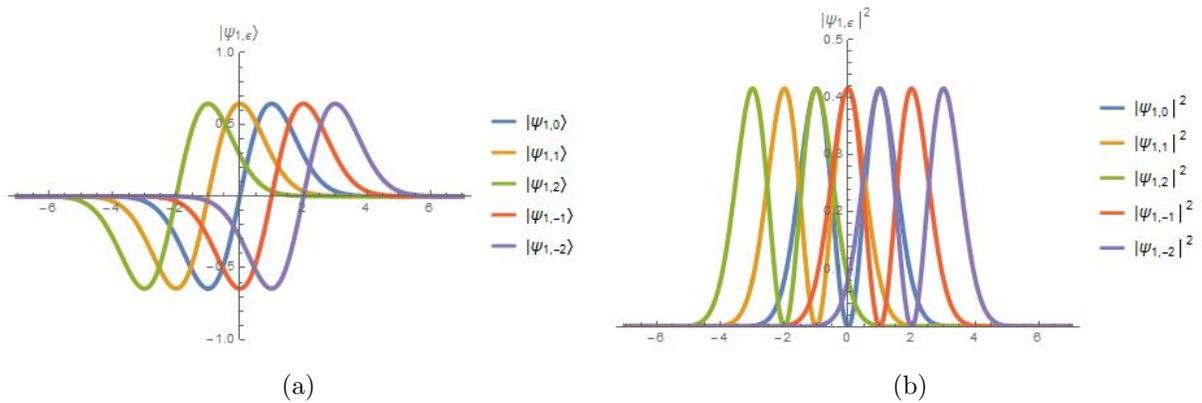


Figura 2.2: (a) Funciones normalizadas  $|\psi_{1,\epsilon}\rangle$  para valores distintos de  $\epsilon$  y (b) Densidades de probabilidad.

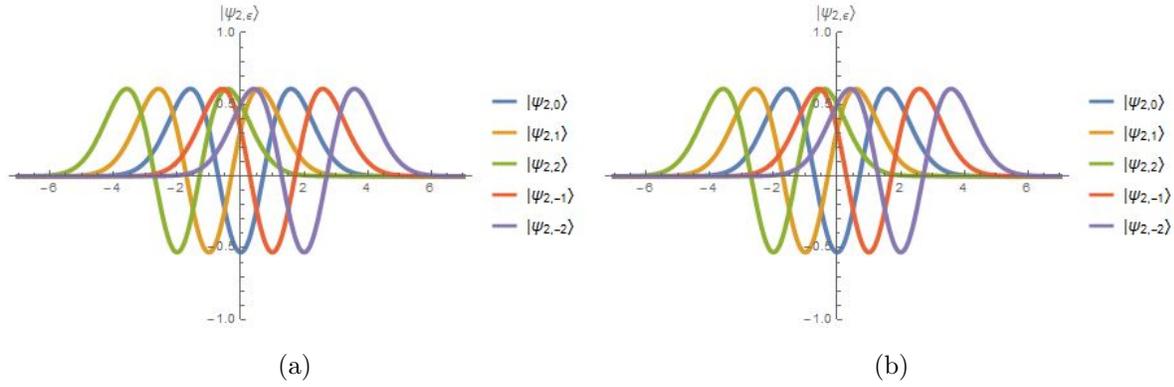


Figura 2.3: (a) Funciones normalizadas  $|\psi_{2,\epsilon}\rangle$  para valores distintos de  $\epsilon$  y (b) Densidades de probabilidad.

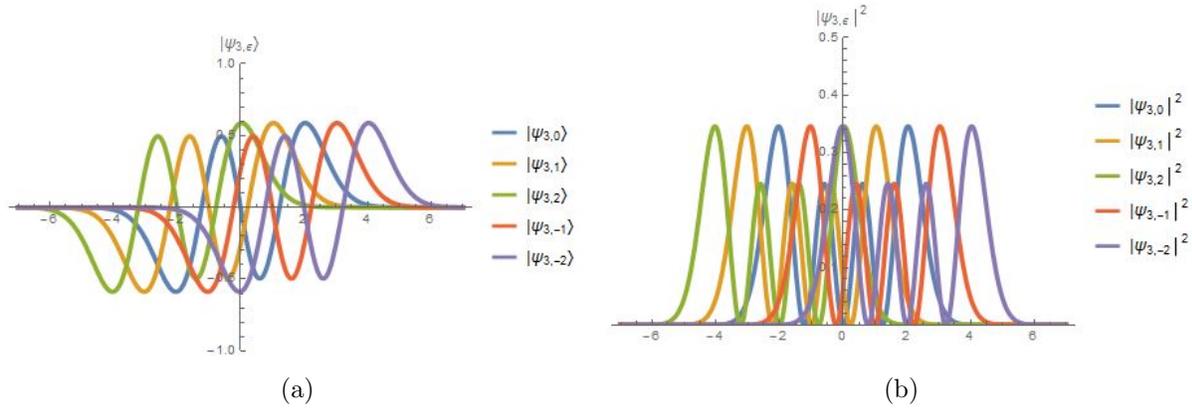


Figura 2.4: (a) Funciones normalizadas  $|\psi_{3,\epsilon}\rangle$  para valores distintos de  $\epsilon$  y (b) Densidades de probabilidad.

En la siguiente sección proseguiremos con la factorización isoespectral usando los operadores de factorización con desplazamiento escalar  $\epsilon$  para poder estudiar el comportamiento de las soluciones.

## 2.4. Estado base del Hamiltoniano isoespectral

Para encontrar el estado base del Hamiltoniano deformado se usa el operador de aniquilación sobre el mismo:  $(D_x + \beta_{\epsilon,g})|\psi_{0,\gamma,\epsilon}\rangle = 0$ .

$$|\psi_{0,\gamma,\epsilon}(x)\rangle = e^{-\int_0^x \beta_{\epsilon,g}(x) dx'} = |\psi_{0,\gamma,\epsilon}\rangle e^{-\int_0^x \phi_{\gamma,\epsilon}(x) dx'} \quad (2.14)$$

Realizando la integral  $e^{-\int_0^x \phi_{\gamma,\epsilon}(x) dx'}$ , con el siguiente cambio de variables:

$$u(x) = \gamma + \int_0^x e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^x -2F dx'} dx', du = e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^x -2F dx'} dx'$$

Podemos escribir la ecuación (2.14) de manera más compacta.

$$|\psi_{0,\gamma,\epsilon}(x)\rangle = |\psi_{0,\gamma,\epsilon}\rangle e^{-\int \frac{du}{u}} = |\psi_{0,\gamma,\epsilon}\rangle e^{-\ln(u)} = |\psi_{0,\gamma,\epsilon}\rangle u^{-1} \quad (2.15)$$

Y regresando a la variable original.

$$|\psi_{0,\gamma,\epsilon}(x)\rangle = \frac{|\psi_0\rangle}{\gamma + \int_0^{x'} e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^{x'} -2F dx'} dx'} \quad (2.16)$$

La acción del escalar  $\epsilon$  en el estado base del oscilador deformado consiste en un desplazamiento sobre el eje (como en el caso estándar) y un escalamiento en las funciones, como se ve en la figura (2.5) donde podemos apreciar que cuando los valores del parámetro  $\epsilon$  crecen se obtienen densidades de probabilidad mayores al caso estándar ( $\epsilon = 0$ )<sup>2</sup>.

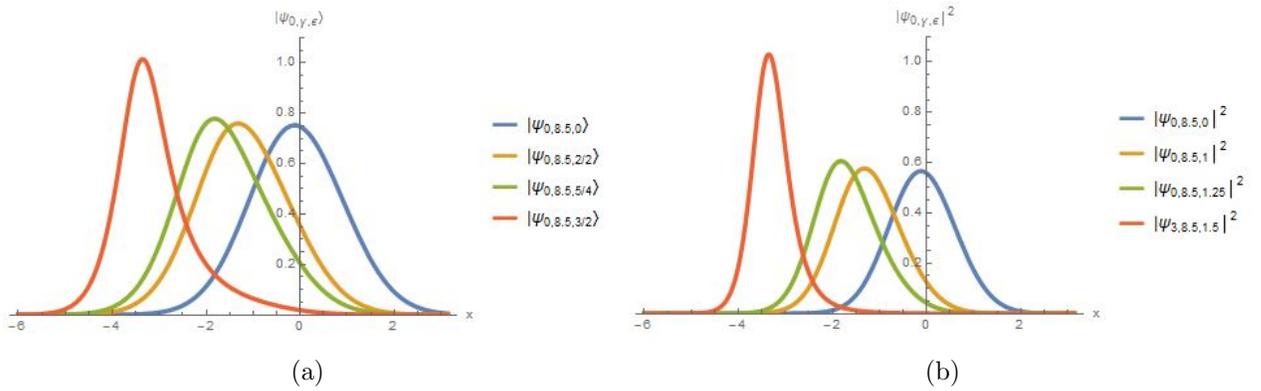


Figura 2.5: (a) Funciones base normalizadas  $|\psi_{0,\gamma,\epsilon}\rangle$  para valores distintos de  $\epsilon$  y (b) Densidades de probabilidad.

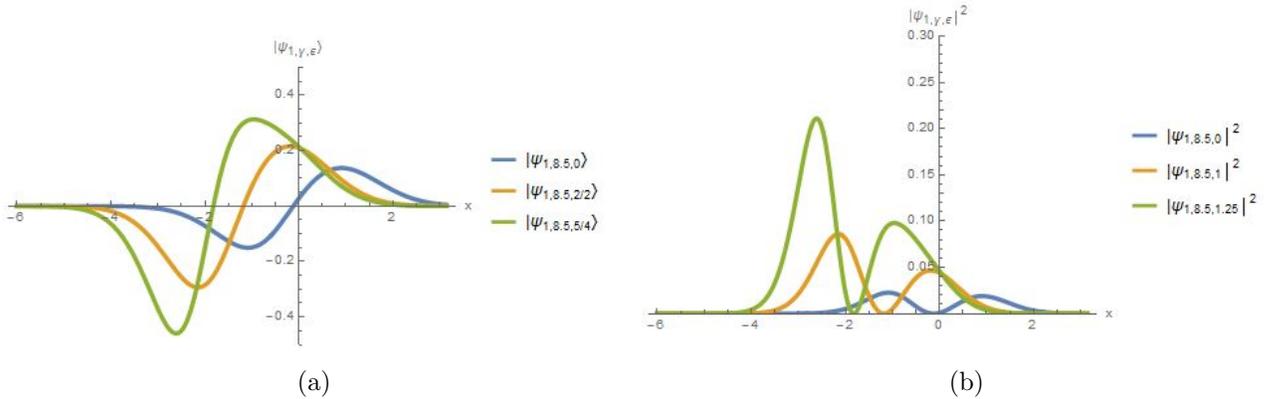


Figura 2.6: (a) Funciones no normalizadas  $|\psi_{1,\gamma,\epsilon}\rangle$  para valores distintos de  $\epsilon$  y (b) Densidades de probabilidad.

<sup>2</sup>Las funciones se presentan en [4]

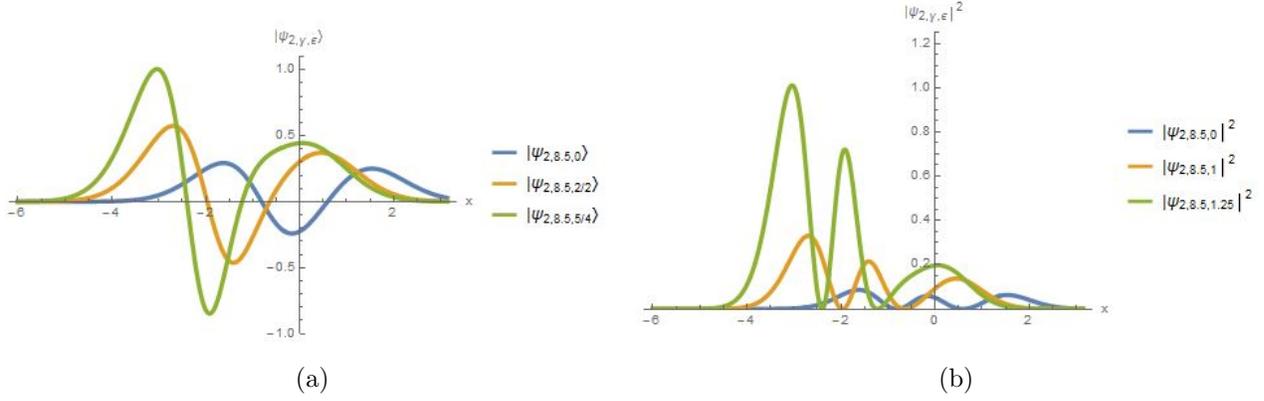


Figura 2.7: (a) Funciones no normalizadas  $|\psi_{2,\gamma,\epsilon}\rangle$  para valores distintos de  $\epsilon$  y (b) Densidades de probabilidad.

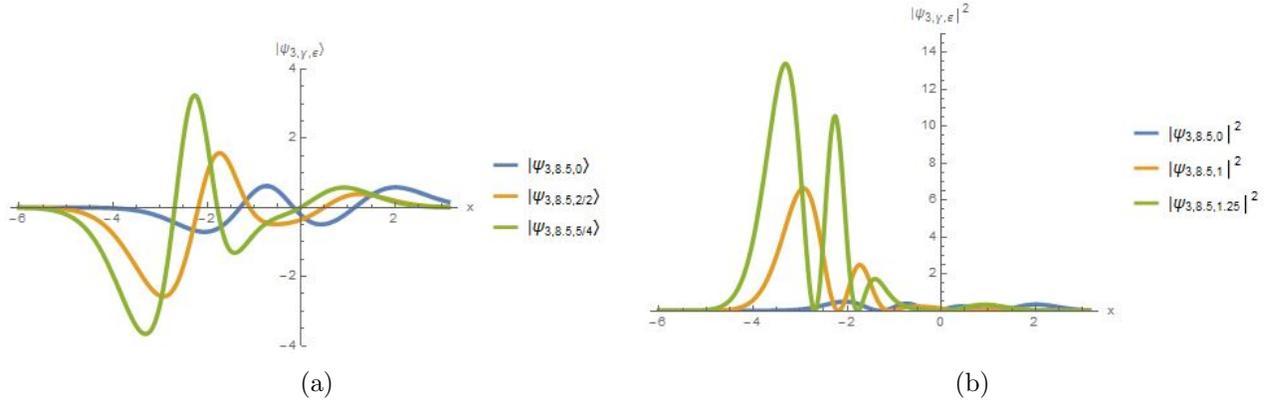


Figura 2.8: (a) Funciones no normalizadas  $|\psi_{3,\gamma,\epsilon}\rangle$  para valores distintos de  $\epsilon$  y (b) Densidades de probabilidad.

## 2.5. Potencial deformado

Como se puede corroborar en las secciones anteriores la acción de la transformada de Darboux a través de la factorización estrictamente isoespectral sobre un Hamiltoniano dado produce deformaciones de las funciones propias de tal sistema sin cambiar el conjunto de los valores propios. Aunado a la deformación en las funciones propias la transformada Darboux también modifica el potencial generando una familia biparamétrica de potenciales, como se verá a continuación.

La familia biparamétrica de potenciales se obtiene usando una transformación supersimétrica del Hamiltoniano inicial, como se mencionó en el capítulo (1) la acción de la factorización supersimétrica sobre un Hamiltoniano es generar un nuevo Hamiltoniano deformado en función de los parámetros introducidos manteniendo el mismo espectro de autovalores con rompimiento de simetría.

Dicho lo anterior, procederemos a buscar los Hamiltonianos correspondientes a los operadores de factorización propuestos.

$$\hat{b}_\epsilon^\dagger \hat{b}_\epsilon = \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon = -D_x^2 + (F + \epsilon)^2 - F' = H_\epsilon - F' \quad (2.17)$$

$$\hat{b}_\epsilon \hat{b}_\epsilon^\dagger = \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger = -D_x^2 + (F + \epsilon)^2 + F' = H_\epsilon + F' \quad (2.18)$$

$$[\hat{b}_\epsilon^\dagger, \hat{b}_\epsilon] = -2\beta'_g = -2(F' + \phi'_{\gamma,\epsilon}) \quad (2.19)$$

$$\hat{b}_\epsilon^\dagger \hat{b}_\epsilon = \hat{b}_\epsilon \hat{b}_\epsilon^\dagger + [\hat{b}_\epsilon^\dagger, \hat{b}_\epsilon] \quad (2.20)$$

Al sustituir (2.17), (2.18) y (2.19) en (2.20), obtenemos la siguiente relación entre Hamiltonianos.

$$\begin{aligned} H_{\gamma,\epsilon} - F' &= H_\epsilon + F' - 2F' - 2\phi'_{\gamma,\epsilon} \\ \Rightarrow \hat{H}_{\gamma,\epsilon} &= \hat{H}_\epsilon - 2\phi'_{\gamma,\epsilon} \end{aligned}$$

Donde los subíndices  $\gamma, \epsilon$  en el Hamiltoniano  $H_{\gamma,\epsilon}$  indican la dependencia biparamétrica del Hamiltoniano, los Hamiltonianos  $\hat{H}_{\gamma,\epsilon}$  y  $\hat{H}_\epsilon$  están relacionados a través de la siguiente expresión que nos brinda la información de como se transforma el potencial inicial bajo la acción de la transformación

$$-D_x^2 + V_{\gamma,\epsilon} = -D_x^2 + (F + \epsilon)^2 - 2\phi'_{\gamma,\epsilon}$$

Eliminando los términos semejantes obtendremos el potencial deformado

$$V_{\gamma,\epsilon}(x) = (F + \epsilon)^2 - 2D_x \left( \frac{e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^{x'} -2F dx'}}{\gamma + \int_0^{x'} e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^{x'} -2F dx'} dx'} \right). \quad (2.21)$$

Al estudiar las gráficas (2.9) de un potencial inicial  $F(x) = x$  encontramos que hay una simetría de espejo de tipo  $V_{\gamma,\epsilon}(x) = V_{-\gamma,-\epsilon}(x)$  para el potencial deformado, esta simetría fue reportada en [10].

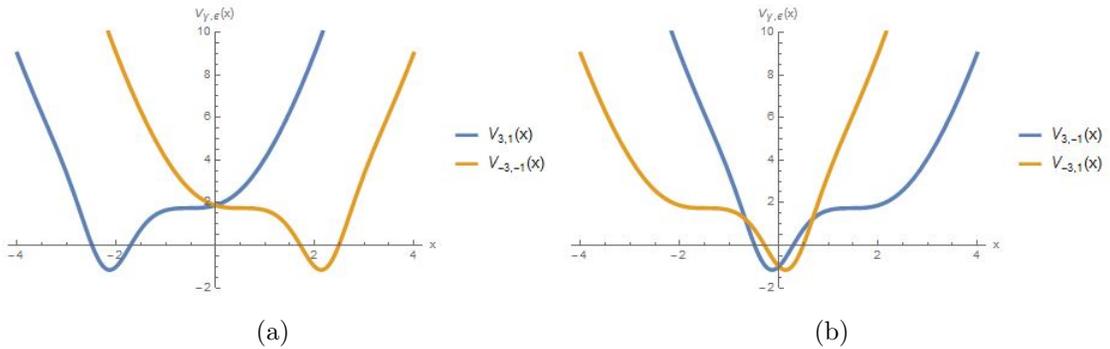


Figura 2.9: Simetría de los potenciales deformados  $V_{\gamma,\epsilon}(x) = V_{-\gamma,-\epsilon}(x)$ .

Para encontrar los puntos donde el potencial deformado es regular, utilizamos un gráfico de contorno para  $V_{\gamma,\epsilon} = V(x, \epsilon, \gamma = 0, \pm 5)$ , hacemos esto para encontrar el rango de  $\epsilon$  que mantiene el potencial sin singularidades.

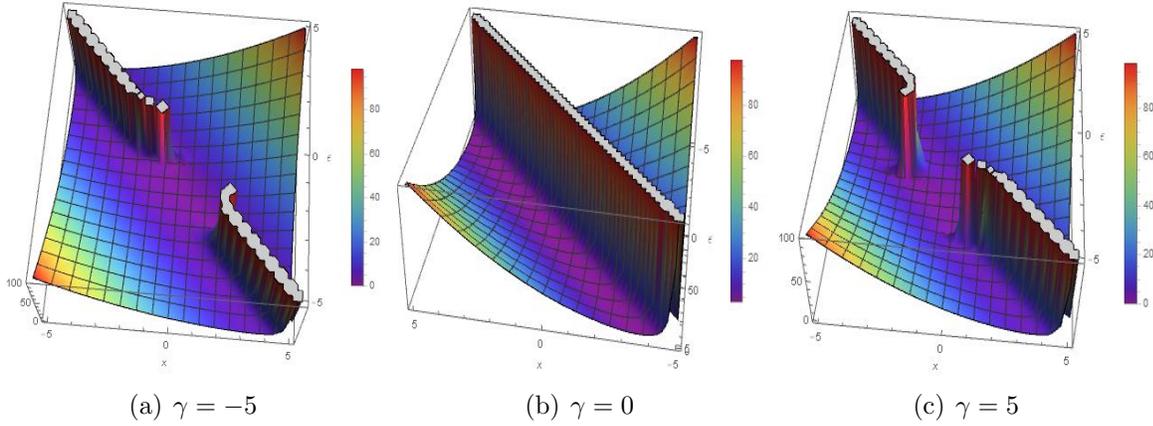


Figura 2.10: Gráficos  $\mathbb{R}^3$  para diversos valores de  $\gamma$  en  $-5 \leq x, \epsilon \leq 5$ .

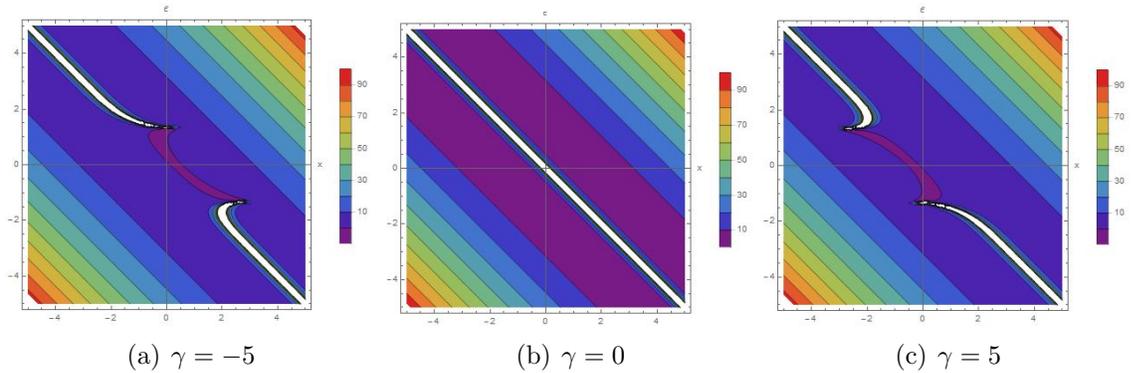


Figura 2.11: Gráficos de contorno para diversos valores de  $\gamma$  en  $-5 \leq x, \epsilon \leq 5$ .

## 2.6. Efecto del desplazamiento en los operadores sobre el oscilador isoespectral

Como se vio en la sección anterior el efecto del desplazamiento escalar  $\epsilon$  en los operadores de factorización es un desplazamiento sobre el eje que no afecta el espectro, en esta sección se revisará el efecto de tal modificación en el Hamiltoniano deformado.

La invarianza del Hamiltoniano  $\hat{H}$  bajo la deformación  $\epsilon$  en los operadores de factorización radica en lo siguiente:

Supongamos que tenemos una función arbitraria  $f \in \mathbb{R}$ , tal que su cuadrado modela un potencial usado en alguna aplicación, partiendo de esto podemos desplazar esa función por un escalar  $\epsilon$ , tal que la nueva función se pueda dar en términos de la antigua de la forma

$$g \rightarrow f + \epsilon$$

Entonces el nuevo potencial será en términos de la función  $g^2$ , pero tiene las mismas características que el dado por la función  $f$ , ya que son potenciales parabólicos en este caso.

## 2.7. Restricciones paramétricas

Continuando con el caso donde  $F(x) = x$

La relación entre los parámetros  $\epsilon$  y  $\gamma$  nos permite conocer los puntos donde el potencial con deformación biparamétrica es regular gráficamente podemos observar la relación entre ellos en la figura (2.12)<sup>3</sup>.

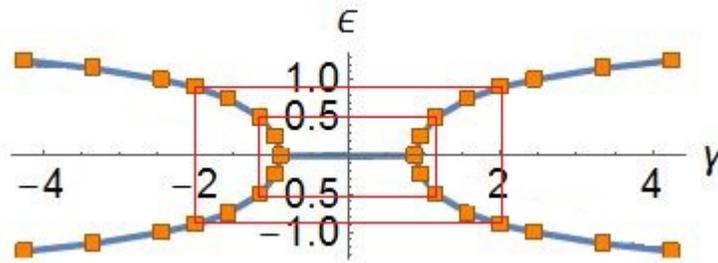


Figura 2.12: Relación entre los parámetros  $\epsilon$  y  $\gamma$ , el exterior del rectángulo delimitado por las líneas rojas indican el conjunto de valores que puede tomar el parámetro  $\gamma$  al seleccionar un valor para  $\epsilon$  tal que los potenciales biparamétricos sean regulares.

La gráfica (2.12) fue obtenida tomando valores específicos de  $\gamma$  y  $\epsilon$  donde el potencial (2.21) es singular esta región esta representada por las regiones blancas en gráficas de contornos como las presentadas en la figura (2.13) con diversos valores del  $\gamma$  específicamente se generaron los datos mostrados en el cuadro (2.1).

En la siguiente subsección se muestra el uso de ella en el caso del oscilador de Mielnik.

<sup>3</sup>Ejemplo:

Si se elige un valor de  $\epsilon = 1$  el parámetro  $\gamma$  debe estar fuera del intervalo  $[-2.45, 2.45]$ .

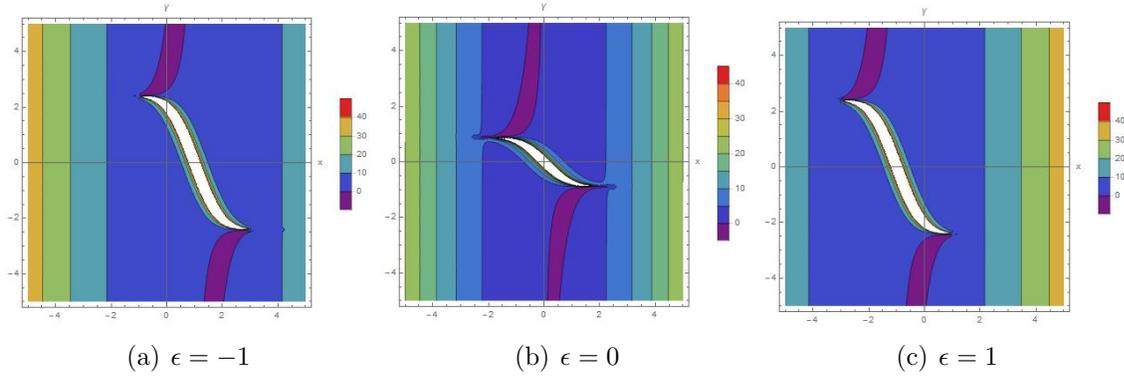


Figura 2.13: Gráficos de contorno para diversos valores de  $\epsilon$  en  $-5 \leq x, \gamma \leq 5$ .

$V(x, \gamma, \epsilon)$	$\gamma$	$\epsilon$
singular $\forall x$	$[-\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}]$	0
singular $\forall x$	$[-0.95, 0.95]$	0.25
singular $\forall x$	$[-1.15, 1.15]$	0.5
singular $\forall x$	$[-1.575, 1.575]$	0.75
singular $\forall x$	$[-2, 2]$	0.9
singular $\forall x$	$[-2.45, 2.45]$	1
singular $\forall x$	$[-3.35, 3.35]$	1.15
singular $\forall x$	$[-4.25, 4.25]$	1.25

Cuadro 2.1: Condiciones en que  $\gamma$  y  $\epsilon$  generan potenciales singulares.

Otra forma de analizar los puntos que generan singularidades en el potencial bi-paramétrico es la siguiente:

Queremos encontrar los valores específicos para  $\epsilon$  y  $\gamma$  que hacen que el potencial sea singular para todo  $x$  para que esto ocurra se debe cumplir que el divisor sea igual a cero:

$$\gamma + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\epsilon^2} \operatorname{erf}[x_{\gamma, \epsilon} + \epsilon] = 0 \quad (2.22)$$

Al ser la función de error una función especial se debe considerar un cálculo numérico para poder solucionar el problema planteado:

$$x_{\gamma, \epsilon} = \operatorname{Erf}^{-1} \left[ -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma e^{-\epsilon^2} \right] - \epsilon$$

Para saber en que valores específicos se cuenta con solución recurrimos a la gráfica (2.14) donde las regiones vacías indican que la ecuación (2.22) no tiene solución para esa coordenada  $(\gamma, \epsilon)$  es decir que el denominador no se hace cero para esos valores de  $\epsilon$  y  $\gamma$  mientras que las regiones coloreadas nos indican regiones donde (2.22) tiene solución.

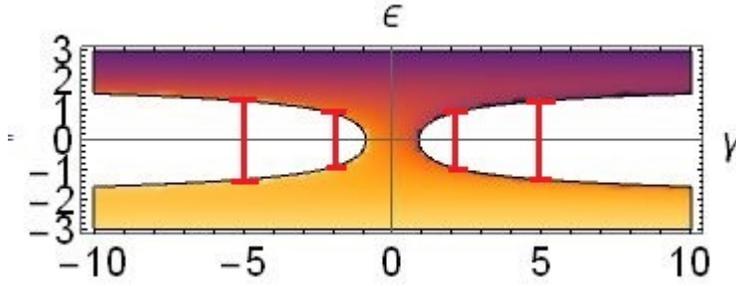


Figura 2.14: Relación entre los parámetros  $\epsilon$  y  $\gamma$  calculado numéricamente, los puntos contenidos en las regiones sin colorear indican los valores permitidos para una coordenada de los parámetros de deformación, mientras que las zonas coloreadas indican regiones que generarán singularidades en el potencial.

La importancia de la figuras (2.12) y (2.14) radica en que proporciona directamente los valores permitidos para el parámetro  $\gamma$  cuando se fija un valor para el parámetro  $\epsilon$  (y viceversa) de tal manera que se obtengan potenciales regulares para (2.21).

### 2.7.1. Ejemplo: Oscilador de Mielnik

El oscilador de Mielnik fue el primer caso discutido bajo el esquema de factorización estrictamente isoenergético que se publicó hace 35 años a finales de 1984.

En nuestro caso biparamétrico el oscilador de Mielnik se obtiene para  $\epsilon = 0$  y la función  $F(x) = x$ , respecto al rango aceptado para los valores de  $\gamma$  usaremos la tabla (2.1).

$$\text{si } \epsilon = 0 \Rightarrow \gamma \notin \left[ -\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}} \right] .$$

De no cumplirse lo anterior los potenciales serían singulares:

$$\{\epsilon = 0, \gamma \in \left[ -\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}} \right]\} \Rightarrow V(x, \gamma, \epsilon) \rightarrow \infty \text{ (es singular)}$$

Esa singularidad aparecería en un punto sobre el eje  $x$  denotado por  $x_s$ , para saber la ubicación de los puntos singulares sobre el eje, debemos encontrar la solución para la ecuación

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\epsilon^2} \text{Erf}(x_{s,0,\epsilon} + \epsilon) = 0$$

La ecuación anterior es el divisor del potencial deformado  $V_{\gamma,\epsilon}(x)$ , al resolver para  $x_{s,0,\epsilon}$  encontraremos un potencial singular  $V_{0,\epsilon}(x_s)$ .

$$x_{s,\gamma_s,\epsilon} = \text{Erf}^{-1} \left[ -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma_s e^{-\epsilon^2} \right] - \epsilon \quad 4$$

<sup>4</sup> $\text{Erf}^{-1}(x)$  se calcula de forma numérica.

El caso que necesitamos es el de  $\gamma_s = 0$  debido a que cuando toma ese valor se obtiene una línea sobre el eje  $x$  que es donde la función tiene un cero, este cero se desplaza en función del parámetro  $\epsilon$  como se explica a continuación

Para el caso  $\epsilon = 0$  se obtienen puntos  $x_{s,\gamma_s,\epsilon}$  simétricos respecto al origen (2.15), no obstante cuando se toman valores  $\epsilon \neq 0$  se rompe tal simetría respecto al origen ( $x_s = 0$ ) y las soluciones se ven desplazadas al punto  $x_s = -\epsilon$ , que será el nuevo eje de simetría (2.16).

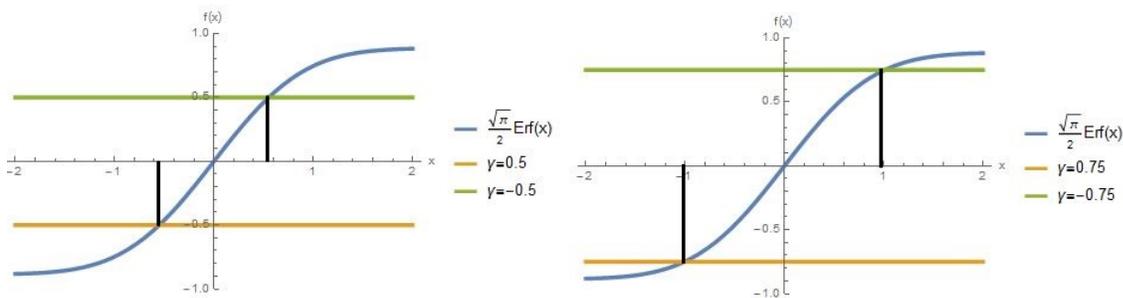


Figura 2.15:  $x_{s,\gamma_s,\epsilon}$  para dos valores de  $\gamma$  y  $\epsilon = 0$ , se observa que el punto  $f(x_{s,\gamma_s,\epsilon})$  donde cruza la gráfica con los valores de  $\gamma_s$  son simétricos respecto al origen.

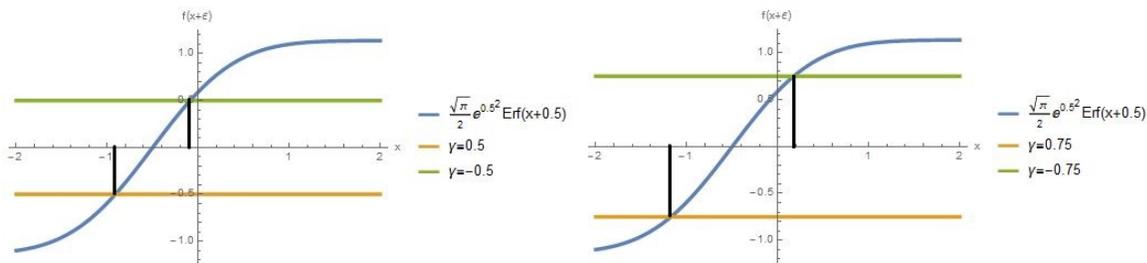


Figura 2.16:  $x_{s,\gamma_s,\epsilon}$  para dos valores de  $\gamma$  y  $\epsilon = 0.5$ , el punto  $f(x_{s,\gamma_s,\epsilon})$  donde cruza la gráfica con los valores de  $\gamma_s$  son asimétricos respecto al origen.

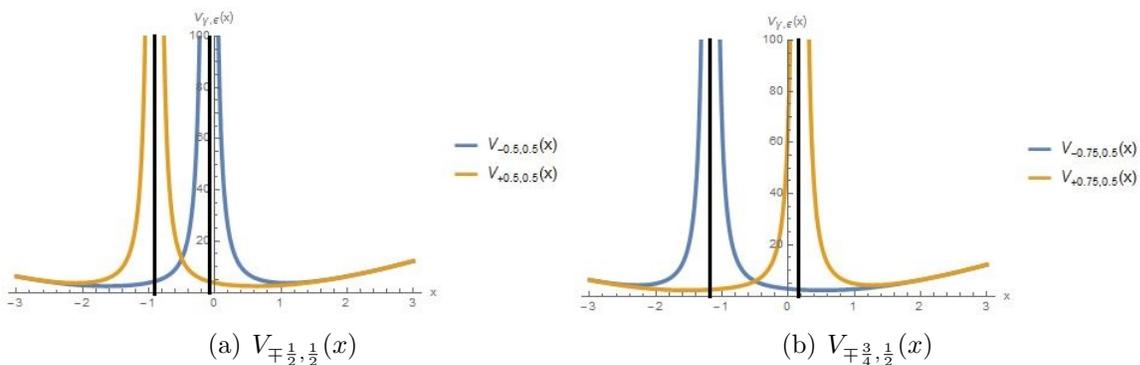


Figura 2.17: El potencial  $V_{\gamma,\epsilon}(x)$  donde se muestran las singularidades en los puntos  $x_s$ .

Al sustituir las condiciones en (2.12), (2.14), (2.21) obtenemos lo siguiente

- Eigenfunción para el estado base:

$$|\psi_{0,\epsilon}\rangle = |\psi_{0,0}(x)\rangle = e^{-\int_0^x x dx} = A_0 e^{-x^2/2}$$

- Eigenfunción para el estado base deformado:

$$|\psi_{0,\gamma,\epsilon}\rangle = |\psi_{0,\gamma,0}\rangle = \frac{A_0 e^{-x^2/2}}{\gamma + \int_0^x e^{-x^2} dx} = \frac{A_0 e^{-x^2/2}}{\gamma + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{Erf}(x)}$$

- El potencial deformado

$$\begin{aligned} V_{\gamma,\epsilon} = V_{\gamma,0}(x) &= x^2 - 2\phi'_{\gamma,0} \\ &= x^2 - 2D_x \left( \frac{e^{-x^2}}{\gamma + \int_0^x e^{-x^2} dx} \right) \end{aligned}$$

En todos los incisos debe cumplirse que:  $\gamma \notin \left[-\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}\right]$ .

Comparando los resultados encontrados usando nuestra propuesta con los obtenidos por Mielnik en [10], podemos comprobar la eficacia de nuestro método en el límite del oscilador armónico cuántico estándar.

## 2.8. Conclusión de capítulo

La acción de la deformación escalar en los operadores de factorización produce un deslazamiento en las eigenfunciones del Hamiltoniano inicial y un escalamiento + desplazamiento en las eigenfunciones del Hamiltoniano isopectral, sobre el potencial se manifiesta como un cambio de variable espacial ( $\bar{x} \rightarrow x + \epsilon : \epsilon \in \mathbb{R}$ ).

$$\begin{aligned} \hat{H}|\psi(x)\rangle &= [-D_x^2 + F^2]|\psi(x)\rangle \\ \hat{H}_{\gamma,\epsilon}|\psi_{\gamma,\epsilon}(x)\rangle &= \left[ -D_x^2 + (F + \epsilon)^2 - 2D_x \left( \frac{e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^{x'} -2F dx'}}{\gamma + \int_0^{x'} e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^{x'} -2F dx'} dx'} \right) \right] |\psi_{\gamma,\epsilon}(x)\rangle \\ &\Rightarrow |\psi_{\gamma,\epsilon}(x)|^2 > |\psi(x)|^2 \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\{|\psi_{\gamma,\epsilon}(x)|^2 \rightarrow |\psi(x)|^2; \{\epsilon \rightarrow 0, \gamma \rightarrow \pm\infty\}\} \tag{2.24}$$



# Capítulo 3

## Potenciales Periódicos

### Resumen

*En este capítulo se plantea una forma de modelar nuevos potenciales periódicos a partir de otros conocidos con el método mostrado en el capítulo anterior, también se estudia el comportamiento de los potenciales deformados cuando se varían parámetros asociados a la solución encontrada.*

### 3.1. Introducción

La propuesta es buscar una generalización del método supersimétrico para potenciales periódicos, para esto abordaremos el potencial  $V(x) = [\tan(x) + \epsilon]^2$  ya que puede usarse para modelar cadenas atómicas; los iones se ubican en los puntos donde el potencial es singular, físicamente significa que no puede haber electrones en las posiciones ocupadas por los iones de la red haciendo que las densidades electrónicas sean mayores en los puntos mínimos del potencial.

$$\hat{H}|\psi\rangle = \{-D_x^2 + [\tan(x) + \epsilon]^2\}|\psi\rangle \quad (3.1)$$

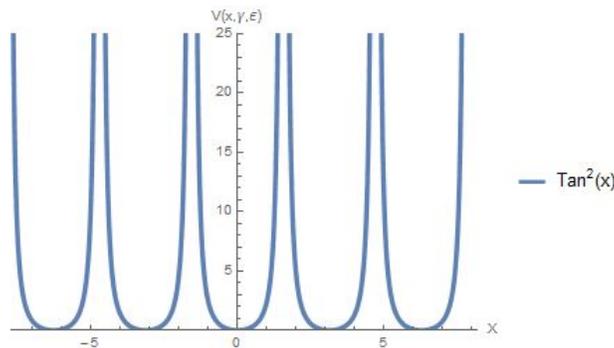


Figura 3.1: Potencial periódico  $V(x) = \text{Tan}^2(x)$ .

De la misma forma que en el capítulo anterior usaremos los siguientes operadores con desplazamiento  $\epsilon$  para factorizar el Hamiltoniano anterior.

$$\hat{a}_\epsilon^\dagger \equiv -D_x + [\tan(x) + \epsilon], \quad \hat{a}_\epsilon \equiv D_x + [\tan(x) + \epsilon] \quad (3.2)$$

El procedimiento para factorizar el Hamiltoniano es aplicar el operador conjunto  $\hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon$  sobre una función  $|\psi\rangle$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon |\psi\rangle &= (-D_x + \tan(x) + \epsilon)(D_x + \tan(x) + \epsilon)|\psi\rangle \\ \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon |\psi\rangle &= (-D_x + \tan(x) + \epsilon)(\psi' + \tan(x)\psi + \epsilon\psi) \\ \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon |\psi\rangle &= (-\psi'' - \sec^2(x)\psi + \tan^2(x)\psi + 2 \tan \epsilon\psi + \epsilon^2\psi) \\ \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon |\psi\rangle &= (-D_x^2 + [\tan(x) + \epsilon]^2 - \sec^2(x))|\psi\rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

Y de igual forma para su compañero supersimétrico

$$\begin{aligned} \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger |\psi\rangle &= (D_x + \tan(x) + \epsilon)(-D_x + \tan(x) + \epsilon)|\psi\rangle \\ \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger |\psi\rangle &= (D_x + \tan(x) + \epsilon)(-\psi' + \tan(x)\psi + \epsilon\psi) \\ \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger |\psi\rangle &= (-\psi'' + \sec^2(x)\psi + \tan^2(x)\psi + 2 \tan \epsilon\psi + \epsilon^2\psi) \\ \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger |\psi\rangle &= (-D_x^2 + [\tan(x) + \epsilon]^2 + \sec^2(x))|\psi\rangle \end{aligned} \quad (3.4)$$

De tal forma que se pueda expresar el Hamiltoniano y a su compañero supersimétrico en términos de los operadores de factorización propuestos

$$H_\epsilon(x)|\psi\rangle = \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon + \sec^2(x)|\psi\rangle \quad (3.5)$$

$$H'_\epsilon(x)|\psi\rangle = \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger - \sec^2(x)|\psi\rangle \quad (3.6)$$

El operador isoespectral de (3.4), se calcula usando los operadores de factorización  $\hat{b}_\epsilon^\dagger, \hat{b}_\epsilon$  y viene dado por la siguiente ecuación con  $\beta_\epsilon(x) = \beta_\epsilon$ .

$$\hat{b}_\epsilon \hat{b}_\epsilon^\dagger |\psi\rangle = (-D_x^2 + \beta_\epsilon^2 + \beta'_\epsilon)|\psi\rangle \quad (3.7)$$

$\hat{b}_\epsilon^\dagger, \hat{b}_\epsilon$  son los operadores propuestos por Mielnik [10]

$$\hat{b}_\epsilon^\dagger \equiv (-D_x + \beta_\epsilon), \quad \hat{b}_\epsilon \equiv (D_x + \beta_\epsilon) \quad (3.8)$$

Nuestra meta es encontrar espectros iguales a los que se obtienen al aplicar los operadores  $\hat{a}_\epsilon, \hat{a}_\epsilon^\dagger$  sobre un estado  $|\psi\rangle$ , para que esto suceda las ecuaciones (3.4) y (3.7) deben ser iguales.

$$\beta_\epsilon^2 + \beta'_\epsilon = (\tan(x) + \epsilon)^2 + \sec^2(x) \quad (3.9)$$

La ecuación anterior es la ecuación de Riccati para el sistema, y tiene como solución particular:

$$\beta_{\epsilon,p}(x) = \tan(x) + \epsilon$$

Con solución general:

$$\beta_{\epsilon,g} = \beta_{\epsilon,p} + \phi \quad (3.10)$$

Para resolver de manera completa el sistema planteado en la ecuación de Riccati debemos sustituir la forma general de la solución en la ecuación (3.9), realizada tal sustitución obtenemos una ecuación diferencial no lineal de primer orden:

$$\phi^2 + 2[\tan(x) + \epsilon]\phi + \phi' = 0$$

Para transformarla en una ecuación de primer orden hacemos un cambio de variable  $y = \frac{1}{\phi}$ , así la ecuación no lineal se transforma en la ecuación:

$$y' - 2(\tan(x) + \epsilon)y - 1 = 0 \quad (3.11)$$

Cuya solución esta dada por:

$$y(x) = \frac{\gamma + \int_0^x e^{\int_0^x -2(\tan(x)+\epsilon)dx} dx}{e^{\int_0^x -2(\tan(x)+\epsilon)dx}} \quad (3.12)$$

Finalmente se regresa a la variable original  $\phi(x)$ .

$$\phi(x) = \frac{e^{\int_0^x -2(\tan(x)+\epsilon)dx}}{\gamma + \int_0^x e^{\int_0^x -2(\tan(x)+\epsilon)dx} dx}$$

Con este resultado podemos dar la solución general de (3.9).

$$\beta_{\epsilon,g}(x) = \tan(x) + \epsilon + \frac{e^{-2\epsilon x - 2 \int_0^x \tan(x) dx}}{\gamma + \int_0^x e^{-2\epsilon x - 2 \int_0^x \tan(x) dx} dx} \quad (3.13)$$

## 3.2. Potencial Deformado

Para encontrar el potencial deformado necesitamos conocer lo siguiente.

$$\hat{b}_\epsilon^\dagger \hat{b}_\epsilon = \hat{a}_\epsilon^\dagger \hat{a}_\epsilon = -D_x^2 + (\tan(x) + \epsilon)^2 - \sec^2(x) = H_\epsilon - \sec^2(x) \quad (3.14)$$

$$\hat{b}_\epsilon \hat{b}_\epsilon^\dagger = \hat{a}_\epsilon \hat{a}_\epsilon^\dagger = -D_x^2 + (\tan(x) + \epsilon)^2 + \sec^2(x) = H'_\epsilon + \sec^2(x) \quad (3.15)$$

$$[\hat{b}_\epsilon^\dagger, \hat{b}_\epsilon] = -2\beta'_{\epsilon,g} = -2(\sec^2(x) + \phi') \quad (3.16)$$

Sabemos que

$$\hat{b}_\epsilon^\dagger \hat{b}_\epsilon = \hat{b}_\epsilon \hat{b}_\epsilon^\dagger + [\hat{b}_\epsilon^\dagger, \hat{b}_\epsilon] \quad (3.17)$$

Al sustituir (3.14), (3.15) y (3.16) en (3.17), obtenemos la siguiente relación entre Hamiltonianos:

$$H_{\gamma,\epsilon} - \sec^2(x) = H'_\epsilon + \sec^2(x) - 2\sec^2(x) - 2\phi'$$

$$\Rightarrow H_{\gamma,\epsilon} = H'_\epsilon - 2\phi'$$

Para el Hamiltoniano  $H_{\gamma,\epsilon}$  obtenemos:

$$-D_x^2 + V_{\gamma,\epsilon}(x) = -D_x^2 + [\tan(x) + \epsilon]^2 - 2\phi' \quad (3.18)$$

Y el potencial deformado resulta ser:

$$V_{\gamma,\epsilon}(x) = [\tan(x) + \epsilon]^2 - 2D_x \left( \frac{e^{-2\epsilon x - 2 \int_0^x \tan(x) dx}}{\gamma + \int_0^x e^{-2\epsilon x - 2 \int_0^x \tan(x) dx} dx} \right) \quad (3.19)$$

Las gráficas de la figura (3.2) corresponden al potencial (3.19) con valores distintos de  $\epsilon$  y  $\gamma = 0$ , observamos que cuando el valor de  $\epsilon$  va aumentando los potenciales deformados exhiben una mayor desviación del potencial estándar, el resultado con  $\gamma = 0$  es un punto importante, debido a que en los potenciales isoenergéticos no periódicos [10, 14, 15] tienen puntos en la vecindad de  $\gamma = 0$  que hacen que el potencial sea singulares.

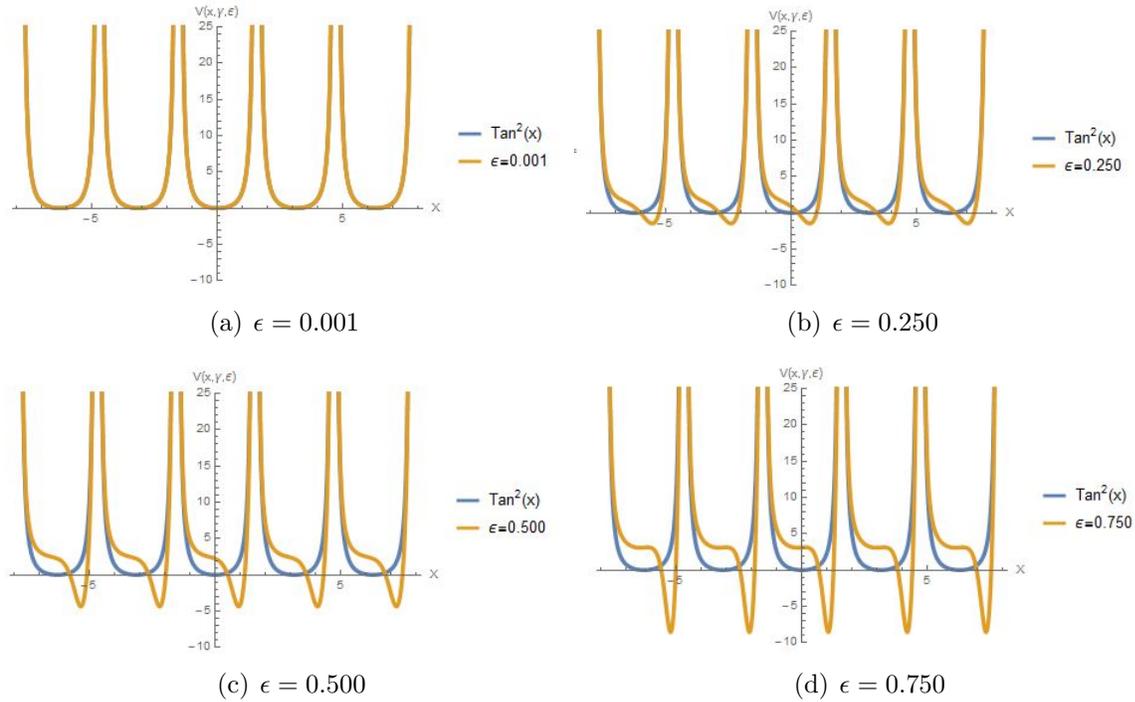


Figura 3.2: Comparativas de  $V(x, \epsilon, \gamma)$  y  $V(x)$  para diferentes valores de  $\epsilon$ .

### 3.3. Periodicidad de $V(x, \epsilon, \gamma)$

Con la meta de introducir la matemática asociada a materia condensada sobre funciones periódicas comenzaremos esta sección con un enunciado general sobre invarianza traslacional:

**Enunciado 1** (Potencial periódico). *Existe un operador de traslación en el espacio  $\mathbb{R}^n$  denotado  $(\hat{T}_R)$ , siendo  $R = \sum_1^n a_n x_n$  el espacio vectorial que describe el cristal modelado con los potenciales periódicos, las constantes  $a_n$  (en este caso  $a_n = \pi$ ) son los parámetros de red y la dirección esta dada por  $x_n$ , ( $x$  en una dimensión).*

$$(\hat{T}_\pi)V(x, \epsilon, \gamma) = V(x + \pi, \epsilon, \gamma)$$

Tomando en cuenta el enunciado anterior pasaremos a demostrar que el nuevo Hamiltoniano, generado vía factorización isoespectral (3.18) es adecuado para estudios generales propios de materia condensada.

Gráficamente la periodicidad del potencial deformado puede verse en la figura (3.1) donde podemos observar que el periodo del potencial deformado corresponde al de el potencial no deformado ( $\pi$ ).

Analíticamente sabemos de teoría de grupos [17] que si se cumple que el conmutador de un operador de traslación  $\hat{T}_R$  y un Hamiltoniano  $\hat{H}$  es cero entonces el sistema Hamiltoniano es invariante bajo operaciones de traslación, esa propiedad nos permite introducir el aparato matemático de la teoría de materia condensada con nuevos potenciales periódicos generados con transformaciones isoespectrales, está operación esta definida también en [6] como una operación de simetría discreta llamada traslación de red  $\tau(a)$ .

Para que los potenciales tengan estructura de materia condensada debe cumplirse que los Hamiltonianos que modelen el sistema sean invariantes bajo ciertas operaciones de simetría, en este capítulo nos enfocaremos en las operaciones de traslación, dejando las operaciones de simetría puntual para el capítulo siguiente; si el conmutador de dos operadores es cero nos indica que ambos operadores comparten eigenfunciones, de esta manera las eigenfunciones también deben ser invariantes bajo operaciones de traslación, para el Hamiltoniano propuesto en este capítulo demostraremos que el potencial deformado y las eigenfunciones, asociadas al Hamiltoniano son invariantes bajo operaciones de traslación.

### 3.4. Invarianza de $\hat{H}$ , $(\hat{T}_R)^n$

**Teorema 1** (Invarianza bajo traslaciones (caso  $\mathbb{R}^1$ )). *El potencial  $V(x, \epsilon, \gamma)$  es invariante bajo traslaciones espaciales ( $x \rightarrow x + n\pi$ ).*

$$V_{\epsilon, \gamma}(x + n\pi) = \tan^2(x + n\pi) - 2D_x \left( \frac{e^{-2\epsilon x - 2 \int_0^x \tan(x+n\pi) dx}}{\gamma + \int_0^x e^{-2\epsilon x - 2 \int_0^x \tan(x+n\pi) dx} dx} \right) \quad (3.20)$$

Dado que  $\tan(x + n\pi) = \tan(x) \Rightarrow V(x, \epsilon, \gamma)$  es invariante bajo traslaciones espaciales.

**Teorema 1** (Invarianza de eigenfunciones bajo traslaciones espaciales). *El estado base  $|\psi_0(x, \epsilon, \gamma)\rangle$  es invariante bajo traslaciones espaciales ( $x \rightarrow x + n\pi$ ).*

$$|\psi_0(x + n\pi, \epsilon, \gamma)\rangle = e^{-\int_0^x [\tan(x+n\pi)+\epsilon]dx} e^{-\int_0^x \frac{e^{\int_0^x -2[\tan(x+n\pi)+\epsilon]dx}}{\gamma + \int_0^x e^{\int_0^x -2[\tan(x+n\pi)+\epsilon]dx} dx} dx} \quad (3.21)$$

Dado que  $\tan(x + n\pi) = \tan(x) \Rightarrow |\psi_0(x, \epsilon, \gamma)\rangle$  es invariante bajo traslaciones espaciales.

Finalmente:

$$|\psi_0(x, \epsilon, \gamma)\rangle = |\psi_0(x + n\pi, \epsilon, \gamma)\rangle$$

El índice  $n$  nos habla de la degeneración de las eigenfunciones [17], toma la forma siguiente:

$$\hat{T}^n |\psi_0(x, \epsilon, \gamma)\rangle = |\psi_{0n}(x, \epsilon, \gamma)\rangle$$

**Teorema 1** (Invarianza bajo traslaciones). *El Hamiltoniano  $H$  es invariante bajo traslaciones espaciales ( $x \rightarrow x + n\pi$ ).*

Para demostrar que el Hamiltoniano es invariante bajo traslaciones debemos calcular el conmutador, donde el operador  $(\hat{T}_R)^n$  nos dice que se aplica el operador de traslación  $n$  veces.

$$[\hat{H}, (\hat{T}_R)^n] |\psi(x, \epsilon, \gamma)\rangle = \hat{H}(\hat{T}_R)^n |\psi(x, \epsilon, \gamma)\rangle - (\hat{T}_R)^n \hat{H} |\psi(x, \epsilon, \gamma)\rangle \quad (3.22)$$

$$= \hat{H} |\psi(x + n\pi, \epsilon, \gamma)\rangle - (\hat{T}_R)^n [-D_x^2 + V(x + n\pi, \epsilon, \gamma)] |\psi(x + n\pi, \epsilon, \gamma)\rangle$$

$$= [-D_x^2 + V(x, \epsilon, \gamma)] |\psi(x + n\pi, \epsilon, \gamma)\rangle + [D_x^2 - V(x + n\pi, \epsilon, \gamma)] |\psi(x + n\pi, \epsilon, \gamma)\rangle = 0$$

Dado que  $V(x, \epsilon, \gamma) = V(x + n\pi, \epsilon, \gamma)$ .

$$\Rightarrow [\hat{H}, (\hat{T}_R)^n] = 0 \quad (3.23)$$

$\therefore \hat{H}$  es invariante bajo traslaciones espaciales.

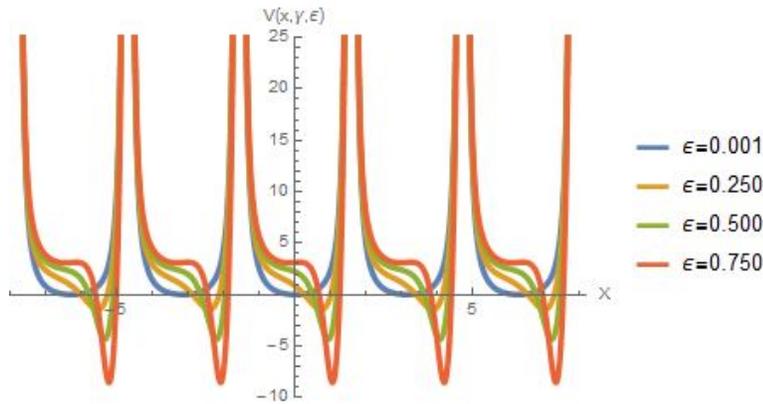


Figura 3.3: Familia de potenciales biparamétricos periódicos  $V(x, \gamma, \epsilon)$ .

## 3.5. Eigenfunciones en sistemas periódicos

Dada la invarianza Hamiltoniana anterior estamos en posición de construir las soluciones completas para el espectro de  $\hat{H}$ , proponiendo una solución por celdas [18], por lo que podemos tomar una solución admisible en el dominio  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ .

### 3.5.1. Caso de estudio

Para el estado base no deformado ( $\gamma = 0$ ) aplicaremos el operador de aniquilación  $\hat{a}$  sobre el estado  $|\psi_0\rangle$  lo que nos debe dar como resultado  $\emptyset$ , ya que consideraremos que la energía es positiva

$$\begin{aligned} [D_x + (\tan(x) + \epsilon)]|\psi_0\rangle &= 0 \\ \psi_0' + (\tan(x) + \epsilon)\psi_0 &= 0 \end{aligned}$$

Con solución

$$|\psi_0\rangle = e^{-\int_0^x (\tan(x) + \epsilon) dx} = A_0 \cos(x) e^{-\epsilon x} \quad (3.24)$$

Para el estado base deformado se usa el operador de aniquilación

$$(D_x + \beta_g)|\psi_{0,\epsilon,\gamma}(x)\rangle = 0$$

Con solución

$$|\psi_{0,\epsilon,\gamma}\rangle = e^{-\int_0^x \beta_g(x) dx} = e^{-\int_0^x (\tan(x) + \epsilon + \phi) dx} = |\psi_0\rangle e^{-\int_0^x \phi dx} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle e^{-\int_0^x \phi(x) dx} &= |\psi_0\rangle e^{-\int_0^x \frac{e^{\int_0^x -2(\tan(x) + \epsilon) dx}}{\gamma + \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{\int_0^x -2(\tan(x) + \epsilon) dx} dx} dx} \\ &= |\psi_0\rangle e^{-\ln\left(\gamma + \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-2\epsilon x + 2\ln[\cos(x)]} dx\right)} = |\psi_0\rangle e^{-\ln\left(\gamma + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2(x) e^{-2\epsilon x} dx\right)} \\ &= |\psi_0\rangle \left(\gamma + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2(x) e^{-2\epsilon x} dx\right)^{-1} \end{aligned}$$

con  $\theta_1 = -\theta_2 = \frac{\pi}{2}$

Finalmente:

$$|\psi_{0,\epsilon,\gamma}\rangle = \frac{A_0 \cos(x) e^{-\epsilon x}}{2\pi\gamma(\epsilon + \epsilon^3) + \sinh(\pi\epsilon)} \quad (3.26)$$

Caso  $\gamma = 0$ .

Este caso resulta interesante desde el punto de vista de las singularidades, ya que los potenciales deformados estándar (no periódicos) presentan singularidades en este punto, para los potenciales periódicos resultan eigenfunciones no singulares, como se muestra a continuación, haciendo el parámetro  $\gamma = 0$  en la ecuación (3.26), se puede

observar que la función es no singular solo cuando el parámetro  $\epsilon$  se encuentra en la vecindad de cero, ya que para valores grandes el dividendo crece exponencialmente.

$$|\psi_{0,\epsilon,\gamma}\rangle = \frac{A_0 \cos(x)e^{-\epsilon x}}{2\pi\gamma(\epsilon + \epsilon^3) + \sinh(\pi\epsilon)} \quad (3.27)$$

Las eigenfunciones encontradas vía factorización isoespectral, que general Hamiltonianos paramétricos nos indican gráficamente que los estados fundamentales para el paramétrico tienen densidades de probabilidad mayor que las del Hamiltoniano no paramétrico, esto se puede observar en la figura (3.4).

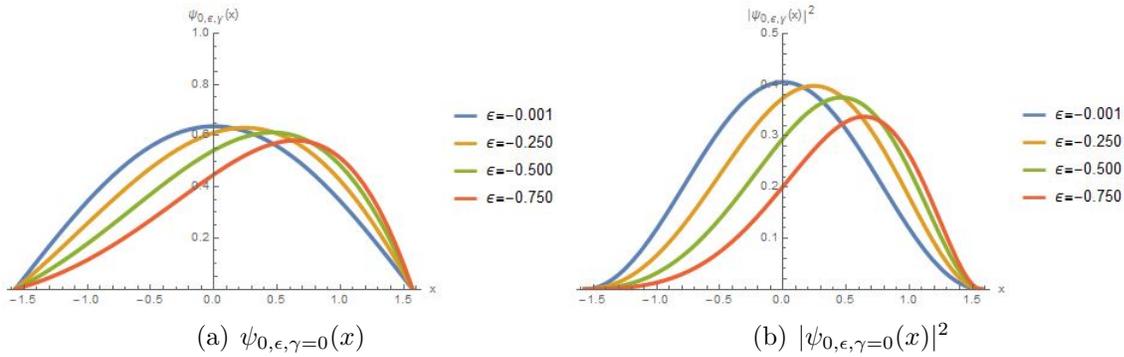


Figura 3.4: Gráficas para el estado base con valores:  $\gamma = 0$ , en  $(|\frac{\pi}{2}| \leq x)$ .

En el dominio  $(|\frac{\pi}{2}| \leq x)$  se tiene una solución para el estado base  $|\psi_0\rangle$  que es continúa dentro del periodo  $a$  y entonces con esta solución se puede construir la solución general para todos los periodos. Este método es conocido como el método de celdas que se basa en la idea que una solución valida en un periodo del potencial es solución en cualquier periodo del mismo.

Cabe resaltar que el caso  $\epsilon = 0$  no esta definido, ya que en el límite ocurre lo siguiente:

$$|\psi_{0,\epsilon,\gamma}\rangle = \frac{A_0 \cos(x)e^{-0}}{2\pi\gamma(0) + \sinh(0)} = \frac{A_0 \cos(x)}{0} \rightarrow \infty \quad (3.28)$$

y el potencial

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma,\epsilon \rightarrow 0} V(x) &= (\tan(x) + 0)^2 - 2D_x \left( \frac{e^{-2(0*x)} - 2 \int_0^x \tan(x) dx}{\gamma + \int_0^x e^{-2(0*x)} - 2 \int_0^x \tan(x) dx dx} \right) \\ &= \tan^2(x) - 2D_x \left( \frac{\cos^2(x)}{\gamma + \int_0^x \cos^2(x) dx} \right). \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## La transformada Darboux y el rompimiento de simetría en $\mathbb{R}^2$

### Resumen

*Se aborda la relación entre el rompimiento de simetría para potenciales isoespectrales periódicos en dos dimensiones mediante una proyección, obteniendo los grupos de simetría antes y después de la transformación espectral, se encontró que el rompimiento de simetría se da cuando los parámetros  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  toma valores cercanos al del valor del punto singular del potencial deformado.*

*Palabras clave: Grupos de simetría, rompimiento de simetría, transformación espectral.*

### 4.1. Factorización estrictamente isospectral en $\mathbb{R}^2$

Aplicamos una transformación espectral [4, 10] en  $\mathbb{R}^2$ , de tal forma que se cumpla lo siguiente.

Comenzamos con una función  $f_1(x_1, x_2)$  a la que se le aplica una transformación espectral  $DT_{\mathbb{R}^2}$  y la acción es una función paramétrica nueva  $f_2(x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2)$ .

$$f(x_1, x_2) \begin{array}{c} \xrightarrow{DT_{\mathbb{R}^2}} \\ \xleftarrow{\gamma \rightarrow \pm\infty} \end{array} f(x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2) \quad (4.1)$$

El método para encontrar la función  $f(x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2)$  es realizando las factorizaciones para el Hamiltoniano inicial de dos dimensiones, para encontrar los operadores isoespectrales de factorización con variables independientes se debe separar el Hamiltoniano de igual manera, el método para hacerlo es conocido como separación de variables en ecuaciones diferenciales parciales [20, 21, 22], cuya idea general es que una función se pueda escribir como una suma o producto de otras independientes [23] y así generar un sistema de ecuaciones diferenciales independientes para factorizar:

$$\sum_{i=1}^n [-\partial_{x_i}^2 + f(x_i)] = 0$$

Donde el índice  $n$  nos indica la dimensión del problema.

En nuestro caso usaremos una función de la forma  $f(x_i) = \cos^2(x_i)$  en un Hamiltoniano bidimensional.

$$\hat{H}(x_i)\psi(x_i) = [-\nabla^2(x_i) + \cos^2(x_i)]\psi(x_i) = 0 \quad (4.2)$$

Ahora usaremos el método desarrollado en los capítulos anteriores para factorizar el Hamiltoniano anterior;

$$\hat{a}_i^\dagger = -D_{x_i} + \cos(x_i) \quad \hat{a}_i = D_{x_i} + \cos(x_i)$$

De manera análoga a los capítulos anteriores:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger &= [D_{x_i} + \cos(x_i)][-D_{x_i} + \cos(x_i)]\psi(x_i) \\ \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \psi(x_i) &= [D_{x_i} + \cos(x_i)] - \psi'(x_i) + \cos(x_i)\psi(x_i) \\ \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \psi(x_i) &= -\psi''(x_i) - \sin(x_i)\psi(x_i) + \cos^2(x_i)\psi(x_i) \\ \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \psi(x_i) &= [-D_{x_i}^2 + \cos^2(x_i) - \sin(x_i)]\psi(x_i) \\ \Rightarrow \hat{H}(x_i)\psi(x_i) &= [\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger + \sin(x_i)]\psi(x_i) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Y para el compañero supersimétrico:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \psi(x_i) &= [-D_{x_i}^2 + \cos^2(x_i) + \sin(x_i)]\psi(x_i) \\ \Rightarrow \hat{H}'(x_i)\psi(x_i) &= [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \sin(x_i)]\psi(x_i) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Usando la condición de isoenergía:

$$\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger = b_i b_i^\dagger \quad (4.5)$$

$$\cos^2(x_i) - \sin(x_i) = \beta_i^2(x_i) + \beta_i'(x_i) \quad (4.6)$$

Con solución particular  $\beta_{i,p}(x_i) = \cos(x_i)$

Y solución general

$$\beta_{i,g}(x_i) = \beta_p(x_i) + \phi(x_i) \quad (4.7)$$

Para el caso  $\mathbb{R}^2$  se generará un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales tipo Riccati, que se resuelven de igual manera que las tratadas en capítulos anteriores.

$$\begin{aligned}\cos^2(x_1) - \sin(x_1) &= \beta_{1,g}^2(x_1) + \beta'_{1,g}(x_1) \\ \cos^2(x_2) - \sin(x_2) &= \beta_{2,g}^2(x_2) + \beta'_{2,g}(x_2)\end{aligned}$$

La solución general de (4.6) se da de la siguiente manera;

Se debe sustituir (4.7) en (4.6), para obtener una ecuación no lineal de primer orden

$$\cos^2(x_1) - \sin(x_1) = \beta_{p,i}^2(x_i) + \phi^2(x_i) + 2\beta_{i,p}(x_i)\phi(x_i) + \beta'_{i,p}(x_i) + \phi'(x_i)$$

Dado que  $\beta_{i,p}(x_i) = \cos(x_i)$  se sigue que:

$$\phi^2(x_i) + 2\beta_{i,p}(x_i)\phi(x_i) + \phi'(x_i) = 0$$

Multiplicando por  $\frac{1}{\phi^2(x_i)}$ :

$$1 + 2\beta_{i,p}(x_i)\frac{1}{\phi(x_i)} + \frac{\phi'(x_i)}{\phi^2(x_i)} = 0$$

Ahora se realiza el cambio de variable  $y(x_i) = \frac{1}{\phi(x_i)}$  para que la ecuación anterior se transforme en una ecuación lineal de primer orden:

$$y'(x_i) - 2\beta_{i,p}(x_i)y(x_i) - 1 = 0 \quad (4.8)$$

Con solución:

$$\begin{aligned}y(x_i) &= \frac{\gamma_i + \int_0^x e^{-2 \int_0^{x'} \beta_{i,p}(x_i) dx_i} dx'_i}{e^{-2 \int_0^x \beta_{i,p}(x'_i) dx'_i}} \\ \Rightarrow \phi(x_i) &= \frac{e^{-2 \int_0^x \beta_{i,p}(x'_i) dx'_i}}{\gamma_i + \int_0^x e^{-2 \int_0^{x'} \beta_{i,p}(x_i) dx_i} dx'_i}\end{aligned}$$

Y la solución general para la ecuación de Riccati:

$$\beta_{i,g}(x_i) = \cos(x_i) + \frac{e^{-2 \int_0^x \beta_{i,p}(x'_i) dx'_i}}{\gamma_i + \int_0^x e^{-2 \int_0^{x'} \beta_{i,p}(x_i) dx_i} dx'_i} = \cos(x_i) + \frac{e^{-2 \int_0^x \cos(x'_i) dx'_i}}{\gamma_i + \int_0^x e^{-2 \int_0^{x'} \cos(x_i) dx_i} dx'_i} \quad (4.9)$$

$$\beta_{i,g}(x_i) = \cos(x_i) + \frac{e^{-2 \sin(x_i)}}{\gamma_i + \int_0^x e^{-2 \sin(x'_i)} dx'_i} \quad (4.10)$$

Para el caso  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}\beta_{1,g}(x_1) &= \cos(x_1) + \frac{e^{-2 \sin(x_1)}}{\gamma_1 + \int_0^{x_1} e^{-2 \sin(x'_1)} dx'_1} \\ \beta_{2,g}(x_2) &= \cos(x_2) + \frac{e^{-2 \sin(x_2)}}{\gamma_2 + \int_0^{x_2} e^{-2 \sin(x'_2)} dx'_2}\end{aligned}$$

Vamos a trabajar esta integral sobre un período completo  $0 \leq x_i \leq 2\pi$ , debido a la condición de periodicidad de la integral presente en el divisor:

$$\int_0^{2\pi} e^{-2\sin(x_i)} dx_i$$

es de la forma

$$\int_0^{2\pi} e^{p\cos(x_i)+q\sin(x_i)} \cos[a\cos(x_i) + b\sin(x_i) - mx_i] dx_i$$

$$= \pi[(b-p)^2 + (a+q)^2]^{-m/2} [(A+iB)^{m/2} I_m(\sqrt{C-iD}) + (A-iB)^{m/2} I_m(\sqrt{C+iD})]$$

Con

$$(b-p)^2 + (a+q)^2 > 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad A = p^2 - q^2 + a^2 - b^2,$$

$$B = 2(pq - ab), \quad C = p^2 + q^2 - a^2 - b^2, \quad D = 2(ap + bq).$$

En nuestro caso  $p = 0, q = -2, a = 0, b = 0, m = 0$ :

$$4 > 0, \quad m = 0, \quad A = 4, B = 4, \quad C = 0, \quad D = 0.$$

y la integral es:

$$\int_0^{2\pi} e^{-2\sin(x_i)} dx_i$$

$$= \pi[4]^0 \left[ (4)^0 I_0(\sqrt{4}) + (4)^0 I_0(\sqrt{4}) \right] = 2\pi I_0(2)$$

Por lo tanto la solución general es:

$$\beta_{i,g}(x_i) = \cos(x_i) + \frac{e^{-2\sin(x_i)}}{\gamma_i + 2\pi I_0(2)} \quad (4.11)$$

Donde  $I_0(2)$  es la función de Bessel modificada de orden 0 en  $x = 2$  [24].

Por lo tanto los operadores isoespectrales son:

$$\hat{b}_1^\dagger = -D_{x_1} + \cos(x_1) + \frac{e^{-2\sin(x_1)}}{\gamma_1 + 2\pi I_0(2)}, \quad \hat{b}_1 = D_{x_1} + \cos(x_1) + \frac{e^{-2\sin(x_1)}}{\gamma_1 + 2\pi I_0(2)} \quad (4.12)$$

$$\hat{b}_2^\dagger = -D_{x_2} + \cos(x_2) + \frac{e^{-2\sin(x_2)}}{\gamma_2 + 2\pi I_0(2)}, \quad \hat{b}_2 = D_{x_2} + \cos(x_2) + \frac{e^{-2\sin(x_2)}}{\gamma_2 + 2\pi I_0(2)} \quad (4.13)$$

Ahora que ya conocemos la forma explícita para los operadores isoespectrales de factorización mencionados en (4.5) podemos construir el potencial deformado como en los capítulos anteriores y revisar la acción de la transformación estrictamente isoespectral en el potencial bidimensional propuesto.

De capítulos anteriores sabemos que la deformación en el potencial proveniente de la transformación isoespectral tiene la forma siguiente:

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = -D_{x_i}^2 + \cos^2(x_i) + \sin(x_i) = H'(x_i) + \sin(x_i) \quad (4.14)$$

$$\hat{b}_i \hat{b}_i^\dagger = \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger = -D_{x_i}^2 + \cos^2(x_i) - \sin(x_i) = H(x_i) - \sin(x_i) \quad (4.15)$$

$$[\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i] = -2\beta'_{i,g} = 2(\sin(x_i) - \phi'_{\gamma_i}(x_i)) \quad (4.16)$$

$$\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i = \hat{b}_i \hat{b}_i^\dagger + [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i] \quad (4.17)$$

Sustituyendo (4.14), (4.15) y (4.16) en (4.17) obtenemos el Hamiltoniano deformado:

$$H'(x_i) + \sin(x_i) = H(x_i) - \sin(x_i) + 2(\sin(x_i) - \phi'_{\gamma_i}(x_i))$$

$$\Rightarrow H'(x_i) = H(x_i) - 2\phi'_{\gamma_i}(x_i)$$

Y el potencial paramétrico resulta ser:

$$V'_{\gamma_i}(x_i) = V(x_i) - 2\phi'_{\gamma_i}(x_i)$$

En el caso bidimensional vamos a tener que el potencial deformado, es decir la función  $f(x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2)$  es de este tipo

$$V_{\gamma_1, \gamma_2}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 [\cos^2(x_i) - 2D_{x_i} \phi(x_i)]$$

$$= \cos^2(x_1) + \cos^2(x_2) - 2D_{x_1} [\phi(x_1)] - 2D_{x_2} [\phi(x_2)]$$

$$= \cos^2(x_2) + \cos^2(x_2) - 2D_{x_2} [\phi(x_2)] - 2D_{x_1} [\phi(x_2)]$$

En este trabajo se utilizará  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

Para el estudio de las simetrías correspondientes a la función  $\mathbb{R}^2$ , se realizó un mapeo de la superficie generada por la función al plano, haciendo uso de los contornos generados por la superficie (4.1).

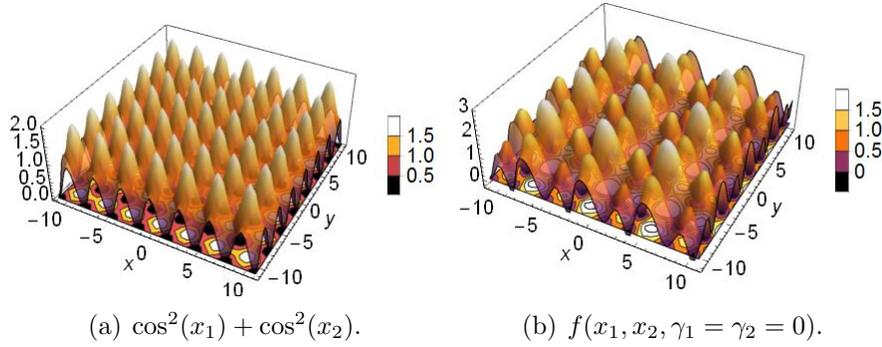


Figura 4.1: Proyecciones al plano para 2 funciones.

## 4.2. Grupos de simetría

“Un mapeo afín ( $W$ ) que deja todas las distancias y ángulos sin cambio es llamado una isometría. [25]”

Comenzaremos dando una definición de los grupos de simetría [17].

**Definición 1.** *Un grupo de simetría es un conjunto de operaciones (mapeos afines) que al ser aplicadas sobre un objeto lo deja invariante, es decir: “mantiene su forma original o es indistinguible del objeto antes de aplicar la operación.”*

La condición necesaria para que una operación de simetría ( $W$ ) sea una isometría es la siguiente:

$$G = W^T G W \quad (4.18)$$

donde  $G$  es el tensor métrico  $g_{ik}$  definido de la siguiente manera para el sistema mostrado en (4.2).

$$G = \begin{bmatrix} a^2 & ab \cos(\gamma) & ac \cos \beta \\ ab \cos(\gamma) & b^2 & bc \cos(\alpha) \\ ac \cos(\beta) & bc \cos(\alpha) & c^2 \end{bmatrix}$$

## 4.3. Isometrías en $\mathbb{R}^2$

Las isometrías en dos dimensiones contienen las operaciones de rotación ( $R_\theta$ ), reflexión ( $M$ ), inversión ( $\bar{I}$ ), traslación ( $T$ ).

$$R_\theta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar la acción de estas operaciones, las aplicaremos al vector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

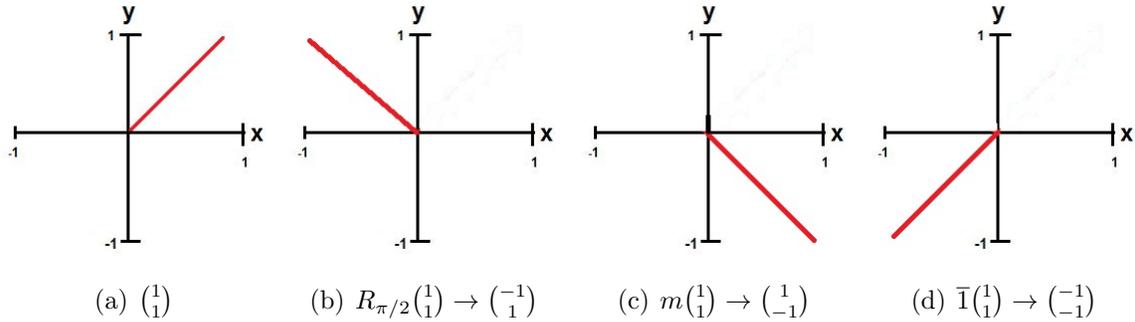
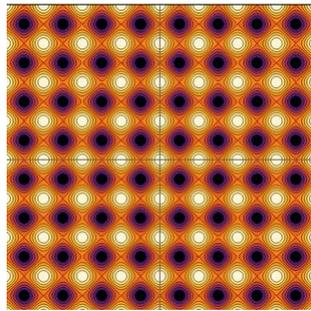


Figura 4.2: Acción del grupo de simetría sobre el vector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

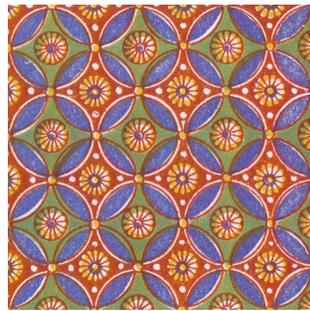
Un ejemplo relativo a los grupos de simetría  $P_{4m}$  y  $P_m$  se da en las figuras (4.3) y (4.4), que utilizaremos a continuación para estudiar la correspondencia entre la transformación espectral y el rompimiento de simetría del grupo original, entendiéndose como rompimiento de simetría el cambio del grupo espacial asociado al mosaico estudiado cuando se aplica el potencial de deformación  $\phi'$ .

El grupo  $P_{4m}$  tiene las siguientes propiedades:

- Contiene una rotación en el centro de la celda (giro de orden 4 = 90°).
- Sobre las direcciones principales y diagonales de la celda  $[1, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[1, 1]$  tiene reflexiones  $m$ .



(a)  $\cos^2(x_1) + \cos^2(x_2)$ .



(b) Mosaico Egipcio.

Figura 4.3: Mosaicos con simetría  $P_{4m}$ .

El grupo  $P_m$  tiene las siguientes propiedades:

- En la dirección principal  $[1, 1]$  cuenta con una reflexión  $m$ .

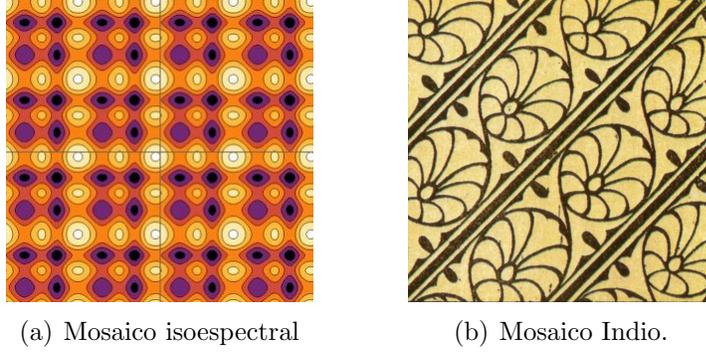


Figura 4.4: Mosaicos con simetría  $P_m$ .

Los mosaicos generados son conocidos como “*wallpaper groups*” y nos permiten encontrar la clasificación de simetrías para los patrones presentes en cada uno de los potenciales.

La simetría dominante es la del potencial deformado, ya que esta corresponde a la del grupo  $P_m$ , en las figuras siguientes (4.7) se muestran los mosaicos correspondientes a la función que deforma el potencial original y que aparece con la aplicación de la transformada de Darboux.

Los mosaicos correspondientes a los potenciales deformados se presentan en las figuras (4.6), tanto en la función de deformación como en los potenciales deformados se utilizaron los parámetros  $\gamma_1 = \gamma_2$  dejando de lado los casos con resonancias paramétricas ( $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ).

## 4.4. Rompimiento de simetría

Pasando al estudio de las simetrías podemos observar que en la figura (4.6) a) se tienen un grupo  $P_{4m}$  que se deforma al introducir el potencial de deformación en el original, el nuevo grupo de simetría es el  $P_m$  y en las imágenes correspondientes se observa la modificación del grupo de simetría en función del parámetro  $\gamma$ .

En términos de la función que analizamos en esta sección [ $f(x_1, x_2) = \cos^2(x_1) + \cos^2(x_2)$ ], podemos escribir los siguientes diagramas conmutativos, para los grupos de simetría y su relación con los potenciales isoespectrales de la manera siguiente [20, 27].

$$\sum_{i=1}^2 \cos^2(x_i) \begin{array}{c} \xrightarrow{DT_{\mathbb{R}^2}} \\ \xleftarrow{\gamma \rightarrow \pm\infty} \end{array} \sum_{i=1}^2 \cos^2(x_i) - 2 \frac{d}{dx_i} \phi(x_i) \quad (4.19)$$

con

$$\phi(x_i) = \frac{e^{-2 \int \cos(x_i) dx_i}}{\gamma_i + \int e^{-2 \int \cos(x_i) dx_i} dx_i} \quad i = 1, 2.$$

$$P_{4m} \begin{array}{c} \xrightarrow{DT_{\mathbb{R}^2}} \\ \xleftarrow{\gamma \rightarrow \pm\infty} \end{array} P_m \quad (4.20)$$

Otro de los aspectos importantes a resaltar es que las “alturas” de los mosaicos se re-escalan bajo la acción de los parámetros de deformación  $(\gamma_1, \gamma_2)$ . Conforme crecen los valores de tales parámetros, la aportación de la función de deformación  $\phi'(x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2)$  se hace cada vez más pequeña, hasta que se vuelve despreciable y es mayor la del potencial original, cuando se da esa situación se recupera también la simetría del mosaico asociado al potencial original.

**Enunciado 1** (Rompimiento de simetría). *Al aplicar la transformación espectral  $DT_{\mathbb{R}^2}$  a una función  $f(x_1, x_2)$ , se rompe la simetría del grupo asociado a la función y se recupera el grupo de simetría original cuando los parámetros de la transformación aumentan.*

*La transición va de un grupo de baja a un grupo de alta simetría.*

Los rompimientos de simetría en física de materiales se pueden estudiar directamente en los cambios de fase asociados a la acción de potenciales externos en una estructura cristalina con un grupo de simetría dado, cuando se aplican potenciales externos (como temperatura o presiones) se observan cambios en la distribución de átomos en la red, lo que ocasiona también un cambio en el grupo de simetría original del material.

En el caso de la función estudiada en este trabajo se presenta una transición del tipo

$$\text{Supergrupo} \begin{array}{c} \xrightarrow{DT_{\mathbb{R}^2}} \\ \xleftarrow{\gamma \rightarrow \pm\infty} \end{array} \text{Subgrupo} \quad (4.21)$$

Explícitamente el rompimiento de la simetría se da cuando los parámetros  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  se encuentran en la vecindad de la integral que aparece en el cociente de la función  $\phi'$ , para el caso estudiado en este trabajo la integral es la siguiente:

$$\int_0^{2\pi} e^{-2\sin(x)} dx = 2\pi \text{BesselI}[0,2] = 2\pi I_0(2).$$

Cuya integración se realizó en un período completo de la función  $e^{-2\sin(x)}$ , debido a la periodicidad del potencial [26].

Como se mencionó anteriormente el rompimiento de la simetría se da en la vecindad de tal integral, para mostrarlo se presentan las figuras siguientes (4.5), con valores  $\gamma_1 = \gamma_2 \in \{-2\pi I_0(2) \pm 10\}$ .

El punto  $\gamma_1 = \gamma_2 = -2\pi I_0(2) = \gamma_s$  contiene una singularidad para el potencial que rompe la periodicidad de la función, aunque también funciona como un “switch” en la orientación de los motivos decorativos en los mosaicos, con la palabra “switch” se busca presentar la simetría encontrada por Mielnik en [10], en el caso del citado artículo el potencial es singular para el conjunto de números contenidos en  $\{|\gamma| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\}$ .

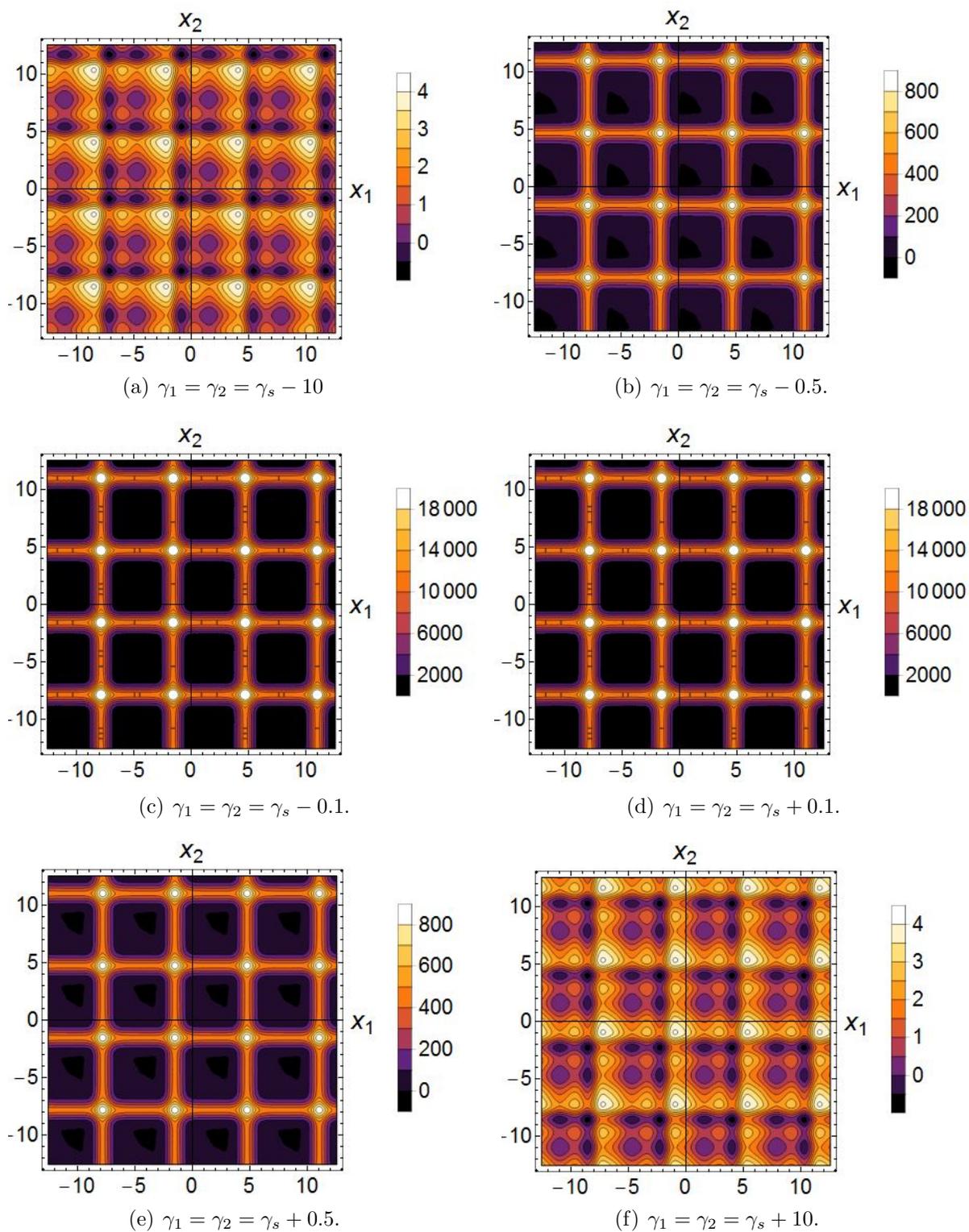
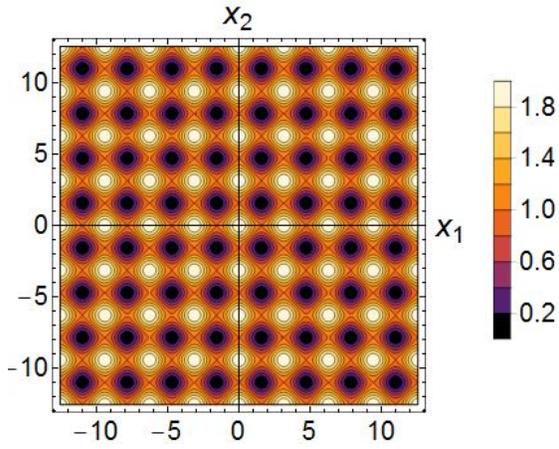
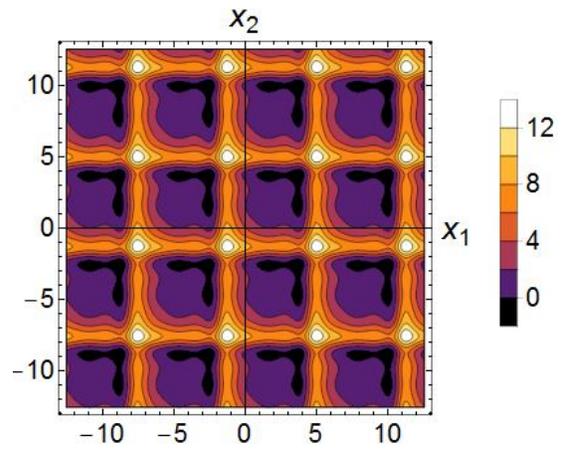


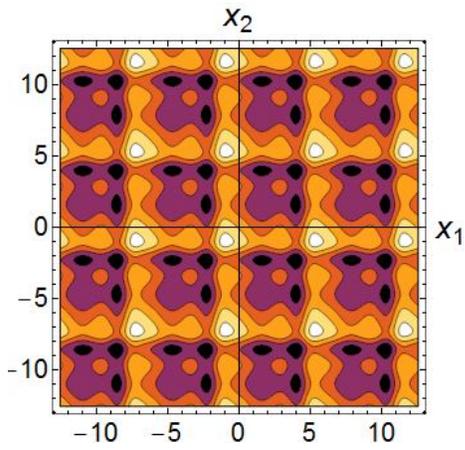
Figura 4.5: Rompimiento de simetría en la vecindad de:  $\gamma_1 = \gamma_2 \in \{\gamma_s \pm 10\}$ .



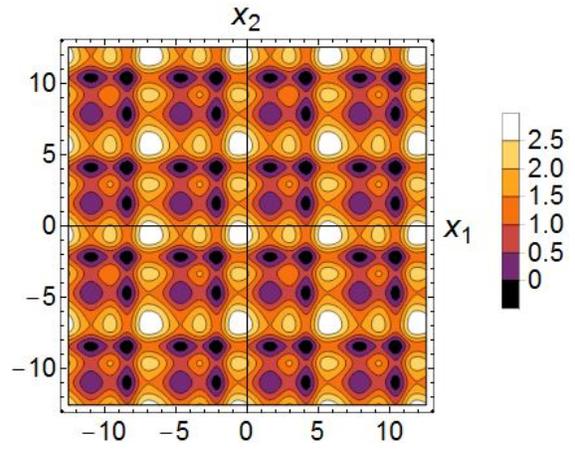
(a) Original



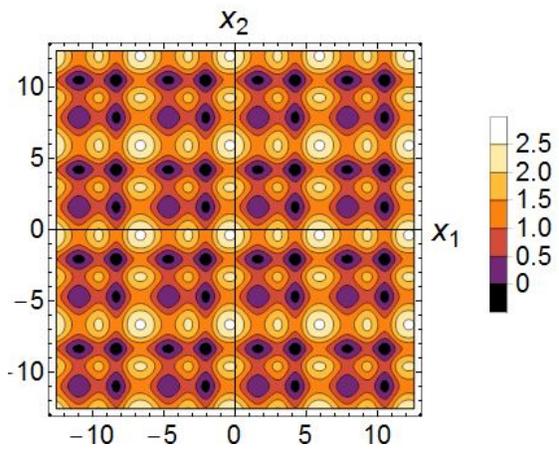
(b)  $\gamma_1 = \gamma_2 = -10$



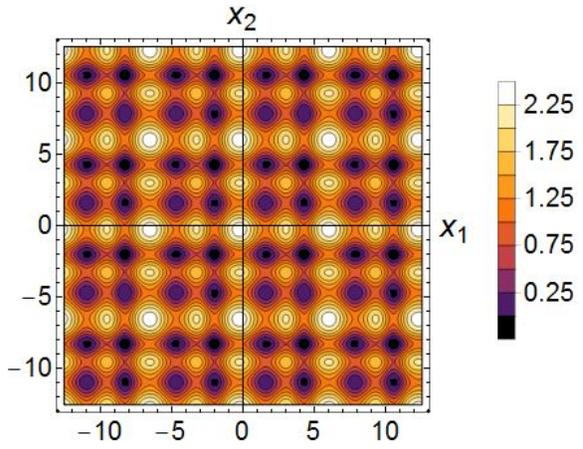
(c)  $\gamma_1 = \gamma_2 = -5$



(d)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$



(e)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 5$



(f)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$

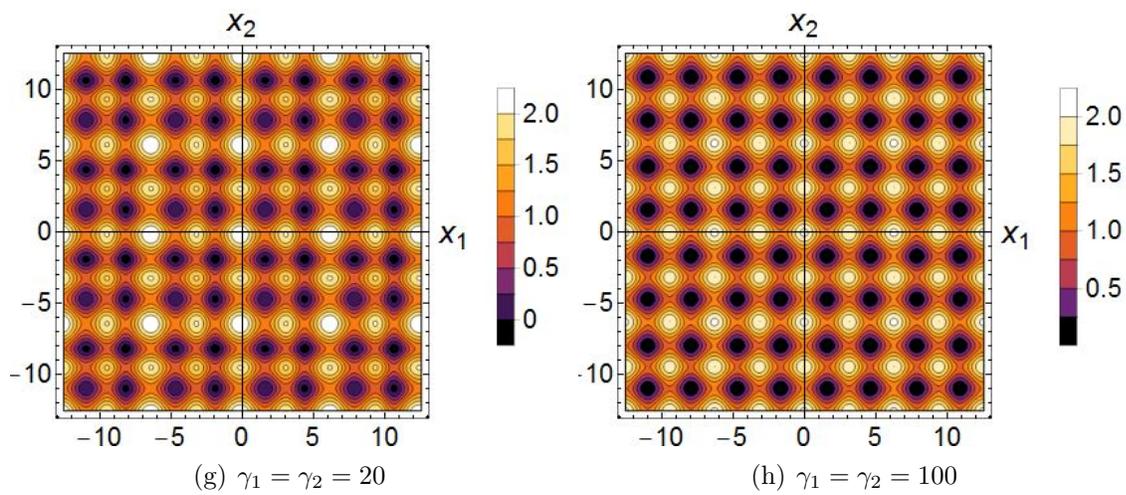
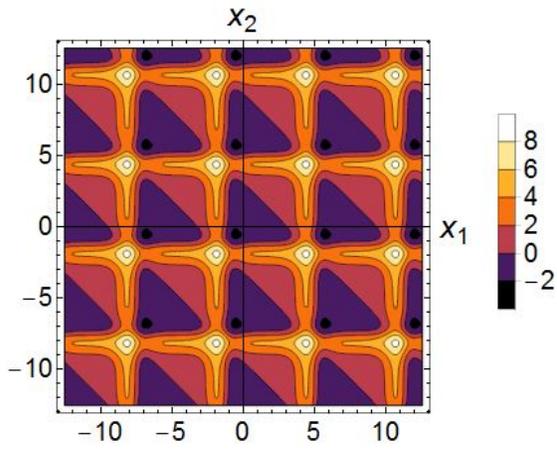
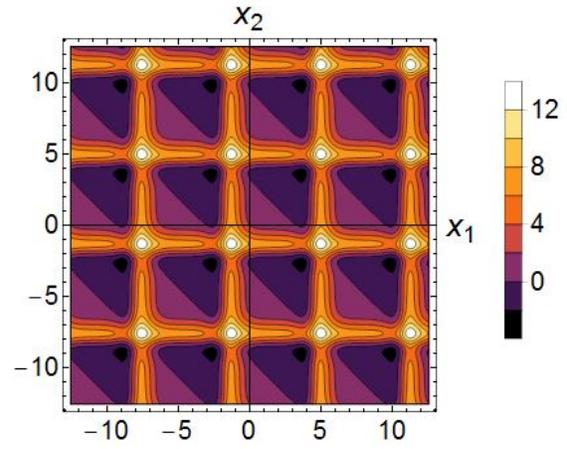


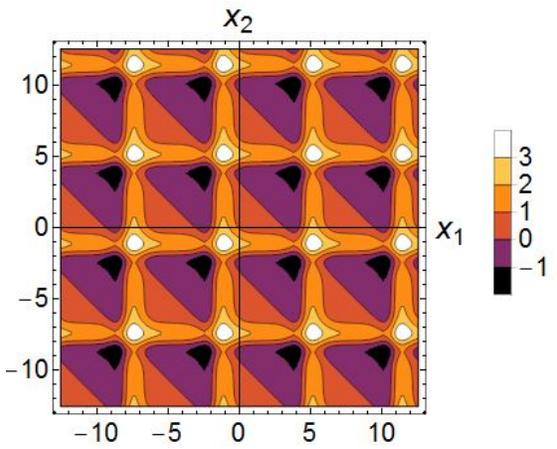
Figura 4.6: Contornos para potenciales deformados.



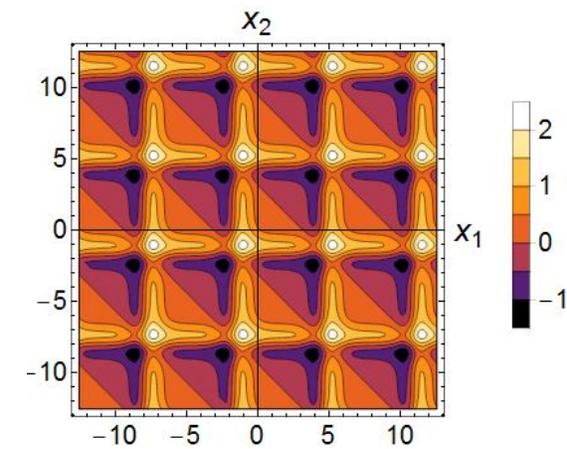
(a)  $\gamma_1 = \gamma_2 = -14$



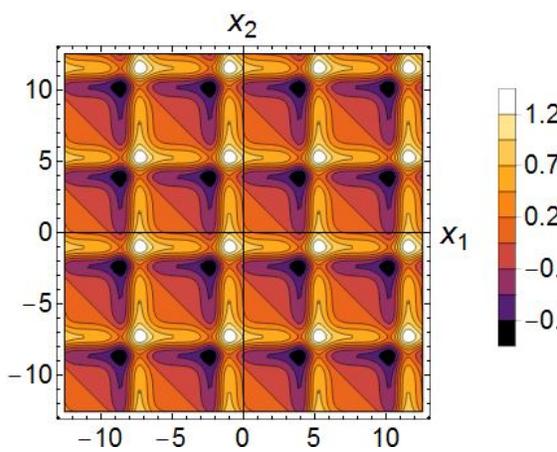
(b)  $\gamma_1 = \gamma_2 = -10$



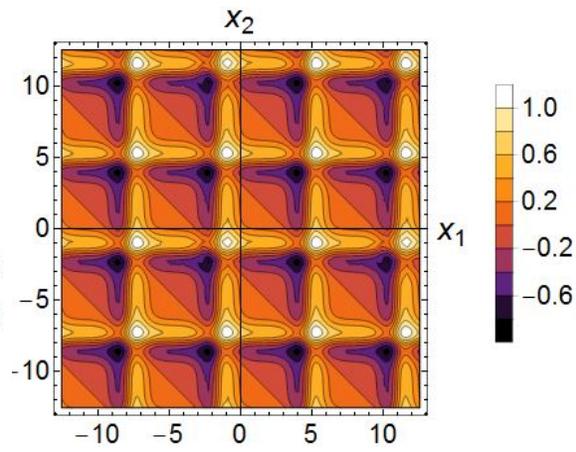
(c)  $\gamma_1 = \gamma_2 = -5$



(d)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$



(e)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 5$



(f)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$

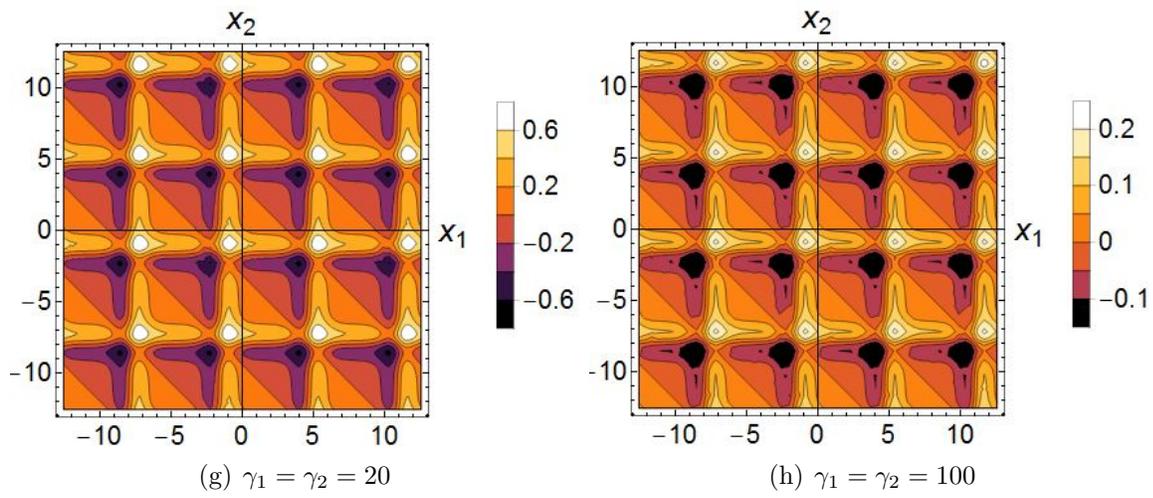


Figura 4.7: Contornos para la función  $\phi'(x_1, x_2, \gamma_1, \gamma_2)$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

Los resultados principales de esta tesis están incluidos en los capítulos 2, 3 y 4 y por índole presentamos las conclusiones capítulo por capítulo:

- Capítulo 2.

Al realizar la factorización estrictamente isoespectral con un parámetro adicional  $\epsilon$  el Hamiltoniano  $\hat{H}$  se deforma de la siguiente manera

$$\hat{H}_{\gamma,\epsilon} = \left[ -D_x^2 + (F + \epsilon)^2 - 2D_x \left( \frac{e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^{x'} -2F dx'}}{\gamma + \int_0^{x'} e^{-2\epsilon x} e^{\int_0^{x'} -2F dx'} dx'} \right) \right]$$

† La acción de la deformación adicional por el parámetro  $\epsilon$  en los operadores de factorización produce un desplazamiento en las eigenfunciones del Hamiltoniano inicial que puede ser calculado analizando como varían los nodos de las eigenfunciones (buscando los puntos en que la eigenfunción es cero).

En las eigenfunciones asociadas al Hamiltoniano isoespectral  $\hat{H}_{\gamma,\epsilon}(x)$  se presenta un escalamiento en función del parámetro de desplazamiento, aunado a tal escalamiento se preserva el desplazamiento presente en las eigenfunciones del Hamiltoniano sin deformación  $\gamma$ .

$$|\psi_{\gamma,\epsilon}(x)|^2 > |\psi(x)|^2 \quad (5.1)$$

† Las soluciones estándar del Hamiltoniano inicial se recuperan cuando se usan los siguientes límites para los parámetros  $\epsilon$  y  $\gamma$ , esto se comprobó con el ejemplo de Mielnik para el oscilador armónico cuántico.

$$\{|\psi_{\gamma,\epsilon}(x)|^2 \rightarrow |\psi(x)|^2; \{\epsilon \rightarrow 0, \gamma \rightarrow \pm\infty\}\} \quad (5.2)$$

- Capítulo 3.

† Encontramos que si se realiza un desplazamiento escalar  $\epsilon$  en los operadores de factorización en potenciales periódicos se puede tomar el caso  $\gamma = 0$  que en potenciales estándar provoca una discontinuidad en el potencial deformado.

† Se comprobó la invarianza traslacional del potencial bajo la transformación isoespectral biparamétrica que es relevante debido a las aplicaciones de los potenciales periódicos en física de la materia condensada.

■ Capítulo 4.

† Los potenciales deformados tienen la capacidad de romper el grupo de simetría asociado a una función dada, tal rompimiento de simetría puede revertirse al tomar valores elevados para los parámetros de deformación haciendo que la transformación se pueda escribir en un diagrama conmutativo.

$$\{P_{4m}\} \begin{array}{c} \xrightarrow{DT_{\mathbb{R}^2}} \\ \xleftarrow{\gamma \rightarrow \pm\infty} \end{array} \{P_m\} \quad (5.3)$$

† La deformación por el parámetro  $\gamma$  (Mielnik) en los potenciales periódicos nos permite estudiar cualitativamente las modificaciones en las propiedades electrónicas de las redes bidimensionales.

Finalmente, mostramos que un esquema de colores para las gráficas de contorno de los potenciales periódicos  $\gamma$  deformados nos permite considerar a las zonas oscuras como regiones de mínimos de potencial por lo que se puede visualizar mejor las zonas con más probabilidad de encontrar electrones mientras que las zonas claras corresponden a una probabilidad electrónica reducida en nuestra codificación de colores.

# Bibliografía

- [1] Anexo: Ganadores del premio Nobel de física, Wikipedia la enciclopedia libre, (2019).
- [2] P. Dirac, The principles of quantum mechanics, Oxford University Press, (1930).
- [3] G. Junker, 40 years of supersymmetric quantum mechanics, Journal of Physics A, 50, (2017).
- [4] G. Darboux, On a proposition relative to linear equations, Comptes Rendus, 94, pp. 1456-1459, (1882).
- [5] V.B. Matveev, M.A. Salle, Darboux transformations and solitons, Springer, Berlin (1991).
- [6] J.J. Sakurai, Modern quantum mechanics; rev. ed., Addison-Wesley, (1994).
- [7] B. Bagchi, Supersymmetry in quantum and classical mechanics, Chapman & Hall/CRC, (2001).
- [8] H. Nicolai, Supersymmetry and spin systems, J. Phys. A: Math. Gen. 9, pp. 1497-1506, (1976).
- [9] E. Witten, Dynamical breaking of supersymmetry, Nucl. Phys. B, 188, pp. 513-554, (1981).
- [10] B. Mielnik, Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum, J. Math. Phys. 25, pp. 3387-3389, (1984).
- [11] W.C. Chew, Quantum mechanics made simple: lecture notes, (2012).
- [12] V. Sukumar, Supersymmetric quantum mechanics and its applications, AIP Conference Proceedings, pp. 166-235, (2004).
- [13] D.J. Fernández, New hydrogen-like potentials, Lett. Math. Phys. 8, pp. 337-343, (1984).
- [14] E.D. Filho, The Morse oscillator generalised from supersymmetry, J. Phys. A: Math. 21, pp. 1025-1028, (1988).
- [15] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, Supersymmetry and quantum mechanics, Phys. Rep. 251, pp. 267-385, (1995).

- [16] W. Jones, N. March, Theoretical solid state physics, Volume 1: Perfect lattices in equilibrium, Chapter 1, Dover publications, (1985).
- [17] M. Dresselhaus, J. Gene, Chapter 10, Group theory: application to the physics of condensed matter, Springer, (2008).
- [18] H.M. James, Energy bands and wave functions in periodic potentials, Phys. Rev. Lett., 6, 11, pp. 1602-1610, (1949).
- [19] Y. Aharonov, C.K. Au, New approach to perturbation theory, Phys. Rev. Lett., 42, pp. 1582-1585, (1979).
- [20] J. Socorro, M.A. Reyes, C.V. Mora, E. Condori, Supersymmetric quantum mechanics: two factorization schemes, and quasi-exactly solvable potentials, arXiv:1902.01782v1 [quant-ph], (2019).
- [21] E. T. Copson, Partial differential equations, Cambridge university press, 1st. edition, (1975).
- [22] A. Jeffrey, Applied partial differential equations. An introduction, Academic Press, 1st. edition, Chapter 6, pp. 217-242 ,(2002).
- [23] C. E. Lawrence, Partial differential equations, American mathematical society, Graduate studies in mathematics, vol.19, Chapter 4, pp.167-171, (1998).
- [24] R. Gradshteyn, Table of integrals, series, and products, pp-771, (1996).
- [25] U. Müller, Symmetry relationships between crystal structures; applications of crystallographic group theory in crystal chemistry, Oxford university press, 1st. edition, (2013).
- [26] L.N.Trenfethen, J.A.C.Weidman,The exponentially convergent trapezoidal rule, SIAM review, 56,3, pp. 385–458, (2014).
- [27] C. Lee, Equivalence of logarithmic perturbation theory and expansion of the superpotential in supersymmetric quantum mechanics, Phys. Lett. A, 267, pp. 101-108, (2000).

# Anexos



## .1. Teorema de Darboux

Se comienza con una ecuación diferencial de segundo orden (Schrödinger):

$$-\psi_{xx} + U\psi = \lambda\psi \quad (4)$$

Se propone la solución  $\psi_1 = \psi_1(x, \lambda_1)$  y con  $\sigma_1 = \psi_{1x}\psi_1^{-1}$ .

La transformada Darboux se da en la siguiente manera:

$$\psi_1 = \left( \frac{d}{dx} - \sigma_1 \right) \psi = \psi_x - \frac{\psi_{1x}}{\psi_1} \psi \quad (5)$$

**Teorema 3** (Teorema de Darboux). *La función  $\psi_1$  satisface la ecuación diferencial*

$$-\psi_{xx1} + U_1\psi_1 = \lambda\psi_1$$

,

$$u_1 = u - 2\sigma_{1x} = u - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_1$$

El teorema de Darboux declara que la ecuación Sturm-Liouville (4) es covariante bajo la acción de la transformada Darboux.

## .2. Cálculos eigenfunciones oscilador desplazado

```

normalizados.nb * - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

"Comenzando con la solución encontrada para el estado base se aplicara el operador de creación
(con desplazamiento " ε ") para generar los siguientes estados"

In[29]:= ψ₀ = Exp[-ε * x - (x²/2)]
Out[29]= e-x²/2 - xε

"El operador de creación propuesto es (-Dₓ+x+ε) y será aplicado sobre el estado base ψ₀"

In[30]:= ψ₁ = -D[ψ₀, x] + x * ψ₀ + ε * ψ₀
Out[30]= e-x²/2 - xε x - e-x²/2 - xε (-x - ε) + e-x²/2 - xε ε

In[31]:= Simplify[e-x²/2 - xε x - e-x²/2 - xε (-x - ε) + e-x²/2 - xε ε]
Out[31]= 2 e-1/2 x (x+2ε) (x + ε)

```

Figura 1: En términos de los polinomios de Hermite  $|\psi_{1,\epsilon}(x)\rangle(H_1(x) + 2\epsilon)|\psi_{0,\epsilon}(x)\rangle$ .

### .3. Normalización del oscilador desplazado

normalizadesplazado.nb \* - Wolfram Mathematica 10.4

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[16]:= "Para calcular las constantes de normalización del oscilador desplazado se usaron las siguientes instrucciones";
```

```
H0 = 1;
```

```
H1 = 2 x;
```

```
H2 = 4 x2 - 2;
```

```
H3 = 8 x3 - 12 x;
```

```
"A0"
```

```
A0 = Sqrt[1/Integrate[Exp[-2 ε * x - x2] * (H0)2, {x, -∞, ∞}]]
```

```
"A1"
```

```
A1 = Sqrt[1/Integrate[Exp[-2 ε * x - x2] * (H1 + 2 H0 * ε)2, {x, -∞, ∞}]]
```

```
"A2"
```

```
A2 = Sqrt[1/Integrate[Exp[-2 ε * x - x2] * (H2 + 4 H1 * ε + 4 H0 * ε2)2, {x, -∞, ∞}]]
```

```
"A3"
```

```
A3 = Sqrt[1/Integrate[Exp[-2 ε * x - x2] * (H3 + 6 H2 * ε + 12 H1 * ε2 + 8 H0 * ε3)2, {x, -∞, ∞}]]
```

```
Out[21]= A0
```

$$\text{Out[22]} = \frac{\sqrt{e^{-\epsilon^2}}}{\pi^{1/4}}$$

```
Out[23]= A1
```

$$\text{Out[24]} = \frac{\sqrt{e^{-\epsilon^2}}}{\sqrt{2} \pi^{1/4}}$$

```
Out[25]= A2
```

$$\text{Out[26]} = \frac{\sqrt{e^{-\epsilon^2}}}{2 \sqrt{2} \pi^{1/4}}$$

```
Out[27]= A3
```

$$\text{Out[28]} = \frac{\sqrt{e^{-\epsilon^2}}}{4 \sqrt{3} \pi^{1/4}}$$

```

In[32]:=  $\psi_2 = -D[\psi_1, x] + x \star \psi_1 + \epsilon \star \psi_1$ 

"-2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2 - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )  $\epsilon$  +
x (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ ) +  $\epsilon$  (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ )"

Simplify[-2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2 - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )  $\epsilon$  +
x (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ ) +  $\epsilon$  (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ )]

Out[33]= e- $\frac{1}{2}x(x+2\epsilon)$  (-2 + 4 x2 + 8 x  $\epsilon$  + 4  $\epsilon^2$ )

```

Figura 2: En términos de los polinomios de Hermite es  $|\psi_{2,\epsilon}(x)\rangle = (H_2(x) + 4H_1(x)\epsilon + 4H_0\epsilon^2)|\psi_{0,\epsilon}(x)\rangle$ .

```

In[34]:=  $\psi_3 = -D[\psi_2, x] + x \star \psi_2 + \epsilon \star \psi_2$ 

"-2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x + 6 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ )2 - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )3 - 2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$  + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2  $\epsilon$  -
x (2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ ) - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2 + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )  $\epsilon$ ) -  $\epsilon$  (2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ ) -
e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2 + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )  $\epsilon$ ) + x (-2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2 - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )  $\epsilon$ 
+ x (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ ) +  $\epsilon$  (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ )) +
 $\epsilon$  (-2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2 - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )  $\epsilon$ ) + x (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ )
+  $\epsilon$  (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ ))"

Simplify[-2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x + 6 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ )2 - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )3 - 2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$  + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2  $\epsilon$  -
x (2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ ) - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2 + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )  $\epsilon$ ) -
 $\epsilon$  (2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ ) - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2 + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )  $\epsilon$ ) +
x (-2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2 - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )  $\epsilon$ ) + x (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ ) +
 $\epsilon$  (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ )) +  $\epsilon$  (-2 e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )2 - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ )  $\epsilon$ ) +
x (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ ) +  $\epsilon$  (e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  x - e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$  (-x- $\epsilon$ ) + e- $\frac{x^2}{2}-x\epsilon$   $\epsilon$ )))]

Out[35]= 4 e- $\frac{1}{2}x(x+2\epsilon)$  (-3 x + 2 x3 - 3  $\epsilon$  + 6 x2  $\epsilon$  + 6 x  $\epsilon^2$  + 2  $\epsilon^3$ )

```

Figura 3: En términos de los polinomios de Hermite  $|\psi_{3,\epsilon}(x)\rangle = (H_3(x) + 6H_2(x)\epsilon + 12H_1\epsilon^2 + 8H_0\epsilon^3)|\psi_{0,\epsilon}(x)\rangle$ .

## 4. Eigenfunciones del oscilador isoespectral con desplazamiento $\epsilon$ .

funciones\_deformadas.nb \* - Wolfram Mathematica 10.4

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[1]:= F = x + e;
phi = (Exp[-2 Integrate[F, x]]) / (gamma + Integrate[Exp[-2 Integrate[F, x]], x])
"psi_0"
psi_0 = Exp[(-e + x) - x^2/2] / (gamma + Integrate[Exp[-2 Integrate[F, x]], x])
"psi_1"
psi_1 = -D[psi_0, x] + (x + e + phi) * psi_0
"psi_2"
psi_2 = -D[psi_1, x] + (x + e + phi) * psi_1
"psi_3"
psi_3 = -D[psi_2, x] + (x + e + phi) * psi_2
```

Out[2]= 
$$\frac{e^{-2\left(\frac{x^2}{2}-xe\right)}}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]}$$

Out[3]=  $\psi_0$

Out[4]= 
$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe}}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]}$$

Out[5]=  $\psi_1$

Out[6]= 
$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe-\epsilon^2-(x+\epsilon)^2}}{\left(\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]\right)^2} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe}(-x-\epsilon)}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]} + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe}\left(x+e + \frac{e^{-2\left(\frac{x^2}{2}-xe\right)}}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]}\right)}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]}$$

Figura 4: Eigenfunciones no normalizadas para los estados  $\psi_{0,\epsilon}(x)$  y  $\psi_{1,\epsilon}(x)$ .

Out[29]=  $\psi_2$

Out[30]= 
$$\frac{2e^{-\frac{x^2}{2}-xe+2\epsilon^2-(x+\epsilon)^2}}{\left(\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]\right)^3} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe-\epsilon^2-(x+\epsilon)^2}(-x-\epsilon)}{\left(\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]\right)^2} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe-\epsilon^2-(x+\epsilon)^2}(-x-\epsilon-2(x+\epsilon))}{\left(\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]\right)^2} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe}}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]} + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe}(-x-\epsilon)^2}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]} +$$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe-\epsilon^2-(x+\epsilon)^2}\left(x+e + \frac{e^{-2\left(\frac{x^2}{2}-xe\right)}}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]}\right)}{\left(\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]\right)^2} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe}(-x-\epsilon)\left(x+e + \frac{e^{-2\left(\frac{x^2}{2}-xe\right)}}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]}\right)}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe}\left(1 - \frac{e^{\epsilon^2-(x+\epsilon)^2-2\left(\frac{x^2}{2}-xe\right)}}{\left(\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]\right)^2} - \frac{2e^{-2\left(\frac{x^2}{2}-xe\right)}(x+\epsilon)}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]}\right)}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]} +$$

$$\left(x+e + \frac{e^{-2\left(\frac{x^2}{2}-xe\right)}}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]}\right)\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe-\epsilon^2-(x+\epsilon)^2}}{\left(\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]\right)^2} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe}(-x-\epsilon)}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]} + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-xe}\left(x+e + \frac{e^{-2\left(\frac{x^2}{2}-xe\right)}}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]}\right)}{\gamma + \frac{1}{2}e^{\epsilon^2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}[x+e]}\right)$$

Figura 5: Eigenfunción no normalizada para el estado  $\psi_{2,\epsilon}(x)$ .



## .5. Oscilador de Mielnik desplazado

En el límite de Mielnik desplazado se debe usar:

$$\epsilon = 0.5, F(x) = x.$$

Al sustituir en (2.12), (2.14), (2.21) obtenemos:

- Eigenfunción para el estado base:

$$\psi_0(x) = A_0 e^{-\int_0^x (1/2+x) dx} = A_0 e^{-\frac{1}{2}(x+x^2)}$$

- Eigenfunción para el estado base deformado:

$$|\psi_{0,\gamma,\epsilon}\rangle = \frac{A_0 e^{-\frac{1}{2}(x+x^2)}}{\gamma + \int_0^x e^{-(x+x^2)} dx} = \frac{A_0 e^{-x^2/2}}{\gamma + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{Erf}(1/2 + x)}$$

- El potencial deformado

$$\begin{aligned} V_{x,\gamma,\epsilon} &= (x + \epsilon)^2 - 2\phi' \\ &= (x + \epsilon)^2 - 2D_x \left( \frac{e^{-x} e^{-x^2}}{\gamma + \int_0^x e^{-(x+x^2)} dx} \right) \end{aligned}$$

En la figura (8) se presentan las gráficas correspondientes a  $V_{\gamma,\epsilon}(x)$  en los límites de continuidad dados en la figura (7).

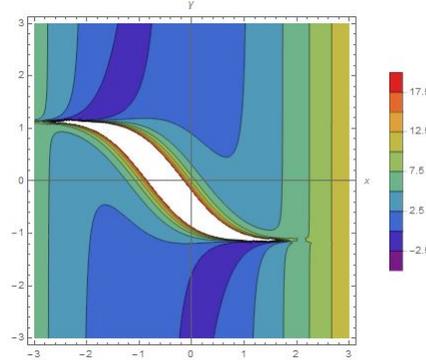


Figura 7: Región de convergencia,  $\epsilon = 0.5$ , podemos ver que el centro del potencial se desplaza hacia la izquierda la cantidad  $\epsilon$ .

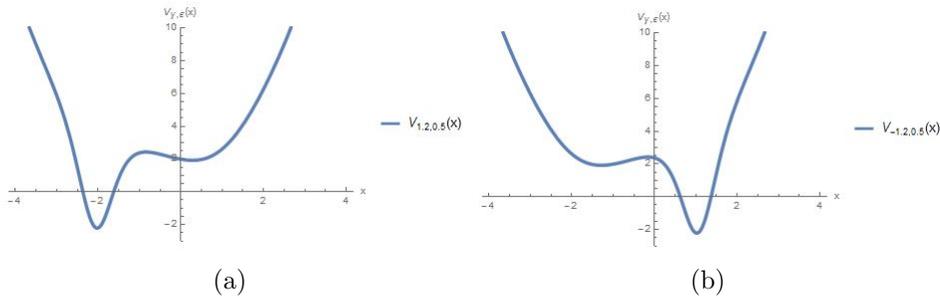


Figura 8: Potenciales deformados con (a)  $\gamma = 1.2$ , (b)  $\gamma = -1.2$  y  $\epsilon = 0.5$ .

Gráficamente podemos constatar que la simetría presente en el potencial generalizado es del tipo  $V_{\gamma,\epsilon}(-\bar{x}, \epsilon, \gamma) = V_{-\gamma,-\epsilon}(\bar{x})$  correspondiente al resultado obtenido por Mielnik en 1984 [10].

La simetría se presenta cuando se fija un valor para  $\bar{x}$  en la gráfica azul de la figura (9), esta va a tener el mismo valor cuando se tome el valor negativo de la  $\bar{x}$  fijada en la gráfica naranja, el origen debe ser fijado en el punto  $\bar{x} = x - \epsilon$ .

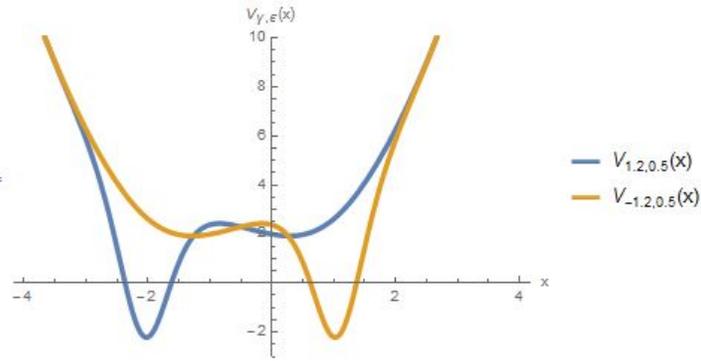


Figura 9: Simetría Mielnik para  $V_{\pm 6/5, 1/2}(x)$ .

## .6. Una metamorfosis 2 isoespectral

La obra de M.C. Escher titulada “*Metamorphose 2*” aborda una composición de 20 grabados individuales interconectados uno a uno de tal forma que exista una transición entre las simetrías dominantes de cada uno, el grabado evoluciona de manera gradual desde un grabado con las palabras metamorphose hasta un grabado de igual característica, pasando por peces, aves, avispas, una localidad costera, etc.

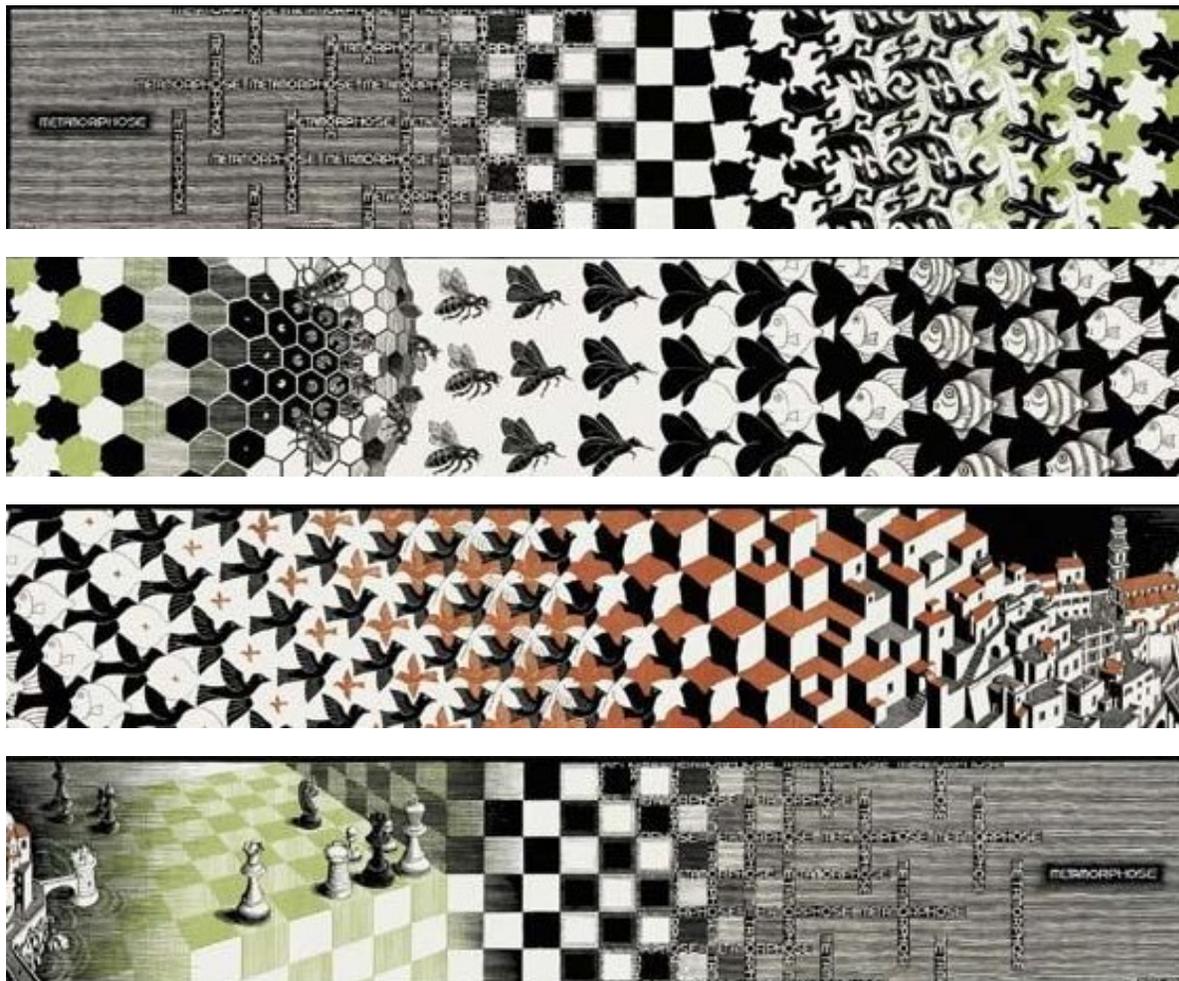


Figura 10: Escher, M.C. Exploring the Infinite; Abrams: New York, NY, USA, 1989.

Usando los mosaicos generados a partir de los potenciales isoespectrales bidimensionales tratados en el capítulo [4] podemos generar un conjunto de imágenes que van desde un grupo de simetría  $P_{4m}$  que actúa como análogo al grabado con la leyenda metamorphose en la obra de Escher para después pasar por una variedad de mosaicos con simetría  $P_m$  con diferentes coloraciones hasta llegar nuevamente al mosaico inicial  $P_{4m}$ .

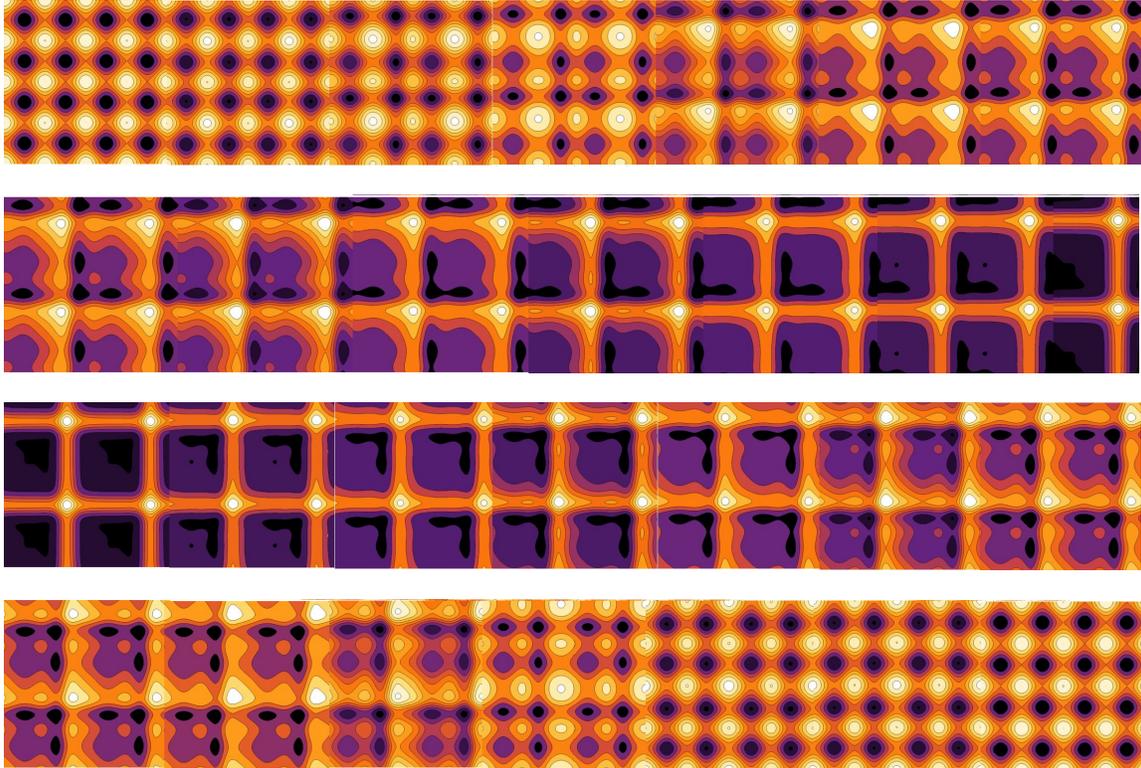


Figura 11: Metamorphose 2 versión: mosaicos isoespectrales.