



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN  
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

**POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS**

**Aspectos caóticos de una clase de mapeos discretos sin puntos fijos**

Tesis que presenta

**Claudio Alejandro García Grimaldo**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias Aplicadas**

En la opción de

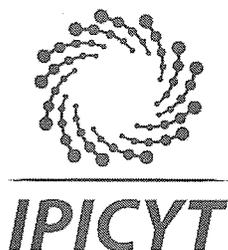
**Control y Sistemas Dinámicos**

**Director de la Tesis:**

Dr. Eric Campos Cantón

San Luis Potosí, S.L.P., Julio de 2019





## Constancia de aprobación de la tesis

La tesis “**Aspectos caóticos de una clase de mapeos discretos sin puntos fijos**” presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Claudio Alejandro García Grimaldo** y aprobada el **treinta de julio del dos mil diecinueve** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

**Dr. Eric Campos Cantón**  
Director de la tesis

**Dr. Hugo Cabrera Ibarra**  
Jurado en el Examen

**Dr. Eduardo Jiménez López**  
Jurado en el Examen

**Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus**  
Jurado en el Examen



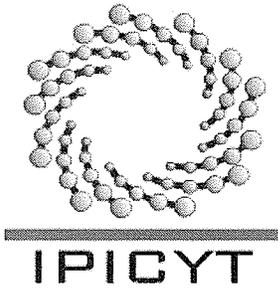


## **Créditos Institucionales**

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr Eric Campos Cantón.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. 633649) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.





# Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

## Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 038 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 30 días del mes de julio del año 2019, se reunió a las 13:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

|  |                        |                                    |
|--|------------------------|------------------------------------|
| <b>Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus</b> | <b>Presidente</b>      | <b>IPICYT</b>                      |
| <b>Dr. Eric Campos Cantón</b>          | <b>Secretario</b>      | <b>IPICYT</b>                      |
| <b>Dr. Eduardo Jiménez López</b>       | <b>Sinodal externo</b> | <b>El Colegio Mexiquense, A.C.</b> |
| <b>Dr. Hugo Cabrera Ibarra</b>         | <b>Sinodal</b>         | <b>IPICYT</b>                      |

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

**MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS**

sustentó el C.

**Claudio Alejandro García Grimaldo**

sobre la Tesis intitulada:

*Aspectos caóticos de una clase de mapeos discretos sin puntos fijos*

que se desarrolló bajo la dirección de

**Dr. Eric Campos Cantón**

El Jurado, después de deliberar, determinó

**APROBARLO**

Dándose por terminado el acto a las 14:35 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 30 días del mes de julio de 2019.

**Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez**  
Jefa del Departamento del Posgrado

*Manuel Bonilla*  
**Dr. Múrcial Bonilla Marín**  
Secretario Académico





# Agradecimientos

A mi familia, en especial a mis padres y mi hermana, quienes son mi fortaleza, mi pilar, mi ejemplo, y que me acompañan sin dudarlos en cada paso que doy.

A mis sobrinos, Sebastian, Emiliano y Santiago quienes me siguen en los buenos y malos momentos, que con su inocencia y amor me demuestran los momentos importantes de la vida.

A mi director de tesis, el Dr. Eric Campos Cantón por su tiempo, dedicación, apoyo y aliento, por guiarme y motivarme a mejorar y en general por compartir sus conocimientos conmigo.

A mis sinodales: Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus, Dr. Hugo Cabrera Ibarra y Dr. Eduardo Jiménez López, por sus observaciones, comentarios e interés por mejorar mi trabajo.

A mi gran amigo, Eduardo Torres, por su apoyo en la realización de este trabajo así como por la amistad forjada a lo largo de estos años.

A mis compañeros y amigos de maestría que me han brindado su apoyo y amistad.

Al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) por las facilidades otorgadas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado mediante la beca 633649 para realizar mis estudios de maestría.



# Índice general

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Lista de figuras</b>  | <b>XIII</b> |
| <b>Resumen</b>   | <b>XIII</b> |
| <b>Abstract</b>  | <b>XV</b>   |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>1</b>    |
| 1.1. Antecedentes . . . . .  | 1           |
| 1.2. Estado del arte . . . . .   | 2           |
| 1.3. Motivación . . . . .  | 3           |
| 1.4. Objetivos . . . . .   | 3           |
| 1.4.1. Objetivo General . . . . .  | 3           |
| 1.4.2. Objetivos particulares . . . . .  | 3           |
| 1.5. Organización . . . . .  | 4           |
| <b>2. Preliminares</b>   | <b>5</b>    |
| 2.1. Sistemas dinámicos . . . . .  | 5           |
| 2.2. Mapeos unidimensionales . . . . .   | 6           |
| 2.2.1. Puntos fijos . . . . .  | 6           |
| 2.2.2. Órbitas periódicas . . . . .  | 11          |
| 2.2.3. Órbitas eventualmente periódicas . . . . .                                  | 12          |
| 2.3. Estabilidad . . . . .   | 12          |
| 2.3.1. Criterios de estabilidad . . . . .  | 13          |
| 2.3.2. Estabilidad de órbitas periódicas . . . . .                                 | 14          |
| 2.3.3. Análisis gráfico . . . . .  | 16          |
| 2.4. Mapeos racionales . . . . .   | 17          |
| 2.5. Mapeos lineales . . . . .   | 18          |
| 2.6. Bifurcaciones . . . . .   | 20          |
| 2.6.1. Bifurcación nodo-silla . . . . .  | 20          |
| 2.6.2. Bifurcación de periodo doble . . . . .                                      | 23          |
| 2.7. Caos . . . . .  | 24          |
| 2.7.1. Espacios métricos . . . . .   | 24          |
| 2.7.2. Densidad . . . . .  | 25          |
| 2.7.3. Transitividad . . . . .   | 26          |
| 2.7.4. Sensibilidad a las condiciones iniciales y exponentes de Lyapunov . . . . . | 27          |

|   |           |
|---|-----------|
| 2.7.5. Sistemas dinámicos caóticos . . . . .  | 28        |
| <b>3. Mapeos discretos sin puntos fijos</b>   | <b>31</b> |
| 3.1. Mapeos racionales sin puntos fijos . . . . .   | 31        |
| 3.2. MLP sin puntos fijos . . . . .   | 40        |
| 3.2.1. Construcción de MLP . . . . .  | 40        |
| 3.2.2. Familias de MLP sin puntos fijos . . . . .   | 43        |
| <b>4. Mapeos sin puntos fijos y caóticos</b>  | <b>53</b> |
| 4.1. MLP sin puntos fijos e indicios de comportamiento<br>caótico . . . . .                   | 53        |
| 4.1.1. Diagramas cobweb y series de tiempo de MLP sin puntos fijos . . .                      | 53        |
| 4.1.2. Diagramas de bifurcación y exponentes de Lyapunov de MLP sin<br>puntos fijos . . . . . | 56        |
| 4.2. Mapeo lineal por partes sin puntos fijos y caótico . . . . .                             | 59        |
| 4.2.1. Conjunto invariante presente en un mapeo lineal por partes . . . . .                   | 59        |
| 4.2.2. Mapeo lineal por partes caótico en un conjunto invariante . . . . .                    | 63        |
| <b>5. Conclusiones</b>  | <b>77</b> |
| <b>Referencias</b>  | <b>79</b> |
| <b>Apéndice</b>   | <b>81</b> |
| <b>A. Anéxo: Códigos de los programas</b>   | <b>85</b> |
| A.1. Programa para graficar series de tiempo y trayectoria de un punto . . . . .              | 85        |
| A.2. Programa para graficar el MLP y sus itereaciones . . . . .                               | 89        |
| A.3. Diagramas de bifurcación, cobweb y exp. de Lyapunov . . . . .                            | 90        |

# Resumen

El estudio de sistemas dinámicos discretos ha sido de gran utilidad para el desarrollo de distintas áreas de las ciencias naturales, exactas y sociales. Una de las características que pueden poseer los sistemas dinámicos discretos es el de presentar comportamiento caótico. Este rasgo ha sido aprovechado por la criptografía en la generación de secuencias pseudo-aleatorias. Es por ello que la importancia de generar nuevos sistemas que exhiban mapeos caóticos resulta de gran utilidad.

En esta tesis se presentan dos familias de mapeos discretos que tienen la particularidad de no presentar puntos fijos: la primera definida por mapeos racionales y la segunda por mapeos lineales por partes. En cada una de estas familias se dan las condiciones que deben tener para que se consiga obtener tal particularidad. Además, para la familia de mapeos lineales por partes y sin puntos fijos se hace un análisis a través de los exponentes de Lyapunov para determinar caos para ciertos valores de los parámetros. Finalmente se toma un mapeo lineal por partes y sin puntos fijos con valores particulares y se demuestra la existencia de caos en el sentido de Devaney.

Palabras clave: Sistemas dinámicos, mapeos discretos, mapeos sin puntos fijos, mapeos lineales por partes, mapeos racionales, mapeos caóticos, exponentes de Lyapunov.



# Abstract

The study of discrete dynamical systems has been very useful for the development of different areas in science, such as natural sciences, exact sciences and social science. One of the properties that, discrete dynamical systems have, is that they can exhibit chaotic behavior. This feature has been exploited by cryptography in the generation of pseudorandom sequences. Because of this, the importance of generating new systems that exhibit chaotic maps is worth it.

In this thesis, two families of discrete maps are presented, both of them have the particularity that they do not have fixed points: the first of them, is defined by rational maps, the second one is described by piecewise linear maps. In each of these families the conditions are given so that they do not have fixed points. Furthermore, for the piecewise linear maps and non fixed points family, an analysis is done through the Lyapunov exponents to detect chaos. Finally, a particular piecewise linear map with not fixed points is taken and the existence of chaos at Devaney sense for this map is proved.

**Keywords.-** Dynamical systems, discrete maps, maps without fixed points, piecewise linear maps, rational maps, chaotic maps, Lyapunov exponents.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Desde la antigüedad, el ser humano ha mostrado interés por la previsión de eventos futuros que afecten su entorno, su mundo y su universo. Los aportes de los babilónicos a la astronomía dejaron constancia del intento de dilucidar los movimientos venideros de los cuerpos celestes. En la antigua mesopotamia, los científicos medían el tiempo por medio de la posición del sol y los astros, y de esta forma conocer el tiempo de siembra. Y en América, concretamente en el caso de los mayas (asentados en la península mexicana), quienes destacaron por sus aportaciones a las matemáticas, particularmente en la predicción precisa de eclipses solares.

En el renacimiento, grandes científicos dieron bases sólidas para el entendimiento de fenómenos de distinta índole; Galileo Galilei, con su obra principal (1638): *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Discursos y demostraciones matemáticas en relación con dos nuevas ciencias) [1] y Newton con la publicación de su histórico trabajo: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principios de la Filosofía Natural) [2], establecieron las bases de la mecánica clásica. Es justamente Isaac Newton con su magistral trabajo: *Principia*, en el que se establece de manera rigurosa, el estudio de procesos que evolucionan a través del tiempo, principio de lo que hoy en día se conoce como análisis de sistemas dinámicos.

En los siglos XVIII y XIX, diversos científicos desarrollaron procedimientos para la solución de ecuaciones diferenciales, que generalmente representaban modelos matemáticos, los cuales manifestaban la abstracción de alguna situación que cambiaba a lo largo del tiempo. La mayoría de estas ecuaciones describían hechos deterministas: si se conocía la condición inicial de la ecuación, entonces para determinar toda condición futura solo era cuestión de resolverla. Este hecho parecía dar a entender que solo bastaba definir la ecuación diferencial y darle solución mediante las técnicas desarrolladas hasta ese entonces.

Sin embargo, el camino no era tan sencillo como se planteaba; un ejemplo que puso de manifiesto esta cuestión fue el famoso problema de los tres cuerpos [5, 6, 32], el cual hasta el día de hoy no se ha podido solucionar completamente; otro similar, fue el problema de los

$n$ -cuerpos [5, 6], que tampoco pudo ser resuelto de manera satisfactoria. No obstante, el matemático y físico Henri Poincaré llevó a cabo soluciones que aventajaron considerablemente el trabajo al respecto; algunas de las conclusiones a las que llegó fue que el comportamiento de las soluciones tenían un carácter mucho más complicado que ningún otro visto hasta entonces. Lo que Poincaré descubrió es lo que hoy en día se conoce como caos [3].

Trabajos en sistemas caóticos posteriores a los de Poincaré fueron hechos entre 1960 y 1970. Con el desarrollo de las computadoras fue posible trabajar con sistemas de ecuaciones diferenciales cuya solución analítica no era posible. Gracias a esto, el físico Edward Lorenz realizó análisis numéricos de un modelo simplificado del clima que consistía de tres ecuaciones diferenciales [7].

En la actualidad, el gran desarrollo de mejores sistemas de cómputo ha permitido que el estudio de sistemas caóticos tengan no solo utilidad como ciencia básica, sino que también sus frutos se empleen en nuevas tecnologías y ciencias aplicadas [8].

## 1.2. Estado del arte

Como se mencionó en la sección anterior, el diseño y estudio de sistemas dinámicos ha sido ampliamente explorado desde finales del siglo XIX hasta la actualidad. Los sistemas expuestos generalmente se expresan mediante ecuaciones diferenciales donde la variable independiente es el tiempo,  $t$ . Si este pertenece al conjunto de los números reales, entonces se habla de sistemas dinámicos en tiempo continuo; si  $t$  pertenece al conjunto de los enteros  $\mathbb{N}$ , se habla de sistemas dinámicos en tiempo discreto. Ambos sistemas tienen una amplia variedad de ejemplos importantes, principalmente porque exhiben características remarcables como: elementos atractivos o repulsivos, órbitas periódicas y en ocasiones atractores caóticos [9, 10, 11].

Dentro del conjunto de sistemas dinámicos, tanto continuos como discretos con comportamiento caótico, es posible que existan puntos de equilibrio o que haya ausencia de estos. Ejemplos de sistemas dinámicos continuos sin puntos de equilibrio, se observan en el sistema dado por Sprott [12]. Cantón y colaboradores [13, 14], proponen y diseñan sistemas lineales por partes, carentes de puntos de equilibrio y con dinámica caótica. Chao y colaboradores [15] exhiben un sistema hipercaótico usando un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias y sin puntos de equilibrio; sistemas de orden fraccionario y sin puntos de equilibrio han sido presentados por Cafagna y colaboradores [16]. Finalmente, Jafari y colaboradores [17], plantean un trabajo sobre flujos caóticos cuadráticos sin puntos de equilibrio en el cual se muestran 17 flujos caóticos tridimensionales que tienen no linealidades cuadráticas.

En comparación con los sistemas continuos, las investigaciones en sistemas dinámicos discretos sin puntos fijos hasta el día de hoy y reportadas en la literatura, han sido pocas. Dentro de estas se encuentra el trabajo en mapeos unidimensionales propuesto por Jafari y colaboradores [18], en donde se presenta una versión extendida del mapeo logístico, en el cual existen atractores caóticos ocultos. Por su parte Lambic [19] ofrece un mapeo unidi-

mensional caótico basado en composición de permutaciones. Haibo y colaboradores [20], para mapeos bidimensionales diseñan un sistema dinámico discreto sin puntos fijos. Wang y colaboradores [21], plantean y estudian la dinámica oculta de una clase de mapeo bidimensional inspirado en el mapeo de Henón [22].

La generación de sistemas caóticos, así como su posterior estudio han permitido descubrir importantes aplicaciones en distintos campos de la ciencia como lo son: la ingeniería, biología y seguridad informática. En comunicaciones seguras, la criptografía juega un papel central, en esta área se han desarrollado sistemas dinámicos caóticos específicamente para fines de protección de datos, algunos de ellos han hecho uso de mapeos lineales por partes, caóticos con puntos fijos, como es el caso del trabajo realizado por Charge y colaboradores [23], al igual que un criptosistema basado en un mapeo lineal por partes además de caótico propuesto por Hu y colaboradores [24].

### **1.3. Motivación**

Existen trabajos que tratan el estudio de sistemas dinámicos caóticos sin puntos de equilibrio, los cuales han resultado ser útiles en las ciencias, principalmente en el modelado determinista, como el realizado por Huerta y colaboradores [25]; también se han aplicado a la tecnología en el área de seguridad informática, particularmente en la criptografía, donde el empleo de estos sistemas tanto en tiempo discreto como en continuo han contribuido en el desarrollo de procesos de cifrado, principalmente en la construcción de generadores de secuencias pseudoaleatorias. Entre estos se encuentra el desarrollado por García y colaboradores [26], así como el hecho por Wei [27].

Los trabajos mencionados en la sección anterior han probado la existencia de caos solamente mediante el cálculo numérico de los exponentes de Lyapunov y no desde la definición de Devaney.

### **1.4. Objetivos**

#### **1.4.1. Objetivo General**

Diseñar y analizar mapeos, a partir de los cuales se construyan familias que no presenten puntos fijos, y que además exhiban elementos con comportamiento caótico.

#### **1.4.2. Objetivos particulares**

- Construir una familia de mapeos racionales sin puntos fijos.

- Diseñar una familia de mapeos lineales por partes (MLP)<sup>1</sup>, sin puntos fijos.
- Determinar la existencia de MLP, sin puntos fijos y con comportamiento caótico mediante los exponentes de Lyapunov.
- Demostrar la existencia de un mapeo lineal por partes y sin puntos fijos, que sea caótico en el sentido de Devaney.

## 1.5. Organización

En el capítulo dos se expone la teoría necesaria para comprender los conceptos desarrollados en capítulos siguientes. Además, se enuncian los teoremas principales de los mapeos discretos, que serán la base para el desarrollo de los teoremas y proposiciones propuestos en el resto de los capítulos. Del apartado dos al cinco se describen los conceptos y definiciones básicos de los sistemas dinámicos discretos, utilizando principalmente aquellos que servirán para entender mejor este trabajo. En la sección seis se aborda la teoría de mapeos discretos unidimensionales con comportamiento caótico.

En el capítulo tres se dan a conocer parcialmente los objetivos planteados, y se subdivide en dos partes. Lo primordial en la primera es construir una familia de mapeos racionales, cuya principal característica es que, carezcan de puntos fijos. Mientras que en la segunda división se centrará en el diseño de familias de mapeos derivados del primer subcapítulo. En resumen, se examinarán las principales cualidades que deben poseer dichos mapeos para que conformen una familia de MLP, sin puntos fijos.

En la primera sección del cuarto capítulo se estudiarán los MLP, sin puntos fijos, obtenidos del capítulo anterior; se analizarán un par de subfamilias, mediante series de tiempo, diagramas cobweb, diagramas de bifurcación, con la finalidad de identificar elementos con dinámica caótica. y que a través del cálculo de los exponentes de Lyapunov, se pruebe la existencia de caos. En la segunda sección se definirá un mapeo particular de los usados con anterioridad, para el cual se demostrará comportamiento caótico en el sentido de Devaney.

Finalmente, en el capítulo cinco se darán a conocer las conclusiones a las que se ha llegado, así como el trabajo futuro que se pretende hacer.

---

<sup>1</sup>De aquí en adelante al usar las siglas MLP, se referirán a mapeos lineales por partes.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Sistemas dinámicos

La noción matemática de sistema dinámico expresa el hecho de que el movimiento de muchos sistemas reales están subordinados a leyes y reglas. Estas reglas son deterministas, en el sentido de que el conocimiento de el estado del sistema en un momento particular del tiempo, determina el estado del sistema para todo tiempo futuro. La noción de sistema dinámico incluye dos componentes:

- El espacio de estados.
- Una regla la cual permite saber el estado para cualquier tiempo, dada una condición inicial.

Existen dos tipos principales de sistemas dinámicos: las ecuaciones diferenciales y los mapeos iterados (también conocidos como ecuaciones en diferencias). Las ecuaciones diferenciales describen la evolución del sistemas en tiempo continuo, mientras que los mapeos iterados tratan con problemas donde el tiempo es discreto.

En este trabajo se hará uso de sistemas dinámicos representados por mapeos iterados, el empleo de estos ha mostrado su importancia en distintos ámbitos:

- Como herramienta para el análisis de ecuaciones diferenciales.  
Como ejemplo prototípico véase el mapeo usado por Henri Poincaré [4], en el cual se demuestra la existencia de una solución periódica en el péndulo.
- Como modelo de fenómenos naturales.  
En algunas ocasiones, al intentar modelar el comportamiento de ciertos hechos que suceden a nuestro alrededor, es conveniente considerar al tiempo como una variable discreta, como es el caso en electrónica digital [10, 28].
- Como ejemplos simples de caos. Los mapeos son interesantes, por sí mismos, como laboratorios matemáticos para la generación de caos [8, 29].

El propósito de este capítulo es establecer de manera formal las definiciones y las propiedades principales de los sistemas dinámicos discretos así como las técnicas para analizarlos.

## 2.2. Mapeos unidimensionales

**Definición 2.1.** [30] Sea un mapeo

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

donde,  $\mathbb{R}$  es el conjunto de los números reales. Se define la **órbita**  $O(x_0)$  de un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  como el conjunto de puntos

$$O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots\}.$$

tal que,  $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ ,  $f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$ ,  $\dots$ , etc.

Si se establece  $x(n) := f^n(x_0)$ , entonces se representa la ecuación en diferencias de primer orden o unidimensional como:

$$x(n+1) = f(x(n)). \quad (2.1)$$

tal que  $x(0) = x_0$ .

En biología, en un colectivo animal por ejemplo,  $x(n)$  representaría el tamaño de la población en una generación  $n$ . La Ecuación (2.1) podría servir como un modelo poblacional, la cual estipula que el tamaño  $x(n+1)$  de una población en la generación  $n+1$  está relacionada con el tamaño  $x(n)$  de la población en la generación anterior  $n$  por medio del mapeo  $f$ .

**Ejemplo 2.1. El mapeo logístico** [31].

Sea  $x(n)$  el tamaño de la población de una especie para un tiempo  $n$  y  $\rho$  la tasa de crecimiento de la población de una generación a otra. Un modelo matemático que puede describir de manera simple el tamaño de la población es el siguiente:

$$x(n+1) = \rho x(n), \quad \rho > 0. \quad (2.2)$$

Donde la población inicial es:  $x(0) = x_0$ , la Ecuación (2.2) tiene como solución

$$x(n) = \rho^n x_0. \quad (2.3)$$

Si  $\rho > 1$ , el tamaño de la población  $x(n)$  crece y tiende a infinito. Si  $\rho = 1$ , se tiene la solución  $x(n) = x_0$ , es decir se mantiene la misma población con la que se tenía al inicio. Si  $\rho < 1$ , la población tiende a la extinción.

### 2.2.1. Puntos fijos

Dentro del conjunto de órbitas, existen elementos de gran importancia para analizar el comportamiento que tendrá el mapeo conforme este se itera: las órbitas que son de un solo elemento. Dichos elementos son llamados puntos fijos o puntos de equilibrio.

Tomando en cuenta de nuevo la ecuación en diferencias

$$x(n + 1) = f(x(n)). \quad (2.4)$$

Se tiene la siguiente definición.

**Definición 2.2. Puntos fijos [32]**

Un punto  $x^*$ , es un punto fijo del mapeo  $f$  o punto de equilibrio de la Ecuación (2.4) si

$$f(x^*) = x^*.$$

**Ejemplo 2.2. [31]**

Considere el mapeo logístico  $f(x) = rx(1 - x)$ , donde

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 4.$$

A continuación se encontrarán los puntos fijos.

Los puntos fijos deben cumplir con la ecuación:  $f(x^*) = x^*$ , por lo que en este ejemplo se tiene que satisfacer:

$$f(x^*) = rx^*(1 - x^*) = x^*,$$

al igualar a cero se consigue

$$rx^*(1 - x^*) - x^* = 0,$$

$$x^*(r(1 - x^*) - 1) = 0.$$

Lo que da como resultado las soluciones

$$x^* = 0$$

$$x^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Así el origen es un punto fijo para todos los valores de  $r$ , mientras que para:

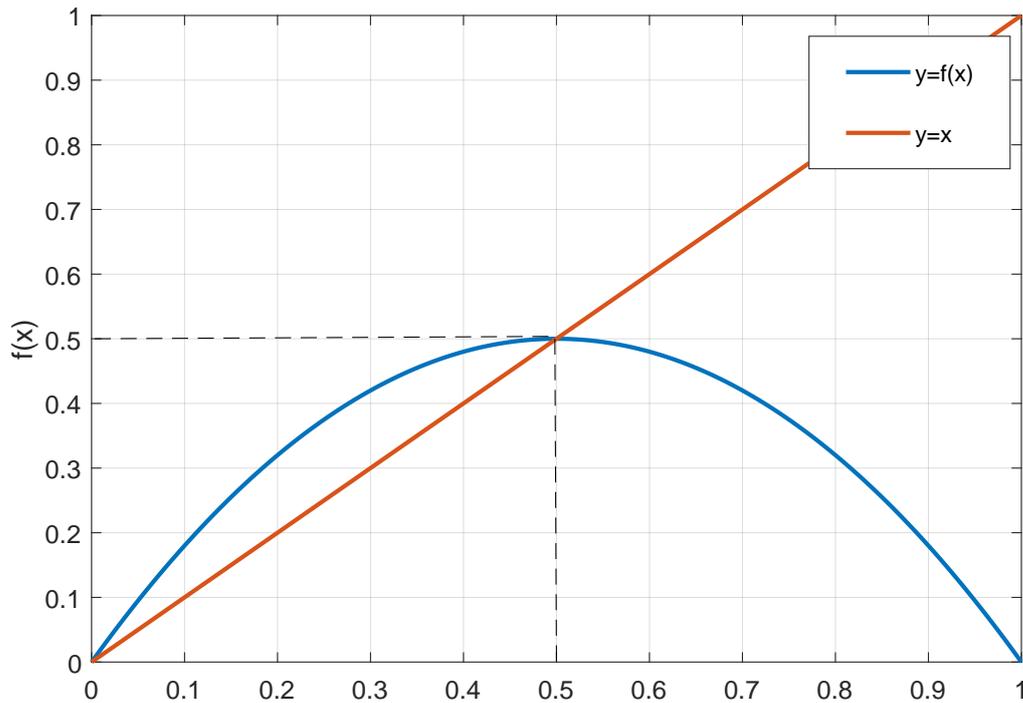
$$x^* = 1 - \frac{1}{r},$$

este será punto fijo siempre y cuando  $0 \leq x^* \leq 1$ , lo que se asegura solo si,  $r \geq 1$ .

Otra manera de encontrar puntos fijos es *geoméricamente*, esto se realiza localizando la intersección de la gráfica del mapeo  $f$  con la línea diagonal  $y = x$ . En el Ejemplo 2.3, se toma el mapeo logístico;  $f(x) = 2x(1 - x)$ , el cual permite visualizar este concepto.

**Ejemplo 2.3. [31]**

La Figura 2.1 muestra que, para el mapeo  $f(x) = 2x(1 - x)$ , se tiene un punto fijo en  $x^* = \frac{1}{2}$ .



**Figura 2.1:** Punto fijo de  $f(x) = 2x(1 - x)$ .

Existen elementos, que son similares a los puntos fijos, los llamados puntos eventualmente fijos, que, como su nombre lo indica, son un conjunto de puntos que después de un cierto número finito de iteraciones su dinámica permanece inalterable, es decir llegan a un punto fijo.

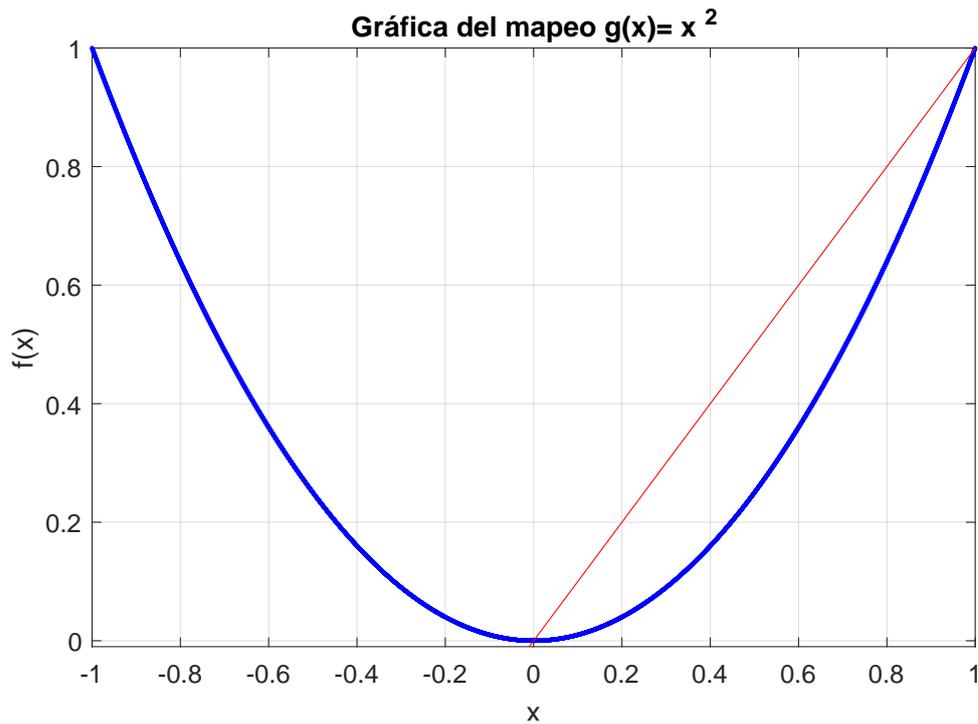
**Definición 2.3.** [31]. Un punto  $x$  se dice que es eventualmente fijo del mapeo  $f$ , si existe un entero positivo  $k$  y un punto fijo  $x^*$  de  $f$  tal que,  $f^k(x) = x^*$ , pero  $f^{k-1}(x) \neq x^*$ .

**Ejemplo 2.4.** [31]

Sea el mapeo  $g(x) = x^2$ , si se evalúa el punto  $x_0 = -1$  en  $g$ , se tiene

$$g(-1) = (-1)^2 = 1,$$

como  $g(1) = 1^2 = 1$ , se concluye que el punto  $x^* = 1$  es punto fijo del mapeo  $g$ , mientras que,  $x = -1$  es un punto eventualmente fijo. La Figura 2.2 muestra gráficamente la localización de ambos puntos



**Figura 2.2:** Punto fijo de  $g(x) = x^2$  en 1 y eventualmente fijo en -1.

**Ejemplo 2.5.** [31]

Uno de los mapeos más utilizados para ejemplificar muchas de las propiedades que poseen los sistemas discretos es el mapeo tienda de campaña, el cual se define mediante la función  $T$  como sigue:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Para este mapeo se tienen los puntos fijos:

$$x_1^* = 0 \text{ y } x_2^* = \frac{2}{3}.$$

Al evaluar  $x = \frac{1}{4}$  en  $T$ , se tiene

$$T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

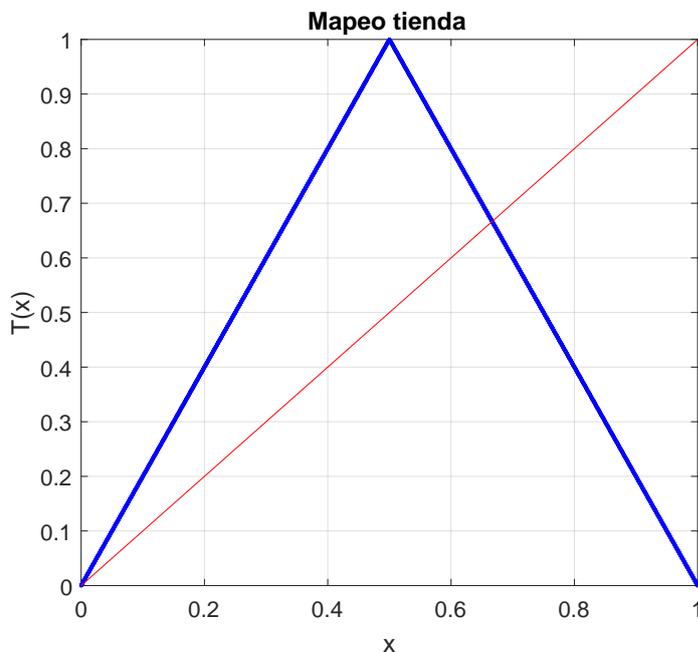
$$T^2\left(\frac{1}{4}\right) = T\left(T\left(\frac{1}{4}\right)\right) = T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$T^3\left(\frac{1}{4}\right) = T\left(T\left(T\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right) = T^2\left(\frac{1}{2}\right) = T(1) = 0$$

$$T^4\left(\frac{1}{4}\right) = \dots T(0) = 0,$$

Como  $x^* = 0$  es un punto fijo del mapeo, de la definición 2.3, se concluye que  $x = \frac{1}{4}$  es un punto eventualmente fijo.

La Figura 2.3, muestra gráficamente la localización de los puntos fijos del mapeo  $T$ .



**Figura 2.3:** Puntos fijos del mapeo tienda de campaña.

Vistos los ejemplos anteriores, surge una pregunta interesante: bajo qué condiciones se puede garantizar la existencia de puntos fijos para un mapeo unidimensional? El Teorema 2.1 da respuesta a esta cuestión.

**Teorema 2.1.** [32]

Sea  $f : I \rightarrow I$  un mapeo continuo, donde  $I = [a, b]$  es un intervalo cerrado en  $\mathbb{R}$ . Entonces el mapeo  $f$  tiene un punto fijo.

*Demostración.* Se define  $g(x) = f(x) - x$ . Como  $g$  es una diferencia de mapeos continuos, también es un mapeo continuo. Si  $f(a) = a$  o  $f(b) = b$ , la prueba está terminada. Así que suponga que este no es el caso, es decir,  $f(a) \neq a$  y  $f(b) \neq b$ . Entonces  $f(a) > a$  y  $f(b) < b$ . Consecuentemente,  $g(a) > 0$  y  $g(b) < 0$ . Por el teorema del valor medio, existe un punto  $c \in (0, 1)$  tal que  $g(c) = 0$ . Lo que implica que  $f(c) = c$ , por lo tanto  $c$  es un punto fijo de  $f$ .  $\square$

## 2.2.2. Órbitas periódicas

Como ya se citó, existen ciertos conjuntos importantes del espacio  $\mathbb{R}$  que ayudan al análisis de la dinámica de algún sistema representado por un mapeo. Las órbitas que se componen de puntos fijos son uno de ellos. Otros conjuntos destacables son las órbitas periódicas.

**Definición 2.4.** [32] *Un punto  $\bar{x}$  es periódico si  $f^n(\bar{x}) = \bar{x}$  para algún entero  $n > 0$ . Al menor  $n$  que cumple esta propiedad se le llama el periodo primo de la órbita. Así, una órbita periódica de un punto de periodo primo  $n$  es el conjunto*

$$O(\bar{x}) = \{\bar{x}, f(\bar{x}), f^2(\bar{x}), \dots, f^{n-1}(\bar{x})\}.$$

*Y se le denomina un  $n$  ciclo.*

Resaltar que de la Definición 2.4, es posible concluir que un punto es de periodo primo  $k$  si se cumple la ecuación

$$f^k(\bar{x}) = \bar{x} \quad (2.5)$$

Es decir es un punto fijo del mapeo  $f^k$ .

### Ejemplo 2.6. [30]

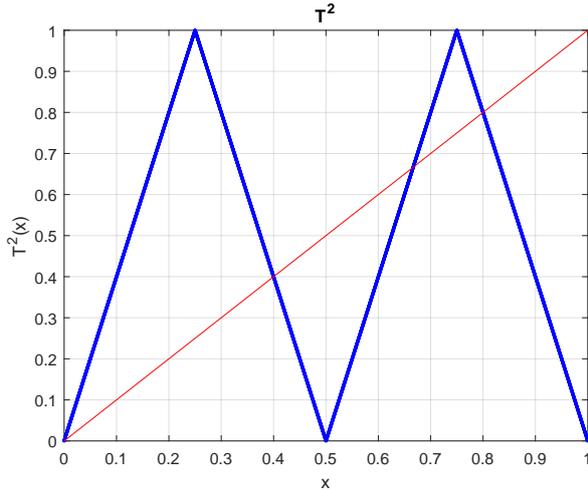
*Retomemos el mapeo tienda campaña del Ejemplo 2.5. A continuación se calcularán todas las órbitas periódicas de 2-ciclos y 3-ciclos. Para determinar los ciclos de periodo dos, se estima  $T^2$*

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < \frac{1}{4}; \\ 2(1 - 2x), & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}; \\ 4(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}; \\ 4(1 - x), & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

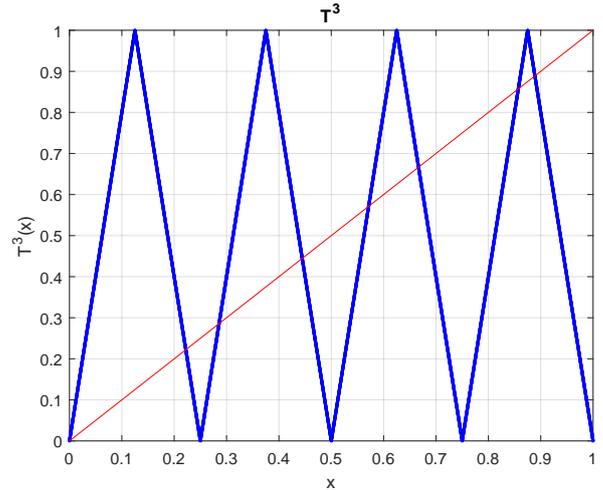
*Si se resuelve la ecuación  $T^2(x) = x$ , se encontrarán todos los puntos fijos para  $T^2$ . Así cuando*

*$0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ , se tiene la ecuación  $4x - x = 0$ , cuya única solución es  $x = 0$ . Procediendo de la misma forma en el resto de las regiones del dominio, se encuentra que los puntos fijos para  $T^2$  es el conjunto:  $\{0, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\}$ . Como se vio en el Ejemplo 2.5, los puntos:  $0$  y  $\frac{2}{3}$  son puntos fijos para  $T$ , por lo tanto el único 2-ciclo se compone de los elementos:  $\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$ .*

*Un análisis gráfico como el que se presenta en la Figura 2.4a permite verificar la localización de los puntos fijos para  $T^2$ . De igual manera, en la Figura 2.4b se observan 8 puntos existentes para  $T^3$ . Como existen dos puntos fijos para  $T$ , entonces quedan en total 6 puntos fijos, por lo tanto hay dos ciclos de periodo 3.*



(a)  $T^2$  posee 2 puntos fijos.



(b)  $T^3$  tiene 8 puntos fijos.

Figura 2.4: Órbitas de periodo dos y tres del mapeo tienda.

### 2.2.3. Órbitas eventualmente periódicas

Al igual que hay puntos eventualmente fijos, existe el concepto de puntos eventualmente periódicos, los cuales se definen como

**Definición 2.5.** [31] Sea  $\bar{x}$  un elemento del mapeo  $f$ , entonces  $\bar{x}$  es un punto eventualmente periódico de  $f$ , si existe un número  $m \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $f^m(\bar{x})$  es un punto periódico de  $f$ , esto es,  $\bar{x}$  es eventualmente periódico si  $f^{k+m}(\bar{x}) = f^m(\bar{x})$  para toda  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

**Ejemplo 2.7.** [31] Sea el mapeo  $g(x) = x^2 - 1$ , si se evalúa el punto  $x_0 = \sqrt{2}$  en  $g$  se tiene

$$\begin{aligned} g(\sqrt{2}) &= \sqrt{2}^2 - 1 = 1, \\ g^2(\sqrt{2}) &= g(1) = 1^2 - 1 = 0, \\ g^3(\sqrt{2}) &= g(0) = 0^2 - 1 = -1. \end{aligned}$$

Al evaluar el punto  $x_0 = -1$  en  $g$  se tiene  $g(-1) = -1^2 - 1 = 0$  y al calcular  $g(0) = 0^2 - 1 = -1$  como  $g^3(\sqrt{2}) = 0$ , por lo que de la Definición 2.5, se concluye que el punto  $x_0 = \sqrt{2}$  es un punto eventualmente periódico, pues converge al ciclo de periodo 2;  $P_2 = \{0, -1\}$ .

## 2.3. Estabilidad

Uno de los objetivos principales que se estudia en teoría de los sistemas dinámicos discretos, es el estudio del comportamiento de las órbitas cercanas a los puntos fijos. Al estudio de este comportamiento se le conoce como **la teoría de estabilidad**, la cuál será discutida de manera resumida en esta sección.

**Definición 2.6.** [40] Sea  $f : I \rightarrow I$  un mapeo y  $x^*$  un punto fijo de  $f$ , donde  $I$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ , entonces

1.  $x^*$  es un punto fijo **estable**, si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|x_0 - x^*| < \delta$  implica que  $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  y para todo  $x \in I$ . Si esto no se cumple, el punto  $x^*$  es llamado **inestable**.
2.  $x^*$  es un punto fijo **atractivo**, si existe  $\eta > 0$  tal que  $|x_0 - x^*| < \eta$  implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*.$$

3.  $x^*$  es **asintóticamente estable** si cumple a la vez ser estable y atractivo. Si se cumple (2) cuando  $\eta \rightarrow \infty$ , entonces  $x^*$  es **asintóticamente, globalmente, estable**.

### 2.3.1. Criterios de estabilidad

En la mayoría de los casos el uso de la Definición 2.6 es poco útil para determinar la estabilidad o inestabilidad de los puntos fijos, es por ello que se han desarrollado criterios equivalentes que permiten establecer, al menos de manera local, la estabilidad de dichos puntos. Los puntos fijos de un mapeo se dividen: hiperbólicos y no hiperbólicos. Un punto de un mapeo  $f$  es hiperbólico si  $|f'(x^*)| \neq 1$ . Si este no es el caso, el punto fijo  $x^*$  se denomina no hiperbólico o neutro.

#### Puntos fijos hiperbólicos

Los teoremas enunciados a continuación permiten establecer criterios locales de estabilidad para puntos fijos hiperbólicos.

**Teorema 2.2.** [30]

Sea  $x^*$  un punto fijo hiperbólico del mapeo  $f$ , donde  $f$  es continuamente diferenciable en  $x^*$ . Se tiene que

1. Si  $|f'(x^*)| < 1$ , entonces el punto fijo  $x^*$  es **asintóticamente estable**.
2. Si  $|f'(x^*)| > 1$ , entonces  $x^*$  es **inestable**.

**Ejemplo 2.8.** [31]

Sea  $Q_\lambda(x) = 1 - \lambda x^2$ , el mapeo cuadrático definido en el intervalo  $[-1, 1]$ , tal que  $\lambda \in (0, 2]$ . Enseguida se determinarán los puntos fijos, al igual que su estabilidad. Para encontrar los puntos fijos se procede a resolver la ecuación  $\lambda x^2 + x - 1 = 0$ , de la cual se obtienen las raíces:

$$x_1^* = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda}.$$

y

$$x_2^* = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Al calcular la primera derivada de  $Q_\lambda$ , se consigue

$$Q'_\lambda(x) = -2\lambda x.$$

Evaluando el punto fijo  $x_1^*$  en esta derivada, se tiene

$Q'_\lambda(x_1^*) = 2 \frac{-1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda} = -1 - \sqrt{1+4\lambda}$ ;  $|Q'_\lambda(x_1^*)| = 1 + \sqrt{1+4\lambda}$ ; como  $\lambda > 0$ , el término dentro de la raíz cuadrada está bien definido, por lo tanto  $|Q'_\lambda(x_1^*)| > 1$ . Si se emplea el Teorema 2.2, se concluye que  $x_1^*$  es un punto fijo hiperbólico.

Para el punto fijo  $x_2^*$  el valor absoluto de  $Q_\lambda$  en ese punto es

$|Q'_\lambda(x_2^*)| = -1 + \sqrt{1+4\lambda} < 1$  si y solo si  $\sqrt{1+4\lambda} < 2$  lo cual es cierto si  $\lambda < \frac{3}{4}$ . Si este es el caso, mediante el Teorema 2.2, se demuestra que el punto  $x_2^*$  es un punto fijo hiperbólico estable. Si  $\lambda > \frac{3}{4}$ , entonces  $|Q'_\lambda(x_2^*)| > 1$ , por lo tanto  $x_2^*$  es un punto fijo hiperbólico inestable.

Finalmente, si  $\lambda = \frac{3}{4}$  entonces  $|Q'_\lambda(x_2^*)| = 1$  y se tiene un punto fijo no hiperbólico o punto neutro, por lo tanto en este caso el Teorema 2.2 no se puede aplicar para determinar la estabilidad del punto fijo  $x_2^*$ .

### Puntos fijos no hiperbólicos

Como se pudo constatar en el Ejemplo 2.8 para el valor de  $\lambda = \frac{3}{4}$ , se tenía un punto fijo no hiperbólico. Cuando se presentan este tipo de situaciones y bajo ciertas condiciones, el Teorema 2.3 permite encontrar la estabilidad de un punto fijo no hiperbólico.

#### **Teorema 2.3.** [30]

Sea  $x^*$  un punto fijo del mapeo  $f$  tal que  $f'(x^*) = 1$ . Si la tercer derivada  $f'''(x^*) \neq 0$  y es continua, entonces las siguientes proposiciones serán válidas

1. Si  $f''(x^*) \neq 0$ , entonces  $x^*$  es punto fijo inestable.
2. Si  $f''(x^*) = 0$  y  $f'''(x^*) > 0$ , entonces  $x^*$  es inestable.
3. Si  $f''(x^*) = 0$  y  $f'''(x^*) < 0$ , entonces  $x^*$  es un punto fijo asintóticamente estable.

En particular, en el Ejemplo 2.8, si se toma  $\lambda = \frac{3}{4}$ , se tiene

$$Q''_\lambda(x_2^*) = -2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{2},$$

como  $-\frac{3}{2} \neq 0$ , al emplear el Teorema 2.3, se concluye que el punto fijo  $x_2^*$  es inestable.

### 2.3.2. Estabilidad de órbitas periódicas

En esta sección se procederá a dar los criterios para encontrar la estabilidad de órbitas periódicas.

**Definición 2.7.** [30] Sea  $\bar{x}$  un punto periódico de  $f$ , de periodo primo  $m$ . En consecuencia

1.  $\bar{x}$  es estable si es punto fijo estable de  $f^m$ .
2.  $\bar{x}$  es asintóticamente estable si y solo si es un punto asintóticamente estable de  $f^m$ .
3.  $\bar{x}$  es inestable si es un punto fijo inestable de  $f^m$ .

Así, si se desea determinar la estabilidad de soluciones periódicas de un sistema dinámico discreto representado por ecuaciones en diferencias de la forma

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (2.6)$$

basta estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación en diferencias

$$y(n+1) = g(y(n)), \quad (2.7)$$

donde  $g = f^m$ .

El Teorema 2.4 proporciona un importante criterio para identificar la estabilidad de los puntos periódicos de un mapeo  $f$  dado.

**Teorema 2.4.** [31]

Sea  $O(\bar{x}) = \{\bar{x}, f(\bar{x}), f^2(\bar{x}), \dots, f^{n-1}(\bar{x})\}$ , la órbita del punto  $\bar{x}$  con periodo primo  $n$ , donde  $f$  es un mapeo continuamente diferenciable en  $\bar{x}$ . Entonces lo siguiente es cierto:

1.  $\bar{x}$  es asintóticamente estable si

$$|f'(\bar{x}) f'(f(\bar{x})) \dots f'(f^{n-1}(\bar{x}))| < 1.$$

2.  $\bar{x}$  es inestable si

$$|f'(\bar{x}) f'(f(\bar{x})) \dots f'(f^{n-1}(\bar{x}))| > 1.$$

**Ejemplo 2.9.** Volvamos a considerar el mapeo tienda definido en el Ejemplo 2.5, el cual puede ser reescrito como

$$T(x) = 1 - 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|.$$

En el Ejemplo 2.6 se encontraron los puntos fijos:

$$x_1^* = 0 \text{ y } x_2^* = \frac{2}{3}.$$

Derivando  $T$ , se tiene

$$|T'| = 2.$$

Por lo tanto ambos puntos fijos son inestables. En el mismo ejemplo se mostró que el conjunto:  $p_2 = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$ , forma la única órbita de periodo dos. Y como  $|T'(\frac{2}{5}) T'(\frac{4}{5})| = 16 > 1$ , se puede concluir por medio del Teorema 2.3, que esta órbita periódica es inestable.

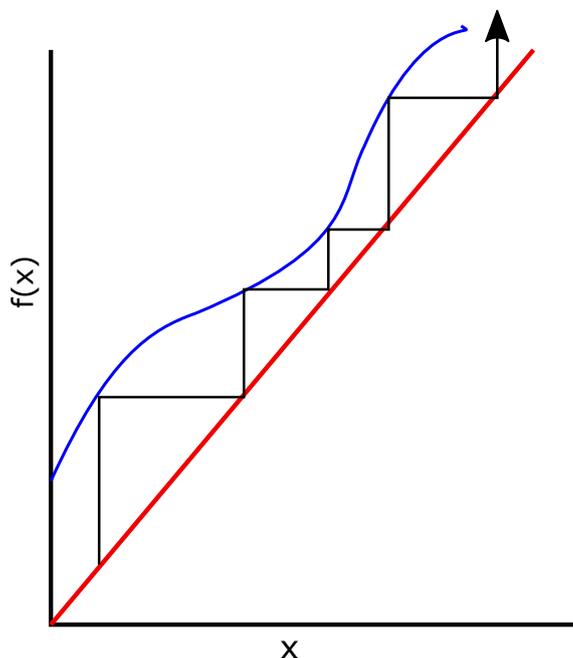
### 2.3.3. Análisis gráfico

En esta sección se explicará una herramienta muy fructífera, la cual permite ver de manera gráfica las iteraciones que se hacen sobre un punto inicial  $x_0$ . Además sirve para determinar globalmente la estabilidad de puntos fijos y órbitas periódicas, la que a través del análisis empleado en las secciones anteriores era imposible saber. Este método gráfico iterativo recibe el nombre de diagrama cobweb. Para emplearlo, realice el siguiente procedimiento:

En el mismo plano  $x$ - $f(x)$ , trace la gráfica de  $y = f(x)$ , así como la línea diagonal  $y = x$ . Para encontrar la órbita de  $x_0$ , comience en un punto inicial  $x_0$ . Desde ahí, muévase verticalmente hasta tocar la gráfica de  $f$  en  $(x_0, f(x_0))$ , a partir de aquí, trasládese horizontalmente con el fin de intersectar a la línea  $y = x$ , en  $(f(x_0), f(x_0))$ , con lo cual se determina el punto  $f(x_0)$  en el eje  $x$ .

Para encontrar  $f^2(x_0)$ , muévase de nuevo de manera vertical, hasta llegar a la gráfica de  $f$  en  $(f(x_0), f^2(x_0))$ , desde el inicio de esta coordenada, muévase horizontalmente hasta intersectar una vez más a la línea  $y = x$ , pero ahora en  $(f^2(x_0), f^2(x_0))$ . Al repetir este proceso, se obtendrán todos los puntos que forman parte de la órbita de  $x_0$ , es decir el conjunto,  $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$ .

La Figura 2.5 ejemplifica el proceso del análisis gráfico, que como se mencionó al inicio de la sección, ayuda a describir el comportamiento dinámico del sistema.



**Figura 2.5:** Diagrama cobweb.

El Ejemplo 2.10 permite dar pie al uso del análisis gráfico, pues como se podrá ver el criterio de estabilidad para puntos fijos no será útil para encontrar estabilidad global.

**Ejemplo 2.10.** [32]

Considere el mapeo  $g(x) = \text{sen}(x)$ . La ecuación:  $\text{sen}(x) = x$ , es cierta cuando  $x = 0$ , por lo tanto en  $x = 0$  hay un punto fijo. La derivada de  $g(x)$  es

$$g'(x) = \cos(x) \therefore |g'(0)| = 1.$$

Por lo que  $x^* = 0$  es un punto fijo no hiperbólico. Como consecuencia el criterio de estabilidad del Teorema 2.2 no puede ser empleado. Sin embargo, el diagrama cobweb de la Figura 2.6 muestra que el punto  $x^* = 0$  es localmente estable.

Ahora la estabilidad global del punto  $x^* = 0$  será cierta si se satisface que  $x_n \rightarrow 0$  para todas las órbitas del mapeo  $g$ . La desigualdad  $|\text{sen}x| \leq 1$  conlleva a que para cualquier punto  $x_0$ , este sea iterado a la primera vez al intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ . La Figura 2.6 refleja el diagrama cobweb en dicho intervalo, como se puede observar dentro de este la convergencia está asegurada.

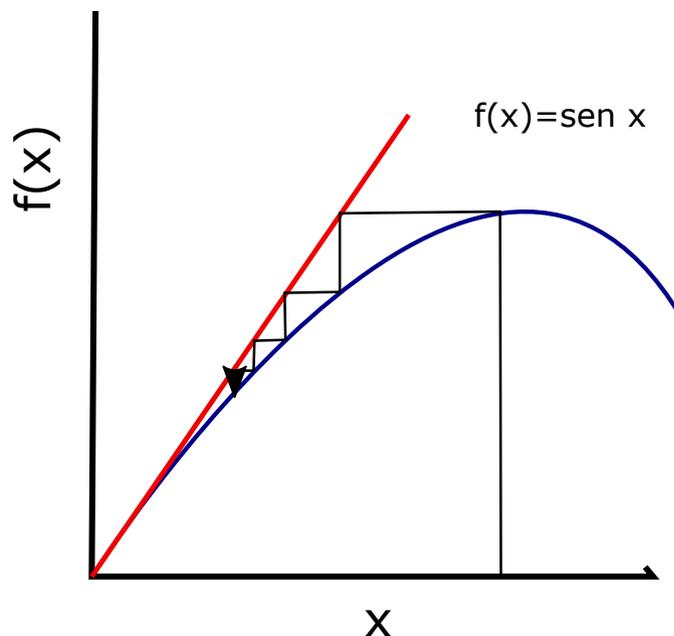


Figura 2.6: Diagrama cobweb del mapeo  $\text{sen } x$ .

## 2.4. Mapeos racionales

En esta sección se abordarán mapeos racionales de una variable, es decir, se considerarán aquellos definidos como  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y que son expresados de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios y  $x$  la variable. De tal manera que se tenga una ecuación en diferencias unidimensional

$$x(n+1) = f(x_n) = \frac{P(x_n)}{Q(x_n)}. \quad (2.8)$$

En general algunas propiedades de los mapeos racionales,  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_mx^m + \dots + a_1x + a_0}{b_nx^n + \dots + b_1x + b_0}$  son [34]:

1. Todo mapeo racional es de clase  $C^\infty$  en un dominio que no incluya las raíces del polinomio  $Q(x)$ .
2. Un mapeo racional puede tener más de una asíntota vertical, pero solo una que sea horizontal u oblicua (es decir que si tiene asíntota horizontal entonces no puede tener asíntota oblicua, y viceversa).
3. La recta de ecuación  $y = \eta x + \beta, \eta \neq 0$ , será una asíntota oblicua si:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (\eta x + \beta)] = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (\eta x + \beta)] = 0.$$

Donde

$$\eta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \eta x].$$

4. Si  $m < n$ , hay una asíntota horizontal de ecuación:  $y = 0$ . (donde  $m$  y  $n$  son los grados de los polinomios  $P$  y  $Q$  respectivamente).
5. Si  $m = n$ , hay una asíntota horizontal de ecuación:  $y = \frac{a_m}{b_n}$  (el cociente de los coeficientes principales).
6. Si  $m > n$ , no hay asíntota horizontal; si el grado del numerador es exactamente uno más que el denominador, hay una asíntota oblicua.

## 2.5. Mapeos lineales

Los mapeos más simples con los que se puede tratar son los mapeos lineales, análogamente las ecuaciones en diferencias más sencillas, son las ecuaciones en diferencias lineales. Considere el mapeo lineal unidimensional

$$f(x) = ax. \quad (2.9)$$

Donde  $a, x \in \mathbb{R}$ .

Entonces

$$f^n(x) = a^n x.$$

Esto es, la solución a la ecuación en diferencias asociada al mapeo lineal

$$x(n+1) = ax(n), \quad x(0) = x_0, \quad (2.10)$$

es

$$x(n) = a^n x_0.$$

Aunado a esto, se pueden obtener las siguientes conclusiones acerca del comportamiento de las órbitas del mapeo  $f$  o de las soluciones de la Ecuación (2.10):

1. Si  $|a| < 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x_0)| = 0,$$

si se ve como solución de la ecuación en diferencias, sería:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)| = 0.$$

2. Si  $|a| > 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x_0)| = \infty,$$

si se considera como solución de la ecuación en diferencias, sería:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)| = \infty.$$

siempre que  $x_0 \neq 0$ .

3. (a) Si  $a = 1$ , por lo tanto se obtiene el mapeo identidad, donde cada punto es un punto fijo de  $f$ .

(b) Si  $a = -1$ , entonces

$$f^n(x_0) = \begin{cases} x_0; & \text{si } n \text{ es par.} \\ -x_0; & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si ahora se toma el mapeo afín  $f(x) = ax + b$ , al iterarlo sucesivamente se obtiene

$$f^2(x) = a^2x + ab + b.$$

$$f^3(x) = a^3x + a^2b + ab + b.$$

$\vdots$

$$f^n(x) = a^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} b.$$

Si se tiene la ecuación en diferencias:

$$x(n+1) = ax(n) + b, \quad x(0) = x_0, \quad (2.11)$$

la solución es:

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-j-1} b.$$

$$x(n) = a^n x_0 + b \left( \frac{a^n - 1}{a - 1} \right), \text{ si } a \neq 1. \quad (2.12)$$

$$x(n) = \left( x_0 + \frac{b}{a - 1} \right) a^n + \frac{b}{1 - a}, \text{ si } a \neq 1. \quad (2.13)$$

AL analizar la Ecuación 2.13, se llega a:

1. Si  $|a| < 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = \frac{b}{1 - a},$$

i.e.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \frac{b}{1 - a}.$$

2. Si  $|a| > 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = \pm\infty,$$

de acuerdo a si el signo de  $x_0 + \frac{b}{a - 1}$  es positivo o negativo.

3. (a) Si  $a = 1$ , entonces  $f^n(x_0) = x_0 + nb$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = \pm\infty,$$

dependiendo de si el signo de  $x_0 + nb$  es positivo o negativo respectivamente.

(b) Si  $a = -1$ , entonces

$$f^n(x_0) = (-1)^n x_0 + \begin{cases} b; & \text{si } n \text{ es impar.} \\ 0; & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

## 2.6. Bifurcaciones

### 2.6.1. Bifurcación nodo-silla

Una bifurcación surge en una familia monoparamétrica de mapeos cuando hay un cambio de estabilidad ya sea en un punto fijo o en una órbita periódica, conforme un parámetro presente en el mapeo varía. Dentro de estas, destaca la bifurcación nodo-silla por su utilidad para predecir comportamientos caóticos.

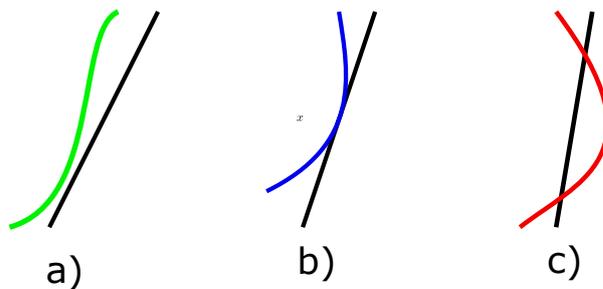
**Definición 2.8.** [31] Una familia monoparamétrica de mapeos  $f_\lambda$  presenta una bifurcación nodo-silla o bifurcación tangente en un parámetro  $\lambda_0$ , si existe un intervalo abierto  $I$  y un número real  $\varepsilon > 0$  tal que:

1. Para  $\lambda_0 - \varepsilon < \lambda < \lambda_0$ , se cumple que  $f_\lambda$  no tiene puntos fijos en el intervalo  $I$ .
2. Para  $\lambda = \lambda_0$ ,  $f_\lambda$  tiene un solo punto fijo en el intervalo  $I$  y este punto fijo es neutral.
3. Para  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$ ,  $f_\lambda$  tiene dos puntos fijos en  $I$ , uno de naturaleza repulsiva y el otro atractivo.

Si bien es cierto que en esta definición se usaron puntos fijos para describir la bifurcación, también se puede aplicar para puntos periódicos, simplemente hay que remplazar  $f_\lambda$  por  $f_\lambda^n$  de tal manera que para el mapeo  $f_\lambda^n$  se tengan o no puntos fijos al variar  $\lambda$ , es decir, se puede aplicar la definición 2.8. Algunas características importantes que ayudan a determinar la existencia de una bifurcación nodo-silla son:

1. Comúnmente sucede cuando la gráfica del mapeo  $f_\lambda$  tiene una tangencial cuadrática con la diagonal en el punto  $(x_0, x_0)$ , es decir, se cumple  $f'_{\lambda_0}(x_0) = 1$  pero  $f''_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$ .
2. Gráficamente el mapeo  $f_{\lambda_0}$  exhibirá concavidad hacia arriba o hacia abajo.
3. Por último, la teoría de bifurcaciones es un estudio local, donde el principal interés se concentra en el cambio de la estructura periódica de un punto cerca del valor del parámetro  $\lambda_0$ .

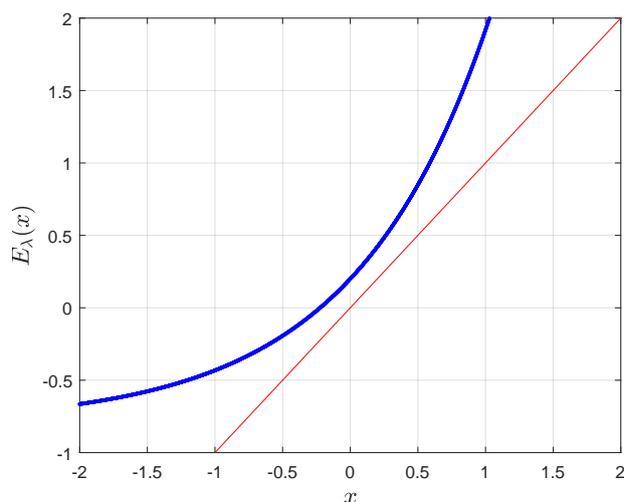
La Figura 2.7 muestra un comportamiento común cuando una bifurcación nodo-silla ocurre.



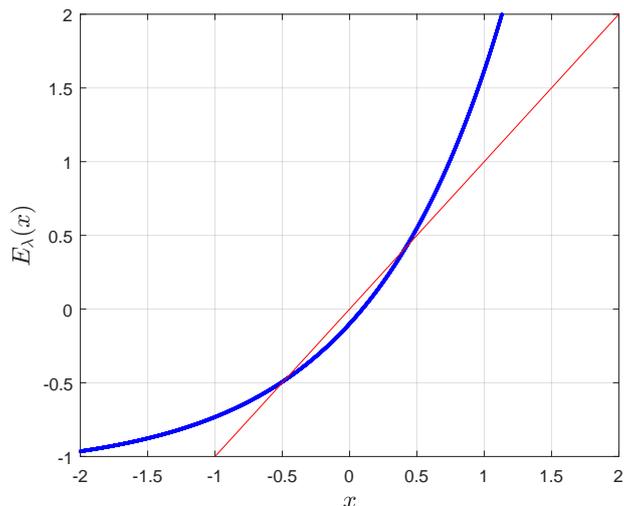
**Figura 2.7:** a)  $\lambda < \lambda_0$ , b)  $\lambda = \lambda_0$ , c)  $\lambda > \lambda_0$ .

**Ejemplo 2.11.** [31]

Sea la familia  $E_\lambda(x) = e^x + \lambda$ . Tal mapeo tiene una bifurcación nodo-silla cuando  $\lambda = -1$ . Para comprobar esto, primero observar que:  $E_{-1}(0) = 0$ ,  $E'_{-1}(0) = 1$  y  $E''_{-1}(0) = 1$ . La gráfica de  $E_\lambda$  mostrada en la Figura 2.8 exhibe que para  $\lambda < -1$  y  $\lambda > -1$  se presenta una bifurcación nodo-silla.



(a)  $\lambda < -1$ .



(b)  $\lambda > -1$ .

**Figura 2.8:** Bifurcación nodo-silla de la familia  $E_\lambda$ .

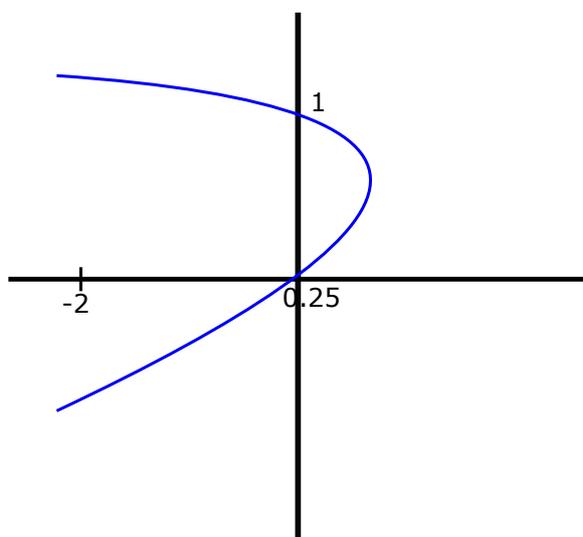
Existe otro recurso gráfico para comprender la forma en que se da una bifurcación: el diagrama de bifurcación, el cual es una gráfica del plano  $\lambda - x$  de los puntos fijos más relevantes y puntos periódicos como funciones de  $\lambda$ .

**Ejemplo 2.12.** [31]

Sea la familia cuadrática  $Q_c(x) = x^2 + c$ , considérese el valor de  $c = \frac{1}{4}$ . En este valor se presenta una bifurcación nodo-silla, pues para  $c > \frac{1}{4}$  no hay puntos fijos, mientras que si  $c < \frac{1}{4}$  se tienen dos puntos, que están dados por

$$p \pm(c) = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4c} \right).$$

Para realizar el diagrama de bifurcación se coloca el parámetro  $c$  en el eje horizontal del plano y en el eje vertical se sitúan los puntos fijos. En la Figura 2.9 se aprecia el diagrama de bifurcación de la familia  $Q_c$ .



**Figura 2.9:** Diagrama de bifurcación de  $Q_c(x) = x^2 + c$ .

### 2.6.2. Bifurcación de periodo doble

**Definición 2.9.** [32] *Considérese una familia monoparamétrica de mapeos  $f_\lambda$ , se presenta una bifurcación de periodo doble en el valor de parámetro  $\lambda = \lambda_0$ , si existe un intervalo abierto  $I$  y un número real  $\varepsilon > 0$  tal que:*

1. *Para todo  $\lambda$  en el intervalo  $[\lambda_0, -\varepsilon\lambda_0 + \varepsilon]$ , existe un único punto fijo  $p_\lambda$  en la familia  $f_\lambda$  y este pertenece al intervalo  $I$ .*
2. *Para  $\lambda_0 - \varepsilon < \lambda \leq \lambda_0$ , la familia de mapeos  $f_\lambda$  no tiene ciclos de periodo dos en  $I$  y  $p_\lambda$  es un punto fijo atractivo o repulsivo.*
3. *Para  $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon$ , la familia de mapeos  $f_\lambda$  presenta un único ciclo de periodo dos  $q_\lambda^1, q_\lambda^2$  en  $I$ , el cual puede ser atractivo o repulsivo. Mientras que el punto fijo  $p_\lambda$  es repulsivo o atractivo respectivamente.*
4. *Si  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  entonces  $q_\lambda^i \rightarrow p_{\lambda_0}$ .*

Dicho de otra manera, una bifurcación de periodo doble se identifica al notar lo siguiente:

1. Surge una bifurcación de periodo doble cuando al variar el valor del parámetro  $\lambda$ , el punto fijo pasa de ser atractivo a repulsivo. De manera simultanea aparece un ciclo atractivo de periodo dos, inexistente para un valor anterior a  $\lambda$ . El otro caso es que el punto fijo pase de ser repulsivo a atractivo y al mismo tiempo se presente por primera vez un ciclo repulsivo de periodo dos.
2. Los ciclos pueden atravesar una bifurcación de periodo dos, es decir un ciclo de periodo  $n$  producirá un ciclo de periodo  $2n$ .

**Ejemplo 2.13.** [31]

Tómese a la familia  $f_\lambda(x) = \lambda x - x^3$ . Si  $x = 0$ , entonces  $f_\lambda(0) = 0$ . Por lo tanto 0 es un punto fijo de la familia  $f_\lambda$ . Si  $-1 < \lambda < 1$ , resulta que  $f'_\lambda(0) = \lambda$ , por lo que en estos valores de  $\lambda$ , el punto fijo es atractivo. Si  $\lambda = -1$ , en consecuencia se tiene un punto fijo neutral. Si  $\lambda < -1$  el punto fijo es repulsivo.

Como  $f_\lambda(-x) = -\lambda x + x^3 = -(\lambda x - x^3) = -f_\lambda(x)$  para todo  $x$ ; en particular para  $x_0$ , si  $f_\lambda(x_0) = x_0$ , entonces  $f_\lambda^2(x_0) = x_0$ , ya que

$$f_\lambda^2(x_0) = f_\lambda(-x_0) = -f_\lambda(x_0) = x_0.$$

Por lo que basta resolver la ecuación  $f - \lambda(x) = -x$  para localizar todos los ciclos de periodo dos. Es decir, dar solución a

$$\lambda x - x^3 = -x.$$

Al hacer esto, se encuentran las raíces  $x = 0, \pm\sqrt{\lambda + 1}$ . Como el 0 es punto fijo, entonces las dos raíces restantes forman un ciclo de periodo primo dos. Si se observa el discriminante de la raíz, este tiene valores mayores o iguales a cero cuando  $\lambda > -1$ , además de ser un ciclo repulsivo. Por lo tanto en  $\lambda = -1$ , existe una bifurcación de periodo doble.

## 2.7. Caos

El estudio de la teoría del caos intenta proporcionar una respuesta satisfactoria respecto al comportamiento de sistemas dinámicos que tienen en común una extrema sensibilidad a la variación en las condiciones iniciales. Este tipo de comportamiento se aprecia en diferentes situaciones: dinámica de poblaciones, sistemas económicos, predicción del clima, etc. [35]. Justamente el meteorólogo y matemático Edward Lorenz [36] expuso uno de los ejemplos más importantes que han abordado esta problemática, el cual hasta el día de hoy ha ofrecido una gran riqueza en el análisis de sistemas dinámicos caóticos. Gracias a su investigación acerca de la atmósfera, determinó que a pesar de contar con un modelo determinista es imposible predecir la evolución del clima. Lorenz concluyó que esto se debe en esencia a la alta sensibilidad a las condiciones iniciales.

El objetivo principal de esta sección es definir el caos en sistemas dinámicos deterministas, específicamente para aquellos representados por mapeos. A lo largo del tiempo distintos autores [38] han brindado diferentes versiones de la definición de caos; en este trabajo se usarán dos de ellas: la que dio Robert L. Devaney [38] y caos usando los exponentes de Lyapunov [37].

### 2.7.1. Espacios métricos

El concepto de espacio métrico es otorgar una función que cuantifique la distancia entre puntos de un conjunto  $X$ . De manera formal se tiene la siguiente definición.

**Definición 2.10.** [39] Una métrica en un conjunto  $X$  es una función  $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}^+$  (llamada distancia), que cumple las siguientes propiedades:

1.  $d(x, y) \geq 0$  si  $x \neq y$ ;  $d(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , para todo  $z \in X$ .

Donde  $x, y \in X$ . Al par  $(X, d)$  se le conoce como espacio métrico.

**Ejemplo 2.14.** [39]

Sea el conjunto  $\mathbb{R}$ , se define  $d(x, y) = |y - x|$ , entonces  $(\mathbb{R}, d)$  es un espacio métrico. Para demostrar que esto es cierto basta ver que  $(X, d)$  cumple las tres propiedades dadas en la definición 2.10.

*Demostración.*

1.  $d(x, y) = |y - x| \geq 0$ . Esto es cierto ya que por las propiedades de valor absoluto se tiene  $|y - x| = y - x$  si  $y - x > 0$  o  $|y - x| = -(y - x)$  si  $y - x < 0$ . Ahora  $y = x$ , si y solo si  $|y - x| = y - x = 0$ .
2. El valor absoluto tiene la siguiente propiedad  $|x| = |-x|$ . Por lo tanto  $d(x, y) = |y - x| = |-(y - x)| = |x - y| = d(y, x)$ .
3. Usando la desigualdad del triangulo resulta  $d(x, y) = |y - z + z - x| \leq |y - z| + |z - x| = d(z, y) + d(x, z)$

□

De la mano de un espacio métrico se encuentra el concepto de vecindad abierta de un punto del espacio  $X$ .

**Definición 2.11.** [39] Sea  $x \in X$ , entonces una  $\epsilon$ -bola abierta  $B_\epsilon$  de  $x$  se define como:

$$B_\epsilon = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Un subconjunto  $G$  de  $X$  se dice que es abierto, si para cada  $x \in G$  existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta \subset G$ . En un espacio métrico se cumplen las siguientes propiedades:

1. La unión arbitraria de cualquier familia de abiertos es un conjunto abierto.
2. La intersección finita de abiertos es un conjunto abierto.

### 2.7.2. Densidad

**Definición 2.12.** [39] Un conjunto  $A$  se dice que posee la propiedad de densidad en el espacio  $X$ , si se cumple que para cualquier  $\epsilon > 0$ , cualquier bola  $B_\epsilon$  alrededor de un punto  $x$  contiene un punto de  $A$ .

En muchos casos resulta difícil usar la definición anterior para determinar si un subconjunto  $A$  de  $X$  tiene la propiedad de densidad, el Teorema 2.5 pone de manifiesto algunas equivalencias para decidir la densidad de un subconjunto  $A$ .

**Teorema 2.5.** [30]

Sea  $A$  un subconjunto de  $X$ , entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.  $A$  posee la propiedad de densidad en  $X$ .
2. Para cada  $x \in X$  y para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un elemento  $a \in A$  tal que  $d(x, a) < \varepsilon$ .
3. Para cada  $x \in X$  existe una sucesión  $\{a_n\}$  que pertenece a  $A$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$$

**Ejemplo 2.15.** [39]

El conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  posee la propiedad de densidad en los reales  $\mathbb{R}$ . Como el conjunto de los números reales es la unión disjunta de los racionales y los irracionales, basta demostrar que para cualquier irracional  $s$ , existe una sucesión de racionales que converge a  $s$ .

*Demostración.* Se escoge un número real arbitrario  $x$ . Si  $x$  es racional entonces la sucesión constante  $\{a_n\} = x$  es la indicada y la prueba esta termina. De lo contrario, si  $x$  es irracional, en consecuencia este se puede expresar como una expansión decimal infinita de la forma

$$x = a_n \dots a_0 . b_1 . b_2 . b_3 \dots$$

Donde los términos  $a_j$  y  $b_j$  pertenecen al conjunto de los números digitales  $\mathbb{D} = \{0, \dots, 9\}$ . Para algún  $j = 0, 1, 2, \dots$ , se establece el número

$$x_j = a_n \dots a_0 . b_1 \dots b_j.$$

Como  $x_j$  tiene una expansión decimal finita, entonces  $x_j$  es un número racional. Además se cuenta con que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x.$$

Y puesto que  $x$  se escogió como un número irracional arbitrario, se prueba que los números irracionales son densos en  $\mathbb{R}$ . □

### 2.7.3. Transitividad

**Definición 2.13.** [32] Sea  $f$  un mapeo en un espacio métrico  $(X, d)$ . Se dice que  $f$  es transitivo si para cualquier par de subconjuntos abiertos y no vacíos  $U$  y  $V$ , existe un entero positivo  $k$  tal que

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

El Teorema 2.6 brinda un criterio para establecer si un mapeo  $f$  tiene la propiedad de transitividad.

**Teorema 2.6.** [30]

Sea  $f : X \mapsto X$ . Entonces el mapeo  $f$  es transitivo si tiene una órbita que posee la propiedad de densidad. Además, si  $X$  es un intervalo cerrado en  $\mathbb{R}$ , entonces  $f$  es transitivo si y solo si tiene una órbita con la propiedad de densidad.

## 2.7.4. Sensibilidad a las condiciones iniciales y exponentes de Lyapunov

Recordar que una de las características más interesantes en el modelo meteorológico de Lorenz, es que el caos está estrechamente ligado a la sensibilidad de las condiciones iniciales; la siguiente definición da formalismo a este fenómeno observado.

**Definición 2.14.** [35] Sea  $f$  un mapeo en un espacio métrico  $X$ , se dice que  $f$  presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, si existe un  $\beta > 0$  tal que para cualquier  $x$ , y para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un punto  $y \in B_\varepsilon(x)$  y un entero positivo  $k$ , tal que se satisface que la distancia entre  $f^k(x)$  y  $f^k(y)$  es al menos  $\beta$ . Es decir

$$|f^k(x) - f^k(y)| \geq \beta.$$

Existen mapeos que tienen una expansión exponencial conforme estos son iterados. Esta característica puede ser definida por el **exponente de Lyapunov**  $\lambda$ . El cual mide el crecimiento en el error por iteración en un punto  $x$ , es decir si expresamos el error como

$$e_n = f^n(x_0 + \delta) - f^n(x_0),$$

entonces se define el error relativo como  $|\frac{e_n}{e_0}|$ . Por ejemplo, si se toma el mapeo  $f(x) = cx$  el error es:  $|\frac{e_n}{e_0}| = c^n$ . Si se obtiene el logaritmo a ambos lados de la igualdad y se divide entre  $n$ , resulta

$$\ln c = \frac{1}{n} \ln |\frac{e_n}{e_0}|.$$

Ahora, calculando el límite cuando  $\delta$  tiende a cero se consigue

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\frac{e_n}{e_0}| = \lim_{\delta \rightarrow 0} |\frac{f^n(x_0 + \delta) - f^n(x_0)}{\delta}| = |(f^n(x_0))'|.$$

De donde se desprende que

$$\ln c = \frac{1}{n} \ln |(f^n(x_0))'|.$$

El resultado anterior se puede generalizar para definir el exponente de Lyapunov.

**Definición 2.15.** [35] Sea  $f$  un mapeo diferenciable en el punto  $x_0$ , se define el exponente de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  como

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(f^n(x_0))'|. \quad (2.14)$$

De donde

$$\ln |(f^n(x_0))'| = \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x(k))|. \quad (2.15)$$

Al combinar las Ecuaciones (2.14) y (2.15) se calcula el exponente de Lyapunov como

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x(k))|. \quad (2.16)$$

**Ejemplo 2.16.** [30]

Para el mapeo tienda de campaña, definido a continuación se encontrará el exponente de Lyapunov.

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

**Solución.** Sea  $x_0$  un punto en el intervalo  $(0, 1)$ , entonces

$$T(x(k)) = \begin{cases} 2x(k), & \text{si } 0 \leq x(k) \leq \frac{1}{2}. \\ 2(1-x(k)), & \text{si } \frac{1}{2} < x(k) \leq 1. \end{cases}$$

En cualquier caso se tiene:  $|T'(x(k))| = 2$ . Utilizando la Ecuación (2.16), se calculó numéricamente el exponente de Lyapunov

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln 2 \approx 0.693.$$

Como  $0.693 > 0$ , entonces el mapeo tienda de campaña tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

### 2.7.5. Sistemas dinámicos caóticos

Las características recién enunciadas permiten caracterizar a un sistema dinámico para que presente caos en el sentido de Devaney. De manera formal se tiene la siguiente definición.

**Definición 2.16.** [38] Un mapeo  $f$  en un conjunto invariante  $J$ <sup>1</sup>, es caótico en el sentido de Devaney si

1.  $f|_J$  es transitivo.
2. El conjunto de puntos periódicos  $P$  tiene la propiedad de densidad en  $J$ .
3.  $f$  tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en  $J$ .

La definición de caos en el sentido de Devaney, es una de las más usadas para comprobar comportamiento caótico en sistemas dinámicos discretos, sin embargo existe otra definición muy útil, la cual considera al exponente de Lyapunov.

**Definición 2.17.** [37] Sea  $f$  un mapeo unidimensional en un conjunto invariante  $J$ , entonces el sistema dinámico definido por  $f$  es caótico en  $J$ , si presenta una órbita con un exponente de Lyapunov positivo,  $J$  es acotado y no existe ningún término estocástico en el sistema dinámico.

El ejemplo 2.17, muestra como el mapeo shift genera un sistema dinámico caótico en el sentido de Devaney.

---

<sup>1</sup>Un conjunto  $J \subset X$  es invariante bajo el mapeo  $f$  si  $f(J) \subset J$ .

**Ejemplo 2.17.** [31]

Sea  $\sigma : \Sigma \mapsto \Sigma$ , se define el mapeo shift como

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots).$$

Donde  $\Sigma$  es el espacio de sucesiones de dos símbolos, i.e

$$\Sigma = \{((s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j = 0 \text{ o } 1)\}.$$

y donde la distancia del espacio métrico  $(\Sigma, d)$  está dada por

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Entonces el mapeo shift  $\sigma$  es caótico.

*Demostración.* El primer paso es demostrar que el conjunto de todos los puntos periódicos es denso en  $\Sigma$ ; en otras palabras es necesario demostrar que para cualquier elemento  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma$ , existe un punto periódico arbitrariamente cercano.

Así, para todo  $\varepsilon > 0$ , tómesese un entero  $n$  tal que se cumpla  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Sea  $t_n$  el punto periódico

$$t_n = \left( s_0 s_1 s_2 \dots s_n \overline{(s_0 s_1 s_2 \dots s_n)} \right),$$

Comparando el punto periódico  $t_n$  con el punto  $s$  se constata que las primeras  $n + 1$  entradas son idénticas. Usando el Teorema de Proximidad [31], se sigue que

$$d(s, t_n) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Al escoger un  $\varepsilon$  arbitrario, se logró encontrar un punto periódico arbitrariamente cercano a cualquier punto de  $\Sigma$ . Por lo tanto el conjunto de órbitas periódicas es denso en  $\Sigma$ .

Para probar que el mapeo  $\sigma$  es transitivo se usará el Teorema 2.6, es decir se exhibirá un punto cuya órbita es un conjunto que posee la propiedad de densidad en  $\Sigma$ . Para esto, considere

$$s^* = \left( \underbrace{01}_{1 \text{ bloque}} \underbrace{0001 10 11}_{2 \text{ bloques}} \underbrace{000001}_{3 \text{ bloques}} \dots \underbrace{\dots}_{4 \text{ bloques}} \right).$$

Es decir,  $s^*$  es una sucesión equivalente a los posibles bloques de cero-uno (de tamaño uno, luego de tamaño dos y así sucesivamente). A continuación se verá que  $s^*$  es un punto cuya órbita es densa en  $\Sigma$ .

Para validar esta hipótesis tome un punto arbitrario  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma$ , así como también un  $\varepsilon > 0$  cualquiera, enseguida elija un entero  $n$  que cumpla  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Puesto que la sucesión que forma  $s^*$  se compone de todos los posibles bloques de tamaño  $k$ , con  $k = 1, 2, \dots$ ,

entonces en dicha expresión debe existir un bloque de tamaño  $n + 1$ , conformado por los dígitos  $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$ . Suponga que la entrada  $s_0$  se localiza en el  $j$ -ésimo lugar en la sucesión. Si se aplica  $j$  veces el mapeo shift a  $s^*$ , en consecuencia los primeros  $n + 1$  términos de  $\sigma^j(s^*)$  son justamente  $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$ . Si se emplea de nueva cuenta el Teorema de Proximidad se tiene que

$$d(\sigma^j(s^*), s) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Por lo que en el mapeo shift existe una órbita que posee la propiedad de densidad, consecuentemente es transitivo. Por último, para verificar la propiedad de sensibilidad a las condiciones iniciales, escoja  $\beta = 1$  seleccione de manera arbitraria algún  $s \in \Sigma$  y  $\varepsilon > 0$ . Luego tome algún entero  $n$  que satisfaga  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , suponga que para un  $t \in \Sigma$ , se cumple  $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ , con  $t \neq s$ . Ahora por el Teorema de Proximidad se cumple que  $t_i = s_i$  para  $i = 1, 2, \dots$ . Pero como  $t \neq s$ , existe  $k > n$ , tal que  $t_k \neq s_k$ , entonces  $|s_k - t_k| = 1$ .

Por último, considere las sucesiones  $\sigma^k(s)$  y  $\sigma^k(t)$ . Por lo consiguiente las primeras entradas de cada una de las sucesiones son distintas, por lo que

$$d(\sigma^k(s), \sigma^k(t)) \geq \frac{|s_k - t_k|}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0}{2^i} = 1.$$

Por lo tanto, se tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. Al cumplirse las tres propiedades de caos, se concluye que el mapeo shift  $\sigma$  es caótico en el sentido de Devaney.  $\square$

# Capítulo 3

## Mapeos discretos sin puntos fijos

Este capítulo se enfoca en el diseño de mapeos que exhiban una dinámica libre de puntos de equilibrio; en la primera parte a través de un análisis, se diseñaran cierto tipo de mapeos racionales a los que cuales se les asignarán las características necesarias para que carezcan de puntos fijos. A partir de esto se exhibirá una familia de mapeos racionales sin puntos fijos. En la segunda parte y tomando como base a estos, se construirán mapeos lineales por partes, a los que se les impondrán las propiedades adecuadas de tal manera que definan una familia que tampoco presente puntos fijos.

### 3.1. Mapeos racionales sin puntos fijos

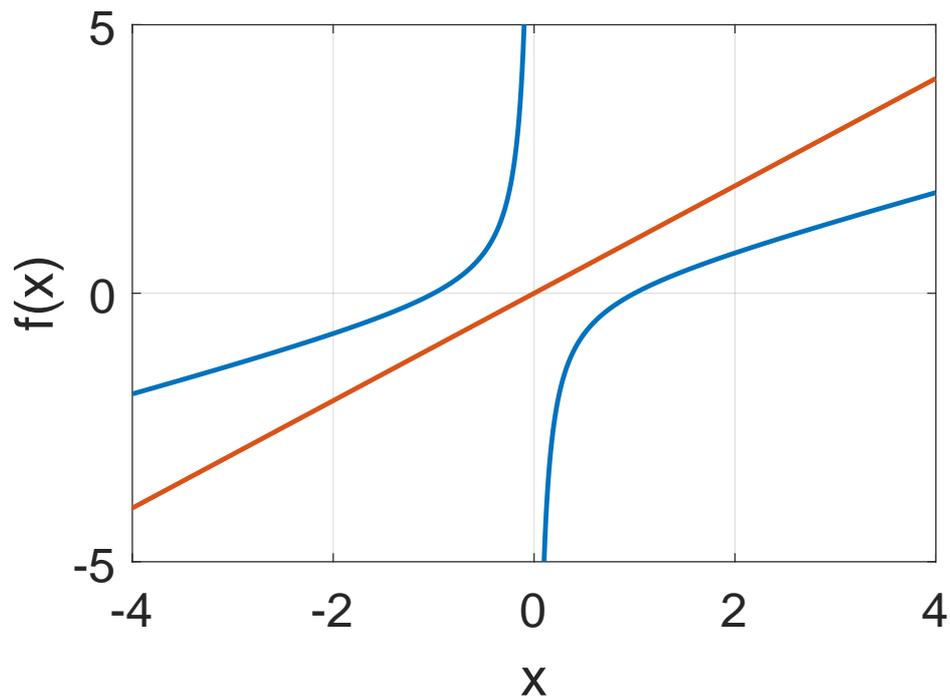
La construcción de los mapeos racionales de este trabajo toman como punto de partida el mapeo  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ , definido de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x}, x \neq 0. \quad (3.1)$$

Este mapeo carece de puntos fijos y además manifiesta dinámica caótica<sup>1</sup>, su gráfica se muestra en la Figura 3.1. Es así que basados en él, se buscarán determinar condiciones generales que permitan encontrar mapeos sin puntos fijos.

---

<sup>1</sup>Para un mayor detalle de este mapeo y su dinámica, puede consultar la pag. 172 en [31].

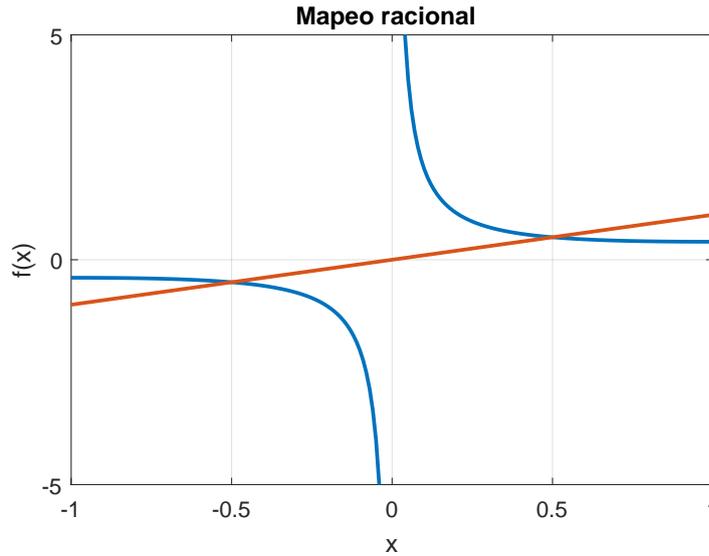


**Figura 3.1:** Mapeo sin punto fijo.

Como se puede observar, el mapeo anterior, es racional, entonces para la construcción de sistemas dinámicos discretos sin puntos de equilibrio, una posibilidad es emplear mapeos expresados como un cociente de polinomios, aunado a esto hay que considerar los siguientes puntos:

1. Lo primero a notar del mapeo dado en la Ecuación (3.1), es que este tiene dominio en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , por lo que solo en el cero no está definido, por lo tanto existe una sola discontinuidad.

Así que, una primera aproximación es empezar con mapeos con dominio en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  y contradominio en  $\mathbb{R}$ , que tengan puntos donde no sea continuo, i.e., aquellos donde solo el polinomio  $Q(x)$  se anula. Nótese que esta condición es necesaria pero no suficiente, pues existen mapeos racionales discontinuos que sí tienen puntos fijos. Como ejemplo véase la gráfica de la Figura 3.2, donde se exhibe un mapeo discontinuo en el cero pero que tiene dos puntos fijos.



**Figura 3.2:** Mapeo discontinuo con puntos fijos  $f(x) = \frac{1}{5} \frac{x^3 + x}{x^2}$ .

2. Al observar el mapeo definido en la Ecuación (3.1) se puede distinguir de su gráfica que es un mapeo impar, es decir se cumple

$$-f(x) = -\frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{1}{2} \frac{(x)^2 - 1}{-x} = \frac{1}{2} \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = f(-x).$$

Por lo que para la construcción de este tipo de mapeos, es importante considerar si son pares o impares, puesto que si tenemos un mapeo impar (y como se verá más adelante) se facilitará el análisis para establecer la existencia o no de puntos fijos.

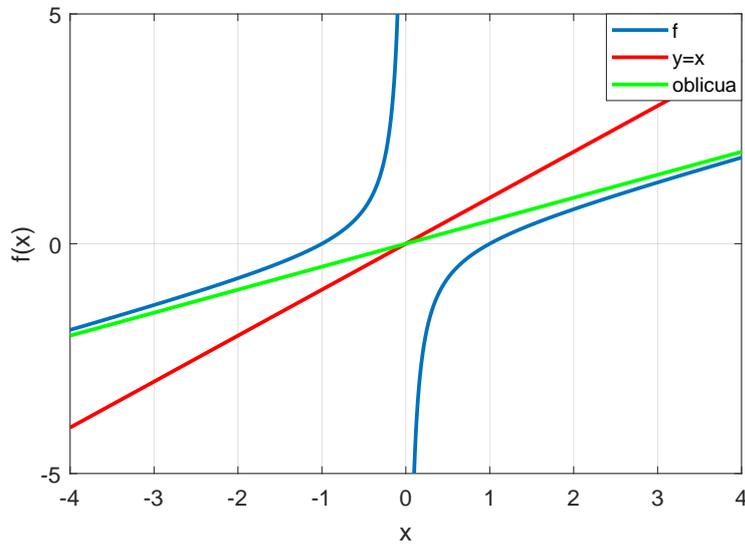
Sin embargo, nuevamente esta condición junto con la primera no siempre garantiza la inexistencia de puntos fijos. El mapeo  $f(x) = \frac{1}{5} \frac{x^3 + x}{x^2}$ , cuya gráfica se aprecia en la Figura 3.2, es un mapeo impar, pues se satisface

$$-f(x) = -\frac{1}{5} \frac{x^3 + x}{x^2} = \frac{1}{5} \frac{-x^3 - x}{x^2} = \frac{1}{5} \frac{-x^3 - x}{(-x)^2} = f(-x).$$

Una forma de construir mapeos impares que cumplan el punto uno, es trabajar con mapeos racionales que se anulen solo en el cero, únicamente en el polinomio del denominador, así se tendrá una discontinuidad en ese punto. Si además se cumple que  $P$  y  $Q$  sean ambos polinomios pares (o impares), entonces el mapeo será par. Así, para que se obtenga un mapeo impar basta con que: a)  $P$  sea par y  $Q$  impar o b) que  $Q$  sea par y  $P$  sea impar. Cualquier otra combinación resultará en un mapeo par.

3. Un análisis al mapeo utilizado en la Ecuación (3.1), permite ver que el grado del numerador es exactamente un grado mayor al del denominador, como se mencionó anteriormente, esto garantiza la existencia de una asíntota oblicua donde  $\beta = 0$ , ( la cual se observa, en la Figura 3.3). Que tal recta exista, permite que si en cada punto del intervalo  $(-\infty, 0)$  el mapeo está por arriba de dicha asíntota y si esta a su vez está por encima de la recta  $y = x$ , entonces el mapeo y esta última recta no tienen puntos de intersección en el intervalo considerado. De manera similar se observa que el intervalo  $(0, \infty)$ , la asíntota ayuda a determinar la inexistencia de puntos fijos.

Es así que, el considerar mapeos racionales tales que el grado del polinomio del numerador sea un grado exactamente mayor que del denominador garantizará la presencia de una asíntota oblicua, la cual junto con otras condiciones permitirá construir sistemas sin puntos de equilibrio.



**Figura 3.3:** Mapeo discontinuo, racional, impar y con recta oblicua:  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x}$ .

Así, de cumplirse los tres puntos anteriores, basta asegurar que la asíntota oblicua siempre se ubique por debajo de la gráfica del mapeo  $f$  en el dominio  $(-\infty, 0)$  y por arriba de la gráfica de  $f$  en  $(0, \infty)$  para que el mapeo no tenga puntos fijos.

4. El mapeo  $f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{x}$  posee un par de propiedades que garantizan el cumplimiento de lo mencionado en el párrafo anterior: es un mapeo convexo (cóncavo hacia arriba) en el dominio  $(-\infty, 0)$ , y cóncavo hacia abajo en  $(0, \infty)$ . Para comprobar esto, se puede usar el criterio de la segunda derivada [34]:

Como el mapeo es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , se puede calcular la primer y segunda derivada, es decir:

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{2x^2}, f''(x) = -\frac{1}{2x^3}.$$

Para todo  $x$  en el intervalo  $(-\infty, 0)$  se cumple que  $x^3 \in \mathbb{R}^-$ . Consecuentemente para todo  $x \in (-\infty, 0)$ , se cumple  $f''(x) = -\frac{1}{2x^3} > 0$ .

De aplicarse el criterio de la segunda derivada se concluye que el mapeo  $f$  es convexo en  $(-\infty, 0)$ . Cuando  $x$  se localiza en el intervalo  $(0, \infty)$ , entonces  $x^3 \in \mathbb{R}^+$ , al utilizar de nuevo el segundo criterio de la derivada, se tiene que  $f''(x) = -\frac{1}{2x^3} < 0$ , por lo tanto  $f$  es cóncavo hacia abajo en esta región.

Si se cumple lo anterior, por lo consiguiente en el intervalo  $(-\infty, 0)$  cualquier valor del mapeo  $f$  será mayor al valor de la recta definida por la oblicua en dicho punto. Análogamente en el intervalo  $(0, \infty)$ , el mapeo  $f$  tendrá un valor menor al de la recta oblicua.

Dado que la recta  $y = x$  tiene pendiente igual a uno, basta que el valor  $\eta$  de la pendiente de la oblicua cumpla:  $0 < \eta < 1$ , mientras que el valor de la ordenada  $\beta$  sea cero para que se satisfaga que la recta de la asíntota oblicua y la recta definida por el mapeo  $y = x$ , solo tengan intersección en el origen; esto, en conjunto con lo dicho en los puntos previos, trae como consecuencia que un mapeo racional  $f$  no tenga puntos fijos en el dominio considerado.

Puesto de manifiesto todo lo anterior, la Proposición 1 y el Teorema 3.1, enuncian las condiciones necesarias para que mapeos racionales de cierto tipo carezcan de puntos fijos.

**Proposición 1.** Sea  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ , un mapeo racional, de la forma:

$$f = \frac{a_m x^{2k} + a_{2k-2} x^{m-2} + \dots + a_2 x^2 + a_0}{b_n x^{2k-1} + b_{n-2} x^{2k-3} + \dots + b_1 x}, x \neq 0. \quad (3.2)$$

Con  $k \in \mathbb{N}, a_m \neq 0, b_n \neq 0$ . Entonces el mapeo  $f$  es impar y tiene una asíntota oblicua,  $y = \eta x$ .

*Demostración.* Como el grado mayor del numerador es exactamente un grado mayor al grado mayor del polinomio del denominador entonces por lo visto en la Sección 2.4 existe una asíntota oblicua para la cual se determinará su ecuación,  $y_{ob} = \eta x, +\beta$ , como sigue:

$$\eta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m x^{2k} + a_{m-2} x^{2k-2} + \dots + a_2 x^2 + a_0}{x(b_n x^{2k-1} + b_{n-2} x^{2k-3} + \dots + b_1 x)},$$

$$\eta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m x^{2k} + a_{m-2} x^{2k-2} + \dots + a_2 x^2 + a_0}{b_n x^{2k} + b_{n-2} x^{2k-2} + \dots + b_1 x^2},$$

$$\eta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{a_mx^{2k}}{x^{2k}} + \frac{a_{m-2}x^{2k-2}}{x^{2k}} + \dots + \frac{a_2x^2}{x^{2k}} + \frac{a_0}{x^{2k}}}{\frac{b_nx^{2k}}{x^{2k}} + \frac{b_{n-2}x^{2k-2}}{x^{2k}} + \dots + \frac{b_1x^2}{x^{2k}}},$$

$$\eta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_2}{x^{2k-2}} + \frac{a_0}{x^{2k}}}{b_n + \frac{b_{2k-2}}{x^2} + \dots + \frac{b_1}{x^{2k-2}}},$$

$$\eta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{a_m}{b_n}.$$

Y el valor de la pendiente  $\beta$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \eta x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_mx^{2k} + a_{m-2}x^{2k-2} + \dots + a_2x^2 + a_0}{b_nx^{2k-1} + b_{n-2}x^{2k-3} + \dots + b_1x} - \frac{a_mx}{b_n},$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_mx^{2k} + a_{m-2}x^{2k-2} + \dots + a_2x^2 + a_0 - \left( a_mx^{2k} + \frac{a_mb^{n-2}x^{2k-2}}{b_n} + \dots + \frac{a_mbx^2}{b_n} \right)}{b_nx^{2k-1} + b_{n-2}x^{2k-3} + \dots + b_1x},$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left( a_{m-2} - \frac{a_mb_{n-2}}{b_n} \right) x^{2k-2} + \dots + \left( a_2 - \frac{a_mb}{b_n} \right) x^2 + a_0}{b_nx^{2k-1} + b_{n-2}x^{2k-3} + \dots + b_1x},$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left( a_{m-2} - \frac{a_mb_{n-2}}{b_n} \right) x^{2k-2} + \dots + \left( a_2 - \frac{a_mb}{b_n} \right) x^2 + a_0}{b_nx^{2k-1} + b_{n-2}x^{2k-3} + \dots + b_1x},$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{\left( a_{m-2} - \frac{a_mb_{n-2}}{b_n} \right) x^{2k-2}}{x^{2k-1}} + \dots + \frac{\left( a_2 - \frac{a_mb}{b_n} \right) x^2}{x^{2k-1}} + \frac{a_0}{x^{2k-1}}}{b_n + \frac{b_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{b_1}{x^{2k-2}}},$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{\left( a_{m-2} - \frac{a_mb_{n-2}}{b_n} \right)}{x} + \dots + \frac{\left( a_2 - \frac{a_mb}{b_n} \right)}{x^{2k-3}} + \frac{a_0}{x^{2k-1}}}{b_n + \frac{b_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{b_1}{x^{2k-2}}},$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{0}{b_n} = 0.$$

Por lo tanto la ecuación de la recta oblicua es

$$y_{ob}(x) = \eta x = \frac{a_m}{b_n} x. \quad (3.3)$$

El mapeo  $f$  es impar, esto se puede comprobar observando que:

Como el grado  $m$  es par, entonces el polinomio del numerador  $P(x)$  se puede escribir como  $P(x) = a_mx^{2p} + a_{m-2}x^{2p-2} + \dots + a_2x^2 + a_0$ . Donde  $m = 2p$  para algún  $p \in \mathbb{N}$ .

Y como se tiene lo siguiente

$$P(x) = a_mx^{2p} + a_{m-2}x^{2(p-1)} + \dots + a_2x^2 + a_0 = a_m(-x)^{2p} + a_{m-2}(-x)^{2(p-1)} + \dots + a_2(-x)^2 + a_0 = P(-x),$$

entonces  $P(x)$  es un polinomio par

Dado que,  $m = n + 1$ , y por ser  $m = 2p$ , entonces,  $n = 2p - 1$ , es decir, el grado  $n$  del polinomio  $Q(x)$  del numerador es impar. De esto se desprende que

$$Q(x) = b_nx^{2p-1} + b_{n-2}x^{2(p-1)-1} + \dots + b_1x = -(b_n(-x)^{2p-1} + b_{n-2}(-x)^{2(p-1)-1} + \dots + b_1(-x)) = -Q(-x),$$

i.e,  $Q(x)$  es impar. Al ser  $P$  un polinomio par y  $Q$  uno impar, entonces

$$\text{el mapeo } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ es impar.}$$

□

Puesto de manifiesto lo anterior, el Teorema 3.1 enuncia las condiciones necesarias para que una familia particular de mapeos racionales no tenga puntos fijos.

**Teorema 3.1.** *Sea  $f$  un mapeo racional, continuamente diferenciable en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , convexo en  $(-\infty, 0)$  y cóncavo en  $(0, \infty)$ , de la forma:*

$$f = \frac{a_mx^{2k} + a_{2k-2}x^{m-2} + \dots + a_2x^2 + a_0}{b_nx^{2k-1} + b_{n-2}x^{2k-3} + \dots + b_1x}, x \neq 0. \quad (3.4)$$

Con  $k \in \mathbb{N}, a_m \neq 0, b_n \neq 0$ , la pendiente de la oblicua  $\eta$ , cumple:  $0 < \eta < 1$ , entonces el mapeo no tiene puntos fijos en los intervalos  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ .

*Demostración.* De la Proposición 1, se tiene que el mapeo  $f$  tiene una recta oblicua  $y = \eta x$ . Puesto que el mapeo es convexo y continuamente diferenciable en el intervalo  $(-\infty, 0)$ , entonces se cumple que  $f$  esta por encima de todas sus tangentes. i.e:

$\forall x, y \in (-\infty, 0)$  se tiene que  $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$ . Además por ser  $f$  convexo, su derivada  $f'$  es creciente en  $(-\infty, 0)$ , y puesto que

$$0 < \eta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{a_m}{b_n},$$

entonces

$$0 < \eta < f'(x) \text{ para todo } x \text{ en } (-\infty, 0),$$

luego si se toma un punto arbitrario  $y \in (-\infty, 0)$ , se cumple que

$f(y) = f(y) + f'(y)(y - y) = f'(y)y + (f(y) - f'(y)y) > \eta y > y$ . Donde la última desigualdad es cierta, ya que,  $0 < \eta < 1$ . Es decir, para cualquier punto  $y$ , se tiene,  $f(y) > y$ ; por lo tanto el mapeo  $f$  no tendrá intersección con la asíntota oblicua, como consecuencia, no habrá puntos fijos en el intervalo,  $(-\infty, 0)$ .

Ahora para demostrar la carencia de puntos fijos en  $(0, \infty)$ , se considera lo siguiente:

Sean  $x, y$  dos elementos arbitrarios en  $(0, \infty)$ , entonces los puntos,  $-x, -y \in (-\infty, 0)$ . Luego, por la Proposición 1, el mapeo  $f$  es impar, con lo cual se tiene

$$f(y) = -f(-y); \text{ al ser } f, \text{ convexo en } (-\infty, 0), \text{ se cumple,}$$

$$f(-y) \geq f(-x) + f'(-x)(-x - (-y)).$$

Así

$$f(y) = -f(-y) \leq -(f(-x) + f'(-x)(-x - (-y))) = -f(-x) - f'(-x)(-x - (-y)),$$

$$f(y) \leq -f(-x) - f'(-x)(-x - (-y)).$$

Para una función impar se cumple que su derivada es par, lo que tiene como consecuencia que

$$f(y) \leq f(x) - f'(x)(-x + (-y)) = f(x) + f'(x)(x - y).$$

Por lo tanto  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(0, \infty)$ .

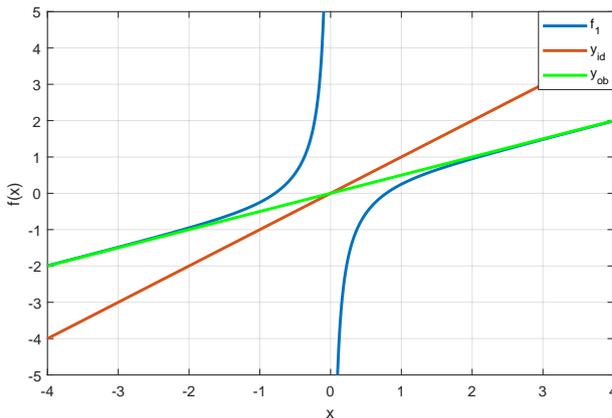
De manera análoga a la demostración en el intervalo  $(-\infty, 0)$ , si se considera un punto  $y$  arbitrario en  $\mathbb{R}$ , entonces

$$f(y) \leq f(y) + f'(y)(y - y) < \eta y < y. \text{ Es decir, para cualquier punto } y, \text{ se tiene } f(y) < y;$$

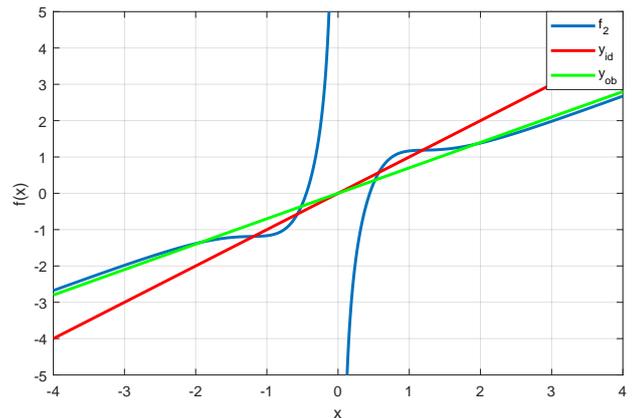
por lo tanto no existen puntos fijos en  $(0, \infty)$ . □

En la Figura 3.4 se muestran dos gráficas distintas, cada una de ellas representa a un mapeo. En la Figura 3.4a se exhibe la gráfica del mapeo  $f_1 = 0.5 \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^3 + x}$ , como se puede observar no existen puntos fijos ya que dicho mapeo cumple con las características enunciadas en el teorema anterior. Para la Figura 3.4b se tiene la representación del mapeo  $f_2 = 0.7 \frac{x^6 + 5x^2 - 1}{x^5 + x^3 + x}$ ; en el cual existen dos puntos fijos, notar que como consecuencia de esto, la propiedad de ser un mapeo convexo en todo el intervalo  $(-\infty, 0)$ , así como de ser cóncavo en  $(0, \infty)$  no se cumple.

En la Figura 3.5 se ilustran otras dos gráficas, en donde para cada una de ellas hay un mapeo con dos puntos fijos. La 3.5a representa al mapeo  $f_3 = 0.7 \frac{x^6 + 6x^4 - 10}{x^5 + 3x^3}$ ; mientras que en la 3.5b se encuentra la gráfica de  $f_4 = 2.4 \frac{x^4 + x^2 - 10}{2x^3 + x}$ .

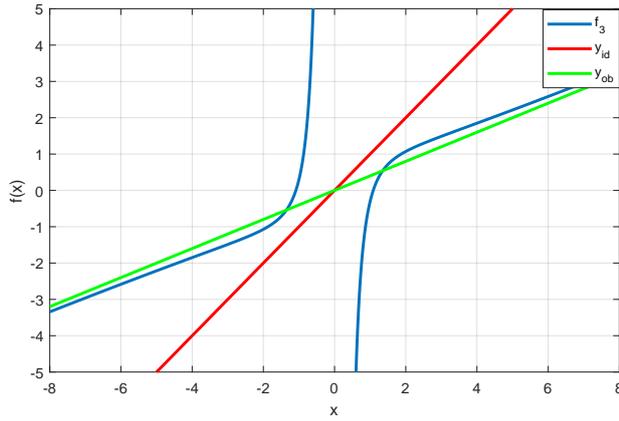


(a) Mapeo racional  $f_1$  sin puntos fijos.

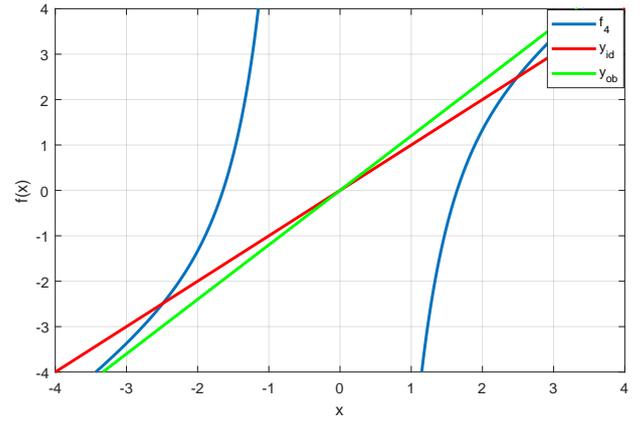


(b) Mapeo racional  $f_2$  con puntos fijos.

**Figura 3.4:** Mapeos racionales  $f_1$  y  $f_2$ .



(a) Mapeo racional  $f_3$  sin puntos fijos.



(b) Mapeo racional  $f_4$  con puntos fijos.

**Figura 3.5:** Mapeos racionales  $f_3$  y  $f_4$ .

Finalmente la Proposición 2 muestra una familia de mapeos racionales sin puntos fijos.

**Proposición 2.** Sea  $f_\eta : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ , una familia de mapeos definidos de la siguiente manera:

$$f_\eta(x) = \eta \frac{x^2 - 1}{x}, \quad x \neq 0, \quad 0 < \eta < 1. \quad (3.5)$$

Entonces la familia  $f_\eta$  carece de puntos fijos.

*Demostración.* Sea  $f_{\eta_i}$  un elemento arbitrario de esta familia, entonces  $f_{\eta_i}$  es un mapeo racional como el pedido en la Proposición 1, por lo tanto, tiene una asíntota oblicua cuya ecuación es  $y = \eta x$ .

Por otro lado, como  $f_{\eta_i}$  solo se anula en cero, se sigue que es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , por lo que se puede calcular su primer y segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{1 + x^2}{\eta_i x^2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{\eta_i x^3}.$$

Dado que  $0 < \eta_i < 1$ , para todo  $x$  en el intervalo  $(-\infty, 0)$ , se satisface  $f''(x) = -\frac{1}{\eta_i x^3} > 0$ . Al aplicarse el criterio de la segunda derivada se concluye que el mapeo  $f$  es convexo en  $(-\infty, 0)$ . Cuando  $x$  se localiza en el intervalo  $(0, \infty)$ , entonces  $x^3 \in \mathbb{R}^+$ , al utilizar de nuevo el segundo criterio de la derivada, se tiene que  $f''(x) = -\frac{1}{\eta_i x^3} < 0$ , por lo tanto  $f_{\eta_i}$  es cóncavo hacia abajo en esta región.

Así que por el Teorema 1,  $f_{\eta_i}$  es un mapeo sin puntos fijos, al ser un elemento arbitrario, se concluye que la familia de mapeos racionales  $f_\eta$  no tiene puntos fijos.  $\square$

Como se mencionó al inicio de la introducción, uno de los objetivos era diseñar una familia de mapeos sin puntos fijos. Los que satisfacen el Teorema 3.1 forman una familia que cumplen la tarea propuesta.

Una de las metas futuras es usar las sucesiones de puntos que pertenecen a órbitas con dinámica caótica en la generación de secuencias pseudoaleatorias, esto con la finalidad de utilizarlas en cierta parte del proceso de encriptación de imágenes. Como se puede notar, todos los miembros de la familia de mapeos racionales sin puntos fijos tienen la característica de que en el punto  $x = 0$ , no están definidos, de esta manera aquellos elementos del mapeo para el cual a una iteración dada sean enviados al punto  $x = 0$ , producirán órbitas que para un cierto tiempo  $t$  serán indeterminadas y por lo tanto las sucesiones de puntos que formen cada una de esas órbitas se verán truncadas. Aún cuando se ha cumplido uno de los objetivos trazados, se tiene este inconveniente, por lo que la siguiente etapa es diseñar una nueva familia de mapeos sin puntos fijos que se basen en los mapeos racionales y que también se solvente el problema de la no definición en el punto cero.

## 3.2. MLP sin puntos fijos

### 3.2.1. Construcción de MLP

En esta sección se pretende diseñar un cierto tipo de mapeos lineales por partes (MLP)<sup>2</sup>, tomando como base los mapeos racionales dados con anterioridad, que además resuelvan el conflicto enunciado en el último párrafo de la sección anterior. Asimismo, se analizarán las condiciones para que se establezca una familia de mapeos sin puntos fijos. Así,

Para llevar a cabo este diseño, se definen dos rectas,  $y_1 = m_1x + b_1$ ,  $y_2 = m_2x + b_2$ , con  $m_1 \neq 0$ ,  $m_2 \neq 0$ ,  $m_1 \neq m_2$ , tales que su punto de intersección sea en un valor  $x = -a < 0$ , y se satisface  $y_1 = y_2 = 0$ , en tal punto. Como se puede observar en la la Figura 3.6, la línea roja y la naranja representarían cada una a estas rectas, de tal manera que cuando  $x \leq a$ , el mapeo tome el valor de  $y_1$  y para  $-a < x \leq 0$ , valga  $y_2$ ; todo esto con la intención de que en el intervalo  $(-\infty, 0)$ , el mapeo lineal por partes sea semejante al mapeo racional, (que en tal figura está simbolizado por la curva azul). Una segunda inspección a la Figura 3.6, permite ver que la recta  $y_2$  (representada por la línea naranja) consigue que en  $x = 0$ , el mapeo lineal por partes sí este definido, caso contrario a los mapeos racionales.

Como se mencionó anteriormente, el mapeo debe valer cero en  $x = -a$ , es decir

$$y_1 = m_1x + b_1 = 0 = y_2 = m_2x + b_2.$$

Por lo que para  $y_1$ , la igualdad anterior será cierta si

$$-a =: x = \frac{-b_1}{m_1}. \quad (3.6)$$

---

<sup>2</sup>recordar que al usar las siglas MLP, estas se refieren a mapeos lineales por partes.

Asimismo para  $y_2$ , se debe satisfacer

$$-a = x_a = \frac{-b_2}{m_2}. \quad (3.7)$$

De estas igualdades, se deduce lo siguiente

1. Si  $m_1 > 0$ . Entonces,  $b_1 > 0$ , de lo contrario, si  $m_1 < 0$ , entonces,  $b_1 < 0$ .

Esto es cierto, ya que si de la Ecuación (3.6), se despeja el valor de  $b_1$ , se tiene  $b_1 = am_1$ . Como  $-a < 0$  se sigue que  $a > 0$ ; si  $m_1 > 0$ , entonces,  $b_1$  es el producto de dos números positivos, es decir,  $b_1 > 0$ . Si  $m_1 < 0$ , entonces,  $b_1$  es el producto de un número positivo por otro negativo, por lo tanto,  $b_1 < 0$ .

2. Si se establecen los valores de  $m_1$ ,  $b_1$  y  $m_2$ , al igualar las ecuaciones (3.6) y (3.7), al despejar  $b_2$  se consigue,

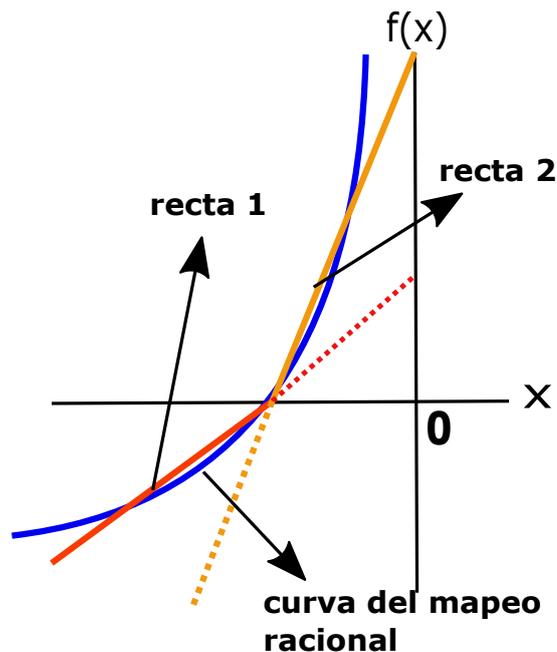
$$b_2 = \frac{m_2 b_1}{m_1}. \quad (3.8)$$

3. Si  $m_2 > 0$ . Entonces,  $b_2 > 0$ , si  $m_2 < 0$ . Entonces,  $b_2 < 0$ .

Para comprobar eso, se sabe que de la Ecuación (3.8),  $b_2 = \frac{m_2 b_1}{m_1}$ , asimismo por lo demostrado en el punto uno, el cociente  $\frac{b_1}{m_1}$ , siempre es positivo, de tal forma que

Si  $m_2 > 0$ , entonces,  $m_2 \frac{b_1}{m_1}$  es un número positivo, consecuentemente,  $b_2 > 0$ .

Si  $m_2 < 0$ , entonces,  $m_2 \frac{b_1}{m_1}$  es un número negativo, y se sigue que,  $b_2 < 0$ .



**Figura 3.6:** Esbozo de la construcción de un mapeo lineal por partes.

Los mapeos racionales definidos anteriormente tenían la característica de ser mapeos impares, esta particularidad permitía que si se obtenía la carencia de puntos fijos en el intervalo  $(-\infty, 0)$ , entonces la inexistencia de tales puntos también estaba garantizada en el intervalo  $(0, \infty)$ . De esta forma, una adecuada elección de los signos en las ecuaciones de las dos rectas planteadas, permitirá definir otras dos rectas en el intervalo  $[0, \infty)$  de tal suerte que se tenga un mapeo lineal por partes e impar con dominio en  $\mathbb{R}$ .

Por lo que, para exhibir un mapeo lineal por partes impar (aquel en el que se cumple,  $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ), hay que definir dos nuevas regiones

**Caso 1.-** Si multiplicamos por -1 la desigualdad  $x \leq -a < 0$ , entonces  $x \geq a > 0$ , aunado a esto, cuando  $x \leq -a < 0$ , el mapeo toma el valor de  $y_1 = m_1 x + b_1$ , por lo que si se multiplica esta última igualdad por -1 y además se sustituye  $x$  por  $-x$ , se consigue que

$$-y_1 = -(m_1(-x) - b_1) = m_1 x + b_1$$

Consecuentemente se define la tercer región:  $x \geq a > 0$ , tal que

$$y_3 = m_1 x + b_1.$$

**Caso 2.-** De manera análoga al caso 1, si multiplicamos por -1 la desigualdad  $-a < x < 0$ , se satisface que  $0 \leq x < a$ , entonces

$$-y_2 = -(m_2(-x) - b_2) = m_2 x + b_2$$

Por lo tanto se define la cuarta región:  $0 \leq x < a$ , en donde

$$y_4 = m_2 x + b_2.$$

### 3.2.2. Familias de MLP sin puntos fijos

Una vez hecha la anterior construcción, a continuación se presenta de manera formal los MLP, caracterizados por tres parámetros, se analizará bajo que condiciones presentan puntos fijos y en cuales no.

Se define  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , el mapeo lineal por partes, con parámetros  $m_1, m_2, b_1$ , como

$$f(x) = \begin{cases} m_1 x + b_1, & \text{si } x \leq -a < 0; \\ m_2 x + b_2, & \text{si } -a < x < 0; \\ m_2 x - b_2, & \text{si } 0 \leq x < a; \\ m_1 x - b_1, & \text{si } x \geq a; \end{cases} \quad (3.9)$$

Donde,  $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0; a = \frac{b_1}{m_1}; b_2 = \frac{m_2 b_1}{m_1}$ . Además;  $b_1 > 0$ , si  $m_1 > 0$ ;  $b_1 < 0$ , si  $m_1 < 0$ .

Es importante hacer las siguientes observaciones:

- $f(-a) = f\left(-\frac{b_1}{m_1}\right) = m_1 \left(-\frac{b_1}{m_1}\right) + b_1 = 0,$

$$f(a) = f\left(\frac{b_1}{m_1}\right) = m_1 \left(\frac{b_1}{m_1}\right) - b_1 = 0.$$

- El mapeo es continuo en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Para ver por que esto es cierto y dado que el mapeo es lineal por partes, entonces es continuo por partes. Asi basta ver que el mapeo es continuo en  $x = -a$  y en  $x = a$ .

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} f(x) = 0 = f(-a);$$

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} f(x) = -m_2 \left(\frac{b_1}{m_1}\right) + b_2 = -b_2 \left(\frac{m_1}{b_1}\right) \left(\frac{b_1}{m_1}\right) + b_2 = 0 = f(-a);$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -a^+} f(x) = f(-a),$$

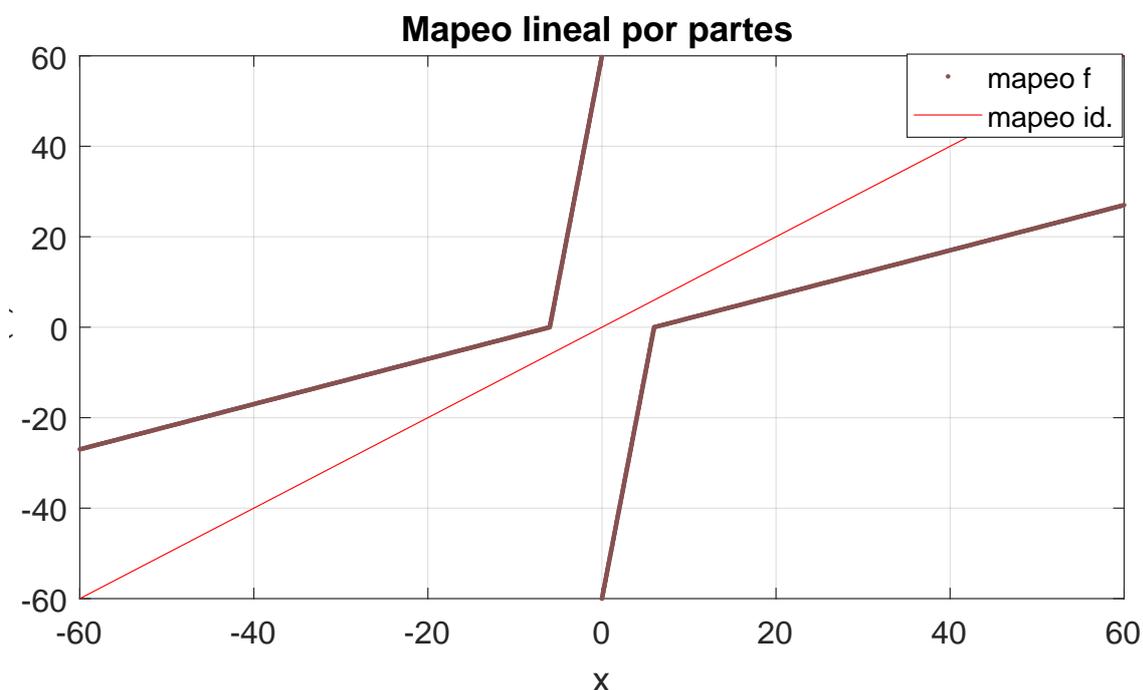
se concluye que el mapeo es continuo en  $x = -a$ . De manera análoga se puede verificar que  $f$  es continuo en  $x = a$ .

De estas dos observaciones se puede constatar que (3.9), exhibe mapeos como los construidos en la sección anterior.

**Ejemplo 3.1.** Considérese el mapeo  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , con  $m_1 = 0.5$ ,  $m_2 = 10$ ,  $b_1 = 3$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x + 3, & \text{si } x \leq -6; \\ 10x + 60, & \text{si } -6 < x < 0; \\ 10x - 60, & \text{si } 0 \leq x < 6; \\ 0.5x - 3, & \text{si } x \geq 6. \end{cases} \quad (3.10)$$

Entonces,  $f$  define un mapeo lineal por partes, discontinuo solo en cero. Su gráfica se aprecia en la Figura 3.7



**Figura 3.7:** Mapeo lineal por partes de la Ecuación 3.10.

### Análisis de puntos fijos

El mapeo definido con anterioridad tiene dos parámetros totalmente libres,  $m_1$ ,  $m_2$ , en esta sección se analizará que condiciones deben cumplir cada uno de ellos para que se garantice la ausencia de puntos fijos. Para cumplir con esta tarea, se hará un estudio en cada uno de los intervalos donde están definidos tales mapeos.

#### Análisis en el intervalo $x \leq -a$ .

**Caso 1.-** Si  $0 < m_1 < 1$ . Entonces, la familia de MLP definida en la Ecuación (3.9) no presenta puntos fijos en este intervalo.

*Demostración.* Supongamos que el mapeo sí tuviera puntos fijos en esta región, por lo tanto se debería cumplir la siguiente igualdad

$$f_1(x) = m_1 x + b_1 = x.$$

Al igualar a cero la ecuación anterior se tiene

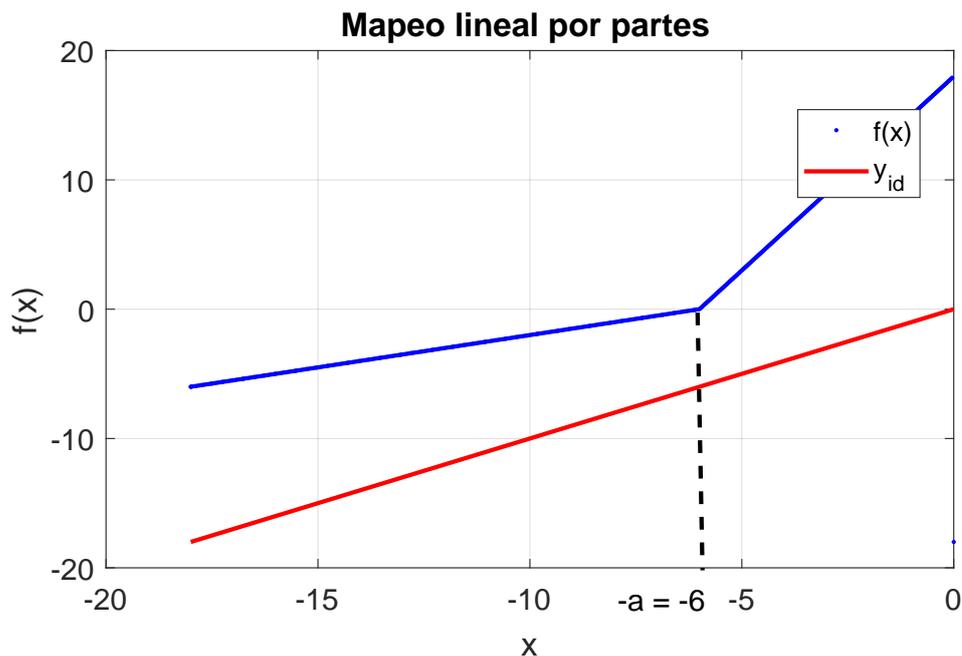
$$f_1(x) = m_1 x + b_1 - x = x(m_1 - 1) + b_1 = 0.$$

Despejando el valor de  $x$ , el punto de intersección sería

$$x_i =: x = \frac{-b_1}{m_1 - 1}. \quad (3.11)$$

Como  $m_1 > 0$ , entonces  $b_1 > 0$ , consecuentemente  $-b_1 < 0$ ; además,  $0 < m_1 < 1$ , por lo que  $m_1 - 1 < 0$ . Así el valor de  $x_i$  es un cociente entre dos números negativos, por lo tanto  $x_i \in \mathbb{R}^+$ , pero esto lleva a una contradicción con el hecho de que,  $x \in (\infty, -a]$ , con  $-a < 0$ . Por lo tanto el punto de intersección no pertenece a este intervalo, por consiguiente no hay punto fijo.  $\square$

En la Figura 3.8, se puede observar que para el mapeo cuyos valores son:  $m_1 = 0.5$ ,  $b_1 = 3$  y  $-a = -6$ , no existen puntos fijos en la región  $x \leq -6$ .



**Figura 3.8:** Mapeo lineal por partes sin puntos fijos en  $x \leq -6$ .

**Caso 2.-** Si  $m_1 > 1$ . Entonces, la familia de MLP definida en la Ecuación (3.9), tiene un punto fijo en el intervalo,  $x \leq -a < 0$ .

*Demostración.* Si se cumple que  $m_1 > 1$ , entonces  $b_1 > 0$ , debido a esto, el punto de intersección  $x_i$  es un valor negativo, ya que

Si  $m_1 > 1$ , entonces,  $m_1 - 1 > 0$ , como  $b_1 > 0$ , entonces  $-b_1 < 0$ ; así  $x_i = \frac{-b_1}{m_1 - 1} < 0$ .

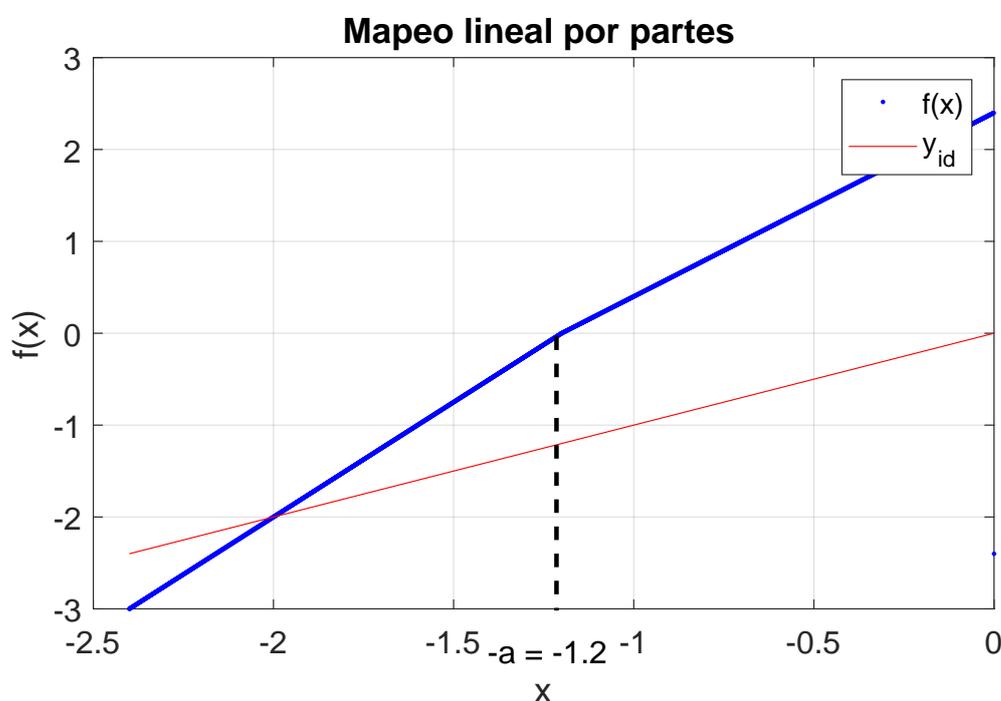
Veamos que,  $x_i \in (-\infty, a)$ .

Esto sucede si y solo si  $x_i < x_a \Leftrightarrow \frac{-b_1}{m_1 - 1} < \frac{-b_1}{m_1}$

$\Leftrightarrow \frac{m_1}{m_1 - 1} > 1 \Leftrightarrow m_1 > m_1 - 1 \Leftrightarrow 0 > -1$ .

De esta manera el punto de intersección se encuentra en el intervalo  $(-\infty, -a)$ . Por lo tanto, este caso presenta mapeos con puntos fijos.  $\square$

La Figura 3.9 muestra un ejemplo de este caso, donde  $m_1 = 1.5$  y  $b_1 = 2$ .



**Figura 3.9:** Mapeo lineal por partes con punto fijo en  $x \leq -1.2$ .

### Caso 3.

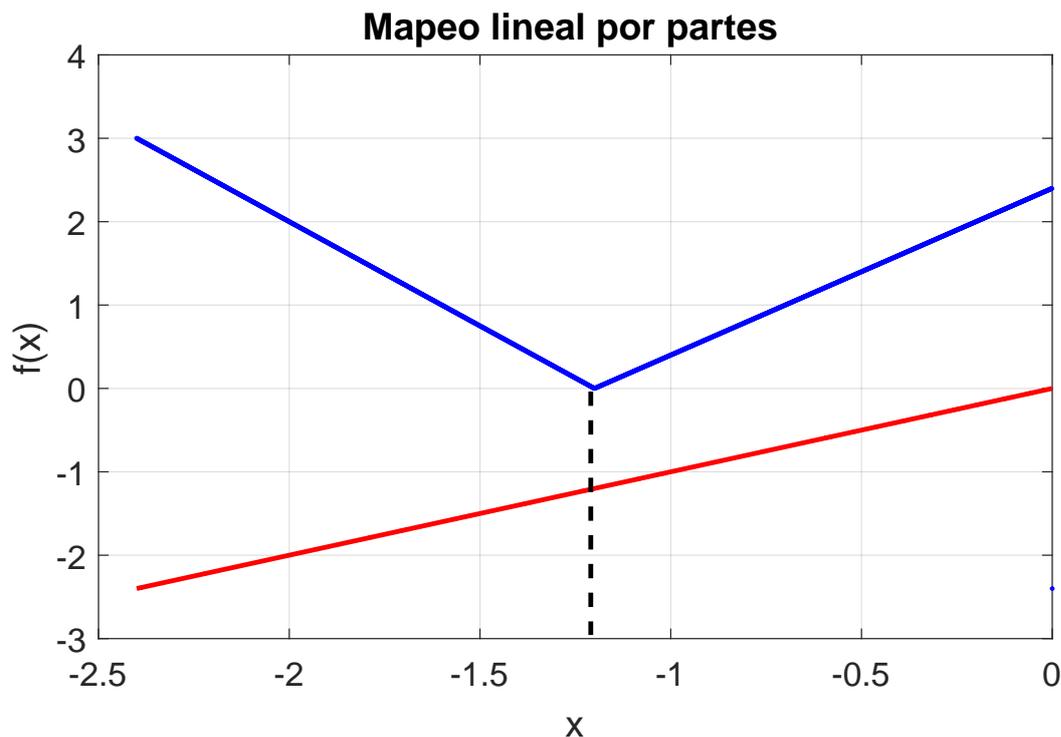
Si  $m_1 < 0$ . Entonces, la familia MLP definida en la Ecuación (3.9), no presenta puntos fijos en el intervalo,  $x \leq -a < 0$ .

*Demostración.* En este caso  $b_1 < 0$ . Además,

$f_1(x) = m_1x + b_1 \geq 0$ , si y solo si,  $m_1x \geq -b_1 = -m_1a$ , si y solo si,  $m_1x + m_1a \geq 0$ , si y solo si,  $m_1(x + a) \geq 0$ , si y solo si, ( $x + a \leq 0$  y  $m_1 < 0$ ), si y solo si,  $x \leq -a$ , es decir si y solo si  $x \in (-\infty, -a]$ .

Como además,  $f_1(-a) = 0$ , entonces si  $x < -a$ , se cumple que  $f_1(x) > 0$ . Como el mapeo  $y_{id} = x$  toma valores negativos en el intervalo  $(-\infty, -a]$ , entonces  $f_1(x) \neq x$ , por lo tanto, se concluye que no hay puntos fijos.  $\square$

La Figura 3.10, muestra la gráfica de un mapeo lineal por partes, con valores,  $m_1 = -2.5$ ,  $a = -1.2$  y  $b_1 = -3$ . Como se puede observar, el mapeo carece de puntos fijos en el intervalo  $(-\infty, -a]$ .



**Figura 3.10:** Mapeo lineal por partes sin puntos fijos en  $x \leq -1.2$ .

**Análisis en el intervalo:**  $-a < x < 0$ .

En este intervalo, se cumple que :

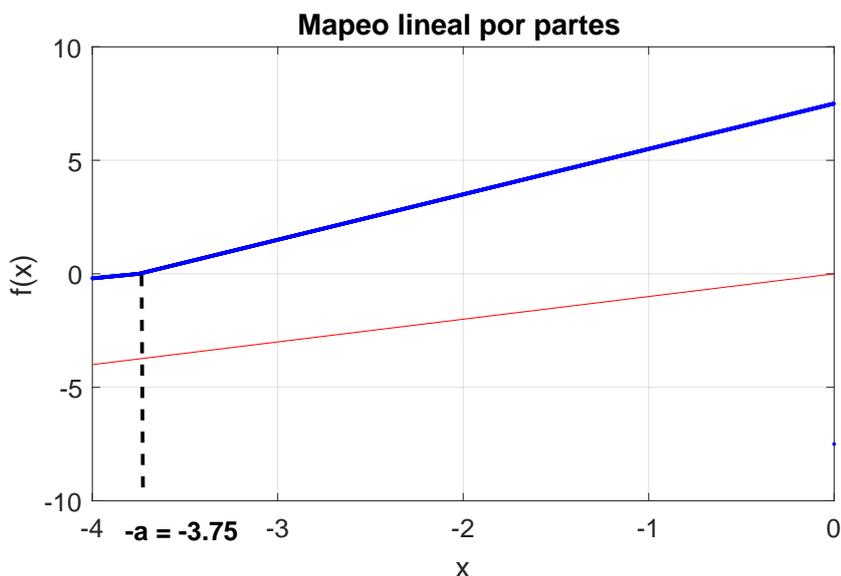
$f(x) = m_2x + b_2$ . Y se tienen los siguientes casos.

**Caso 1.-** Si  $m_2 > 0$ . Entonces, la familia MLP definida en la Ecuación (3.9) no tiene puntos fijos en el intervalo,  $(-a, 0)$ .

*Demostración.* Como  $m_2 > 0$ , entonces,  $b_2 > 0$ . Asimismo,  $f(x) = m_2x + b_2 \geq 0$ , si y solo si,  $m_2x \geq -b_2 = -m_2a$ , si y solo si,  $m_2x + m_2a \geq 0$ , si y solo si,  $m_2(x + a) \geq 0$ , si y solo si,  $(x + a \geq 0$  y  $m_2 > 0)$  si y solo si,  $x \geq -a$ , es decir si y solo si,  $(x \in [-a, \infty]$  y  $m_2 > 0)$ , en particular si  $x \in (-a, 0)$ .

Debido a que  $f(-a) = 0$ , entonces si  $x > -a$  se cumple que,  $f(x) > 0$ . Dado que el mapeo,  $y_{id} = x$  toma valores negativos en el intervalo  $(-a, 0)$ , entonces,  $f(x) \neq x$ , consecuentemente en este caso, no hay puntos fijos.  $\square$

La Figura 3.11, muestra la gráfica de un mapeo lineal por partes, con valores,  $m_2 = 2$ ,  $-a = -3.75$  y  $b_2 = 7.5$ , en la cual se puede apreciar que no hay puntos fijos en el intervalo  $(-a, 0)$ .



**Figura 3.11:** Mapeo lineal por partes sin puntos fijos en,  $-a < x < 0$ .

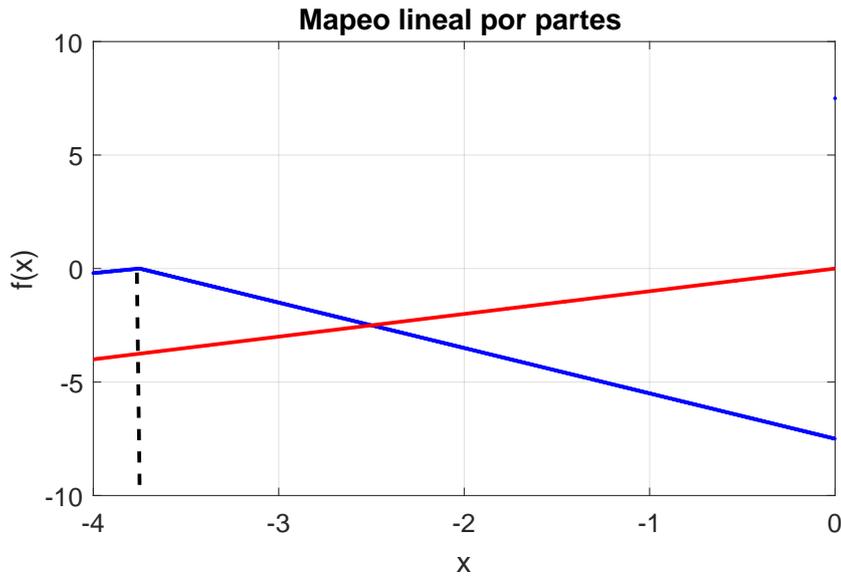
**Caso 2.-** Si  $m_2 < 0$ . Entonces la familia MLP definida en la Ecuación (3.9), tiene un punto fijo en el intervalo  $(-a, 0)$ .

*Demostración.* De manera análoga a los otros casos, si  $m_2 < 0$ , entonces  $b_2 < 0$ . Si es así, existirá un punto fijo, es decir se verifica que para algún  $x \in (-a, 0)$

$$f(x) = m_2x + b_2 = x,$$

cuya igualdad se cumple, si y solo si,  $x(m_2 - 1) = -b_2$ , lo cual es cierto, si y solo si,  $x = \frac{-b_2}{m_2 - 1}$ , que se cumple, si y solo si,  $a < x < 0$ , lo que es verdad, si y solo si,  $a = \frac{-b_2}{m_2} < \frac{-b_2}{m_2 - 1} = x$ , si y solo si,  $\frac{1}{m_2} < \frac{1}{m_2 - 1}$ , si y solo si,  $\frac{m_2 - 1}{m_2} > 1$ , si y solo si,  $-1 < 0$ . Consecuentemente en este caso también se presentan mapeos con puntos fijos.  $\square$

Similarmente, la Figura 3.12, muestra la gráfica de otro mapeo lineal por partes, con valores  $m_2 = -2$ ,  $a = -3.75$  y  $b_2 = -7.5$ . Percatemonos que hay un punto fijo en el intervalo  $(-\infty, -a)$ .



**Figura 3.12:** Mapeo lineal por partes con puntos fijos en  $-a < x < 0$ .

**Análisis de los intervalos:**  $0 \leq x < a$  y  $x \geq a$ .

En el intervalo  $x \geq a$ , se tienen los siguientes tres casos

1. Si  $0 < m_1 < 1$ . Entonces, la familia MLP definida en la Ecuación (3.9), no presenta puntos fijos cuando  $x \geq a$ .
2. Si  $m_1 > 1$ . Entonces en la familia MLP definida en la Ecuación (3.9), existe un punto fijo cuando  $x \geq a$ .
3. Si  $m_1 < 0$ . Entonces la familia MLP definida en la Ecuación (3.9), no exhibe puntos fijos cuando  $x \geq a$ .

En el intervalo  $0 \leq x < a$ , se consideran los dos casos siguientes

1. Si  $m_2 > 0$ . Entonces la familia MLP definida en la Ecuación (3.9), no posee puntos fijos en  $[0, a)$ .
2. Si  $m_2 < 0$ . Entonces la familia MLP definida en la Ecuación (3.9), tiene puntos fijos en  $[0, a)$ .

*Demostración.* Las pruebas de los intervalos:  $0 \leq x < a$  y  $x \geq a$ , son análogas a las de los otros dos intervalos analizados con anterioridad. Dado que el mapeo es impar, basta tomar  $-f$  en lugar de  $f$  en los dos primeros intervalos para obtener la dinámica en los intervalos  $0 \leq x < a$  y  $x \geq a$ , así al hacer los cambios en las desigualdades usadas en la prueba anterior se demuestran por la misma vía los casos enunciados.  $\square$

Una vez establecidos y demostrados todos los casos en los que pueden o no existir puntos fijos para los MPL definidos en la Ecuación 3.9, solo resta eliminar aquellos donde no se presenten puntos fijos, para que finalmente se dictaminen las condiciones que determinen una familia de MPL, sin puntos fijos.

**Teorema 3.2.** Sea  $f$ , el mapeo definido en la Ecuación 3.9, que cumple uno y solo uno de los casos siguientes:

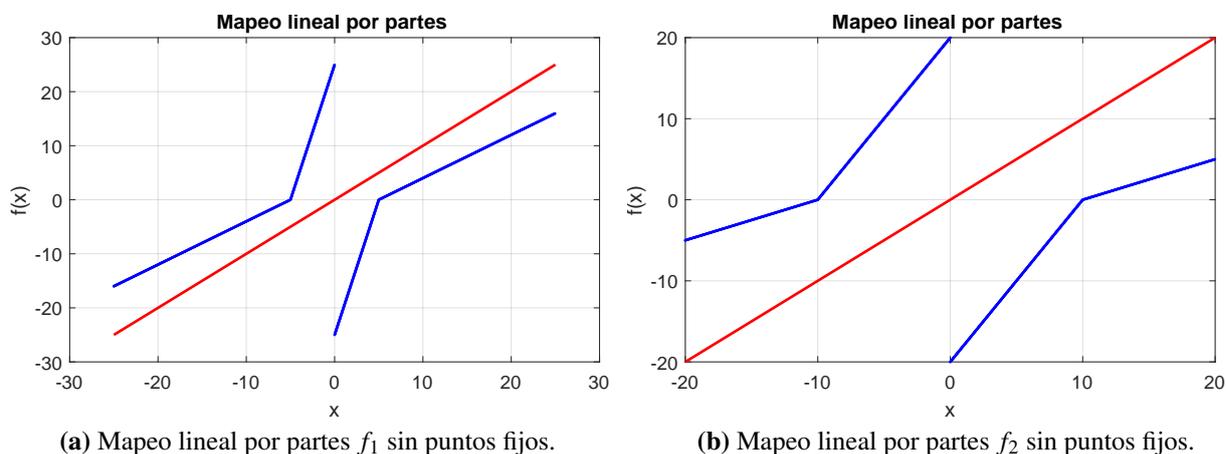
1.- Si  $0 < m_1 < 1$  y  $m_2 > 0$ .

2.- Si  $m_1 < 0$  y  $m_2 > 0$ .

Entonces, en cada caso se obtiene una familia de MLP que no presenta puntos fijos en  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* La demostración es la que fue dada en cada uno de los casos presentados anteriormente.  $\square$

**Ejemplo 3.2.** Las Figuras siguientes muestran elementos que pertenecen a la familia de mapeos lineales sin puntos fijos.

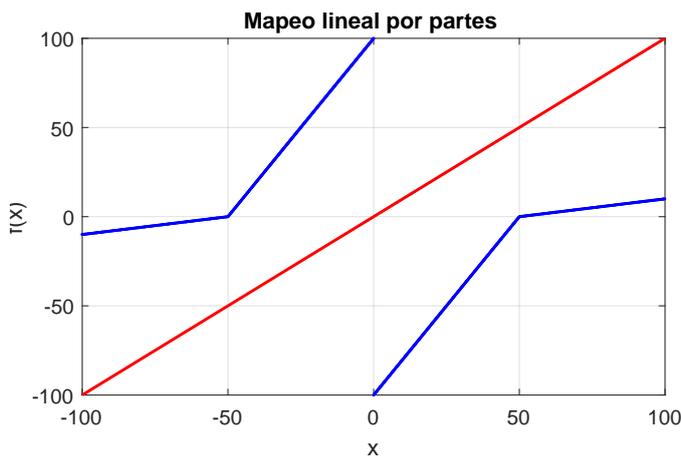


**Figura 3.13:** Mapeos lineales por partes  $f_1$  y  $f_2$ .

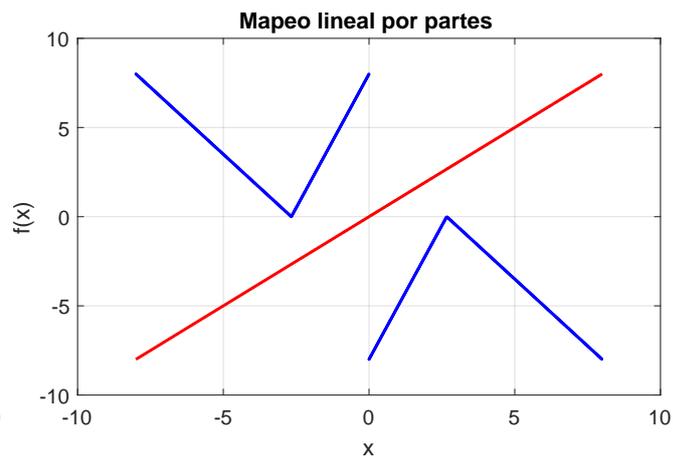
En la Figura 3.13a se puede visualizar el mapeo  $f_1$ ; con valores  $m_1 = 0.8$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ ,  $b_2 = 25$ ; mientras que en la Figura 3.13b, está  $f_2$ ; cuyos parámetros son  $m_1 = 0.5$ ,  $m_2 = 2$ ,  $b_1 = 5$ ,  $b_2 = 20$ .

En la Figura 3.13a se encuentra la gráfica del mapeo  $f_3$ ; tal que  $m_1 = 0.2$ ,  $m_2 = 2$ ,  $b_1 = 10$ ,  $b_2 = 100$ . Enseguida, en la Figura 3.14a se localiza  $f_4$ ; con parámetros  $m_1 = -1.5$ ,  $m_2 = 3$ ,  $b_1 = -4$ ,  $b_2 = 20$ .

Por último, en la Figura 3.15a se puede ver el mapeo  $f_5$ , donde:  $m_1 = -4$ ,  $m_2 = 8$ ,  $b_1 = -12$ ,  $b_2 = 24$ . y en la Figura 3.15b, esta la gráfica de  $f_6$ , con parámetros:  $m_1 = -0.9$ ,  $m_2 = 1.5$ ,  $b_1 = -5$ ,  $b_2 = 8.333$ .

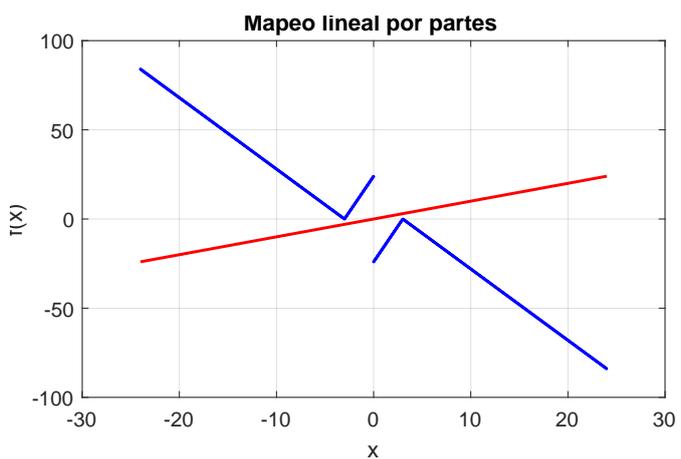


(a) Mapeo lineal por partes  $f_3$  sin puntos fijos.

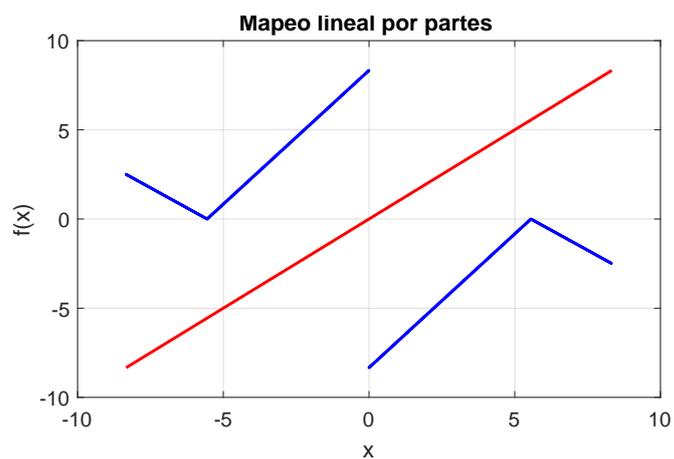


(b) Mapeo lineal por partes  $f_4$  sin puntos fijos.

**Figura 3.14:** Mapeos lineales por partes,  $f_3$  y  $f_4$ .



(a) Mapeo lineal por partes  $f_5$  sin puntos fijos.



(b) Mapeo lineal por partes  $f_6$  sin puntos fijos.

**Figura 3.15:** Mapeos lineales por partes,  $f_5$  y  $f_6$ .



# Capítulo 4

## Mapeos sin puntos fijos y caóticos

### 4.1. MLP sin puntos fijos e indicios de comportamiento caótico

Uno de los aspectos más importantes que pueden llegar a exhibir los sistemas dinámicos tanto continuos como discretos, es la presencia de caos. Como se mencionó en el segundo capítulo, existen varias definiciones que describen este fenómeno; para cualquiera de ellas hay maneras rigurosas de demostrar su existencia.

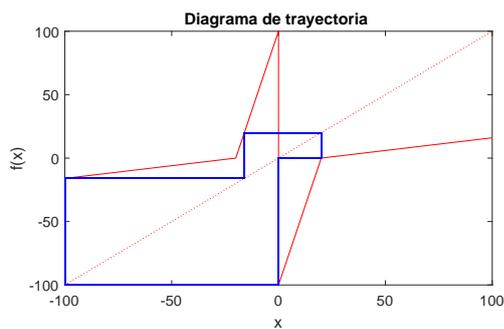
En este capítulo se demostrará la existencia de comportamiento caótico para ciertos elementos de la familia de MLP sin puntos fijos. No obstante, lo primero a ejecutar es exponer algunas herramientas gráficas y computacionales que nos auxiliaran como indicadores de una posible dinámica caótica para un cierto rango en los valores de los parámetros, posteriormente se calcularán los exponentes de Lyapunov y se determinará que efectivamente existe caos ( en el sentido de los exponentes). De estos, se escogerán valores concretos que conformaran un mapeo lineal por partes específico y para el cual se demostrará caos en el sentido de Devaney.

#### 4.1.1. Diagramas cobweb y series de tiempo de MLP sin puntos fijos

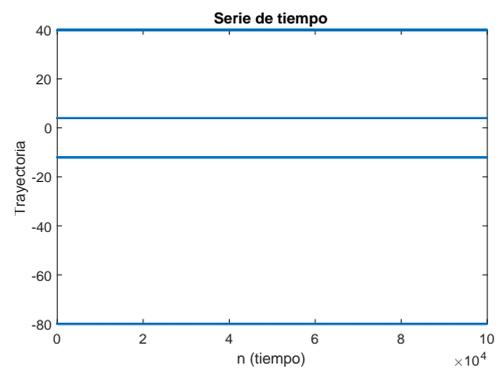
Una de las herramientas que se usarán para inferir la posible presencia de caos, son las series de tiempo, que consiste en graficar una secuencia de datos ordenados de manera cronológica. Estas series ayudarán a señalar la presencia de órbitas que prácticamente visitan cada una de las regiones donde se esté desarrollando una posible dinámica caótica. Un segundo recurso para predecir caos, es usar el diagrama cobweb: se calculan las órbitas para distintos puntos de un mapeo, para cada una de ellas se traza su diagrama cobweb, si se observa que alguna órbita cubre prácticamente toda una región entonces la posible existencia de caos en esa zona es viable. Esto dará pie a la realización de diagramas de bifurcación, los cuales permitirán determinar en que valores de los parámetros hay un posible comportamiento caótico.

Enseguida se presenta el estudio realizado a los valores de los parámetros en un rango donde los MLP no exhiben puntos fijos y para los cuales podría existir comportamiento caótico. Para la familia de mapeos definidos en (3.9), se realizaron simulaciones en los cuales los parámetros,  $b_1$ ,  $b_2$ , y  $m_2$ , permanecieron constantes; la pendiente  $m_1$  se hizo variar entre 0 y 1. Para todos los casos la condición inicial se tomó como  $x_0 = 0$ . Algunos resultados de este análisis se aprecian en los diagramas cobweb y series de tiempo de las Figuras 4.1 y 4.2. Como se puede observar, las gráficas de los diagramas cobweb, así como las de las series del tiempo de la Figura 4.1 indican que para los valores,  $m_1 = 0.2$  y  $m_1 = 0.4$ , se tiene en  $x = 0$ , una órbita periódica. Análisis iguales, pero con una condición inicial distinta de cero arrojaron los mismos resultados, es decir las trayectorias después de un tiempo dado convergían a una órbita periódica, en el caso de  $m_1 = 0.2$ , se presenta una órbita de periodo cuatro, y cuando  $m_1 = 0.4$ , a una de período seis. Esto parece indicar que para estos valores no existen órbitas de carácter caótico.

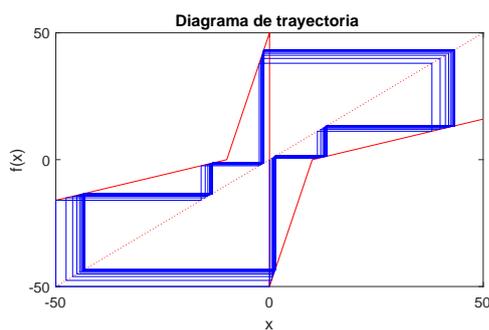
Por el contrario, en la Figura 4.2 se vislumbra que en cada gráfica de los diagramas cobweb la órbita del punto  $x = 0$  recorrió gran parte de una región acotada (posiblemente un intervalo cerrado), las series de tiempo para cada caso remarcan este fenómeno, es decir se visualizaron fluctuaciones de apariencia caótica a lo largo del tiempo dentro de un intervalo.



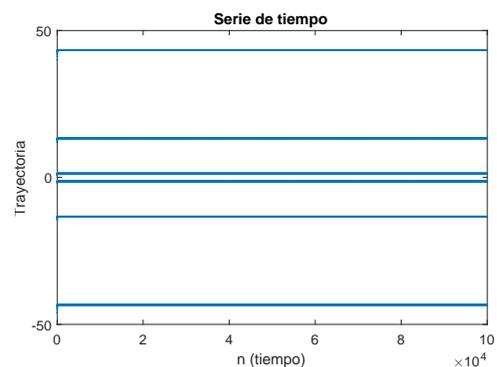
(a)  $m_1 = 0.2, m_2 = 5, b_1 = 4$ .



(b) Serie de tiempo,  $m_1 = 0.2, m_2 = 5, b_1 = 4$ .

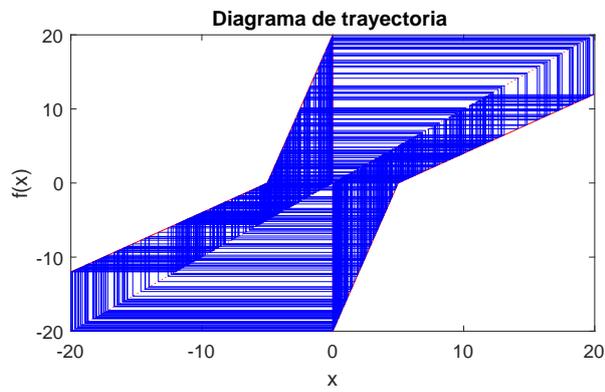


(c)  $m_1 = 0.4, m_2 = 5, b_1 = 4$ .

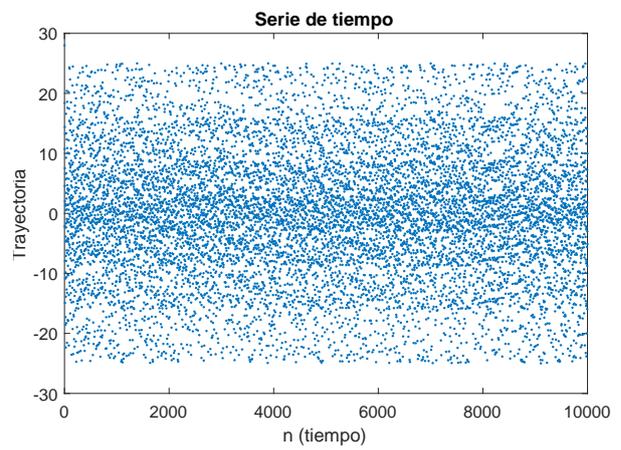


(d) Serie de tiempo,  $m_1 = 0.4, m_2 = 5, b_1 = 4$ .

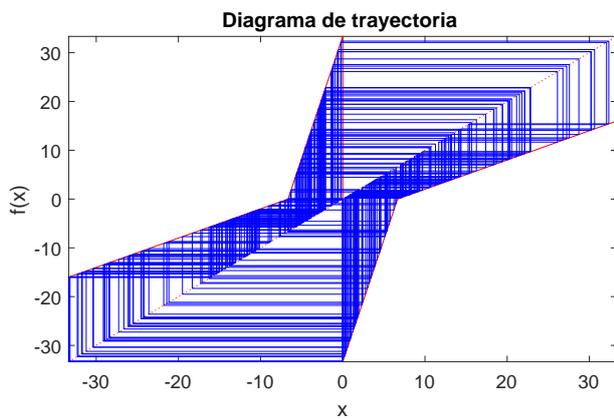
**Figura 4.1:** Diagrama cobweb y series de tiempo de un mapeo.



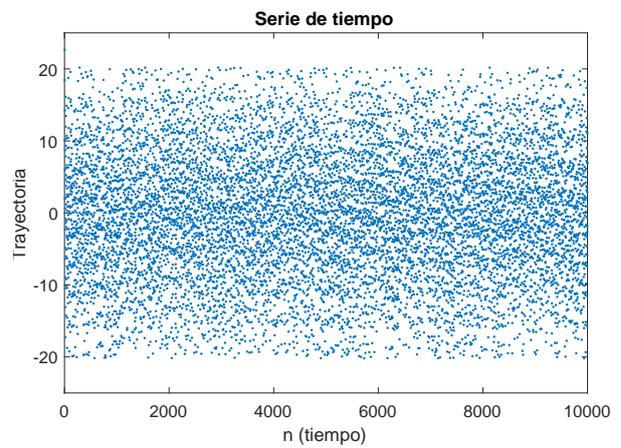
(a) Diagrama cobweb;  $m_1 = 0.8$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ .



(b) Serie de tiempo;  $m_1 = 0.8$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ .



(c) Diagrama cobweb;  $m_1 = 0.9$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ .



(d) Serie de tiempo;  $m_1 = 0.9$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ .

**Figura 4.2:** Diagrama cobweb y series de tiempo.

### 4.1.2. Diagramas de bifurcación y exponentes de Lyapunov de MLP sin puntos fijos

En virtud de los resultados encontrados en la sección anterior, se decidió llevar a cabo la obtención de los diagramas de bifurcación para la subfamilia de MPL, cuyo valor  $m_1$  se encontraba en el rango:  $0 < m_1 < 1$ ; al mismo tiempo se dejaron fijos los valores:  $m_2 = 5$  y  $b_1 = 4$ . Todo esto se llevo a cabo con la intención de contar con la mayor certeza de un posible comportamiento caótico al variar  $m_1$ .

La Figura 4.3 (a),(b) muestra el resultado de la implementación numérica llevada a cabo. En ella se puede constatar que cuando  $0 < m_2 \leq 0.2$  hay una órbita de periodo cuatro, es decir, coincide con lo se aprecia en los diagramas cobweb y series de tiempo para el valor de  $m_1 = 0.2$ . Cuando el valor del parámetro  $m_1 \approx 0.25$ , se aprecia un colapso de la órbita periódica, después viaja por gran parte de una región acotada, este comportamiento se mantiene hasta que  $x_0 < 0.25$ , a partir de aquí surge nuevamente una órbita pero esta vez de periodo seis, la cual se mantiene mientras  $m_1 < 0.45$ , donde otra vez se pierde la periodicidad. Si  $0.45 < m_1 < 1$ , se presentan órbitas que tienen un aparente comportamiento caótico, lo cual concuerda con lo observado en los diagramas cobweb y series del tiempo para los valores de  $m_1 = 0.8$  y  $m_2 = 0.9$ .

Dado que las órbitas se desarrollan a lo largo de una región acotada, surge la siguiente pregunta:

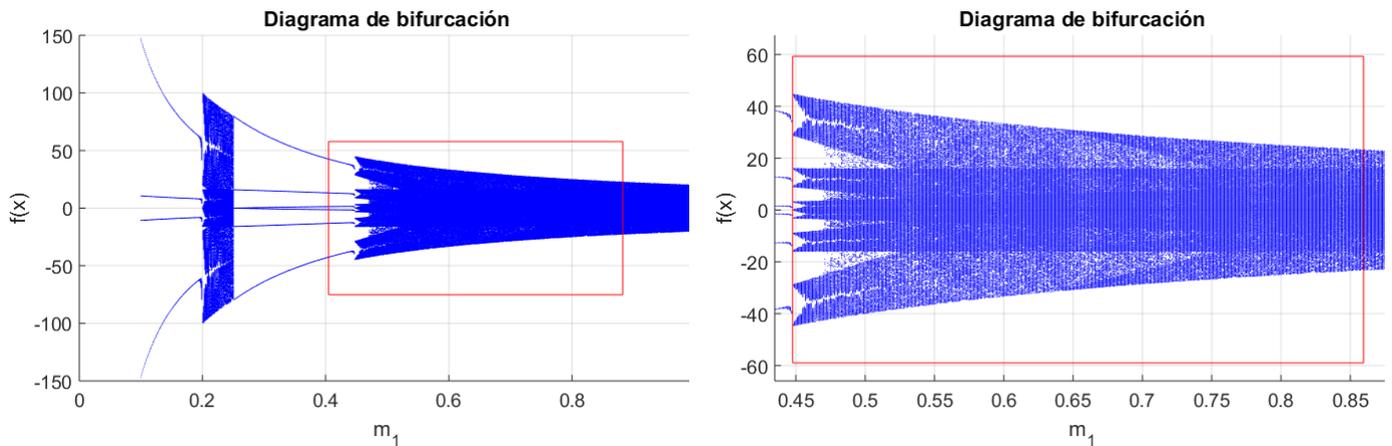
¿ Si  $0.20 < m_1 < 0.25$  y  $0.45 < m_1 < 1$  (y por lo visto en el diagrama de bifurcación), entonces cada uno de los mapeos resultantes presentarán comportamiento caótico? Para que esto sea cierto basta calcular el exponente de Lyapunov para:  $0 < m_1 < 1$  y verificar que en los rangos propuestos, este tiene un valor positivo, así, mediante la definición [exp] concluir que efectivamente existe caos en en este sentido.

La Figura 4.3 (c), proporciona la solución numérica del cálculo de los exponentes de Lyapunov. En el eje horizontal se localiza el parámetro  $m_1$ , mientras que en el vertical se encuentra su correspondiente exponente. De la observación a la Figura se desprende lo siguiente:

1. Si  $0 < m_1 < 0.2$ , entonces de la gráfica se ve que el exponente  $\lambda(x_0)$  tiene valor negativo, es decir que, dado un punto cercano  $x_0 + \delta$  a  $x_0$  ( $\delta > 0$ ), este no se aleja de él al transcurrir la dinámica, es decir no hay sensibilidad a las condiciones iniciales. Este resultado concuerda con los obtenidos en las series de tiempo, diagramas cobweb, así como en el de bifurcación. Es así que en este rango sucede que: las órbitas o son de periodo cuatro o eventualmente convergen a ella.
2. Para  $0.2 < m_2 \leq 0.25$ , el exponente de Lyapunov es positivo, además por lo visto en el diagrama de bifurcación, las órbitas están acotadas, es así que por la definición 2.17, se concluye que los MLP en este rango son caóticos. Asimismo, estos resultados concuerdan con las series de tiempo y los diagramas cobweb.

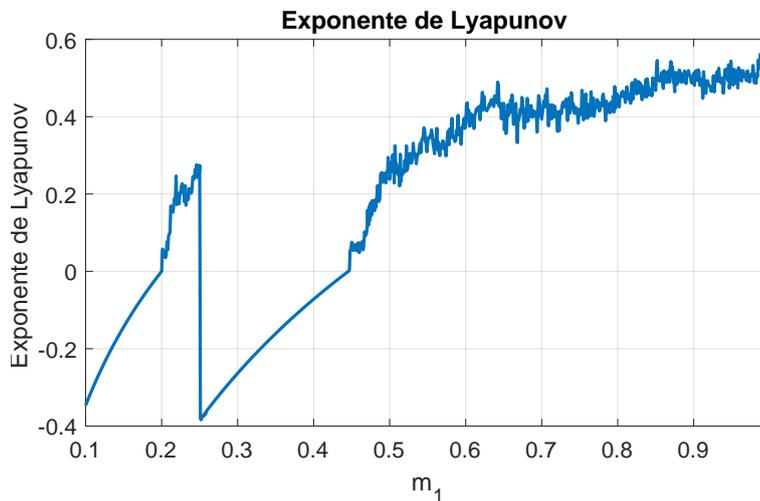
3. Al pasar del valor 0.25 y hasta aproximadamente 0.45, el exponente de Lyapunov vuelve a decaer por debajo de cero, es decir y como se pudo observar en el diagrama de bifurcación, no existe caos.
4. Finalmente, cuando  $0.45 < m_1 < 1$ , el exponente vuelve a ser mayor que cero, al igual que en el punto 2 se concluye la existencia de caos.

Por lo que, podemos concluir que los mapeos obtenidos al variar el parámetro  $m_1$  entre cero y uno, dejando fijos el resto en los valores proporcionados, producen una familia de MLP sin puntos fijos y caóticos.



(a) Diagrama de bifurcación,  $0 < m_1 < 1$ .

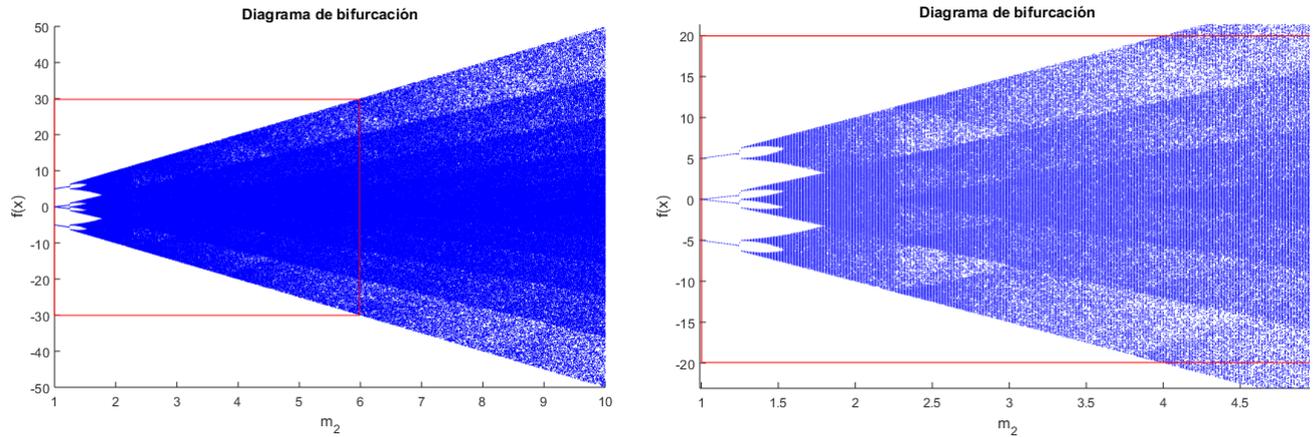
(b) Acercamiento del diagrama de bifurcación anterior.



(c) Exponentes de Lyapunov del MLP,  $0 < m_1 < 1$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ .

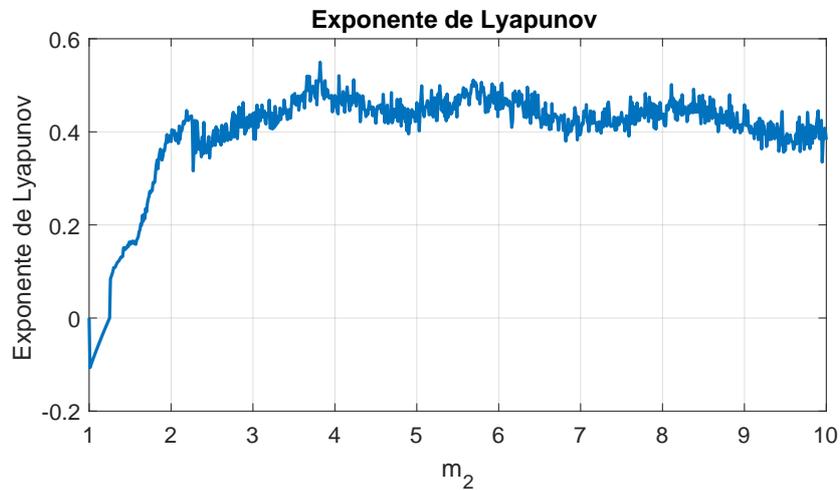
**Figura 4.3:** Diagrama de bifurcación y exponentes de Lyapunov del MLP.

Se realizó un segundo cálculo tanto de diagrama de bifurcación como de exponentes de Lyapunov, que se consiguieron al hacer variar la pendiente  $m_2$  entre 1 y 10, así como de mantener constantes  $m_1 = 0.8$  y  $b_1 = 4$ . Ambos diagramas son expuestos en la Figura 4.4, en ella se puede observar que a diferencia de lo mostrado en la Figura 4.3, el exponente de Lyapunov una vez que es mayor a cero no sufre una caída por debajo de este valor. Esto sucede para valores superiores a  $m_2 \approx 1.2$ . Del diagrama de bifurcación se constata que las órbitas están acotadas cuando  $1.2 < m_2 < 10$ , por lo tanto al hacer uso de la Definición 2.17, los MLP sin puntos fijos generados a partir de variar el parámetro  $m_1$  y dejando constantes los demás, conforman una subfamilia que exhibe caos.



(a) Diagrama de bifurcación,  $1 < m_2 < 10$ .

(b) Acercamiento del diagrama de bifurcación anterior.



(c) Exponentes de Lyapunov del MLP,  $1 < m_2 < 10$ .

**Figura 4.4:** Segundo diagrama de bifurcación y exponentes de Lyapunov del MLP.

## 4.2. Mapeo lineal por partes sin puntos fijos y caótico

En vista de los promisorios resultados expuestos en la sección anterior, se escogió un mapeo lineal por partes dentro de la familia que exhibió caos a través de los exponentes de Lyapunov, con la intención de demostrar que el sistema dinámico definido por la Ecuación 3.9 es caótico en el sentido de Devaney para ciertos valores de los parámetros,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$ . La prueba consiste primero en asegurar la existencia de un conjunto invariante, posteriormente se confirmará que en éste conjunto se presenta caos mediante el cumplimiento de las tres propiedades dadas en la definición de Devaney.

### 4.2.1. Conjunto invariante presente en un mapeo lineal por partes

**Proposición 3.** Sea  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , el mapeo lineal por partes con parámetros  $m_1 = 0.8$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ , definido como

$$f(x) = \begin{cases} 0.8x + 4, & \text{si } x \leq -5; \\ 5x + 25, & \text{si } -5 < x < 0; \\ 5x - 25, & \text{si } 0 \leq x < 5; \\ 0.8x - 4, & \text{si } x \geq 5. \end{cases} \quad (4.1)$$

Entonces el intervalo cerrado  $\Lambda = [-25, 25]$ , es un conjunto invariante para el mapeo  $f$ . Además existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(x) \in \Lambda$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Observar que el mapeo  $f$  definido en (4.16) tiene los valores:  $0 < m_1 = 0.8 < 1$  y  $m_2 = 5 > 0$ , al emplear el Teorema 3.2, se deduce que este mapeo efectivamente carece de puntos fijos.

*Demostración.* Considérese los subintervalos

$$\Lambda_1 = [-25, -19.0625], \Lambda_2 = (-19.0625, -11.25], \Lambda_3 = (-11.25, -5], \Lambda_4 = (-5, 0], \\ \Lambda_5 = (0, 5], \Lambda_6 = (5, 11.25], \Lambda_7 = (11.25, 19.0625], \Lambda_8 = (19.0625, 25].$$

Sin pérdida de generalidad tómesese una condición inicial  $x_0$  que se encuentre en el subintervalo,  $[-25, -19.0625]$ , entonces aquí  $f(x) = 0.8x + 4$ . Por ser  $f$  continua y creciente en este intervalo, se satisface

$$f(-25) = -16 \leq f(x_0) \leq f(-19.0625) = -11.25.$$

Es decir,  $f(x_0) \in \Lambda_2$ , donde se cumple que  $f(x) = 0.8x + 4$ , así

$$f^2(-25) = f(-16) = -8.8 \leq f^2(x_0) \leq -5 = f(-11.25) = f^2(-19.0625).$$

Dicho de otra forma,  $f^2(x_0) \in \Lambda_3$ , donde,  $f(x) = 0.8x + 4$ , entonces

$$f^3(-25) = f(-8.8) = -3.04 \leq f^3(x_0) \leq 0 = f(-5) = f^3(-19.0625).$$

Esto es,  $f^3(x_0) \in \Lambda_4$ , donde  $f(x) = 5x + 25$ .

b) En el intervalo  $\Lambda_4$ ,  $f$  mapea al intervalo  $[0, 25)$ , el cual contiene a los subintervalos:

$\Lambda_5, \Lambda_6, \Lambda_7$  y  $\Lambda_8$ , por lo que  $f^4(x_0) \in \Lambda_i$  para algún  $i = 5, 6, 7, 8$ .

c) Si  $f^4(x_0)$  es mapeado a uno de los siguientes subintervalos:  $\Lambda_8, \Lambda_7, \Lambda_6, \Lambda_5$ , entonces por un argumento similar al visto en a), a lo máximo en tres iteraciones se cumple que  $f^{i+4}(x_0) \in \Lambda_5$  para algún  $i = 0, 1, 2, 3$ .

d) Cuando  $f^{i+4}(x_0) \in \Lambda_5$ ,  $f$  mapeará al subintervalo  $[-25, 0]$ , el cual contiene a los subintervalos:  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  y  $\Lambda_4$ , por lo tanto se cumplirá que  $f^j(x_0) \in \Lambda_i$  para algún  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $5 \leq j \leq 11$ . En cualquier caso y por lo visto en a), se cumple que para algún  $m \geq j$ ,  $f^m(x_0) \in \Lambda_4$ .

e) Por lo probado en a), existe un entero  $k > m$  tal que  $f^k(x_0) \in \Lambda_5$ . Además dado un entero  $n_1 \geq k$ , existe otro entero  $n_2 \geq n_1$  (para algún  $n_2 = 1, 2, 3, 4$ ), que cumple uno y solo uno de los siguientes casos

i)  $f^{n_2}(x_0) \in \Lambda_4$ .

ii)  $f^{n_2}(x_0) \in \Lambda_5$ .

Consecuentemente

iii)  $f^n(x_0) \in \Lambda_4 \subset [-25, 25]$ , o

iv)  $f^n(x_0) \in \Lambda_5 \subset [-25, 25]$ .

En cualquiera caso  $f^n(x_0) \in \Lambda = [-25, 25]$ . Argumentos similares a los recién expuestos, permiten concluir que cualquier condición inicial  $x_0$  en algún otro subintervalo permanecerá en el intervalo  $\Lambda = [-25, 25]$ . para todo tiempo  $t$  posterior.  $\square$

A continuación se probarán un par de lemas que ayudarán en la segunda parte de la demostración.

**Lema 4.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  un mapeo tal que

$$f(x) = 0.8x + 4. \quad (4.2)$$

Entonces,  $f$  es un mapeo creciente en  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , tal que  $x_1 < x_2$ , entonces si se multiplica por 0.8 a ambos lados de la desigualdad anterior, se tiene

$$0.8x_1 < 0.8x_2,$$

al sumar 4 a cada lado de la última desigualdad, se consigue

$$f(x_1) = 0.8x_1 + 4 < 0.8x_2 + 4 = f(x_2).$$

Es decir,  $f(x_1) < f(x_2)$ . Al ser  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos arbitrarios, se concluye que  $f$  es creciente en  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Lema 4.2.** Sea  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  un mapeo tal que,  $f(x) = 0.8x + 4$ . Si  $x < 20$ , entonces,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^{n-1}(x) < f^n(x). \quad (4.3)$$

*Demostración.* En la sección 2.5, y al hacer uso de la Ecuación (2.13), se sabe que para un mapeo  $f$  de la forma;  $f(x) = ax + b$ ,  $f^n(x)$ , se puede expresar como

$$f^n(x) = \left( x + \frac{b}{a-1} \right) a^n + \frac{b}{1-a}.$$

Para todo  $n$ , en el conjunto de los números enteros. Y que además si  $|a| < 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{b}{1-a},$$

Así para el mapeo  $f(x) = 0.8x + 4$ , se tiene que,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^n(x) = (x - 20) 0.8^n + 20. \quad (4.4)$$

Y como,  $a = 0.8 < 1$ , entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{4}{1-0.8} = 20. \quad (4.5)$$

Dado que,  $0.8 < 1$ , entonces,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$0.8^{n-1} > 0.8^n \quad (4.6)$$

Si  $x < 20$ , entonces

$$x - 20 < 0$$

Así, al multiplicar  $(x - 20)$ , en ambos lados de la desigualdad (4.6), se tiene que,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(x - 20) 0.8^{n-1} < (x - 20) 0.8^n \quad (4.7)$$

Sumando 20 en cada lado de la desigualdad (4.7), se logra la siguiente desigualdad

$$f^{n-1}(x) = (x - 20) 0.8^{n-1} + 20 < (x - 20) 0.8^n + 20 = f^n(x). \quad (4.8)$$

Es decir,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^{n-1}(x) < f^n(x). \quad (4.9)$$

□

Expuestos los lemas anteriores, a continuación se probará que existe  $k \in \mathbb{Z}$ , tal que se cumple  $f^k(x_0) \in \Lambda$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Si la condición inicial no está dentro del intervalo  $\Lambda$ , entonces puede suceder que

1.  $x_0 < -25$ .

Si este es el caso, considere

$$g : (-\infty, -5] \mapsto \mathbb{R}, \quad (4.10)$$

como el mapeo;  $f|_{(-\infty, -5]}$ , donde  $f$  está definido como en la Ecuación (4.2) del Lema 4.1.

Como  $x < -25$ , en particular se tiene  $x < -5 = -a$ , con lo que el mapeo,

$$f(x) = g(x) = 0.8x + 4, \quad (4.11)$$

Así para un  $x_0 \in (-\infty, -25)$  arbitrario, se cumple que,  $\forall n \in \mathbb{N}$  (Esto, debido al Lema 4.1)

$$g^{n-1}(x_0) < g^n(x_0). \quad (4.12)$$

Además, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$g^{k-1}(x_0) < -25 \leq g^k(x_0).$$

De lo contrario, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , se tendría que

$$g^k(x_0) < -25,$$

Y como  $g$ , es el mapeo  $f$  restringido al conjunto  $(-\infty, -5]$ , entonces también se cumpliría que, para todo  $k \in \mathbb{N}$

$$f^k(x_0) < -25.$$

Obteniendo el límite cuando  $k$  tiende a infinito en ambos lados de la última ecuación, se llegaría a que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x_0) = 20 < -25.$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto

$$g^k(x_0) \geq -25, \quad (4.13)$$

para algún  $k \in \mathbb{N}$ .

Por el Lema 4.1, el mapeo  $f$  es creciente en  $\mathbb{R}$ , entonces  $g$ , también es creciente en  $(-\infty, -5]$ .

Por lo que si

$$g^{k-1}(x_0) < -25,$$

entonces

$$g^k(x_0) < g(-25) = -16,$$

es decir

$$g^k(x_0) < -16 \quad (4.14)$$

Así de (4.13) y (4.14), se sigue que para algún  $k \in \mathbb{N}$

$$-25 \leq g^k(x_0) < -16 \quad (4.15)$$

Por lo tanto,  $f^k(x_0) \in \Lambda$ . De manera análoga, si  $x_0 > 25$ , existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{l-1}(x_0) > 25$  y  $f^l(x_0) \leq 25$ . Consecuentemente cualquier condición inicial  $x_0 \in \mathbb{R}$  converge a  $\Lambda$ .

□

## 4.2.2. Mapeo lineal por partes caótico en un conjunto invariante

El objetivo final de esta tesis es exhibir un elemento de la familia de MLP sin puntos fijos, que tenga dinámica caótica. En concreto se tomará el mapeo:

$f : [-25, 25] \mapsto [-25, 25)$ , con parámetros  $m_1 = 0.8$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ , definido como

$$f(x) = \begin{cases} 0.8x + 4, & \text{si } x \leq -5; \\ 5x + 25, & \text{si } -5 < x < 0; \\ 5x - 25, & \text{si } 0 \leq x < 5; \\ 0.8x - 4, & \text{si } x \geq 5. \end{cases} \quad (4.16)$$

Donde  $\Lambda = [-25, 25]$ . En la proposición anterior se probó que el intervalo cerrado  $\Lambda$  es un conjunto invariante, la siguiente y última tarea es comprobar que en dicho conjunto existe comportamiento caótico desde la definición de Devaney. Para llevar a cabo esto, primero se plantearán y verificarán algunas proposiciones que ayudarán a demostrar cada una de las tres propiedades que debe presentar el mapeo para exhibir caos, en cada una de ellas se volverá a tomar en cuenta los subintervalos:

$\Lambda_1 = [-25, -19.0625]$ ,  $\Lambda_2 = [-19.0625, -11.25]$ ,  $\Lambda_3 = [-11.25, -5]$ ,  $\Lambda_4 = (-5, 0]$ ,  $\Lambda_5 = (0, 5]$ ,  $\Lambda_6 = (5, 11.25]$ ,  $\Lambda_7 = (11.25, 19.0625]$ ,  $\Lambda_8 = (19.0625, 25]$ .

**Proposición 4.** *Sea  $(a, b) \subset [-25, 25]$ , un intervalo abierto y que cumple alguno de los siguientes casos:*

- *Caso 1.- Si  $(a, b) \subset \Lambda_1 = [-25, -19.0625]$ , entonces el intervalo  $(f^3(a), f^3(b)) \subset \Lambda_7 = [-5, 0]$ .*
- *Caso 2.- Si  $(a, b) \subset \Lambda_2 = [-19.0625, -11.25]$ , entonces el intervalo  $(f^2(a), f^2(b)) \subset [-5, 0]$ .*
- *Caso 3.- Si  $(a, b) \subset \Lambda_3 = [-11.25, -5]$ , entonces el intervalo  $(f(a), f(b)) \subset [-5, 0]$ .*
- *Caso 4.- Si  $(a, b) \subset \Lambda_6 = [5, 11.25]$ , entonces el intervalo  $(f(a), f(b)) \subset \Lambda_5 = [0, 5]$ .*
- *Caso 5.- Si  $(a, b) \subset \Lambda_7 = [11.25, 19.0625]$ , entonces el intervalo  $(f^2(a), f^2(b)) \subset [0, 5]$ .*
- *Caso 6.- Si  $(a, b) \subset \Lambda_8 = [19.0625, 25]$ , entonces el intervalo  $(f^3(a), f^3(b)) \subset [0, 5]$ .*

*Demostración.* Caso 1.- Como  $f(-25) = -16$  y  $f(-19.0625) = -11.25$  entonces  $(f(a), f(b)) \in [-19.0625, -11.25]$ . Luego  $f^2(-25) = f(-16) = -8.8$  y  $f^2(-19.0625) = f(-11.25) = -5$ , así  $(f^2(a), f^2(c)) \subseteq [-11.25, -5]$ .

Por último  $f^3(-25) = f(-16) = f(-8.8) = -3.04$  y  $f^3(-19.0625) = f(-11.25) = f(-5) = 0$ , por lo que  $(f^3(a), f^3(c)) \subseteq [-5, 0]$ .

Caso 2.- Como  $f(-19.0625) = -11.25$  y  $f(-11.25) = -5$  entonces  $(f(a), f(b)) \subseteq [-11.25, -11.25]$ . Luego  $f^2(-19.0625) = f(-11.25) = -5$  y  $f^2(-11.25) = f(-5) = 0$ , así  $(f^2(a), f^2(c)) \subseteq [5, -0]$ .

Caso 3.- Como  $f(-11.25) = -5$  y  $f(-5) = 0$  entonces  $(f(a), f(b)) \subseteq [-5, 0]$ .

Si  $(a, b) \in [0, 25]$  de ahí la presencia de los casos 4,5 y 6, de forma similar a cuando  $(a, b) \in [-25, 0]$  se prueba su validez.  $\square$

**Proposición 5.** Sea  $(a, b) \subset [-25, 25]$ , un intervalo abierto. Entonces, existen  $\bar{a}, \bar{b} \in [a, b]$ , tal que el intervalo  $(\bar{a}, \bar{b})$  está contenido en alguno de los intervalos  $\Lambda_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ).

*Demostración.* Si  $(a, b)$  está dentro de algún intervalo  $\Lambda_i$  y si se toma  $\bar{a} = a$  y  $\bar{b} = b$ , se tiene que  $(\bar{a}, \bar{b}) \subset \Lambda_i$ .

Si el intervalo  $(a, b)$  no está totalmente contenido en alguno de los intervalos  $\Lambda_i$  entonces  $(a, b)$  esta en al menos dos intervalos contiguos, de tal suerte que existe un elemento  $c \in (a, b)$  tal que  $a < c < b$  y toma uno y solo uno de los valores  $-19.0625, -11.25, -5, 5, 11.25, 19.0625$ , consecuencia de esto se tienen dos subintervalos:  $(a, c]$  y  $[c, b)$ , para los cuales se cumple que  $(a, c] \subset \Lambda_i$  y  $[c, b) \cap \Lambda_{i+1} \neq \emptyset$ . Así, si tomamos  $\bar{a} = a$  y  $\bar{b} = c$  ó  $\bar{a} = c$  y  $\bar{b} = b$ , se cumple que  $(\bar{a}, \bar{b})$  está contenido en algún intervalo.

Observar que si tenemos el caso en el que  $(a, b)$  tenga un elemento  $c = 0$ , entonces existen  $a', b'$  tal que  $a \leq a' < 0 < b' \leq b$  y además  $(a', b') \subset [-5, 5]$ , entonces  $(a', b')$  se divide en los intervalos  $(a', 0]$  y  $[0, b')$ , los cuales están contenidos en los intervalos  $\Lambda_4$  y  $\Lambda_5$ , respectivamente, por lo que para este caso basta tomar uno de ellos para que se cumpla lo establecido en la proposición.  $\square$

De las proposiciones anteriores se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 1.** Sea  $(a, b) \subset [-25, 25]$ , un intervalo abierto. Entonces, existen  $\bar{a}, \bar{b} \in [a, b]$ , tal que el subintervalo abierto  $(\bar{a}, \bar{b}) \subset (a, b)$ , cumple que;  $(f^i(\bar{a}), f^i(\bar{b})) \subset [-5, 0]$  ó  $(f^i(\bar{a}), f^i(\bar{b})) \subset [0, 5]$ , para algún  $i = 1, 2, 3$ .

*Demostración.* La prueba de esto es consecuencia de las proposiciones anteriores.  $\square$

**Proposición 6.** Sea  $L_0 = |\bar{b} - \bar{a}|$  la longitud inicial del intervalo  $(\bar{a}, \bar{b}) \subseteq [a, b]$ , donde  $\bar{a}, \bar{b}$  son los elementos que satisfacen la proposición 5, entonces se tiene que la longitud  $L_k = |f^k(\bar{b}) - f^k(\bar{a})|$ , verifica que  $L_k \geq 2.56L_0$  (para algún  $k = 1, 2, 3, 4$ ).

*Demostración.* Si  $(\bar{a}, \bar{b}) \subseteq [-5, 0]$  ó  $(\bar{a}, \bar{b}) \subseteq [0, 5]$ , entonces por definición se cuenta con que  $f(x) = 5x - 25$  ó  $f(x) = 5x + 25$  respectivamente para cada uno de los intervalos considerados. Así cualquier elemento del intervalo  $(\bar{a}, \bar{b})$  es aumentado cinco veces su valor original, por lo tanto  $L_1 = |f^1(\bar{b}) - f^1(\bar{a})| = 5L_0 \geq 2.56L_0$ . Si no se cumple lo anterior el subintervalo  $(\bar{a}, \bar{b}) \subseteq (a, b)$  cumple alguno de los casos de la Proposición 5, esto es:

Si se parte de que  $(\bar{a}, \bar{b}) \subseteq (-25, -19.0625)$  entonces  $f(x) = 0.8x + 4$  y por lo tanto se cumple  $L_1 = |f^1(\bar{b}) - f^1(\bar{a})| = 0.8L_0$  y  $(f(\bar{a}), f(\bar{b})) \subseteq (-19.0625, -11.25)$  y aquí  $f(x) = 0.8x + 4$  y se cumple  $L_2 = |f^2(\bar{b}) - f^2(\bar{a})| = 0.64L_0$ . y  $(f^2(\bar{a}), f^2(\bar{b})) \subseteq (-11.25, -5)$  y aquí  $f(x) = 0.8x + 4$  y se satisface  $L_3 = |f^3(\bar{b}) - f^3(\bar{a})| = 0.512L_0$ . Con  $(f^3(\bar{a}), f^3(\bar{b})) \subseteq (-5, 0)$  y aquí  $f(x) = 5x + 25$  y se satisface  $L_4 = |f^4(\bar{b}) - f^4(\bar{a})| = 2.56L_0$ .

Si se tiene que  $(\bar{a}, \bar{b}) \subseteq (-19.0625, -11.25)$ , entonces  $f(x) = 0.8x + 4$  y por lo tanto se verifica  $L_1 = |f^1(\bar{b}) - f^1(\bar{a})| = 0.8L_0$  y  $(f(\bar{a}), f(\bar{b})) \subseteq (-11.25, -5)$  y aquí  $f(x) = 0.8x + 4$  y se cumple  $L_2 = |f^2(\bar{b}) - f^2(\bar{a})| = 0.64L_0$  y  $(f^2(\bar{a}), f^2(\bar{b})) \subseteq (-5, 0)$  y aquí  $f(x) = 5x + 25$  y se cumple  $L_3 = |f^3(\bar{b}) - f^3(\bar{a})| = 3.2L_0$ .

Si  $(\bar{a}, \bar{b}) \subseteq (-11.25, -5)$ , entonces  $f(x) = 0.8x + 4$  y por lo tanto se cumple  $L_1 = |f^1(\bar{b}) - f^1(\bar{a})| = 0.8L_0$  y  $(f(\bar{a}), f(\bar{b})) \subseteq (-5, 0)$  y aquí  $f(x) = 5x + 25$  y se satisface  $L_2 = |f^2(\bar{b}) - f^2(\bar{a})| = 4L_0$ .

De manera análoga se prueban los casos 4,5,6. Por lo tanto se verifica que  $L_k \geq 2.56L_0$ .  $\square$

**Proposición 7.** Sea  $(a, b) \subseteq [-25, 25]$ , un intervalo abierto. Entonces, existen  $\bar{k} \in \mathbb{N}$  y  $\bar{a}, \bar{b} \in (a, b)$ , tal que se cumple alguno de los casos siguientes:

- $[-5, -4] \subset (f^{\bar{k}}(\bar{a}), f^{\bar{k}}(\bar{b}))$ ,
- $[4, 5] \subset (f^{\bar{k}}(\bar{a}), f^{\bar{k}}(\bar{b}))$ .

*Demostración.* Si se toma de inicio un intervalo abierto  $(a, b) \subseteq [-25, 25]$ , con longitud inicial  $L_0 = |b - a|$ , tal que

- $(a, b) \in (-25, -19.0625)$ ,
- $(a, b) \in (-19.0625, -11.25)$ ,
- $(a, b) \in (-11.25, -5)$ ,
- $(a, b) \in (-5, 0)$ .

Se tiene que en los tres primeros casos el intervalo inicial es iterado a un subintervalo de  $(-5, 0)$  y en cada iteración es contraído  $0.8L_0$ . Como el máximo número de iteraciones para llegar son tres entonces la contracción máxima es  $0.512L_0$ .

Como el intervalo iterado está en  $(-5, 0)$ , en la siguiente iteración tendrá una longitud

$$|f^{k_1}(a) - f^{k_1}(b)| \geq 2.56L_0, \quad k_1 = 2, 3, 4. \quad (4.17)$$

La longitud de cada nuevo intervalo, que resulta de iterar el mapeo seguirá aumentando ( a lo máximo en cuatro iteraciones) mientras dicho intervalo no tenga intersección con cualquiera de los valores clave.

De hacerlo, existirá una iteración para la cual se tiene un intervalo que contiene, ya sea al 5 o al -5. i.e., existe  $k_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $-5$  (ó  $5$ )  $\in I_{f^{k_2}} = (f^{k_2}(a), f^{k_2}(b))$ .

Suponiendo que  $-5 \in I_{f^{k_2}}$ , y al dividir este intervalo en los subintervalos :

- el intervalo  $(f^{k_2}(a), -5)$ ,
- el intervalo  $[-5, f^{k_2}(b))$ .

Si en el segundo intervalo se cumple que  $f^{k_2}(b) = -4$ , entonces se cumple lo buscado. De lo contrario, en la siguiente iteración se tendrán dos subintervalos:

1. Uno de  $(f^{k_3}(a), 0) = [-\varepsilon, 0)$ .
2. Y otro de  $[0, f^{k_3}(b)) = [0, \varepsilon)$ .

Veamos como al hacer ciertas consideraciones, alguno de los subintervalos mencionados conseguirán mapear a  $[-5, -4]$  ó a  $[4, 5]$ .

Como  $(f^{k_3}(a), 0), [0, f^{k_3}(b)) \in [-5, 0]$  y teniendo en cuenta la ecuación 4.17, se tiene que:

$$|f^{k_3}(a) - f^{k_3}(b)| \geq 2.56L_0. \quad (4.18)$$

Así se tomará del intervalo (a) ó (b) aquel que cumpla que:

$$|f^{k_3}(a) - 0| \geq \frac{1}{2}|f^{k_3}(a) - f^{k_3}(b)|, \quad (4.19)$$

ó

$$|0 - f^{k_3}(b)| \geq \frac{1}{2}|f^{k_3}(a) - f^{k_3}(b)|. \quad (4.20)$$

En cualquier caso, se tiene por (4.18):

$$|f^{k_3}(a) - 0| \geq 1.28L_0, \quad (4.21)$$

ó

$$|0 - f^{k_3}(b)| \geq 1.28L_0. \quad (4.22)$$

Así en la iteración  $f^{k_3+1}$ , existirá un intervalo de la forma

$$(f^{k_3+1}(a), 25),$$

ó

$$(-25, f^{k_3+1}(b)).$$

Con longitud al menos  $6.4L_0$ , i.e  $L_{k_3+1} = |f^{k_3+1}(a) - 25| \geq 6.4L_0$ , ó  $L_{k_3+1} = |-25 - f^{k_3+1}(b)| \geq 6.4L_0$ .

Sin pérdida de generalidad tomemos el intervalo

$$(-25, f^{k_3+1}(b)).$$

Si acatamos el mismo argumento, que para el intervalo  $(a, b)$ , este intervalo tendrá una longitud creciente, y existirá una iteración para la cual se conserva un intervalo que contiene, ya sea al 5 o al -5. i.e.,

existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $-5$  (ó  $5$ )  $\in I_{f^n} = (f^n(-25), f^n(b))$ .

Suponiendo que  $-5 \in I_{f^n}$ , se repite el proceso de dividir en dos subintervalos:

- el intervalo  $(f^n(-25), -5)$ ,
- el intervalo  $[-5, f^n(b))$ .

Si en el segundo intervalo se cumple que  $f^n(b) \geq -4$ , entonces se demuestra lo pretendido en la proposición.

De no cumplirse lo anterior, entonces se repite el proceso hecho en esta demostración, de tal manera que en la iteración  $f^{n+2}$ , existirá un intervalo de la forma:

$$(f^{n+2}(-25), 25),$$

ó

$$(-25, f^n(b)).$$

Con longitud al menos  $6.4L_{k_3+1}$ . Si para una iteración  $n_2 > n$ , se vuelve a obtener un intervalo que contiene ya sea al 5 o al -5, esto es, existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $-5$  (ó  $5$ )  $\in I_{f^{n_2}} = (f^{n_2}(-25), f^{n_2}(b))$ .

Suponiendo que  $-5 \in I_{f^{n_2}}$ , entonces se vuelve a realizar el proceso de dividir en dos subintervalos:

- el intervalo  $(f^{n_2}(-25), -5)$ ,
- el intervalo  $[-5, f^{n_2}(b)]$ .

Si en el segundo intervalo se cumple que  $f^{n_2}(b) \geq -4$ , por consiguiente se demuestra lo pretendido en la proposición.

Como se aprecia, cada vez que se obtienen dos intervalos, al menos uno de estos posee una longitud mayor que la de aquel antes de partirse en estos dos intervalos, en consecuencia debe existir un entero  $l$  tal que

$$-5(5) \in (f^l(-25), f^l(\bar{b})). \quad (4.23)$$

Con  $f^l(\bar{b}) \geq -4$  y de esta manera se cumple lo buscado. □

**Proposición 8.** *Existe un entero  $k$ , tal que en la iteración  $f^k$  se tienen los dos intervalos:*

1.  $(f^k(a), 0)$ .
2.  $[0, f^k(b)]$ .

*Demostración.* Sea  $x \in (a, b)$ , tal que  $L_0 = |b - a|$ , es la longitud inicial del intervalo,  $(a, b)$ , entonces puede suceder que para un elemento  $c$  en el intervalo  $(a, b)$ , se tiene  $f(c) = 0$ , por lo tanto  $k = 1$  y se cumple lo buscado. Si no, el intervalo  $(f(a), f(b))$ , está contenido en uno y solo uno de los intervalos

- a)  $[-25, 0)$ ,
- b)  $[0, 25)$ .

- I. Sin pérdida de generalidad, supongamos que,  $(f(a), f(b)) \subset [-25, 0)$ , entonces se pueden dar uno de los siguientes casos

Existe  $y \in (a, b)$  tal que

- a)  $f(y) = -19.0625$ ,
- b)  $f(y) = -11.25$ ,
- c)  $f(y) = -5$ .

En cualquiera caso, y como ya se visto en las anteriores demostraciones, se cumple que para algún  $i = 1, 2, 3$ ,  $f(i) = 0$  y para esa iteración se generan los intervalos:

- a)  $(f^i(a), 0)$ .
- b)  $[0, f^i(b)]$ .

Y lo que se quería demostrar se ha logrado.

II. Si no se presenta ninguno de los casos anteriores, se tiene que,  $(f(a), f(b)) \subset \Lambda_j$ , para algún  $j = 1, 2, 3, 4$ . De esta manera, la longitud del intervalo  $(f^{j+1}(a), f^{j+1}(b))$ , cumplirá que

$$L_{j+1} = |f^{j+1}(b) - f^{j+1}(a)| \geq 2.56L_0. \quad (\text{para algún, } j = 1, 2, 3, 4.)$$

Y además se satisface que:  $(f^{j+1}(a), f^{j+1}(b)) \subset (0, 25)$ . De esta forma, para el intervalo,  $(f^{j+1}(a), f^{j+1}(b))$  puede suceder como en I que, existe  $y \in (a, b)$  tal que

a)  $f^{j+1}(y) = 19.0625$ ,

b)  $f^{j+1}(y) = 11.25$ ,

c)  $f^{j+1}(y) = 5$ .

En cualquiera caso, se cumple que para algún  $i = 1, 2, 3$ ,  $f^{j+i+1}(y) = 0$ , y para esa iteración se generan los intervalos

a)  $(f^{j+i+1}(a), 0)$ .

b)  $[0, f^{j+i+1}(b)]$ .

Y lo que se quería probar se ha conseguido.

III. Si no se da ninguno de los casos anteriores, entonces se tiene que,  $(f^{j+i+1}(a), f^{j+i+1}(b))$ , para algún  $j = 5, 6, 7, 8$ . De esta manera, la longitud del intervalo  $(f^{j+i+1}(a), f^{j+i+1}(b))$  cumplirá que

$$L_{j+i+1} = |f^{j+i+1}(b) - f^{j+i+1}(a)| \geq 2.56^2 L_0. \quad (\text{para algún, } j = 1, 2, 3, 4.)$$

Además se satisface que:  $(f^{j+i+1}(a), f^{j+i+1}(b)) \subset (-25, 0)$ . De esta forma, para el intervalo,  $(f^{j+i+1}(a), f^{j+i+1}(b))$  puede suceder como en I que

Existe  $y \in (a, b)$  tal que

a)  $f^{j+2i+1}(y) = -19.0625$ ,

b)  $f^{j+2i+1}(y) = -11.25$ ,

c)  $f^{j+2i+1}(y) = -5$ .

En cualquiera de estos, se cumple que para algún  $i = 1, 2, 3$ ,  $f^{j+2i+1}(y) = 0$  y para esa iteración se generan los intervalos

a)  $(f^{j+2i+1}(a), 0)$ .

b)  $[0, f^{j+2i+1}(b)]$ .

Y lo que se quería demostrar se ha logrado.

IV. De los pasos I,II y III se deduce lo siguiente. Si para alguna iteración  $p_1 > j + 2i + 1$ , no se presentan alguno de los casos

- a)  $f^{p_1}(y) = \pm 19.0625$ ,
- b)  $f^{p_1}(y) = \pm 11.25$ ,
- c)  $f^{p_1}(y) = \pm 5$ .

Donde el signo  $\pm$  será  $+(-)$ , si para esa iteración el intervalo  $(f^{p_1}(a), f^{p_1}(b))$  está contenido en  $(-25, 0)((0, 25)$ , respectivamente). Entonces se tiene que,  $(f^{p_1}(a), f^{p_1}(b)) \subset \Lambda_j$ , para algún  $j = 1, \dots, 8$ . De esta manera, la longitud del intervalo  $(f^{p_1}(a), f^{p_1}(b))$ , cumplirá que:

$$L_{p_1} = |f^{p_1}(b) - f^{p_1}(a)| \geq 2.56^{p_1} L_0.$$

Al darse esta situación, se puede observar que la longitud del intervalo original sigue creciendo, de tal manera que de continuar con esta inercia, deberá existir una iteración  $p_k; k \in \mathbb{N}$  tal que

$$L_{p_k} = |f^{p_k}(b) - f^{p_k}(a)| \geq 1.$$

El intervalo  $(f^{p_k}(a), f^{p_k}(b))$  al ser iterado, cumplirá

$$L_{p_{k+i}} = |f^{p_{k+i}}(b) - f^{p_{k+i}}(a)| \geq 2.56,$$

para algún  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Si para la iteración  $p_{k+i}$  no se presenta alguno de los casos:

- a)  $f^{p_1}(y) = \pm 19.0625$ ,
- b)  $f^{p_1}(y) = \pm 11.25$ ,
- c)  $f^{p_1}(y) = \pm 5$ .

Entonces el intervalo  $(f^{p_{k+i}}(a), f^{p_{k+i}}(b))$ , al ser iterado, cumplirá

$$L_{p_{k+2i}} = |f^{p_{k+2i}}(b) - f^{p_{k+2i}}(a)| \geq 6.5536,$$

para algún  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Si para la iteración  $p_{k+2i}$ , no sucede alguno de los casos:

- a)  $f^{p_{k+2i}}(y) = \pm 19.0625$ ,
- b)  $f^{p_{k+2i}}(y) = \pm 11.25$ ,
- c)  $f^{p_{k+2i}}(y) = \pm 5$ .

Consecuentemente, el intervalo  $(f^{p_{k+2i}}(a), f^{p_{k+2i}}(b))$ , al ser iterado satisfará

$$L_{p_{k+3i}} = |f^{p_{k+3i}}(b) - f^{p_{k+3i}}(a)| \geq 16.772.$$

para algún  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Y de esta forma el intervalo  $(f^{p_{k+3i}}(a), f^{p_{k+3i}}(b))$ , verificará que para algún  $y \in (-25, 25)$ , se presente alguno de los casos:

$$a) f^{p_{k+3i}}(y) = \pm 19.0625,$$

$$b) f^{p_{k+3i}}(y) = \pm 11.25,$$

$$c) f^{p_{k+3i}}(y) = \pm 5.$$

Y por consiguiente se ha conseguido lo buscado.

□

Una vez establecidas éstas proposiciones, lo siguiente es demostrar las tres propiedades que debe cumplir un mapeo para presentar caos en el sentido de Devaney.

**Proposición 9.** Si para algún intervalo abierto  $(a, b) \subseteq [-25, 25]$  y un  $k \in \mathbb{N}$  se cumple alguno de los casos siguientes:

- (a).-  $[-5, -4] \subseteq (f^k(a), f^k(b))$ ,
- (b).-  $[4, 5] \subseteq (f^k(a), f^k(b))$ ,

entonces el mapeo lineal por partes  $f : [-25, 25] \mapsto [-25, 25]$ , con parámetros  $m_1 = 0.8, m_2 = 5, b_1 = 4$ , definido como

$$f(x) = \begin{cases} 0.8x + 4, & \text{si } x \leq -5; \\ 5x + 25, & \text{si } -5 < x < 0; \\ 5x - 25, & \text{si } 0 \leq x < 5; \\ 0.8x - 4, & \text{si } x \geq 5, \end{cases} \quad (4.24)$$

es transitivo y tiene órbitas periódicas densas.

*Demostración.* Al cumplirse cualquier caso de la hipótesis en la iteración  $f^{k+1}$  se tendrá un subintervalo

$$(c, d) \subset (f^{k+1}(a), f^{k+1}(b)).$$

tal que  $(c, d) = [0, 5]$ , (o  $(c, d) = [0, -5]$ , en el otro caso).

De aplicarse el primer caso en la iteración  $f^{k+2}$ , el intervalo  $[0, 5]$  será mapeado al intervalo  $[-25, 0]$ . Si  $(a, b) \subset [-25, 0]$ , por lo tanto existirá un punto periódico  $p$  perteneciente a  $(a, b)$ .

Si  $(a, b) \not\subset [-25, 0]$ , entonces puede darse el caso que exista  $c = 0 \in (a, b)$  tal que  $(a, c) \subset [-25, 0]$  y  $(c, b) \in (0, 25)$ . Así, si tomamos el subintervalo  $(a, c) \subset [-25, 0]$  por la proposición anterior, se cumplirá alguna de las hipótesis (a) ó (b) y por el análisis hecho

en esta prueba se tendrá un punto periódico.

Si  $(a, b) \subset [0, 25)$ , entonces en la iteración  $f^{k+3}$ , el subintervalo  $(-5, 0) \subset [-25, 0]$  se mapeará al intervalo  $(0, 25)$ . Con lo que se contará con un punto periódico  $p$  perteneciente a  $(a, b)$ .

En cualquier caso se cumple que cualquier intervalo arbitrario  $(a, b)$  tiene un punto periódico, por lo tanto el intervalo  $\Lambda$  posee un conjunto denso de órbitas periódicas.

Además, se cumple que para cualquier abierto  $U = (a, b) \subset \Lambda$ , se conseguirá que  $f^{k+2}(U) \cap (-25, 0) \neq \emptyset$  y  $f^{k+3}(U) \cap (0, 25) \neq \emptyset$ . Por lo tanto, para un abierto cualquiera  $V \in [-25, 25]$ , existirá un entero positivo  $n$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Así el sistema es transitivo en  $\Lambda$ .  $\square$

**Proposición 10.** *El mapeo  $f$  definido en (4.24), posee sensibilidad a las condiciones iniciales.*

*Demostración.* Sea  $x$  un punto del intervalo  $[-25, 25]$  y  $B_\varepsilon(x)$  una vecindad abierta de  $x$ , i.e: un intervalo de la forma  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (a, b)$  donde  $\varepsilon > 0$ .

Escoja el menor entero  $m$  para el cual sea válida la Proposición 8, esto es, que se cuenten con los dos intervalos:

1.  $(f^m(a), f^m(y_1) = 0)$ .
2.  $[f^m(y_1) = 0, f^m(b))$ .

Para algún  $y_1 \in (a, b)$ .

Entonces  $f^m(x)$  pertenece a uno de los intervalos:  $(f^m(a), 0)$  o  $[0, f^m(b))$ .

Si  $f^m(x) \in (f^m(a), 0)$ , en la siguiente iteración se consigue  $f^{m+1}(x) \in (f^{m+1}(a), f(0)) \subset [-16, 25)$  y  $[f(0), f^{m+1}(b)) \subset [-25, 16]$ .

Como  $f^{m+1}(y_1) = f(0) = -25$ , entonces  $|f^{m+1}(x) - f^{m+1}(y_1)| \geq 9$ .

Si  $f^m(x) \notin (f^m(a), 0)$ , entonces,  $f^m(x) \in [0, f^m(b))$ . Como  $(f^m(a), 0) \in [-25, 0)$  existe  $y_2 \in (f^m(a), 0)$  tal que  $y_2 \geq -\frac{1}{5}$  y puesto que  $f(-\frac{1}{5}) = 24$ , entonces  $|f^{m+1}(x) - f^{m+1}(y_2)| \geq 8$ .

En cualquier caso se satisface que existe un  $\beta = 8 > 0$ , tal que para cualquier  $x$  y para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un punto  $y \in B_\varepsilon(x)$ , así como un entero positivo  $n = m + 1$ , tal que se satisface que la distancia entre  $f^n(x)$  y  $f^n(y)$  es al menos  $\beta$ . Es decir:

$$|f^n(x) - f^n(y)| \geq 8.$$

En consecuencia, el mapeo  $f$  posee dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.  $\square$

Finalmente, gracias al Teorema 4.1 se logra conseguir el último de los objetivos planteados en este trabajo. Dicho teorema se enuncia a continuación:

**Teorema 4.1.** El mapeo  $f : [-25, 25] \mapsto [-25, 25]$ , con parámetros  $m_1 = 0.8$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ , definido como

$$f(x) = \begin{cases} 0.8x + 4, & \text{si } x \leq -5; \\ 5x + 25, & \text{si } -5 < x < 0; \\ 5x - 25, & \text{si } 0 \leq x < 5; \\ 0.8x - 4, & \text{si } x \geq 5, \end{cases} \quad (4.25)$$

es caótico en el sentido de Devaney.

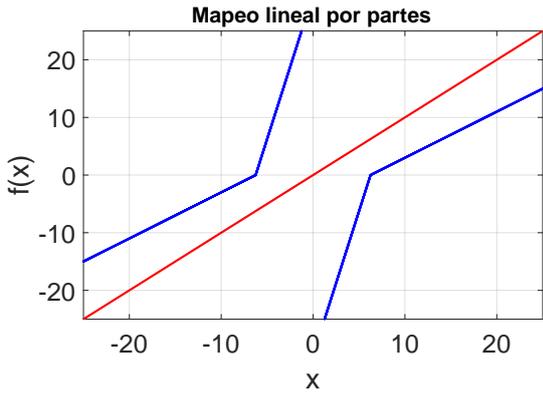
*Demostración.* Por la Proposición 9, en  $\Lambda = [-25, 25]$  se cumple la propiedad de transitividad, así como que el conjunto de órbitas periódicas posee la propiedad de densidad. Por la Proposición 10, en el intervalo  $\Lambda = [-25, 25]$ , el mapeo  $f$  presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.

Así al cumplirse las tres propiedades de la definición de Devaney se concluye que el mapeo  $f$  es caótico en este sentido.  $\square$

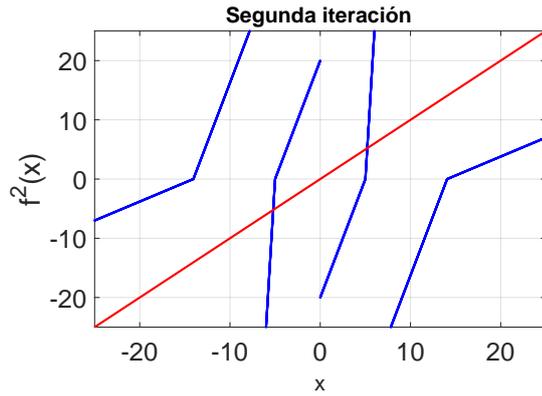
En la Figura 4.5, se puede notar que conforme se itera el mapeo  $f$ , las tres características que definen a un atractor caótico pueden ser verificadas si se hacen las siguientes observaciones.

1. Las órbitas periódicas se empiezan a multiplicar en cada nueva iteración y se empiezan a distribuir por todo el intervalo  $[-25, 25]$ . De tal manera que para cualquier otro intervalo contenido en este, la existencia de un punto periódico se dará en alguna iteración. Dicho de otra forma, las órbitas periódicas forman un conjunto denso dentro del intervalo  $[-25, 25]$ .
2. De la mano del anterior punto, se vislumbra que conforme las iteraciones avanzan, en cada región del intervalo  $[-25, 25]$ ,  $f$  mapea a los intervalos  $[-25, 16]$  y  $(-16, 25)$ , lo que por un lado conlleva a que dos puntos que inicialmente comenzaron cerca, se separen; por otro lado, se consigue mapear a todo el intervalo  $[-25, 25]$  y como consecuencia a cualquier abierto contenido en este intervalo. Es decir, se tienen las propiedades de dependencia sensitiva a las condiciones iniciales y transitividad.

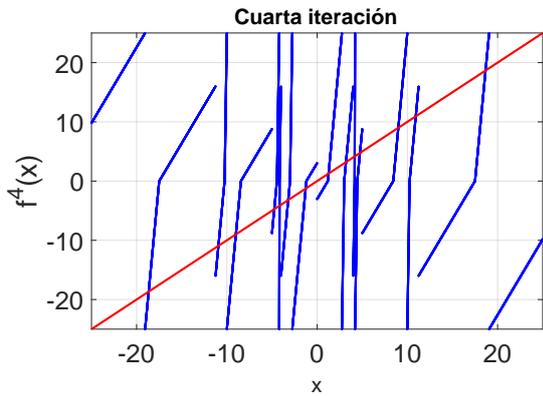
La Figura 4.6 permite visualizar de otra forma, como a través de la serie de tiempo y su diagrama cobweb, el mapeo  $f$  es caótico en el intervalo  $\Lambda$ , esto al observar la existencia de una órbita la cual transita por una gran parte de tal intervalo y de tal manera que su recorrido es no periódico.



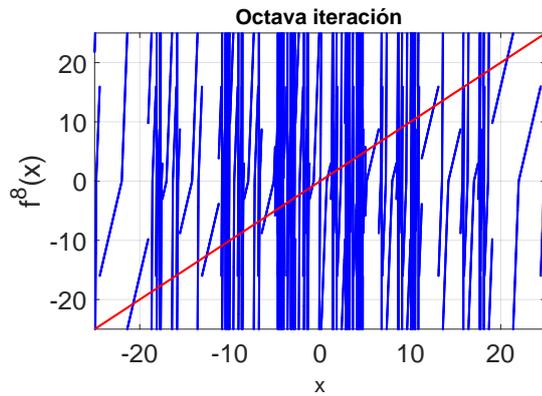
(a) Mapeo sin puntos fijos,  $m_1 = 0.8$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ .



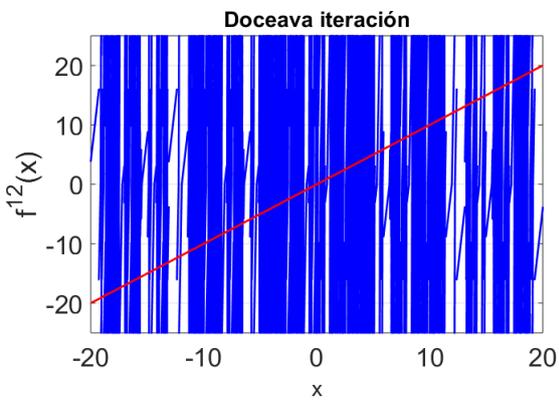
(b) Puntos de período dos.



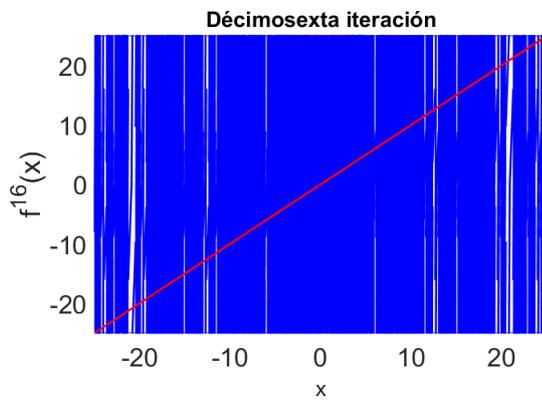
(c) Puntos de período cuatro.



(d) Puntos de período ocho.

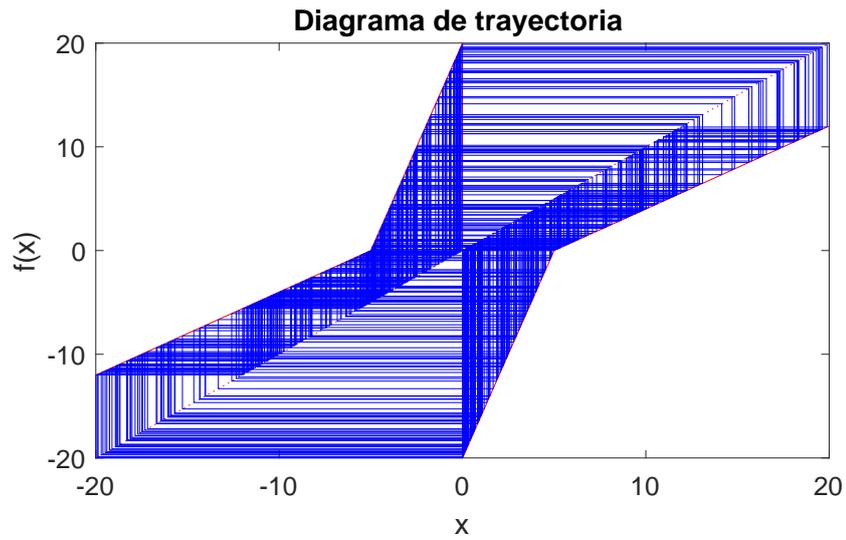


(e) Puntos de período doce.

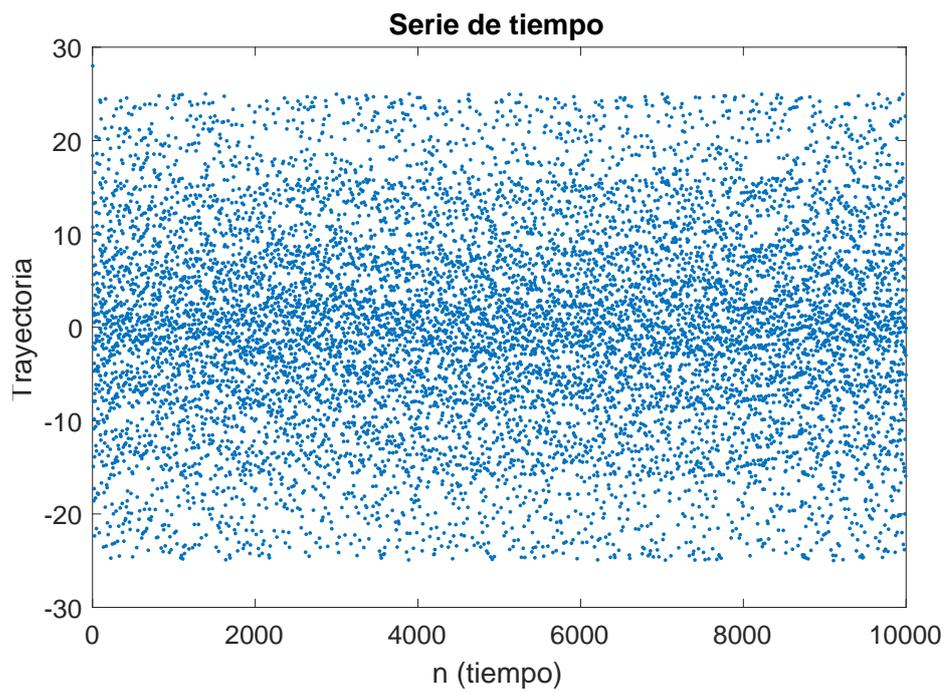


(f) Puntos de período 16.

**Figura 4.5:** Algunas iteraciones del mapeo lineal por partes.



(a) Diagrama cobweb del mapeo,  $m_1 = 0.8$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ .



(b) Serie de tiempo del mapeo,  $m_1 = 0.8$ ,  $m_2 = 5$ ,  $b_1 = 4$ .

**Figura 4.6:** Presencia de caos.



# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se presentaron resultados teóricos acerca de mapeos sin puntos fijos, los que fueron expuestos en los Capítulos 3 y 4. En la primer parte del capítulo tres, a partir de un mapeo dado (el cuál carece de puntos fijos y es caótico), se analizaron las condiciones necesarias de tal manera que se pudieran definir mapeos racionales sin puntos fijos. A partir de esto, se pudo presentar una familia de mapeos racionales carentes de puntos fijos. En la segunda parte de este capítulo y con base en los mapeos racionales se construyeron un particular tipo de MLP, a los cuáles se les asignaron las características indispensables para que también se consiguiera la ausencia de puntos fijos. Asimismo, se mostraron varias gráficas de distintos casos que ejemplifican la validez de cada uno de los teoremas presentados. En el Capítulo 4, el trabajo se centró en la localización de MLP que pudieran tener comportamiento caótico, lo que finalmente fue demostrado para dos tipos de subfamilias de MLP por medio de los exponentes de Lyapunov y para un elemento de una de ellas a través de satisfacer la definición de Devaney.

Con todo lo anterior, este trabajo de tesis permite concluir lo siguiente:

1. Se propusieron y diseñaron dos familias de mapeos discretos sin puntos fijos y que hasta el día de hoy no se encuentran reportadas en la literatura, las cuales se formularon por medio del establecimiento y demostración de proposiciones así como de teoremas. Dado que la primer familia de mapeos (los racionales) no están definidos en el cero, se opto por no seguir su estudio bajo la idea que este hecho puede traer complicaciones en aplicaciones posteriores en el proceso de generación de secuencias pseudoaleatorias, sin embargo como se mencionó en la motivación, el empleo de mapeos sin puntos fijos ha resultado útil en la modelación, así que un análisis más completa a su dinámica no se descarta del todo.
2. Se localizaron mapeos lineales por partes en los que se notó la existencia de una factible dinámica caótica con la ayuda de herramientas gráficas como lo fueron los diagramas cobweb y las series del tiempo, las cuales permitieron dar pie al calculo del diagrama de bifurcación, el que ofreció una mayor certeza de este comportamiento al verificar que para ciertos rangos en los parámetros se tenía una familia de MLP que exhibían una dinámica no periódica, y dado que estos mapeos carecen de puntos fijos, entonces solo restaba mostrar que efectivamente mediante el cálculo numérico de los

exponentes de Lyapunov (al ser este positivo), existían subfamilias con comportamiento caótico.

Algo importante a notar de estas subfamilias es que hay un amplio número de valores en los parámetros para los cuales existe caos, recordar que para una de ellas a partir de cierto valor en la pendiente  $m_2$ , el exponente siempre era positivo, aunado a esto, el diagrama de bifurcación permitió observar que la región donde se presentaba caos, era cada vez mayor conforme  $m_2$  aumentaba, sin embargo algo no deseable es que el valor del exponente comienza a decaer, lo que trae como consecuencia que el tiempo en que dos puntos cercanos se separen irá creciendo, es decir el sistema comenzará a ser más estable, lo cuál puede resultar poco útil si se pretende llevar a cabo alguna aplicación.

3. Por último, se presentó una demostración de caos en el sentido de Devaney para un elemento en particular de la familia de mapeos lineales por partes y sin puntos fijos esto con la intención de dar un mayor formalismo ya que el cálculo de los exponentes de Lyapunov fue numérico y no analítico. En concreto se encontró que en un conjunto invariante se desarrolla caos en este sentido, es decir, uno en el que se cumplen las propiedades de: transitividad, sensibilidad a las condiciones iniciales y un conjunto de órbitas periódicas que posee la cualidad de densidad.

Como trabajo futuro se pretende realizar histogramas así como más diagramas de bifurcación, en éste se presentaron solo para casos de parámetros positivos, así que uno de estos diagramas se podría obtener al tomar en cuenta valores negativos y ver que tipo de dinámica resulta. Además se buscará extender la prueba de caos en el sentido de Devaney para una familia de MLP sin puntos fijos. Todo lo anterior es con la finalidad de encontrar los elementos más adecuados para una posible aplicación en la generación de secuencias pseudoaleatorias.

# Referencias

- [1] Michael Sharratt, Galileo: Decisive Innovator, Cambridge University Press, 1994.
- [2] Newton, I., Principios matemáticos de la Filosofía natural [Philosophiae Naturalis Principia Mathematica]. Ediciones Altaya, S.A. Grandes Obras del Pensamiento, 1993.
- [3] Stephen Jay Gould, The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincare, Modern Library Science, 2001.
- [4] Belliver André, Henri Poincaré ou la vocation souveraine, Gallimard, 1956.
- [5] Barrow-Green, J., Poincaré and the three body problem, AMS Bookstore, 1997.
- [6] Diacu, F. The solution of the n-body Problem, The Mathematical Intelligencer, pp 66–70, 1996.
- [7] Lorenz E., Deterministic non periodic flow, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 20, pp. 130–141, 1963.
- [8] Lynch S., Dynamical Systems with Applications using Maple, Birkhauser-Springer, 2010.
- [9] Li T. Y., Yorke J. A., Period three implies chaos. The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10, pp. 985–992, 1975.
- [10] May R. M., Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, Vol. 261, No. 5560, pp. 459–67, 1976.
- [11] M. Cencini, F. Cecconi, and A. Vulpiani, Chaos From Simple to Complex Systems. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2010.
- [12] J Sprott., Some simple chaotic flows, The Americal Physical Society, Physical Review E, Vol 50, No. 2, pp. 647-650, 1994.
- [13] R.J. Escalante González and E. Campos Cantón, Generation of Chaotic Attractors Without Equilibria Via Piecewise Linear Systems, International Journal Of Modern Physics C ., 2017.
- [14] R. J. Escalante González; E. Campos Cantón, A class of Piecewise Linear Systems without equilibria with 3-D grid multiscroll chaotic attractors, IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs, 2018.

- [15] Zenghui Wang, Shijian Cang, Elisha Oketch Ochola, Yanxia Sun, A hyperchaotic system without equilibrium, Springer Science+Business Media B.V, 2011.
- [16] Donato Cafagna, Giuseppe Grassi, Chaos in a new fractional-order system without equilibrium points, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Elsevier, 2014.
- [17] Sajad Jafari, J.C. Sprott, S. Mohammad Reza Hashemi Golpayegani, Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria, Physics Letters A, Elsevier, 2013.
- [18] Jafari, Sajad and Pham, Viet-Thanh and Golpayegani, S. Mohammad Reza Hashemi and Moghtadaei, Motahareh and Kingni, Sifeu Takougang, The Relationship Between Chaotic Maps and Some Chaotic Systems with Hidden Attractors, International Journal of Bifurcation and Chaos, Volume 26, No. 13, pp. 1650211, 2016.
- [19] Dragan Lambic, A new discrete chaotic map based on the composition of permutations, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 78, pp. 245-248, 2015.
- [20] Haibo Jiang, Yang Liu, Zhouchao Wei, Liping Zhang, Hidden chaotic attractors in a class of two-dimensional maps, Nonlinear Dynamics, Vol. 85, No. 4, pp. 2719, 2016.
- [21] Wang C, Ding Q, A New Two-Dimensional Map with Hidden Attractors, Entropy, Vol. 20, No. 322. 2018.
- [22] M. Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, Communications in Mathematical Physics Vol.50, No. 1, pp. 69–77, 1976.
- [23] Pascal Chargé ,Danièle Fournier-Prunaret, Véronique Guglielmi, Features analysis of a parametric PWL chaotic map and its utilization for secure transmissions, Chaos, Solitons & Fractals, Elsevier, 2008.
- [24] Yuping Hu, Congxu Zhu, and Zhijian Wang, An Improved Piecewise Linear Chaotic Map Based Image Encryption Algorithm, The Scientific World Journal, Vol. 2014, 2014.
- [25] G. Huerta-Cuellar and A. N. P. E. Jiménez-López, E. Campos-Cantón, An approach to generate deterministic Brownian motion, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Vol. 19, pp. 2740–2746, 2014.
- [26] García-Martínez M, Campos-Cantón E, Pseudo-random bit generator based on lag time series, International Journal of Modern Physics C, Vol. 25, No. 04, pp. 1350105, 2014.
- [27] Zhouchao Wei, Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria, Physics Letters A, Elsevier, 2011.
- [28] ] Cuomo, Kevin M., Oppenheim A. V., Strogatz Steven H., Synchronization of Lorenz-based chaotic circuitswith applicationsto communications, IEEE Transactions on Circuits and Systems II, Vol. 40, No. 10, pp. 626-633, 1993.
- [29] X. Wang and G. Chen, Constructing a chaotic system with any number of equilibria, Nonlinear Dyn, Vol. 71, pp. 429–436, 2013.

- [30] Saber N. Elaydi, Discrete Chaos, Chapman & Hall/Crc, 2000.
- [31] Robert L. Devaney, A first course in chaotic dynamical systems, Perseus books, 1992.
- [32] Strogatz S. H., Nonlinear Dynamics and Chaos, Perseus books, 1994.
- [33] Galor, Oded, Discrete Dynamical Systems, Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [34] Pedro Pérez Carreras, Cálculo infinitesimal, Volumen 1, Universidad Politécnica de Valencia, 1989.
- [35] Heinz Otto Peitgen, Chaos and Fractals: New frontiers of science. Springer, 2004.
- [36] Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci., Vol. 20, pp. 130-14, 1963.
- [37] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [38] Valentin Afraimovich, Sze-Bi Hsu, Lectures on Chaotic Dynamical Systems, American Mathematical Society, Vol 28, 2000.
- [39] T. M. Apostol, Mathematical analysis, China Machine Press, 1996.
- [40] Lawrence Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, 2000.
- [41] R. Tyrrell Rockafellar, Convex analysis, Princeton: Princeton University Press, 1970.



# Apéndice



# Apéndice A

## Anéxo: Códigos de los programas

### A.1. Programa para graficar series de tiempo y trayectoria de un punto

```
clear all
close all
clc
format long g
m=0.8;
m2=5;
b=4;
a=b/m;
b2=(m2*b)/m;

tama=100000;
w=linspace(-b2,b2,1000);
nj=length(w);
x=zeros(1,tama);
y=zeros(1,tama);
z=zeros(1,tama);
dx=zeros(1,tama);
suma=zeros(1,tama);
suma2=zeros(1,nj);
total=zeros(1,nj);
x(1)=40;
z(1)=-2;
y(1)=-2;

x2=zeros(1,tama);
x3=zeros(1,tama);
x4=zeros(1,tama);
```

```

x5=zeros(1,tama);
x6=zeros(1,tama);
x7=zeros(1,tama);

t=1:1:tama;

for i=2:tama
    if x(i-1)<=-a
        x(i)=(m*x(i-1)+b);
    %    dx(i)=log(m);
    elseif x(i-1)>-a && x(i-1)<0
        x(i)=(m2*x(i-1)+b2);
    %    dx(i)=log(m2);
    elseif x(i-1)<a && x(i-1)>=0
        x(i)=(m2*x(i-1)-b2);
    %    dx(i)=log(m2);
    else
        x(i)=(m*x(i-1)-b);
    %    dx(i)=log(m);
    end
    % suma(i)=suma(i-1)+dx(i);
end

```

```

for i=1:tama
x2(i)=-5;
    x3(i)=-11.25;
    x4(i)=-19.0625;
    x5(i)=5;
    x6(i)=11.25;
    x7(i)=19.0625;
end
xx=x';
%%

```

%%

```

for i=2:tama
    if y(i-1)<=-a
        y(i)=m*y(i-1)+b;
    elseif y(i-1)>-a && y(i-1)<0
        y(i)=m2*y(i-1)+b2;
    elseif y(i-1)<a && y(i-1)>=0
        y(i)=m2*y(i-1)-b2;
    end
end

```

```

        else
            y(i)=m*y(i-1)-b;
        end
    end
end
yy=y';
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

for i=2:tama
    if z(i-1)<=-a
        z(i)=(m*z(i-1)+b);
    elseif z(i-1)>-a && z(i-1)<0
        z(i)=(m2*z(i-1)+b2);
    elseif z(i-1)<a && z(i-1)>=0
        z(i)=(m2*z(i-1)-b2);
    else
        z(i)=(m*z(i-1)-b);
    end
end
zz=z';
%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=2:tama
    A=[i-1,x(i-1),z(i-1),y(i-1)];
end
B=abs(y-x);
C=abs(z-x);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

plot(x(1:tama-1),x(2:tama),'.',x,x)
grid on
figure(2)

plot(x,'.')
title('Serie de tiempo')
    ylabel('Trayectoria') % y-axis label
    xlabel('t') % x-axis label
figure(3)
plot(z(1:tama-1),z(2:tama),'.',z,z)
figure(4)
plot(z,'.')
figure(5)
hist(x,100)

```

```
title('Histograma')  
x01=t(1);  
x02=x(1);  
y01=t(1);  
y02=y(1);
```

## A.2. Programa para graficar el MLP y sus iteraciones

```
clear all
close all
clc
%%

%Fijar valores de los parámetros

m=0.8;
m2=5;
b=4;
a=b/m;
b2=m2*a-m*a+b;
z=linspace(-b2,b2,10000000);
nj=length(z);
ni=1; %Define la iteración a graficar
y=zeros(1,nj);
x=zeros(1,ni);
%% Evaluación

for j=1:nj
    x(1)=z(j);

    for i=1:ni
        if x(i)<=-a
            x(i+1)=m*x(i)+b;
        elseif x(i)>-a && x(i)<0
            x(i+1)=m2*x(i)+b2;
        elseif x(i)<a && x(i)>=0
            x(i+1)=m2*x(i)-b2;
        else
            x(i+1)=m*x(i)-b;

        end
        h=x(i+1);
    end
    y(j)=h;
end
%% Graficación

figure

plot(z,y,'.b')
title('Mapeo lineal por partes')
```

```

        ylabel('f(x)') % y-axis label
        xlabel('x') % x-axis label
grid on
hold on
plot(z,z,'r')

```

### A.3. Diagramas de bifurcación, cobweb y exp. de Lyapunov

```

function testMapeo()
clc
close all
m = 4;
aa=4/0.8;
% bb=19*aa-m*aa+4;
bb=(m*4)/0.8

%% graficar Mapeo con m fijo
figure;
plotMap(m,bb,aa,'r',1);
title('Diagrama de trayectoria')
ylabel('f(x)') % y-axis label
xlabel('x') % x-axis label
hold on;

%% obtener trayectoria iniciando de punto inicial
x0 = 1;
nPoints = 500;
trajectory = MapTrajectory(m,bb,aa, x0, nPoints);

%% graficar trayectoria
plotTrajectory(trajectory,bb)
hold off;

%% graficar la trayectoria como señal caótica
x0 = 25;
m = 4;
aa=4/0.8;
% bb=19*aa-m*aa+4;
bb=(m*4)/0.8;

nPoints = 1000;
trajectory = MapTrajectory(m,bb,aa, x0, nPoints);

```

```

figure;
plot(trajectoria);
title('Gráfica de x(t) contra el tiempo')
    ylabel('x(t)') % y-axis label
    xlabel('t') % x-axis label

%% Calcular el diagrama de bifurcación usando una trayectoria estable,
% Se espera a que el sistema de estabilice, se eliminan los primeros
% k elementos
    k = 300;
    step = 0.01;
    cont = 1;
    for m=1:step:10
        aa=4./0.8;
%         bb=19*aa-m*aa+4;
        bb=(m*4)/0.8;

% el valor inicial es aleatorio
        x0 = rand(1);
% se calcula la trayectoria
        trayectoria = MapTrajectory(m,bb,aa,x0, nPoints);
%se eliminan los primeros k valores, para asegurar estabilización
        trayectoria_estable(cont,:) = trayectoria((k+1):length(trajectoria));
        mValues(cont,:) = m * ones(1,length(trajectoria) - k);
        cont = cont + 1;
    end

%% graficar diagrama de bifurcación
plotBifurcationDiagram(mValues,trayectoria_estable);

    %% calcular Lyapunov
    [n,~] = size(mValues);
    cont = 1;
    for i=1:n
        if mValues(i,1) >0
            lyap(cont) = lyapunov(trayectoria_estable(i,:),mValues(i,:));
            m(cont) = mValues(i,1);
            cont = cont + 1;
        end
    end
end
%% graficar Lyapunov
figure;
plot(m,lyap);
title('Exponente de Lyapunov')

```

```

        ylabel('Exponente de Lyapunov') % y-axis label
        xlabel('\mu') % x-axis label
    end
    %% Graficación del diagrama de bifurcación
function plotBifurcationDiagram(mValues,trayectoria)
    figure;
    title('Diagrama de bifurcación')
    ylabel('f(x)') % y-axis label
    xlabel('m_{2}') % x-axis label
    hold on;
    markerSize = 0.1;
    [n,~] = size(mValues);
    for i = 1:n
scatter(mValues(i,:),trayectoria(i,:),markerSize,'Marker','.',
'MarkerEdgeColor','b','MarkerFaceColor','b')
        end
        hold off
    end

%% cálculo del Exponente de Lyapunov
function lambda = lyapunov(trayectoria_estable,m,aa)
    aa=4./0.8;

    %calculo de la derivada absoluta de la trayectoria
    absDerivada = Map_absDerivada(trayectoria_estable,m,aa);
    % calculo del exponente
    lambda = sum(log(absDerivada))/length(trayectoria_estable);
    if lambda == -Inf,
        lambda = -10;
    end
end

%% Cálculo del absoluto de la derivada del Mapeo
function absDerivative = Map_absDerivada(trayectoria_estable,m,aa)
    aa=4./0.8;
    absDerivative = abs(.8.*(trayectoria_estable<=-aa)
+m.*((trayectoria_estable>-aa)&(trayectoria_estable<0))
+m.*((trayectoria_estable>=0)&(trayectoria_estable<aa))
+0.8.*(trayectoria_estable>=aa));
end

%% Cálculo de la función del Mapeo evaluada en los puntos x y con
% mu m

function fx = Map(m,bb,aa,x)

```

```

aa=4./0.8;
fx=(0.8*x+4).*(x<=-aa)+(m*x+bb).*((x>-aa)&(x<0))
+(m*x-bb).*((x>=0)&(x<aa))+(0.8*x-4).*(x>=aa);
end

%% Graficación del Mapeo
function plotMap(m,bb,aa,color, showLeyend)
    X = -bb:0.001:bb;
    aa=4./0.8;
    fx = Map(m,bb,aa,X);
    plot(X,fx,color);
%     if showLeyend == 1,
%         legend(['\mu = ' num2str(m)])
%     end
end

%% Cálculo de las trayectorias del Mapeo, dado mu y x0
function trajectory = MapTrajectory(m,bb,a,Xo,nPoints)
    currentPoint = Xo;
    for i = 1:nPoints
        trajectory(i) = currentPoint;
        currentPoint = Map(m,bb,a,currentPoint);
    end
end

%% Graficación de las trayectorias
function plotTrajectory(trajectory,bb,a)
    plot([-bb,bb],[-bb,bb],'r');
    axis([-bb,bb,-bb,bb]);
    x1 = trajectory(1);
    y1 = 0;
    x2 = trajectory(1);
    y2 = trajectory(2);
    plot([x1,x2],[y1,y2],'b','LineWidth',0.5);
    for i = 3:length(trajectory)
        x1 = trajectory(i-1);
        y1 = trajectory(i);
        x2 = trajectory(i-1);
        y2 = trajectory(i-1);
        x3 = trajectory(i-2);
        y3 = trajectory(i-1);

        plot([x1,x2,x3],[y1,y2,y3],'b','LineWidth',0.5);
    end
end
end

```