



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS

**Estabilización en tiempo finito de sistemas mecánicos: un
estudio comparativo y algunos aspectos de robustez**

Tesis que presenta

Emilio Vázquez Ramírez

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Arturo Zavala Río

San Luis Potosí, S.L.P., Septiembre de 2019



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "**Estabilización en tiempo finito de sistemas mecánicos: un estudio comparativo y algunos aspectos de robustez**" presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Emilio Vázquez Ramírez** y aprobada el treinta de septiembre del dos mil diecinueve por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Arturo Zavala Río
Director de la tesis

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
Jurado en el Examen

Dr. Adrián René Ramírez López
Jurado en el Examen

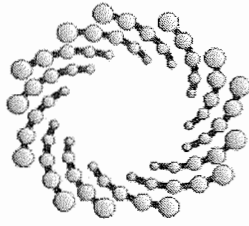
Dr. Marco Octavio Mendoza Gutiérrez
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Arturo Zavala Río.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 636077 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 040 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 30 días del mes de septiembre del año 2019, se reunió a las 17:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	Presidente	IPICYT
Dr. Arturo Zavala Río	Secretario	IPICYT
Dr. Adrián René Ramírez López	Sinodal	IPICYT
Dr. Marco Octavio Mendoza Gutiérrez	Sinodal externo	UASLP

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Emilio Vázquez Ramírez

sobre la Tesis intitulada:

Estabilización en tiempo finito de sistemas mecánicos: un estudio comparativo y algunos aspectos de robustez

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Arturo Zavala Río

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 18:50 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 30 días del mes de septiembre de 2019.

Mtra. Yvonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico



À mes parents...

À ma famille et mes amis...

À LAC...

À ceux qui ne sont plus avec moi

et à ceux qui sont toujours là.

Agradecimientos

A mis mentores durante esta etapa de mi vida, por compartir parte de sus experiencias y conocimientos. En especial a mi asesor de tesis por su amistad y guía brindadas, tanto en lo académico como en lo humano. A mis revisores, que con sus comentarios ayudaron a mejorar en la medida de lo posible el contenido de este trabajo. Al IPICT que fue mi segunda casa, particularmente a los que con su trabajo me escucharon siempre de la mejor manera. Y a CONACYT por el apoyo brindado en este paso de mi formación. A todos, por alentarme a seguir adelante, gracias.

Resumen

Los algoritmos de control continuos en tiempo finito son frecuentemente motivados en la literatura argumentando ventajas sobre los esquemas asintóticos, tales como mayor robustez ante incertidumbre y perturbaciones. Esto motiva a estudiar más de cerca la certitud de lo anteriormente mencionado. En este sentido, en la primera parte de este trabajo se consideran cuatro leyes de control continuas existentes en la literatura —referidas aquí por las siglas $HXH02_{GC}$, $HXH02_{ID}$, SB15 y ZZ17— que resuelven el problema de regulación en tiempo finito en sistemas mecánicos y mediante simulaciones se realiza un estudio comparativo de su desempeño, particularmente bajo la consideración de entradas acotadas y ante incertidumbre paramétrica. Posteriormente, en la segunda parte de la tesis se estudian analíticamente, y en un contexto más general, algunos aspectos de robustez de una ley de control continua para el seguimiento en tiempo finito de sistemas mecánicos con entradas acotadas, recientemente propuesta en la literatura, la cual a través de un parámetro de control asegura estabilidad exponencial o en tiempo finito del origen (equilibrio deseado). Se demuestra entonces que ante perturbaciones con cota suficientemente pequeña las soluciones del sistema en lazo cerrado son uniformemente ulteriores acotadas y que su variación post transitoria alrededor del origen es más pequeña en el caso en que el control es en tiempo finito que cuando es de tipo asintótico, logrando dar un sustento más sólido sobre las ventajas que presentan los controladores en tiempo finito sobre los asintóticos en relación al aspecto de robustez tratado.

Abstract

Finite-time controllers are frequently motivated in the literature claiming advantages over asymptotical schemes, such as improved robustness to uncertainties and disturbance. This has motivated us to investigate conditions under which such advantages take place. In this sense, in the first part of this work four continuous control laws previously presented in the literature are considered —referred to here by the acronyms $HXH02_{GC}$, $HXH02_{ID}$, SB15 and ZZ17— which solve the finite-time regulation problem for mechanical systems and, through simulation implementations, a comparative study of their performance is carried out —under different criteria— particularly under the consideration of constrained inputs and parametric uncertainty. Subsequently, in the second part of the thesis, in a more general context, some robustness aspects of a recently proposed continuous control law dealing with tracking of mechanical systems in finite-time are established analytically. For this controller, it results possible to choose among finite-time and exponential convergence of the closed-loop system responses to desired trajectories, through a simple control parameter. It is shown then that in the case of disturbances with sufficiently small bound, the closed-loop system solutions are uniformly ultimately bounded and that the post transient response of the error variables around the origin is smaller for the finite-time controller than for the asymptotic one, thus giving a stronger support on the advantages of finite-time controllers over asymptotical ones in relation to the considered robustness aspect.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación y objetivos	2
1.2. Estructura y contenido de la tesis	3
1.3. Preliminares matemáticos	3
1.3.1. Notación	3
1.3.2. Estabilidad en el sentido de Liapunov	4
1.3.3. Acotamiento y acotamiento ulterior	5
1.3.4. Estabilidad en tiempo finito	7
1.4. Sistemas mecánicos	12
1.4.1. Propiedades de los sistemas mecánicos	13
1.4.2. Control de sistemas mecánicos	14
2. Leyes de control de regulación en tiempo finito	16
2.1. Leyes de control $HXH02_{GC}$ y $HXH02_{ID}$	16
2.2. Ley de control SB15	18
2.3. Ley de control ZZ17	19
2.4. Aspectos de comparación	22
2.5. Simulaciones y comparación de las leyes de control $HXH02_{GC}$, $HXH02_{ID}$, SB15 y ZZ17	23
3. Seguimiento en tiempo finito y aspectos de robustez	35
3.1. Control de seguimiento en tiempo finito con restricciones de entrada . .	35
3.2. Robustez de la ley de control	36
3.3. Simulaciones	47
4. Resumen y Conclusiones	51
Apéndice	54

Capítulo 1

Introducción

La teoría de control ha jugado un papel fundamental en el avance de la ingeniería y la ciencia, y se ha convertido en una parte importante en cualquier operación industrial que requiera el control de temperatura, presión, humedad, flujo, etc.[20] En particular, el control de sistemas mecánicos resulta un problema de gran interés por sus diversas aplicaciones en distintas áreas, como en el control de movimiento de robots manipuladores, humanoides, vehículos, etc. Para la realización de estas tareas —las cuales generalmente requieren que los sistemas alcancen una posición o sigan una trayectoria deseada— los dispositivos involucrados en estos mecanismos deben ser programados de tal forma que se cumplan los cometidos demandados de la manera más precisa posible.

Apoyados en otros paradigmas se contribuye al desarrollo de la teoría de control en donde se continúan creando nuevas herramientas y algoritmos para resolver distintos tipos de problemas: desde la realización de tareas simples como la manipulación de objetos pequeños, hasta aplicaciones más demandantes como lo son las de carácter industrial. En este sentido, parte de la teoría de estabilidad en tiempo finito ha sido aplicada en el área de control en donde existen algoritmos de control continuos que resuelven el problema de regulación y que garantizan que se alcance un objetivo de control en tiempo finito, *i.e.*, en un tiempo $T < \infty$. En el mismo sentido, aunque es un problema menos estudiado debido a su reciente desarrollo, existen esquemas de control continuos que garantizan seguimiento de una trayectoria en tiempo finito.¹

En particular, entre dichos algoritmos de control existen algunos que han sido desarrollados para ser aplicados a sistemas mecánicos, como los propuestos en [13], [22], [23] y [25]. Aunque en la visión de cada autor subyace un paradigma diferente, todos están orientados a resolver el problema de control —ya sea de regulación o seguimiento— de sistemas mecánicos en tiempo finito. Por ejemplo, en [13], *Hong et al.* proponen dos esquemas de regulación desarrollados en el marco teórico de la homogeneidad; en [22], *Sanyal y Bohn* proponen un regulador cuyo diseño está basado en el principio del control por modos deslizantes; en [25], *Zavala-Río y Zamora-Gómez* desarrollan una ley de control de regulación desde el marco teórico de la homogeneidad local, la cual además,

¹A diferencia de los esquemas de control asintóticos, refiriéndose al caso en el que el cumplimiento del objetivo de control ya sea de regulación o seguimiento es en tiempo infinito.

a diferencia de las anteriores, tiene un enfoque hacia el acotamiento de las entradas al sistema; mientras que en [23], *Zamora-Gómez et al.* proponen recientemente una ley de control para el seguimiento de sistemas mecánicos, cuyo análisis del sistema en lazo cerrado está desarrollado a través de una función estricta de Liapunov.

1.1. Motivación y objetivos

Al tener diversos esquemas de regulación en tiempo finito, los cuales están además enmarcados en distintos aspectos teóricos, surge la inquietud de estudiar las particularidades y ventajas o desventajas que poseen cada uno, y entre ellos mismos, lo cual puede ayudar a determinar cuál de ellos emplear de acuerdo a los requerimientos y/u objetivos. En este sentido, en la primera parte de la tesis, se consideran los algoritmos de control en tiempo finito anteriormente mencionados que resuelven el problema de regulación de sistemas mecánicos [13, 22, 25] y, en un primer acercamiento, a través de simulaciones se realiza un estudio comparativo de sus desempeños en lazo cerrado bajo distintos aspectos.

Cabe mencionar que los trabajos de control continuos en tiempo finito existentes en la literatura a menudo motivan sus propuestas argumentando superioridad, sobre aquéllos que resuelven el problema de control formulado de manera asintótica (en tiempo infinito). Tales argumentos van desde menores tiempos de estabilización hasta mayor robustez ante incertidumbre o perturbaciones, como se menciona por ejemplo en [7, 12, 14], sin embargo, son pocas las ocasiones en que estas afirmaciones se demuestran. Esto último, así como algunas observaciones hechas en la primera parte de la tesis, motivan la segunda parte, en donde se estudia el *problema de seguimiento en presencia de perturbaciones* para la ley de control continua propuesta en [23], diseñada para garantizar seguimiento en tiempo finito o exponencial (a través de un parámetro de diseño) en ausencia de perturbaciones.

Se enuncian entonces los objetivos de la tesis de la siguiente manera:

1. *Considerar algunas de las leyes de control continuas existentes en la literatura para sistemas mecánicos de n grados de libertad (gdl) —particularmente las expuestas en [13, 22, 25]— que garantizan convergencia en tiempo finito de las soluciones en lazo cerrado a una referencia constante dada, y a través de simulaciones, realizar un estudio comparativo del funcionamiento en lazo cerrado de cada una de ellas.*
2. *Analizar algunos aspectos de robustez de la ley de control de seguimiento en tiempo finito propuesta en [23], particularmente suponiendo la presencia de perturbaciones en el sistema.*

1.2. Estructura y contenido de la tesis

El trabajo presentado está constituido por cuatro capítulos, los cuales se componen de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se presentan, además de una breve introducción a la teoría de estabilidad en tiempo finito, los resultados matemáticos y conceptos referentes a los sistemas mecánicos necesarios para presentar y demostrar lo realizado en capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 se introducen los algoritmos de control continuos en tiempo finito que forman parte del estudio comparativo referidos a [13], [22] y [25] —y que resuelven el problema de regulación— y vía simulación se evalúa su desempeño, a través de distintos aspectos que aquí se definen. Se presentan los datos obtenidos de las simulaciones y las conclusiones correspondientes.

En el Capítulo 3 se considera la ley de control para el seguimiento de sistemas mecánicos en tiempo finito propuesta en [23], y se estudia analíticamente la respuesta del sistema ante perturbaciones. Se prueba que ante pequeñas perturbaciones el sistema en lazo cerrado no se desestabiliza y que sus trayectorias entran en tiempo finito a una vecindad de la trayectoria deseada, la cual resulta ser más pequeña en el caso en el que el control es en tiempo finito, en comparación a cuando el controlador es de tipo asintótico, lo que dará apoyo a los argumentos mencionados en la literatura en relación a que los controladores en tiempo finito son más robustos que los asintóticos.

En el Capítulo 4 se presentan las conclusiones y algunos comentarios sobre el trabajo realizado, así como las perspectivas a futuro relativas a este proyecto. Y finalmente, se incluye un apéndice en el cual se presenta parte de una prueba desarrollada en el Capítulo 3.

1.3. Preliminares matemáticos

En esta sección se presentan los conceptos y herramientas matemáticas útiles para la formulación y/o demostración de los resultados estudiados y desarrollados en este trabajo. Entre los conceptos presentados se encuentran el de estabilidad en el sentido de Liapunov y estabilidad en tiempo finito de puntos de equilibrio de sistemas autónomos y no autónomos. Se presentan también algunos resultados a través de los cuales es posible demostrar estabilidad en tiempo finito y se enuncia un resultado conocido sobre acotamiento ulterior, el cual servirá de base para demostrar uno de los resultados centrales de este trabajo.

1.3.1. Notación

Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, x_i representa la i -ésima componente de x y M_{ij} el elemento de la matriz M ubicado en el i -ésimo renglón y j -ésima columna. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{>0}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = \overline{1, n}\}$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$. Al origen de \mathbb{R}^n se le denotará por 0_n . Dado

un conjunto A , se denota por ∂A a su frontera. $\mathcal{C}^0(A; B)$ representa el espacio de las funciones continuas de A a B , y $\mathcal{C}^k(A; B)$, $k \geq 1$, representa el espacio de las funciones k veces continuamente diferenciables de A a B . $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidiana, *i.e.*, la norma 2 para vectores y la norma 2 inducida para matrices. B_r^n denota la bola de radio $r > 0$ de dimensión n con centro en 0_n , *i.e.* $B_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$, y S_r^{n-1} denota la esfera de radio $r > 0$ de dimensión $n - 1$ con centro en 0_n , *i.e.* $S_r^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$. $\text{sgn}(\cdot)$ representa la función signo, y $\text{sat}(\cdot)$ la función saturación estándar (unitaria), *i.e.*, dado $\varsigma \in \mathbb{R}$, $\text{sat}(\varsigma) = \text{sgn}(\varsigma) \min\{1, |\varsigma|\}$. $\text{diag}[k_1, \dots, k_n]$ denota una matriz diagonal de dimensión $n \times n$, con $k_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, e I_n se utiliza para denotar la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

1.3.2. Estabilidad en el sentido de Liapunov

Sea el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio —*i.e.* un conjunto abierto y conexo— que contiene al origen. Se denota por $x(t; x_0)$ —o simplemente $x(t)$ cuando resulte conveniente o sea claro por el contexto— una solución de (1.1) con condición inicial x_0 , *i.e.* $x(0; x_0) = x_0$, y \mathcal{S}_{x_0} denotará el conjunto de todas las soluciones de (1.1) con condición inicial x_0 . Los puntos x^* para los cuales $f(x^*) = 0_n$ se denominan *puntos de equilibrio* y corresponden a aquéllos que generan soluciones constantes de (1.1), es decir, $f(x^*) = 0_n \iff x(t) \equiv x^*$, es solución de (1.1). En lo consecuente se supondrá, sin pérdida de generalidad, que el origen 0_n es un punto de equilibrio de (1.1). Se tiene entonces la siguiente definición [4]:

Definición 1.3.1. *Se dice que el origen de (1.1) es estable si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada condición inicial x_0 con $\|x_0\| < \delta$ y cada solución $x(t) \in \mathcal{S}_{x_0}$ lo siguiente se satisface: $x(t)$ existe para todo t positivo y satisface*

$$\|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Adicionalmente, se dice que 0_n es localmente asintóticamente estable si es estable y además lo siguiente se satisface: existe $\delta_0 > 0$, con $0 < \delta_0 \leq \delta$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

para cada x_0 tal que $\|x_0\| < \delta_0$, y todas las soluciones $x(t) \in \mathcal{S}_{x_0}$.

Un concepto útil al estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio es el de función de Liapunov, la cual es una función que se construye para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio en un sistema dinámico, y el método directo de Liapunov, enunciado en el siguiente teorema, establece las condiciones para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio mediante una función de Liapunov.

Teorema 1.3.2. [17] Sea $x = 0_n$ un punto de equilibrio de (1.1) y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio del origen. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

1. $V(0_n) = 0$
2. $V(x) > 0$ en $D \setminus \{0_n\}$.

Se tiene entonces que,

- a) si $\dot{V}(x) \leq 0$ en D , 0_n es estable;
- b) si $\dot{V}(x) < 0$ en $D \setminus \{0_n\}$, 0_n es asintóticamente estable.

Una función V que satisface los puntos 1, 2 y (a) del Teorema 1.3.2 se denomina función de Liapunov; si además V satisface el inciso (b), entonces se llama función de Liapunov estricta. Otros conceptos que se definen son las siguientes [17]: una función $V(x)$ que satisface los puntos 1 y 2 del Teorema 1.3.2, esto es, $V(0_n) = 0$ y $V(x) > 0 \forall x \neq 0_n$, se dice que es *definida positiva*, y si en lugar del punto 2 se satisface la condición $V(x) \geq 0 \forall x \neq 0_n$ se dice que es *semidefinida positiva*. Una función $V(x)$ se dice ser *definida negativa*, respectivamente *semidefinida negativa* si $-V(x)$ es definida positiva, respectivamente semidefinida positiva. Dada una matriz P y $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $V(x) = x^T P x$, se dice que la matriz P es definida positiva (semidefinida positiva), si V es definida positiva (semidefinida positiva), y lo denotamos por $P > 0$ ($P \geq 0$).

Definición 1.3.3. Se dice que una función continua $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Si además $a = \infty$ y $\alpha(r) \rightarrow \infty$ conforme $r \rightarrow \infty$, se dice que la función es de clase \mathcal{K}_∞ .

Definición 1.3.4. Se dice que una función continua $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{KL} si, para cada s fijo, la función $\beta(r, s)$ es de clase \mathcal{K} con respecto a r y, para cada r fijo, $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ conforme $s \rightarrow \infty$.

1.3.3. Acotamiento y acotamiento ulterior

Mediante un análisis de tipo Liapunov es posible demostrar que las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales se encuentran acotadas, incluso si no existe un punto de equilibrio. Este tipo de análisis resulta conveniente especialmente cuando se estudian sistemas con perturbación. A continuación se presenta la definición de acotamiento y acotamiento ulterior, así como un resultado relativo a este concepto, el cual resultará útil en capítulos posteriores.

Sea el sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.2}$$

donde $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuo por partes en t y localmente Lipschitz en x sobre $[0, \infty) \times D$, y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen.

Definición 1.3.5. [17] *Se dice que las soluciones de (1.2) son*

- *uniformemente acotadas si existe una constante positiva c , independiente de $t_0 \geq 0$, y para cada $a \in (0, c)$, existe $\beta = \beta(a) > 0$, independiente de t_0 , tal que*

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.3)$$

- *globalmente uniformemente acotadas si (1.3) se cumple para a arbitrariamente grande.*
- *uniformemente ulteriormente acotadas con cota ulterior b , si existen constantes positivas b y c , independientes de $t_0 \geq 0$, y para cada $a \in (0, c)$, existe $T = T(a, b) \geq 0$, independiente de t_0 , tal que*

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (1.4)$$

- *globalmente uniformemente ulteriormente acotadas si (1.4) se cumple para a arbitrariamente grande.*

El siguiente teorema establece un criterio sobre el acotamiento uniforme y acotamiento ulterior uniforme de las soluciones de (1.2).

Teorema 1.3.6. [17] *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen y sea $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \quad \forall \|x\| \geq \mu > 0 \quad (1.6)$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall x \in D$, donde α_1 y α_2 son funciones de clase \mathcal{K} y $W_3(x)$ es una función continua definida positiva. Sea $r > 0$ tal que $B_r \subset D$ y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (1.7)$$

Entonces, existe una función β de clase \mathcal{KL} tal que para cada condición inicial $x(t_0)$ que satisface $\|x(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$, existe $T \geq 0$ (dependiente de $x(t_0)$ y μ) tal que la solución de (1.2) satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (1.8)$$

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (1.9)$$

Más aún, si $D = \mathbb{R}^n$ y α_1 es de clase \mathcal{K}_∞ , entonces (1.8) y (1.9) se cumplen para cualquier condición inicial $x(t_0)$.

1.3.4. Estabilidad en tiempo finito

El concepto de estabilidad en tiempo finito, a diferencia del de estabilidad asintótica², hace referencia a que las soluciones de un sistema alcanzan un estado de equilibrio en un tiempo $T < \infty$. Intuitivamente, para tener estabilidad en tiempo finito es necesaria convergencia en tiempo finito y estabilidad en el sentido de Liapunov.

Sea el sistema autónomo de orden n

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.10}$$

donde $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo definido en un dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ del origen tal que $f(0_n) = 0_n$, y sea $x(t; x_0)$ una solución del sistema con condición inicial x_0 , *i.e.* $x(0; x_0) = x_0$. Adoptando el marco teórico de acuerdo a como lo establecen *Bhat y Bernstein* en [7, 8], ya que es el marco analítico en el que se enuncia lo expuesto a continuación, se asume que (1.10) posee soluciones únicas en tiempo hacia adelante para todas las condiciones iniciales fuera del origen. La definición formal de estabilidad en tiempo finito para sistemas autónomos se presenta a continuación.

Definición 1.3.7. [8] (*Estabilidad en tiempo finito*) *El origen del sistema (1.10) es un equilibrio estable en tiempo finito si es estable en el sentido de Liapunov y existen:*

1. *una vecindad abierta $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}$ del origen tal que \mathcal{N} es positivamente invariante con respecto a (1.10), y*
2. *una función definida positiva $T : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, llamada tiempo de asentamiento, tal que $x(t; x_0) \neq 0_n, \forall t \in [0, T(x_0)), \forall x_0 \in \mathcal{N} \setminus \{0_n\}$, y $x(T(x_0); x_0) = 0_n, \forall x_0 \in \mathcal{N}$.*

El origen es globalmente estable en tiempo finito si es estable en tiempo finito con $\mathcal{N} = \mathcal{D} = \mathbb{R}^n$.

Observación 1.3.8. *Nótese, de la Definición 1.3.7, que el origen de (1.10) es un equilibrio globalmente estable en tiempo finito si y sólo si es globalmente asintóticamente estable y estable en tiempo finito.*

Por otro lado, para efecto de sistemas no autónomos los siguientes resultados están basados en el marco analítico de Moulay y Perruquetti [19], en el cual, *a priori*, no se imponen restricciones sobre la existencia de múltiples soluciones para una misma condición inicial. Sea el sistema no autónomo de orden n

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.11}$$

donde $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen y $f(t, 0_n) = 0_n, \forall t \geq 0$. Sea $x(t; t_0, x_0)$ —o simplemente $x(t)$ cuando resulte conveniente o claro por el contexto— una solución de (1.11) con condición inicial $x_0 \in \mathcal{D}$ en el instante inicial $t_0 \geq 0$, *i.e.* $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$, y $\mathcal{S}(t_0, x_0)$ el conjunto de todas las soluciones $x(t; t_0, x_0)$ que comienzan desde $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{D}$.

²Refiriéndonos al caso en que las soluciones de un sistema nunca son idénticamente iguales a la solución de equilibrio en un tiempo finito.

Definición 1.3.9. [19] *El punto de equilibrio $x = 0_n$ de (1.11) es:*

■ *débilmente estable en tiempo finito si:*

1. *es estable en el sentido de Liapunov;*
2. *para cada $t_0 \geq 0$, existe $\bar{\delta} = \bar{\delta}(t_0) > 0$ tal que, si $\|x_0\| < \bar{\delta}$, entonces para todo $x(t) \in \mathcal{S}(t_0, x_0)$:*
 - a) *$x(t)$ está definida para todo $t \geq t_0 \geq 0$;*
 - b) *$\exists T \in [0, \infty)$ tal que $x(t) = 0_n, \forall t \geq t_0 + T$.*

$T_0[x(t; t_0, x_0)] \triangleq \inf\{T \geq 0 : x(t; t_0, x_0) = 0_n\}, \forall t \geq t_0 + T$ se denomina tiempo de asentamiento de $x(t; t_0, x_0)$.

■ *estable en tiempo finito si, además de los puntos 1 y 2 arriba mencionados:*

3. $T_0(t_0, x_0) \triangleq \sup_{x(t) \in \mathcal{S}(t_0, x_0)} T_0[x(t)] < \infty$.

$T_0(t_0, x_0)$ es llamado tiempo de asentamiento con respecto a las condiciones iniciales.

Definición 1.3.10. [19] *El punto de equilibrio $x = 0_n$ de (1.11) es uniformemente estable en tiempo finito si:*

1. *es uniformemente asintóticamente estable;*
2. *es estable en tiempo finito;*
3. *existe una función continua definida positiva $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que el tiempo de asentamiento con respecto a las condiciones iniciales satisface $T_0(t_0, x_0) \leq \varphi(\|x_0\|)$.*

Otras definiciones y resultados importantes que forman parte de la teoría de estabilidad en tiempo finito son las siguientes. Sea δ_ϵ^r , definida como $\delta_\epsilon^r(x) = (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n)^T, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0$, una familia de dilataciones, con $r = (r_1, \dots, r_n)^T$, donde r_1, \dots, r_n son escalares positivos, denominados *coeficientes de dilatación*.

Definición 1.3.11. [4] *Considérese $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. Se dice que V es homogénea de grado α respecto a la familia de dilataciones δ_ϵ^r , si*

$$V(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^\alpha V(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0.$$

Considérese $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (con $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$), un campo vectorial. Se dice que f es homogéneo de grado α respecto a la familia de dilataciones δ_ϵ^r , si

$$f_i(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^{\alpha+r_i} f_i(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, i = \overline{1, n}.$$

Lema 1.3.12. [6] *Sea el sistema (1.10) homogéneo de grado α . Entonces el origen del sistema es estable en tiempo finito si y sólo si es asintóticamente estable y $\alpha < 0$.*

Definición 1.3.13. [24, 25] *Considérese $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. Se dice que V es localmente r -homogénea de grado α respecto a la familia de dilataciones δ_ϵ^r , si existe una vecindad abierta del origen $D \subset \mathbb{R}^n$ —referida como el dominio de homogeneidad— tal que, para cada $x \in D$ y todo $\epsilon \in (0, 1]$: $\delta_\epsilon^r(x) \in D$ y*

$$V(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^\alpha V(x)$$

Sea $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (con $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$), un campo vectorial. Se dice que f es localmente r -homogéneo de grado α respecto a la familia de dilataciones δ_ϵ^r , si existe una vecindad abierta del origen $D \subset \mathbb{R}^n$ —referida como el dominio de homogeneidad— tal que, para cada $x \in D$ y todo $\epsilon \in (0, 1]$: $\delta_\epsilon^r(x) \in D$ y

$$f_i(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^{\alpha+r_i} f_i(x), \quad i = \overline{1, n}$$

Lema 1.3.14. [24] *Sea el sistema (1.10) homogéneo de grado α , con $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$. Supóngase que f es un campo vectorial localmente r -homogéneo de grado α con dominio de homogeneidad $D \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, el origen es un equilibrio globalmente estable en tiempo finito de (1.10) si y sólo si es globalmente asintóticamente estable y $\alpha < 0$.*

Definición 1.3.15. [18] *Dado $r \in \mathbb{R}_{>0}^n$, una función continua que mapea de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} , denotada por $\|x\|_r$, se denomina norma homogénea respecto a la familia de dilataciones δ_ϵ^r —o equivalentemente, se dice que es una norma r -homogénea— si, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_r \geq 0$ con $\|x\|_r = 0 \iff x = 0_n$, y $\|\delta_\epsilon^r(x)\|_r = \epsilon \|x\|_r$ para todo $\epsilon > 0$.*

Definición 1.3.16. *Una esfera r -homogénea $(n-1)$ -dimensional de radio $c > 0$ es el conjunto $S_{r,c}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_r = c\}$.*

Un subconjunto particular de normas r -homogéneas se define de la siguiente manera:

Definición 1.3.17. [15] *Dado $r \in \mathbb{R}_{>0}^n$, una p -norma r -homogénea ($p \geq 1$) se define como*

$$\|x\|_{r,p} = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^{p/r_i} \right]^{1/p}$$

En lo sucesivo, el involucramiento de una norma r -homogénea $\|\cdot\|_r$ hará referencia a una p -norma r -homogénea con $p > \max_i \{r_i\}$. Supóngase que f en (1.10) es localmente r -homogéneo, para algún $r \in \mathbb{R}_{>0}^n$ con dominio de homogeneidad $D \subset \mathcal{D}$, entonces:

Definición 1.3.18. [15, 18] *El punto de equilibrio de (1.10) es δ -exponencialmente estable con respecto a la norma homogénea $\|\cdot\|_r$ si existen una vecindad abierta del origen, $\mathcal{V} \subset D$, y constantes $a \geq 1$ y $b > 0$ tales que*

$$\|x(t; x_0)\|_r \leq a \|x_0\|_r e^{-bt}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathcal{V}$$

Observación 1.3.19. *La definición anterior es equivalente a la definición usual de estabilidad exponencial cuando $r_i = 1$, $i = \overline{1, n}$.*

Lema 1.3.20. [25] *Supóngase que f en (1.10) es un campo vectorial localmente r -homogéneo de grado $\alpha = 0$ con dominio de homogeneidad $D \subset \mathcal{D}$. Entonces, el origen es un equilibrio δ -exponencialmente estable si y sólo si es asintóticamente estable.*

Observación 1.3.21. Si f en (1.10) es localmente r -homogéneo de grado $\alpha = 0$ con coeficientes de dilatación $r_j = r_0$, $\forall j = \overline{1, n}$, para algún $r_0 > 0$, entonces el origen resulta ser exponencialmente estable si y sólo si es δ -exponencialmente estable. —Para ver los detalles de este hecho puede consultarse [25, Remark 2.5]—.

Sea el sistema autónomo

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x) \quad (1.12)$$

donde $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son campos vectoriales continuos, tales que $f_1(0_n) = f_2(0_n) = 0_n$.

Lema 1.3.22. [11] Supóngase que f_1 en (1.12) es homogéneo de grado $\alpha < 0$ con respecto a la familia de dilataciones δ_ϵ^r , y que $x = 0_n$ es un equilibrio asintóticamente estable del sistema $\dot{x} = f_1(x)$. Entonces, $x = 0_n$ es un equilibrio estable en tiempo finito de (1.12) si $\forall x \in S_1^{n-1}$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f_{2j}(\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n)}{\epsilon^{\alpha+r_j}} = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (1.13)$$

Lema 1.3.23. [25] Supóngase que para algún $r \in \mathbb{R}_{>0}^n$, $f_1(x)$ en (1.12) es localmente r -homogéneo de grado $\alpha < 0$ (respectivamente $\alpha = 0$), con dominio de homogeneidad $D \subset \mathbb{R}^n$, y que $x = 0_n$ es un equilibrio globalmente asintóticamente estable (respectivamente δ -exponencialmente estable) del sistema $\dot{x} = f_1(x)$. Entonces, $x = 0_n$ es un equilibrio estable en tiempo finito (respectivamente δ -exponencialmente estable) de (1.12) si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f_{2j}(\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n)}{\epsilon^{\alpha+r_j}} = 0 \quad (1.14)$$

para todo $j = \overline{1, n}$, $\forall x \in S_c^{n-1}$ (respectivamente $\forall x \in S_{r,c}^{n-1}$), para alguna $c > 0$ tal que $S_c^{n-1} \subset D$ (respectivamente $S_{r,c}^{n-1} \subset D$).

Obsérvese que aunque los Lemas 1.3.22 y 1.3.23 son similares, este último aplica en el marco teórico de la homogeneidad local.

Lema 1.3.24. [7] Considérese el sistema (1.10). Supóngase que existe una función continua $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

1. V es definida positiva.
2. Existen $c > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ y una vecindad abierta $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{D}$ del origen tal que

$$\dot{V}(x) \leq -c[V(x)]^\alpha, \quad \forall x \in \mathcal{V} \setminus \{0_n\}$$

Entonces, el origen de (1.10) es un equilibrio estable en tiempo finito. Más aún, si \mathcal{N} es como se describe en la Definición 1.3.7 y T es la función tiempo de asentamiento, entonces

$$T(x) \leq \frac{1}{c(1-\alpha)} [V(x)]^{1-\alpha}, \quad \forall x \in \mathcal{N} \quad (1.15)$$

y T es continua en \mathcal{N} . Si además $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, V es radialmente desacotada y \dot{V} toma valores negativos en $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, entonces el origen es un equilibrio globalmente estable en tiempo finito de (1.10).

Observación 1.3.25. Para obtener (1.15) en el Lema 1.3.24, supóngase que $\dot{V} \leq -cV^\alpha$, donde $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$, $c > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$; luego, multiplicando ambos lados de la desigualdad por dt (el cual es positivo en tiempo hacia adelante) y por $V^{-\alpha}$ (que también es positivo) se tiene $V^{-\alpha}dV \leq -c dt$; integrando de 0 a t

$$\begin{aligned} \int_{V(0)}^{V(t)} V^{-\alpha} dV &\leq -c \int_0^t d\tau \Rightarrow \left[\frac{V^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right] \Big|_{V(0)}^{V(t)} \leq -ct \\ &\Rightarrow \frac{[V(t)]^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{[V(0)]^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq -ct \end{aligned}$$

de donde,

$$V^{1-\alpha}(t) \leq -ct(1-\alpha) + [V(0)]^{1-\alpha} \quad (1.16)$$

De esto último, nótese que el lado derecho de la desigualdad anula en

$$t^* = \frac{1}{c(1-\alpha)} [V(0)]^{1-\alpha} \quad (1.17)$$

donde $t^* \geq 0$, y más aún, $-ct(1-\alpha) + V^{1-\alpha}(0) < 0$, $\forall t > t^*$. De este modo, junto con la ecuación (1.16), ya que V es definida positiva, se concluye que $V(t) = 0$, $\forall t \geq t^*$. Así, bajo las condiciones del Lema 1.3.24, si $V(x(t)) \equiv 0$, se sigue que el argumento de V es idénticamente igual a 0_n , esto es, $x(t) = 0_n$, $\forall t \geq t^*$, con t^* dado como en (1.17) y $V(0) = V(x(0))$, y por lo tanto la solución del sistema alcanza el origen en tiempo finito. Adicionalmente, por ser el origen un punto de equilibrio, la solución $x(t)$ es idénticamente igual a cero para todo $t \geq t^*$.

Otros resultados y definiciones empleados en capítulos posteriores son:

Lema 1.3.26. [10] (Desigualdad de Hölder) Para cada $\phi, \psi \in [1, \infty]$ tales que $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\psi} = 1$, y cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $|x^T y| \leq \|x\|_\phi \|\psi\|_\psi$.

Lema 1.3.27. [5] (Desigualdad de Young) Sean $\phi, \psi \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\psi} = 1$ y $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces $ab \leq \frac{a^\phi}{\phi} + \frac{b^\psi}{\psi}$.

Lema 1.3.28. [23] Dado $x \in \mathbb{R}^n$, la p -norma dada por $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ es no creciente en p .

Observación 1.3.29. Por equivalencias de p -normas, para cualesquiera $\|\cdot\|_\phi$ y $\|\cdot\|_\psi$, con $\phi \neq \psi$, existen constantes $\bar{c}_{\phi,\psi} \geq c_{\phi,\psi} > 0$ tales que $c_{\phi,\psi} \|x\|_\psi \leq \|x\|_\phi \leq \bar{c}_{\phi,\psi} \|x\|_\psi$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. En particular, por el lema anterior, $c_{\phi,\psi} = 1$ si $\phi < \psi$ y $\bar{c}_{\phi,\psi} = 1$ si $\psi < \phi$.

Definición 1.3.30. [23] Una función escalar continua $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice ser:

1. estrictamente pasiva si $\zeta\sigma(\zeta) > 0$, $\forall \zeta \neq 0$;
2. fuertemente pasiva —para (κ, a, b) — si es una función estrictamente pasiva que satisface $|\sigma(\zeta)| \geq \kappa |\text{bsat}(\zeta/b)|^a = \kappa (\min\{|\zeta|, b\})^a$, $\forall \zeta \in \mathbb{R}$, para algunas constantes positivas κ, a y b .

3. *fuertemente pasiva acotada* —para $(\kappa, a, b, \bar{\kappa}, \bar{a}, \bar{b})$ — si es una función fuertemente pasiva para (κ, a, b) tal que $|\sigma(\varsigma)| \leq \bar{\kappa} |\bar{b} \text{sat}(\varsigma/\bar{b})|^{\bar{a}} = \bar{\kappa} (\min\{|\varsigma|, \bar{b}\})^{\bar{a}}, \forall \varsigma \in \mathbb{R}$, para algunas constantes positivas $\kappa, a, b, \bar{\kappa}, \bar{a}$ y \bar{b} .

Lema 1.3.31. [23] Sea σ_j una función fuertemente pasiva para (κ, a, b) y k_j una constante positiva $j = \overline{1, n}$, $k_m = \min_j \{k_j\}$, $k_M = \max_j \{k_j\}$, y para $x \in \mathbb{R}^n$ y $c > 0$, sea

$$S_0(x; a, c) = \begin{cases} \|x\|^{1+a} & \forall \|x\| \leq c \\ c^a \|x\| & \forall \|x\| > c \end{cases}$$

Entonces

1. $\sum_{j=1}^n \int_0^{x_j} \sigma_j(k_j z_j) dz_j \geq \frac{\kappa k_m^a}{1+a} S_0(x; a, b/k_M), \forall x \in \mathbb{R}^n;$
2. $\sum_{j=1}^n x_j \sigma_j(k_j x_j) \geq \kappa k_m^a S_0(x; a, b/k_M), \forall x \in \mathbb{R}^n.$

Observación 1.3.32. Nótese que para una función σ fuertemente pasiva acotada — para $(\kappa, a, b, \bar{\kappa}, \bar{a}, \bar{b})$ — se tiene que

$$\kappa (\min\{|\varsigma|, b\})^a \leq |\sigma(\varsigma)| \leq \bar{\kappa} (\min\{|\varsigma|, \bar{b}\})^{\bar{a}} \leq \kappa |\varsigma|^{\bar{a}} \quad \forall \varsigma \in \mathbb{R}$$

Lema 1.3.33. [23] Para $j = \overline{1, n}$, sea σ_j una función fuertemente pasiva acotada para $(\kappa, a, b, \bar{\kappa}, \bar{a}, \bar{b})$, k_j una constante positiva, y $k_m = \min_j \{k_j\}$, $k_M = \max_j \{k_j\}$. Entonces, para $j = \overline{1, n}$,

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{x_j} \sigma_j(k_j z_j) dz_j \leq \frac{\bar{\kappa} k_M^{\bar{a}} \bar{c}}{1+\bar{a}} \|x\|^{1+\bar{a}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde $\bar{c} = \bar{c}_{1+\bar{a}, 2}^{1+\bar{a}}$ es una constante positiva obtenida como se indica en la Observación 1.3.29.

1.4. Sistemas mecánicos

En esta sección se presenta la ecuación general de movimiento de un sistema mecánico, así como algunas de sus propiedades, las cuales resultan de utilidad en el diseño de algoritmos de control. La Figura 1.1 presenta un brazo manipulador de tres grados de libertad (en lo subsecuente se abreviará por gdl a “grados de libertad”). Las variables q_1, q_2 y q_3 representan las posiciones de los eslabones del robot, generalmente medidas en grados en el caso de los robots con uniones rotacionales como el de la figura. Para el caso general de un manipulador de n gdl, la posición del robot se indica en el vector $q = [q_1 \dots q_n]^T$, donde q_i es la posición de la i -ésima articulación, y $\dot{q} = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n]^T$ y $\ddot{q} = [\ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_n]^T$ son sus correspondientes velocidades y aceleraciones.

A fin de mover los eslabones del manipulador, se considera que en cada unión hay un actuador, cuyas fuerzas y/o pares ejercidos son incluidos en el vector $\tau = [\tau_1 \dots \tau_n]^T$, conocido como vector de fuerzas generalizadas externas.

La ecuación general de movimiento de un sistema mecánico de n gdl totalmente actuado con término de amortiguamiento lineal, puede escribirse como

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = \tau \quad (1.18)$$

donde $H(q)$ es la matriz de inercia del sistema, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q)$ es el vector de fuerzas conservativas y $F\dot{q}$ es un vector de fuerzas de amortiguamiento lineales.³

En relación a la matriz F del término de fuerzas de amortiguamiento lineales, aunque en la teoría es considerada simétrica semidefinida positiva — *i.e.*, $F \geq 0$ (en particular, con $\lambda_{\text{máx}}F > 0$ y $\lambda_{\text{mín}}F = 0$, el sistema es referido como semiamortiguado)— lo más común en la práctica es que $F > 0$, caso aludido como sistema *completamente amortiguado*; sin embargo, un modelo más sencillo, y que suele considerarse frecuentemente en la literatura es aquel en el que $F = 0$, referido como sistema mecánico no amortiguado:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (1.19)$$

y el cual será considerado en el estudio comparativo de distintos algoritmos de control en tiempo finito que será presentado en el Capítulo 2.

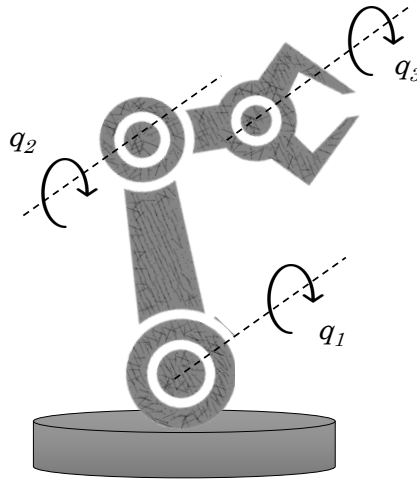


Figura 1.1: Brazo manipulador de 3 gdl.

1.4.1. Propiedades de los sistemas mecánicos

Ambos modelos (1.18) y (1.19) serán considerados en los Capítulos 2 y 3, respectivamente, por lo que se enuncian a continuación algunas de sus propiedades [9, 21], así como algunas suposiciones útiles para la presentación y demostración de resultados expuestos en capítulos posteriores:

³Un ejemplo de fuerzas de amortiguamiento lineales son las componentes de fricción viscosa, siempre presentes en todo tipo de mecanismos [3]. Fuerzas de amortiguamiento no lineales, como las componentes de fricción seca o estática, no son consideradas por simplicidad.

Propiedad 1.4.1. $H(q)$ es una función matricial continuamente diferenciable, simétrica y definida positiva, y de hecho $H(q) \geq \mu_m I_n$ —de modo que $\|H(q)\| \geq \mu_m \forall q \in \mathbb{R}^n$ — para alguna $\mu_m > 0$.

Propiedad 1.4.2. La matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis definida mediante los símbolos de Christoffel del primer tipo satisface:

1. $\dot{H}(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q}), \forall q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$, y por lo tanto, $z^T [\frac{1}{2} \dot{H}(x, y) - C(x, y)] z = 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$;
2. $C(w, x + y)z = C(w, x)z + C(w, y)z, \forall x, y, z, w \in \mathbb{R}^n$;
3. $\|C(x, y)\| \leq \wp(x)\|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, para alguna $\wp : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Suposición 1.4.3. La matriz de inercia satisface: $\|H(q)\| \leq \mu_M, \forall q \in \mathbb{R}^n$, para alguna $\mu_M \geq \mu_m > 0$.

Suposición 1.4.4. $\wp(\cdot)$ en el punto 3 de la Propiedad 1.4.2 es acotada y en consecuencia $\|C(x, y)\| \leq k_C \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, para alguna $k_C \geq 0$.

Suposición 1.4.5. El vector de fuerzas (generalizadas) conservativas $g(q)$ está acotado, o de manera equivalente, cada uno de sus elementos, $g_i(q), i = \overline{1, n}$, satisface $|g_i(q)| \leq B_{g_i}, \forall q \in \mathbb{R}^n$, para alguna $B_{g_i} > 0$.

Para un estudio más exhaustivo sobre los sistemas mecánicos, especialmente sobre las propiedades de la matriz de inercia, del vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, y del vector de fuerzas conservativas puede consultarse también [16].

1.4.2. Control de sistemas mecánicos

Dada una posición deseada q_d constante, se conoce como *problema de control continuo de posicionamiento* —o *para regulación*— en tiempo finito a encontrar una ley de control continua $u(q, \dot{q})$ tal que la solución trivial del sistema en lazo cerrado $\bar{q}(t) \equiv 0_n$, sea estable en tiempo finito, donde $\bar{q} \triangleq q - q_d$ define el error de posición.

De manera semejante al problema de regulación, dada una trayectoria deseada $q_d(t)$, se describe el *problema de control continuo de movimiento* —o *para seguimiento de trayectorias*— en tiempo finito a encontrar una ley de control continua $u(t, q, \dot{q})$ tal que la solución trivial del sistema en lazo cerrado, $\bar{q}(t) \equiv 0_n$, sea estable en tiempo finito, donde $\bar{q} \triangleq q - q_d(t)$.

En un sistema mecánico real, el vector de fuerzas o pares τ es suministrado por los actuadores, los cuales son generalmente electromecánicos, neumáticos o hidráulicos [16]. Se sabe que los actuadores de un mecanismo poseen capacidades limitadas, llámense de *par* o *fuerza*, y por lo tanto, su trabajo está limitado a cierto rango de operación. Considerar esto en el diseño del controlador puede evitar que el sistema trabaje en sus niveles máximos de operación, lo cual puede eludir daños en los elementos del

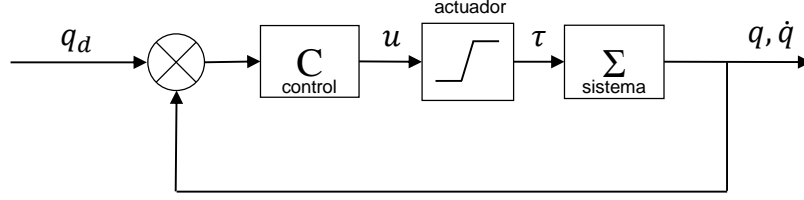


Figura 1.2: Diagrama en lazo cerrado de un sistema de control con restricciones de entradas.

sistema como desgaste prematuro, sobrecalentamiento, etc.

En este sentido, algunos autores, *e.g.* [23] y [25], han propuesto algoritmos de control continuos que evitan la saturación de las entradas al sistema, y resuelven el problema de regulación y/o seguimiento, los cuales resultan de interés por las ventajas que poseen. Con el fin de considerar el problema real en el que la capacidad de los actuadores del sistema mecánico está limitada, algunas de las leyes de control que se considerarán en capítulos posteriores suponen que cada entrada al sistema, τ_i , en valor absoluto, está restringida a ser menor que una cota de saturación dada $T_i > 0$, es decir, $|\tau_i| < T_i$, $i = \overline{1, n}$. Más específicamente, el sistema (1.19) está sujeto a

$$\tau_i = T_i \text{sat} \left(\frac{u_i}{T_i} \right) \quad (1.20)$$

donde u_i representa la variable de control (o la salida del controlador) relativa al i -ésimo grado de libertad. En la Figura 1.2 se presenta un diagrama de control en lazo cerrado con restricciones de entrada. Sobre las cotas de saturación se considera lo siguiente.

Suposición 1.4.6. *Considerando el sistema (1.19), bajo la restricción de entrada impuesta por (1.20), se supone que $T_i > B_{g_i}$, $\forall i = \overline{1, n}$.*

Capítulo 2

Leyes de control de regulación en tiempo finito

En este capítulo se presentan algunas leyes de control continuas —tomadas de la literatura— que resuelven el *problema de regulación* en tiempo finito en sistemas de la forma (1.19). En particular, se exponen las que forman parte del estudio comparativo descrito en la introducción.

Las leyes de control que forman parte del estudio comparativo presentadas en las Secciones 2.1–2.3, aseguran estabilidad global en tiempo finito de la solución trivial en lazo cerrado $\bar{q}(t) \equiv 0_n$, donde $\bar{q} = q - q_d$ define el error de posición, y q_d es una posición constante deseada, resolviendo así el problema de regulación.

Para distinción de cada uno de los algoritmos de control se hace uso de un conjunto de siglas las cuales hacen referencia al nombre del autor y al año de publicación. Aunque no se demostrarán aquí, ya que no es el objetivo de la tesis, se exponen las ideas principales sobre las pruebas de estabilidad en tiempo finito para las leyes de control presentadas a continuación. Cabe mencionar que entre las leyes de control en tiempo finito que se encuentran actualmente en la literatura, fueron consideradas aquéllas que al inicio de la tesis formaban parte de los artículos más representativos con enfoques continuos, en tiempo finito y hacia sistemas mecánicos.

2.1. Leyes de control HXH02_{GC} y HXH02_{ID}

Considérese la ecuación general de movimiento de un sistema mecánico no amortiguado de n grados de libertad totalmente actuado introducida en la Sección 1.4

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.1)$$

La solución trivial de (2.1) en lazo cerrado con las leyes de control continuas propuestas por *Hong et al.* —presentadas en [13]— es globalmente estable en tiempo finito. Dichos algoritmos de control, usando la notación de [13], son:

HXH02_{GC}:

$$\tau = -K_1 \text{sig}(\bar{q})^{\alpha_1} - K_2 \text{sig}(\dot{q})^{\alpha_2} + g(q) \quad (2.2)$$

HXH02_{ID}:

$$\tau = -H(q) [K_1 \text{sig}(\bar{q})^{\alpha_1} + K_2 \text{sig}(\dot{q})^{\alpha_2}] + g(q) + C(q, \dot{q})\dot{q} \quad (2.3)$$

con $\alpha_1 \in (0, 1)$, $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}$; dado $x \in \mathbb{R}^n$, $\text{sig}(x)^\alpha \triangleq (\text{sgn}(x_1)|x_1|^\alpha, \dots, \text{sgn}(x_n)|x_n|^\alpha)^T$ y, para $i = 1, 2$, $K_i = \text{diag}[k_{i1}, \dots, k_{in}]$ es una matriz diagonal definida positiva.¹

Sobre las ideas centrales de la prueba de estabilidad en tiempo finito de la solución trivial de (2.1) en lazo cerrado con (2.2) se tiene lo siguiente. Sean $x_1 = q - q_d$, $x_2 = \dot{q}$ y $x = (x_1^T, x_2^T)^T$, entonces la representación en variables de estado de (2.1) en lazo cerrado con (2.2) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -H^{-1}(x_1 + q_d) [K_1 \text{sig}(x_1)^{\alpha_1} + K_2 \text{sig}(x_2)^{\alpha_2} + C(x_1 + q_d, x_2)x_2] \end{aligned}$$

el cual a su vez puede escribirse —como se indica en el Lema 1.3.22— como un sistema con la forma $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)$, donde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -H^{-1}(q_d) [K_1 \text{sig}(x_1)^{\alpha_1} + K_2 \text{sig}(x_2)^{\alpha_2}] \end{pmatrix} \\ f_2(x) &= \begin{pmatrix} 0_n \\ -H^{-1}(x_1 + q_d)C(x_1 + q_d, x_2)x_2 - \tilde{H}(x_1) [K_1 \text{sig}(x_1)^{\alpha_1} + K_2 \text{sig}(x_2)^{\alpha_2}] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y $\tilde{H}(x_1) = H^{-1}(x_1 + q_d) - H^{-1}(q_d)$. Posteriormente se prueba que el sistema $\dot{x} = f_1(x)$ es homogéneo de grado $\alpha_2 - 1 < 0$ respecto a $\delta_\epsilon^{\hat{r}}$, con

$$\hat{r} = (\hat{r}_1^T, \hat{r}_2^T)^T, \quad \hat{r}_i = (r_{i1}, \dots, r_{in})^T, \quad i = 1, 2, \quad r_{1j} = \frac{2}{1 + \alpha_1}, r_{2j} = 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.4)$$

y mediante funciones de Liapunov se muestra que el origen de ambos sistemas, $\dot{x} = f_1(x)$ y $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)$, es globalmente asintóticamente estable. Después, se prueba que f_2 satisface la condición (1.13) del Lema 1.3.22, de donde se concluye que el origen de $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)$ es estable en tiempo finito. Finalmente, la estabilidad global en tiempo finito se sigue de la Observación 1.3.8.

Ahora, por otro lado, para probar estabilidad en tiempo finito de la solución trivial de (2.1) en lazo cerrado con (2.3), de manera semejante al caso anterior, se definen $x_1 = q - q_d$ y $x_2 = \dot{q}$ como variables de estado y se escribe el sistema en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -K_1 \text{sig}(x_1)^{\alpha_1} - K_2 \text{sig}(x_2)^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

¹Los subíndices GC e ID en los nombres de las leyes de control hacen referencia a los términos, en inglés, *gravity compansation* e *inverse dynamics*.

Luego se verifica que el sistema $\dot{x} = f(x)$ definido por (2.5), donde $x = (x_1^T, x_2^T)^T$, es homogéneo de grado $\alpha_2 - 1 < 0$ respecto a $\delta_{\hat{\epsilon}}$, con \hat{r} como se define en (2.4), y mediante una función de Liapunov se muestra que el origen del sistema $(x_1, x_2) = (0_n, 0_n)$, es globalmente asintóticamente estable y por el Lema 1.3.12 se sigue que además es estable en tiempo finito. Finalmente, ya que el sistema es homogéneo, la estabilidad en tiempo finito es global. Los detalles de las pruebas de estos resultados pueden consultarse en [13].

2.2. Ley de control SB15

De manera semejante a los reguladores HXH02_{GC} y HXH02_{ID}, presentados en (2.2) y (2.3), la ley de control propuesta por *Sanyal y Bohn* en [22] asegura estabilidad global en tiempo finito de la solución trivial del sistema en lazo cerrado $\bar{q}(t) \equiv 0_n$. Esta ley de control —la cual se denota aquí como SB15— está dada por:

$$\tau = -H(q) \left[\gamma \frac{\ell}{(\ell^T \ell)^{1-\alpha}} + k \frac{\dot{q}}{\|\bar{q}\|^{1-\alpha}} + k(\alpha - 1) \frac{\bar{q} \bar{q}^T \dot{q}}{\|\bar{q}\|^{3-\alpha}} \right] + g(q) + C(q, \dot{q}) \dot{q} \quad (2.6)$$

donde

$$\ell = \dot{q} + k \frac{\bar{q}}{\|\bar{q}\|^{1-\alpha}}, \quad \alpha \in (1/2, 1), \quad k, \gamma > 0$$

A diferencia de las pruebas de estabilidad correspondientes a las leyes de control HXH02_{GC} y HXH02_{ID}, las cuales se desarrollan en el marco teórico de la homogeneidad, en [22] se logra demostrar estabilidad en tiempo finito de $\bar{q}(t) \equiv 0_n$ de la siguiente forma: primero se identifica una variedad (auxiliar), dada por $\ell = 0_n$, con ℓ como se define arriba, *i.e.* $\dot{q} + k \frac{\bar{q}}{\|\bar{q}\|^{1-\alpha}} = 0_n$, de donde se tiene que

$$\ell = 0_n \implies \dot{q} = -k \frac{\bar{q}}{\|\bar{q}\|^{1-\alpha}} \quad (2.7)$$

sobre la cual se prueba que \bar{q} converge a 0_n en un tiempo finito T_1 . Luego, se halla una forma apropiada del sistema en lazo cerrado que asegura que las variables del sistema convergen en un tiempo finito T_2 a dicha variedad. Finalmente, la ley de control es diseñada —por compensación exacta de la dinámica— de tal modo que obliga al sistema en lazo cerrado a tomar la forma encontrada en el paso anterior.

Para visualizar esto, como primer etapa, considérese la función $V_1(\bar{q}) = \frac{1}{2} \bar{q}^T \bar{q}$, cuya derivada a lo largo del subsistema implícitamente generado sobre la variedad definida por $\ell = 0_n$, mostrado en la ecuación (2.7), está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \bar{q}^T \dot{q} \\ &= \bar{q}^T \left[-k \frac{\bar{q}}{\|\bar{q}\|^{1-\alpha}} \right] = -\kappa_1 V_1^\beta \end{aligned}$$

con $\kappa_1 = 2^\beta k$ y $\beta = (1 + \alpha)/2 \in (3/4, 1)$. Luego, de manera semejante a como se indica en la Observación 1.3.25, se sigue que existe un tiempo T_1 (calculado como en (1.17))

para el cual $V_1(\bar{q}(t)) = 0 \forall t \geq T_1$ y por lo tanto $\bar{q}(t) = 0_n \forall t \geq T_1$, concluyendo que sobre la variedad $\ell = 0_n$ los estados del sistema convergen a $(\bar{q}, \dot{q}) \equiv (0_n, 0_n)$ en tiempo finito.

Ahora, como segundo paso se muestra que las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito a la variedad definida por $\ell = 0_n$. Para visualizar esto, sean $x_1 = q - q_d$ y $x_2 = \dot{q}$, entonces la representación en variables de estado de (2.1) en lazo cerrado con (2.6) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\gamma \frac{\ell}{(\ell^T \ell)^{1-\alpha}} - k \frac{x_2}{\|x_1\|^{1-\alpha}} - k(\alpha - 1) \frac{x_1 x_1^T x_2}{\|x_1\|^{3-\alpha}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

y considérese la función $V_2(\ell) = \frac{1}{2} \ell^T \ell$, entonces la derivada de V_2 a lo largo de las trayectorias solución de (2.8) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \ell^T \dot{\ell} \\ &= \ell^T \left[\dot{x}_2 + k \frac{x_2}{\|x_1\|^{1-\alpha}} + k(\alpha - 1) \frac{x_1 x_1^T x_2}{\|x_1\|^{3-\alpha}} \right] \\ &= \ell^T \left[-\gamma \frac{\ell}{(\ell^T \ell)^{1-\alpha}} \right] \\ &= -\kappa_2 V_2^\alpha \end{aligned}$$

con $\kappa_2 = 2^\alpha \gamma$. Así, análogamente al argumento descrito en la etapa anterior, se sigue que existe un tiempo T_2 (que puede calcularse como en (1.17)) para el cual $V_2(\ell(t)) = 0 \forall t \geq T_2$, lo cual implica que $\ell(t) = 0_n \forall t \geq T_2$, de donde se sigue que las trayectorias del sistema en lazo cerrado convergen a la variedad definida por $\ell = 0_n$ en un tiempo finito.

Luego, de las dos etapas anteriores se concluye que la solución de equilibrio $\bar{q}(t) \equiv 0_n$ es estable en tiempo finito, con un tiempo de convergencia $T^* = T_1 + T_2$. Finalmente, ya que las funciones V_i son radialmente desacotadas y negativas en $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ para $i = 1, 2$, del Lema 1.3.24 se concluye que la estabilidad en tiempo finito es global.

2.3. Ley de control ZZ17

Finalmente, el último algoritmo de control que se considera para el estudio comparativo es el propuesto por *Zavala y Zamora* en [25], en donde se resuelve el problema de regulación desde el marco teórico de la homogeneidad local. Esta ley de control está dada por:

ZZ17:

$$\tau = -s_0(s_1(K_1\bar{q}) + s_2(K_2\dot{q})) + g(q) \quad (2.9)$$

donde $K_i = \text{diag}[k_{i1}, \dots, k_{in}]$ es una matriz diagonal definida positiva, $i = 1, 2$; dado $x \in \mathbb{R}^n$, $s_i(x) = (\sigma_{i1}(x_1), \dots, \sigma_{in}(x_n))^T$, $i = 0, 1, 2$; para cada $j = \overline{1, n}$: σ_{0j} es una función

estrictamente creciente estrictamente pasiva; $\sigma_{1,j}$, $\sigma_{2,j}$ son funciones no decrecientes estrictamente pasivas; σ_{ij} , $i = 0, 1, 2$, son localmente Lipschitz continuas en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y tales que

$$B_j = \max \left\{ \lim_{\varsigma \rightarrow \infty} \sigma_{0j}(\sigma_{1j}(\varsigma) + \sigma_{2j}(\varsigma)), \lim_{\varsigma \rightarrow -\infty} -\sigma_{0j}(\sigma_{1j}(\varsigma) + \sigma_{2j}(\varsigma)) \right\} < T_j - B_{g_j} \quad (2.10)$$

A diferencia de HXH02_{GC}, HXH02_{ID} y SB15, la ley de control (2.9) considera el caso real con entradas acotadas al sistema en donde, como se discutió en la Sección 1.4.2, los pares proporcionados por los actuadores τ_i no pueden ser mayores que un valor $T_i > 0$, dado por la capacidad de los mismos, para lo cual se considera que

$$\tau_i = T_i \text{sat} \left(\frac{u_i}{T_i} \right), i = \overline{1, n} \quad (2.11)$$

donde u_i representa la variable de control (o la salida del controlador) relativa al i -ésimo grado de libertad. Esta ley de control, a diferencia de las tres anteriores, se desarrolla en el marco teórico de homogeneidad local, y se enfoca en lograr el objetivo de regulación evitando la saturación de las señales de control. El resultado principal de [25] se enuncia de la siguiente manera:

Teorema 2.3.1. *Considere el sistema (2.1) en lazo cerrado con la ley de control (2.9). Para cada $i = 1, 2$, $j = \overline{1, n}$: sea σ_{ij} una función localmente r_i -homogénea de grado $\alpha_j > 0$, con dominio de homogeneidad $D_{ij} = \{\varsigma \in \mathbb{R} : |\varsigma| < L_{ij} \in (0, \infty]\}$; sea σ_{0j} localmente α_j -homogénea de grado $\alpha_0 = 2r_2 - r_1$, con dominio de homogeneidad $D_{0j} = \{\varsigma \in \mathbb{R} : |\varsigma| < L_{0j} \in (0, \infty]\}$, para algunos coeficientes de dilatación $r_i > 0$, tales que $\alpha_0 = 2r_2 - r_1 > 0$. Entonces, para cualesquiera matrices diagonales definidas positivas K_1 y K_2 , $|\tau_j(t)| = |u_j(t)| < T_j$, $j = \overline{1, n}$, $\forall t \geq 0$, y la solución trivial del sistema en lazo cerrado $\bar{q}(t) \equiv 0_n$ es:*

1. *globalmente estable en tiempo finito, si $r_2 < r_1$.*
2. *globalmente asintóticamente estable con estabilidad exponencial (local) si $r_1 = r_2$.*

Sobre los puntos más importantes de la demostración del Teorema 2.3.1, se definen $x_1 = q - q_d$ y $x_2 = \dot{q}$ como variables de estado y se escribe la dinámica del sistema en lazo cerrado en su representación en variables de estado como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -H^{-1}(x_1 + q_d) [s_0(s_1(K_1 x_1) + s_2(K_2 x_2)) + C(x_1 + q_d, x_2)x_2] \end{aligned}$$

el cual se puede escribir —como se indica en el Lema 1.3.23— como un sistema de la

forma $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)$, donde

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -H^{-1}(q_d)s_0(s_1(K_1x_1) + s_2(K_2x_2)) \end{pmatrix}$$

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} 0_n \\ -H^{-1}(x_1 + q_d)C(x_1 + q_d, x_2)x_2 - \mathcal{H}(x_1)s_0(s_1(K_1x_1) + s_2(K_2x_2)) \end{pmatrix}$$

y $\mathcal{H}(x_1) = H^{-1}(x_1 + q_d) - H^{-1}(q_d)$. Posteriormente, mediante una función de Liapunov se demuestra que el origen de ambos sistemas, $\dot{x} = f_1(x)$ y $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)$, es un equilibrio globalmente asintóticamente estable.

A continuación, se prueba que $f_1(x)$ es localmente r -homogéneo de grado $\alpha = r_2 - r_1$, y por el Lema 1.3.20, se concluye que el origen de $\dot{x} = f_1(x)$ es δ -exponencialmente estable, si $\alpha = r_2 - r_1 = 0$, esto es, si $r_2 = r_1$. Más aún, por la Observación 1.3.21, en el caso $\alpha = r_2 - r_1 = 0$, la estabilidad es exponencial en el sentido convencional.

Paso seguido, se prueba que f_2 satisface la condición (1.14) del Lema 1.3.23, de donde se concluye que el origen de $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)$ es

1. estable en tiempo finito si $\alpha = r_2 - r_1 < 0$, y
2. exponencialmente estable si $\alpha = r_2 - r_1 = 0$.

Finalmente, recordando que el origen de $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)$ es globalmente asintóticamente estable, de la Observación 1.3.8 se sigue que la estabilidad en tiempo finito es global si $\alpha < 0$; mientras que si $\alpha = 0$, el origen de $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)$ es globalmente asintóticamente estable con estabilidad exponencial local. Los detalles de la prueba pueden consultarse en [25]. Como consecuencia del Teorema 2.3.1 se tiene el siguiente corolario, al cual se hará referencia más adelante en la definición de las funciones que se consideran para implementación de la ley de control (2.9):

Corolario 2.3.2. [25] *Considérese el esquema de control (2.9) con σ_{ij} , $i = 0, 1, 2$, $j = \overline{1, n}$, tal que*

$$\sigma_{ij}(\varsigma) = \text{sgn}(\varsigma)|\varsigma|^{\alpha_{ij}}, \quad \forall |\varsigma| \leq L_{ij} \in (0, \infty]$$

para constantes α_{ij} tales que

$$\alpha_{1j} > 0, \quad \alpha_{2j} = \gamma\alpha_{1j}, \quad \alpha_{0j} = \frac{2 - \gamma}{\gamma\alpha_{1j}}$$

para una constante $\gamma \in (0, 2)$. Entonces, para cualesquiera matrices diagonales definidas positivas K_1 y K_2 , $|\tau_j(t)| = |u_j(t)| < T_j$, $j = \overline{1, n}$, $\forall t \geq 0$, y la solución trivial en lazo cerrado $\bar{q}(t) \equiv 0_n$ es:

1. globalmente estable en tiempo finito, si $1 < \gamma < 2$;

2. *globalmente asintóticamente estable con estabilidad exponencial (local) si $\gamma = 1$.*

Un punto a resaltar sobre los algoritmos de control HXH02_{GC}, HXH02_{ID} y SB15 es que mediante la variación del parámetro α_1 en el caso de HXH02_{GC} y HXH02_{ID} o α en el caso de SB15, es posible obtener estabilidad en tiempo finito o estabilidad de tipo asintótica de la solución trivial en lazo cerrado $\bar{q}(t) \equiv 0_n$. Por lo tanto, en el estudio comparativo presentado en la siguiente sección se incluyeron resultados tanto para el caso en tiempo finito como para el asintótico, a fin de comparar el desempeño que se tiene con cada tipo de estabilizador. En las siguientes secciones se definirán los aspectos de comparación, se implementarán vía simulación los esquemas de control HXH02_{GC}, HXH02_{ID}, SB15 y ZZ17 aquí presentados, a un modelo mecánico de 2 gdl y se analizarán los resultados obtenidos.

2.4. Aspectos de comparación

Con el fin de comparar los algoritmos de control HXH02_{GC}, HXH02_{ID}, SB15 y ZZ17 expresados en (2.2), (2.3), (2.6) y (2.9), que resuelven el problema de regulación en tiempo finito, se definen los siguientes aspectos a considerar:

- I) Análisis de la respuesta del sistema y señal de control cuando las entradas del sistema están restringidas a un valor máximo dado por una cota M .²
- II) Análisis de la respuesta del sistema bajo incertidumbre en los parámetros del controlador. Más específicamente, haciendo una distinción de la *integral del cuadrado de las variables de error* —ISE (índice definido más adelante en esta sección)— producido por cada ley de control, suponiendo una desviación uniforme en los parámetros del modelo del sistema utilizado para construir la señal de control.³

Para evaluar estos aspectos de comparación se definen los siguientes índices de desempeño:

Tiempo de estabilización:

Para poder medir el tiempo que le toma a cada controlador estabilizar al sistema a un estado cuasi-estático se define el tiempo de estabilización t_λ^s (para las pruebas realizadas en este trabajo) como

$$t_\lambda^s = \inf\{t_e \geq 0 : \|\dot{q}(t)\| \leq \lambda, \forall t \geq t_e\} \quad (2.12)$$

ISE:

La integral del cuadrado del error —ISE, por sus siglas en inglés— la cual en este

²Ya que en su mayoría los algoritmos de control continuos en tiempo finito conocidos en la literatura no consideran las limitaciones físicas de los actuadores de un sistema, mediante este punto se desea visualizar cómo cambia el desempeño del sistema al tener estas restricciones en consideración —especialmente para los reguladores HXH02_{GC}, HXH02_{ID} y SB15, puesto que en el diseño de ZZ17 sí se consideran estas limitaciones—.

³En primera instancia con el objetivo de obtener información sobre cuál o cuáles algoritmos de control generan los menores ISE's ante incertidumbre paramétrica.

contexto será aplicada al error de posición en estado estable, se define como

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta} \|\bar{q}(t)\|^2 dt \quad (2.13)$$

más precisamente de $t_0 = t_\lambda^s$ a $t_0 = t_\lambda^s + \Delta$, donde t_λ^s se define como en (2.12) y $\Delta > 0$ es un periodo de tiempo común para todos los controladores. Cabe mencionar que este contexto, un menor valor de ISE implica una desviación menor de la respuesta del sistema con respecto a una posición de referencia dada.

2.5. Simulaciones y comparación de las leyes de control HXH02_{GC}, HXH02_{ID}, SB15 y ZZ17

Para la implementación en simulación de los controladores HXH02_{GC}, HXH02_{ID}, SB15 y ZZ17, expuestos en (2.2), (2.3), (2.6) y (2.9) se considera el modelo correspondiente a un robot manipulador de 2 gdl —tomado de [25]— cuya matriz de inercia, fuerzas centrífugas y de Coriolis, y vector de gravedad están dados por

$$\begin{aligned} H(q) &= \begin{pmatrix} 2.351 + 0.168 \cos q_2 & 0.102 + 0.084 \cos q_2 \\ 0.102 + 0.084 \cos q_2 & 0.102 \end{pmatrix} \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{pmatrix} -0.084 \dot{q}_2 \sin q_2 & -0.084(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ 0.084 \dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{pmatrix} \\ g(q) &= \begin{pmatrix} 38.465 \sin q_1 + 1.825 \sin(q_1 + q_2) \\ 1.825 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y cuyos pares máximos otorgados por sus actuadores son de 150 Nm y 15 Nm en el primer y segundo eslabones, respectivamente.

Para la implementación de ZZ17, de acuerdo a la notación de la Sección 2.3, se emplearon para $j = 1, 2$, las funciones: $\sigma_{0j}(\varsigma) = \sigma_{bs}(\varsigma; \alpha_0, a_{0j}, M_{0j}, L_{0j})$ y $\sigma_{ij} = \sigma_u(\varsigma; \alpha_i, a_{ij})$ para $i = 1, 2$, donde

$$\begin{aligned} \sigma_u(\varsigma; \alpha, a) &= \text{sgn}(\varsigma) \max\{|\varsigma|^\alpha, a|\varsigma|\} \\ \sigma_{bs}(\varsigma; \alpha, a, M, L) &= \begin{cases} \sigma_u(\varsigma; \alpha, a) & |\varsigma| \leq L \\ \text{sgn}(\varsigma) \sigma_{bs}^+(|\varsigma|; \alpha, a, M, L) & |\varsigma| > L \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\sigma_{bs}^+(\varsigma; \alpha, a, M, L) = \sigma_u(L; \alpha, a) + (M - \sigma_u(L; \alpha, a)) \times \tanh\left(\frac{\sigma_u(\varsigma; \alpha, a) - \sigma_u(L; \alpha, a)}{M - \sigma_u(L; \alpha, a)}\right)$$

para constantes $\alpha > 0$, $a \in \{0, 1\}$, $M > 0$, y $L > 0$ tal que $\sigma_u(L; \alpha, a) < M$. Siguiendo los procedimientos de diseño, de acuerdo al Corolario 2.3.2, se elige fijar el valor de $\alpha_0 = 1$, de donde se sigue que localmente cada σ_{0j} toma la forma de la función identidad; para $\gamma \in [1, 2)$: $\alpha_1 \in (0, 1]$ y $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}$, teniendo estabilidad en tiempo finito si

$\alpha_1 \in (0, 1)$ y estabilidad exponencial si $\alpha_1 = 1$, de la solución trivial $\bar{q}(t) \equiv 0_n$. Algunos ejemplos de estas funciones se muestran en la Figura 2.1. Además, para satisfacer la condición (2.10) sobre las funciones σ_{ij} , a fin de evitar la saturación de las entradas al sistema, se consideran los valores de $M_{01} = 100$ y $M_{02} = 13$ (Nm). Se considera también para $j = 1, 2$: $L_{0j} = 0.9M_{0j}$, y $a_{ij} = 0$, $i = 0, 1, 2$.

Para cada aspecto definido y ambos eslabones del manipulador se consideraron condiciones iniciales de posición y velocidad iguales a cero y $q_d = (\pi, \pi/2)^T$ la posición deseada, en todas las simulaciones. Algunos puntos adicionales a tomar en cuenta en las simulaciones presentadas a continuación en relación al primer aspecto a evaluar son:

- En cada figura se presentan las gráficas de los errores de posición y las señales de control correspondientes. Indicando además el valor de las ganancias y parámetros empleados en dicha simulación.
- Al pie de cada figura se indica el controlador al que pertenece dicha simulación, y si se simula el caso ideal —denotado por NS (no saturado)— o el caso con restricciones de entrada —denotado por S (saturado)—.
- Se simula el sistema en lazo cerrado para los casos ideal o sin restricciones de entrada, y con entradas acotadas —considerando las cotas de 150 y 15 Nm en el primer y segundo eslabones, correspondientes a los límites de operación de los actuadores del robot manipulador presentado en [25]—. ⁴
- Tanto para este aspecto como para el siguiente, las simulaciones se realizaron en el ambiente Simulink de Matlab utilizando el método de integración Runge-Kutta con paso fijo igual a 1e-3.

Aspecto I:

A partir de las gráficas de las Figuras 2.2, 2.4, 2.6 y 2.8 se nota que, idealmente, se cumple el objetivo de regulación en tiempo finito para todos los controladores estudiados, sin embargo, observando las señales de control correspondientes, se sabe que en la práctica debido a sus limitaciones físicas los actuadores del sistema no podrán otorgar los pares demandados por los reguladores HXH02_{GC}, HXH02_{ID} y SB15, ya que se encuentran muy por encima de sus límites de operación. De esto último, y en estos casos, puede esperarse que la respuesta del sistema no coincida con el comportamiento esperado, a diferencia de lo observado en el controlador ZZ17, cuyos pares se encuentran siempre dentro de un rango de operación permitido.

Por otro lado, a partir de las gráficas de las Figuras 2.3, 2.5 y 2.7 se observa que ante restricciones de entrada, la respuesta del sistema se ve alterada de manera desfavorable, notando que se vuelve más oscilatoria y que el tiempo de estabilización aumenta. En este sentido, si bien inicialmente no se tenía certeza analítica de que el objetivo de regulación fuera a cumplirse al considerar restricciones de entrada al sistema, para los

⁴Para el regulador ZZ17 sólo se presentan las simulaciones correspondientes al caso saturado ya que está diseñado para ser implementado en este caso.

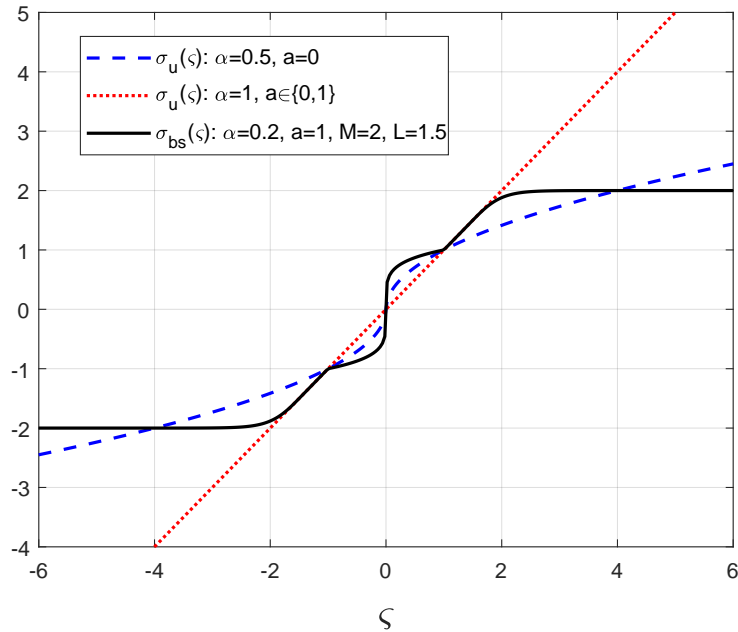


Figura 2.1: Ejemplos de $\sigma_u(\zeta; \alpha, a)$ y $\sigma_{bs}(\zeta; \alpha, a, M, L)$

controladores HXH02_{GC}, HXH02_{ID} y SB15, vía simulación, se observa que éste sí se cumple, aun cuando la respuesta del sistema se deteriora respecto al caso ideal.

En adición, se observa que ante restricciones de entrada, para las ganancias seleccionadas los controladores HXH02_{GC}, HXH02_{ID} y SB15 saturan las señales de control en los límites de operación máximos permitidos por los actuadores, con cambios de un límite a otro en intervalos de tiempo muy pequeños, lo cual, como se ha mencionado anteriormente, resulta desfavorable para todo el sistema. Mientras que para el controlador ZZ17 —véase la Figura 2.8— las señales de control generadas nunca alcanzan los niveles de par máximos permitidos, independientemente del valor de las ganancias.

Cabe mencionar, respecto a la sintonización de las ganancias empleadas en las simulaciones, que éstas fueron seleccionadas justamente para generar los efectos observados —como la saturación de las señales de control—, a fin de hacer notar cuál es el desempeño de cada controlador ante situaciones que no estaban previstas en su diseño, como lo son la respuesta del sistema ante restricciones de entrada. Finalmente, de acuerdo a lo observado, puede decirse que de entre los controladores que en su diseño no toma en cuenta el tipo de restricciones de entrada considerado, el regulador SB15 fue el que dio mejores resultados, con respuestas menos oscilatorias tanto de posición como de las señales de control.

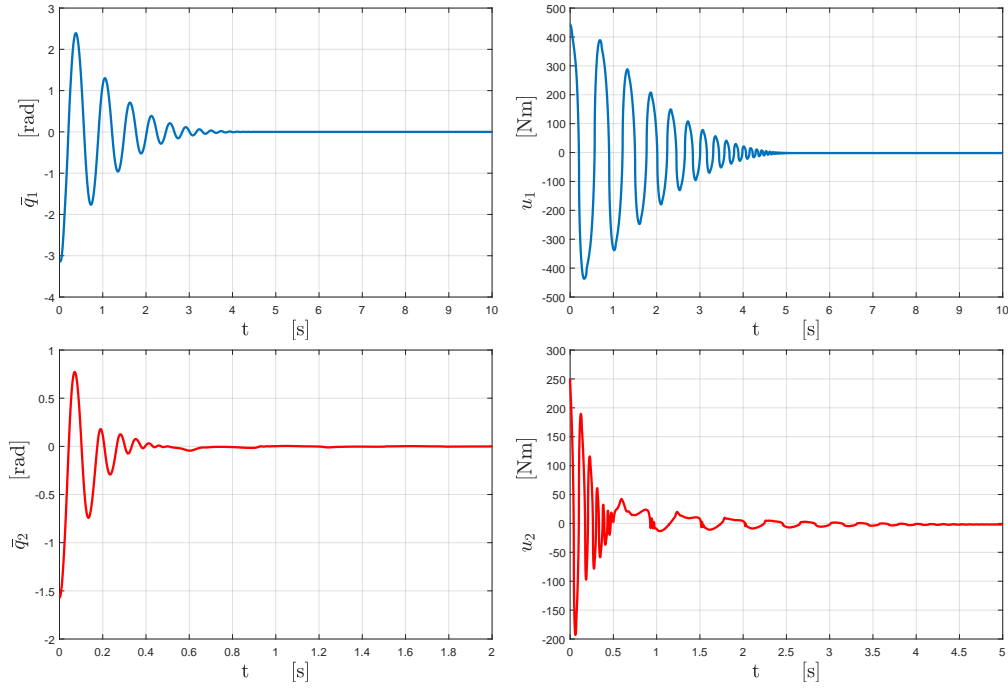


Figura 2.2: Controlador HXH02_{GC}-NS (2.2). Errores de posición y señales de control. Parámetros de simulación: $\alpha_1 = 0.5$, $K_1 = \text{diag}[250, 200]$, $K_2 = \text{diag}[9, 4]$.

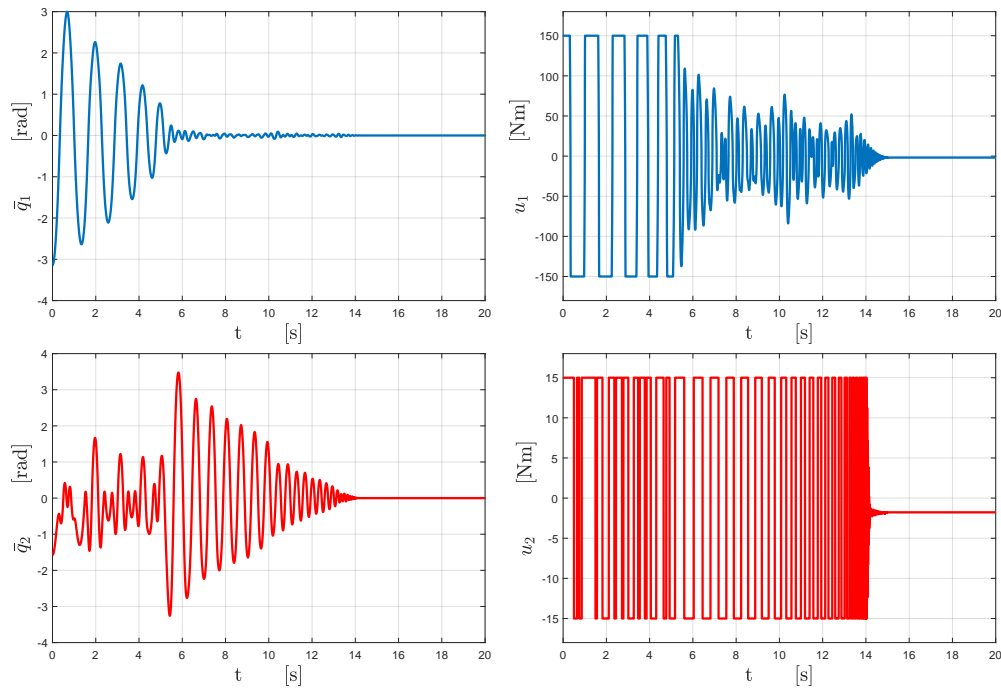


Figura 2.3: Controlador HXH02_{GC}-S (2.2). Errores de posición y señales de control. Parámetros de simulación: $\alpha_1 = 0.5$, $K_1 = \text{diag}[250, 200]$, $K_2 = \text{diag}[9, 4]$.

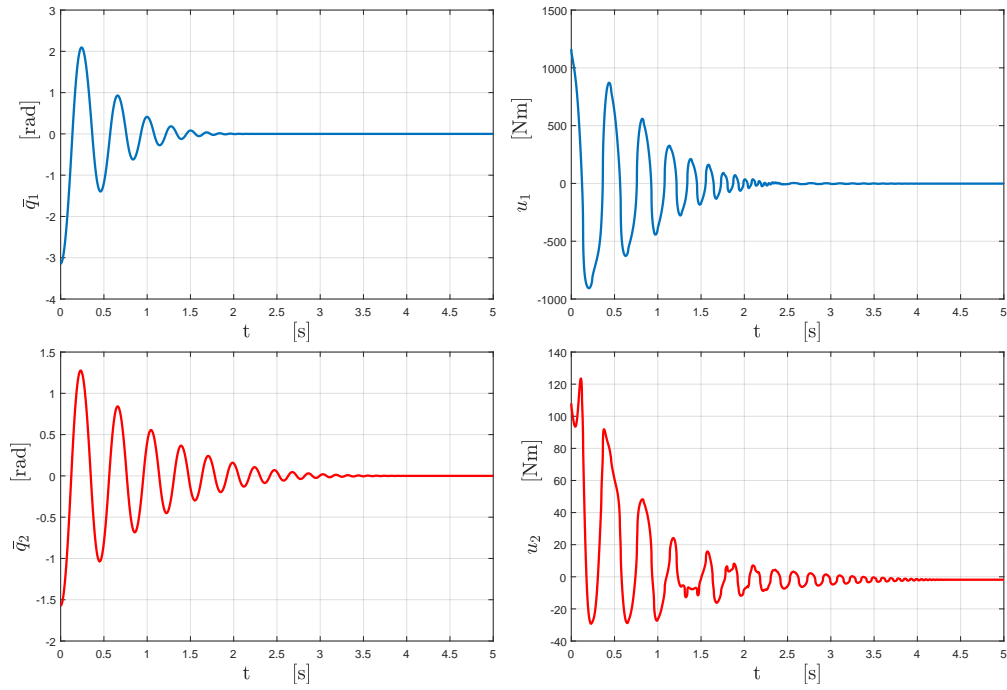


Figura 2.4: Controlador $HXH02_{ID-NS}$ (2.3). Errores de posición y señales de control. Parámetros de simulación: $\alpha_1 = 0.5$, $K_1 = \text{diag}[250, 200]$, $K_2 = \text{diag}[9, 4]$.

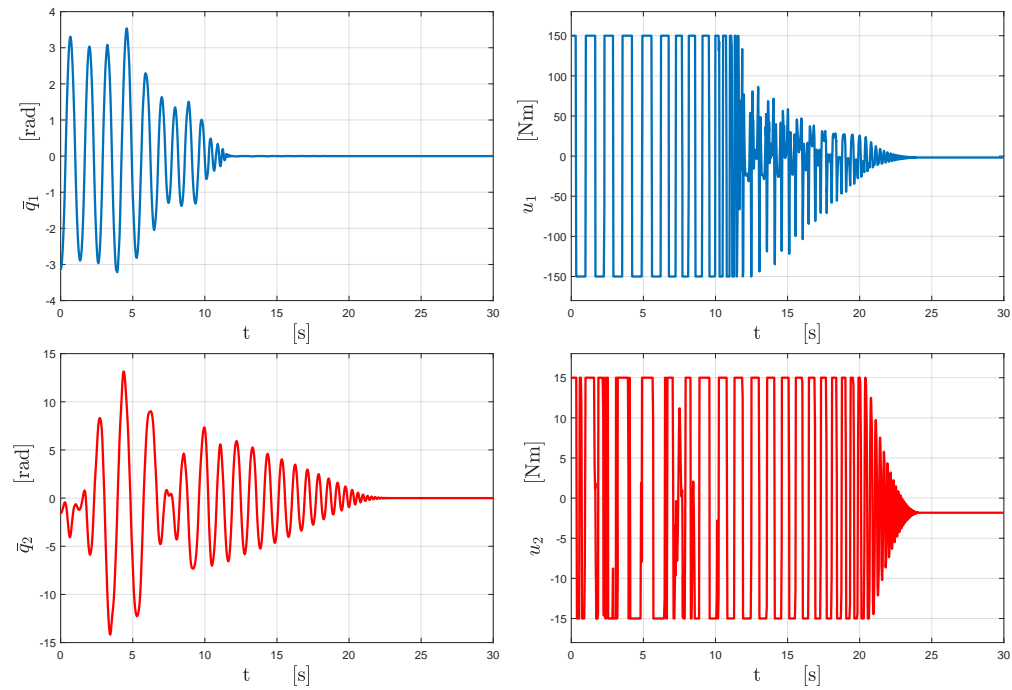


Figura 2.5: Controlador $HXH02_{ID-S}$ (2.3). Errores de posición y señales de control. Parámetros de simulación: $\alpha_1 = 0.5$, $K_1 = \text{diag}[250, 200]$, $K_2 = \text{diag}[9, 4]$.

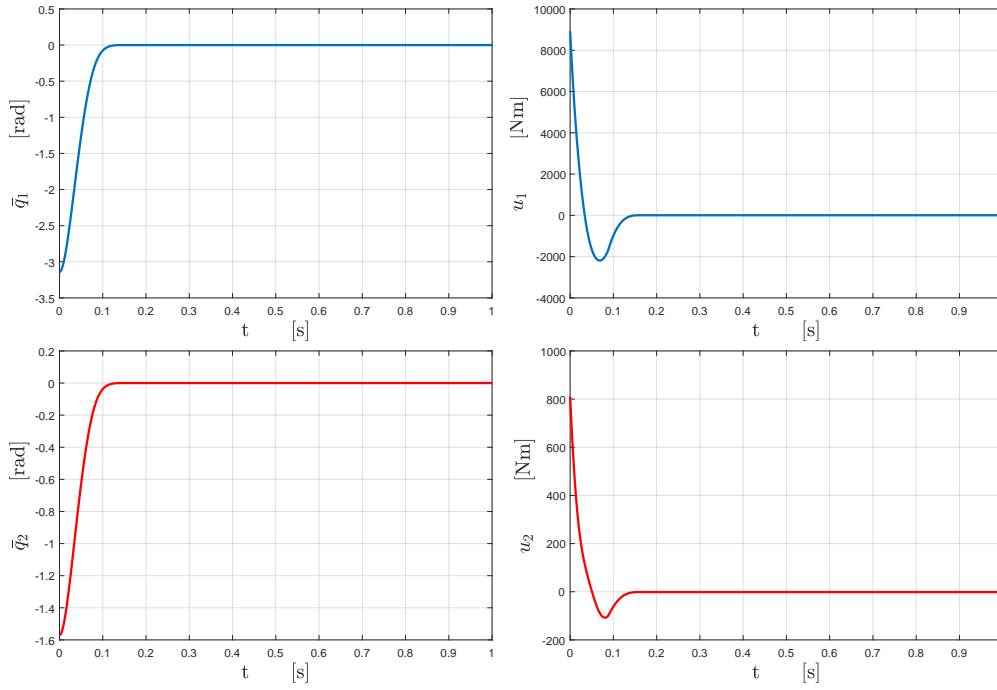


Figura 2.6: Controlador SB15-NS (2.6). Errores de posición y señales de control. Parámetros de simulación: $\alpha_1 = 0.8$, $k = 50$, $\gamma = 200$.

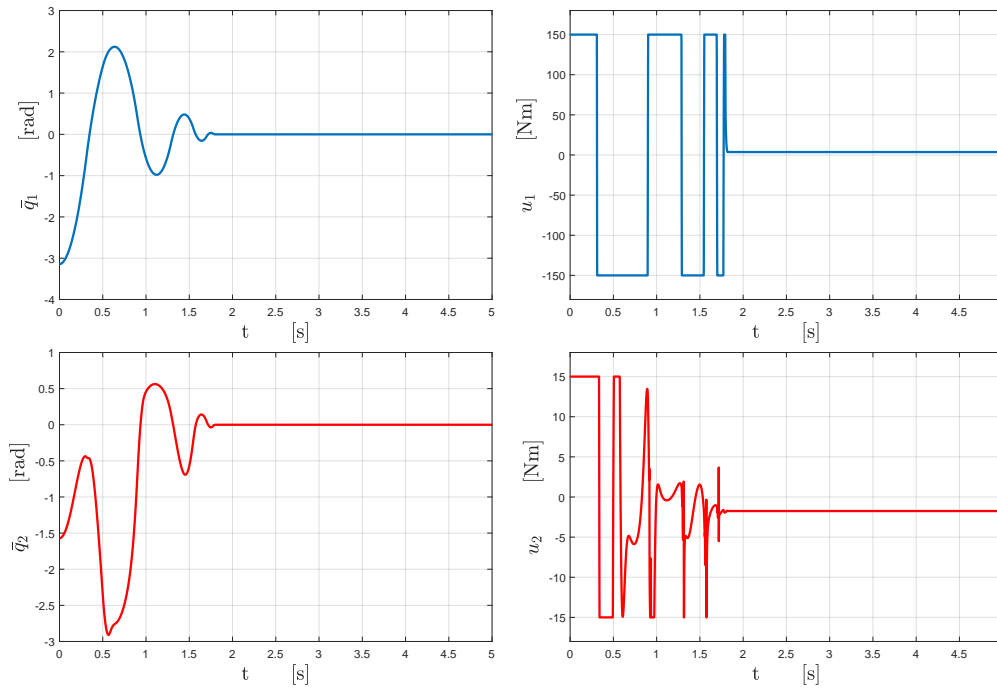


Figura 2.7: Controlador SB15-S (2.6). Errores de posición y señales de control. Parámetros de simulación: $\alpha_1 = 0.8$, $k = 50$, $\gamma = 200$.

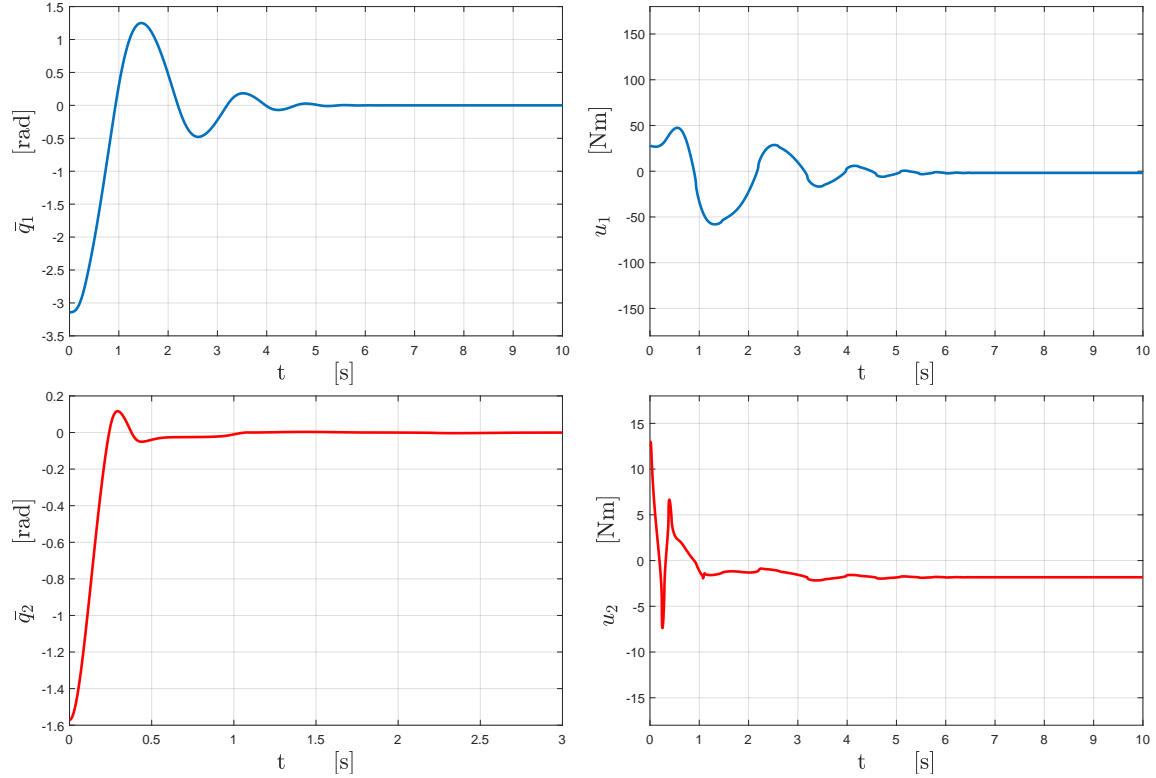


Figura 2.8: Controlador ZZ17 (2.9). Errores de posición y señales de control. Parámetros de simulación: $\alpha_1 = 0.5$, $K_1 = \text{diag}[250, 200]$, $K_2 = \text{diag}[9, 4]$.

Aspecto II

Para la evaluación de este aspecto se supone una desviación uniforme del 5 % y 15 % en los parámetros del modelo del sistema involucrados en la leyes de control —específicamente se han aumentado todos y cada uno de ellos en 5 % y 15 %, respectivamente— y posteriormente se comparan los valores de los ISE's generado por cada regulador. Cabe señalar que si bien existía la posibilidad de generar incertidumbre paramétrica mediante otras consideraciones, como por ejemplo la variación de aquellos parámetros que intervienen más en la dinámica del sistema, se optó por este tipo de desviación por simplicidad. Los algoritmos de control que se comparan aquí son HXH02_{GC}, HXH02_{ID}, SB15 y ZZ17.

A continuación se presentan los datos obtenidos de tres casos para distintos parámetros y ganancias de control. Los datos se agrupan en las Tablas 2.1, 2.2 y 2.3, y en cada una se presentan los datos correspondientes al caso en ausencia de incertidumbre paramétrica y considerando las desviaciones del 5 % y del 15 % mencionadas arriba, exponiendo el tiempo de estabilización t_λ^s —obtenido a partir de cómo se define en (2.12), con $\lambda = 0.01$ — y el valor del ISE —obtenido a partir de cómo se define en (2.13) y medido desde t_λ^s hasta $t_\lambda^s + \Delta$, con $\Delta = 5\text{s}$ —. Para la implementación de cada algoritmo de control⁵ se emplearon los valores de $\alpha_1 = 0.6, 0.8, 1$. Además para

⁵Para el controlador SB15, se escribe aquí α_1 en lugar de α como se tiene originalmente en (2.6).

α_1	HXH02 _{GC}		HXH02 _{ID}		ZZ17		SB15	
	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE
0.6	17.37	9.6933e-06	8.07	1.7928e-05	17.37	9.6933e-06	5.11	4.1609e-09
0.8	20.71	9.9139e-05	9.11	8.3622e-05	20.71	9.9139e-05	6.15	1.4349e-06
1	24.19	5.2358e-04	10.36	3.3907e-04	24.19	5.2358e-04	7.93	7.0817e-05

α_1	HXH02 _{GC}		HXH02 _{ID}		ZZ17		SB15	
	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE
0.6	18.60	0.0023	8.47	1.7865	18.60	0.0023	7.71	0.2626
0.8	22.26	0.0154	10.53	2.0544	22.26	0.0154	6.61	1.4485
1	26.32	0.0454	13.87	2.3053	26.32	0.0454	6.62	2.2965

α_1	HXH02 _{GC}		HXH02 _{ID}		ZZ17		SB15	
	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE
0.6	20.63	0.0680	8.96	6.3112	20.63	0.0680	12.17	6.4788
0.8	23.17	0.1903	11.41	6.1627	23.17	0.1903	8.06	6.2663
1	28.87	0.3490	13.28	6.0453	28.87	0.3490	7.24	6.0524

Tabla 2.1: Tiempos de estabilización e ISE's sin y con incertidumbre paramétrica del 5% y 15%, arriba, en medio y abajo, respectivamente. Parámetros de simulación: $K_1 = \text{diag}[1, 1]$, $K_2 = \text{diag}[1, 1]$, $k = \gamma = 1$.

facilitar su lectura, cuando aplica, en las tablas presentadas a continuación se indica con una flecha (ubicada a la izquierda de cada columna) la dirección de incremento o decremento de los datos obtenidos.

Caso 1

El primer caso expuesto en la Tabla 2.1 es el de ganancias unitarias, es decir, $K_1 = K_2 = \text{diag}[1, 1]$ y $k = \gamma = 1$. Aquí, debido al valor de las ganancias, los tiempos de estabilización así como las medidas de ISE son grandes para todos los controladores. En el caso sin incertidumbre paramétrica y con incertidumbre del 5%, se visualiza que los controladores en tiempo finito (correspondientes a cuando α_1 es fraccionario) generan una menor medida de ISE que cuando la estabilización es en tiempo asintótico (correspondientes a cuando $\alpha_1 = 1$), sin embargo, este hecho se invierte cuando la desviación paramétrica aumenta, particularmente como se observa para los controladores HXH02_{ID} y SB15 cuando la incertidumbre paramétrica es de 15%.

Si bien, en ausencia de incertidumbre paramétrica, el controlador que menores tiempos de estabilización e ISE's presenta es SB15, cuando la incertidumbre crece, son HXH02_{ID} y SB15 los que presentan los resultados más desfavorables, con los ISE's más grandes, tanto para pequeñas incertidumbres —como las que se modelan con las

α_1	HXH02 _{GC}		HXH02 _{ID}		ZZ17		SB15	
	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE
0.6	6.08	4.1184e-07	5.86	2.4017e-06	7.43	3.7296e-06	4.36	4.1044e-09
0.8	6.60	5.7712e-06	5.97	1.1903e-05	7.28	9.1861e-06	5.23	1.4303e-06
1	7.31	3.8422e-05	6.27	4.9991e-05	7.31	3.8422e-05	6.27	4.9991e-05

α_1	HXH02 _{GC}		HXH02 _{ID}		ZZ17		SB15	
	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE
0.6	6.39	1.5838e-04	7.96	0.0955	8.01	4.4248e-04	4.35	1.1386e-08
0.8	7.01	0.0015	6.61	0.2217	7.76	0.0024	5.79	0.0273
1	7.67	0.0065	5.76	0.3866	7.67	0.0065	5.76	0.3866

α_1	HXH02 _{GC}		HXH02 _{ID}		ZZ17		SB15	
	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE
0.6	6.61	0.0035	7.17	1.5443	7.75	0.0137	6.50	0.0740
0.8	7.14	0.0167	5.51	1.8082	7.65	0.0276	5.42	1.1551
1	7.56	0.0471	4.70	2.0516	7.56	0.0471	4.70	2.0516

Tabla 2.2: Tiempos de estabilización e ISE's sin y con incertidumbre paramétrica del 5% y 15%, arriba, en medio y abajo, respectivamente. Parámetros de simulación: $K_1 = \text{diag}[3, 3]$, $K_2 = \text{diag}[4, 4]$, $k = 1$, $\gamma = 3$.

desviaciones del 5%— como para incertidumbres más grandes —refiriéndose a las de 15%—, mientras que los controladores HXH02_{GC} y ZZ17 son lo que guardan un menor valor de ISE.

Un punto importante a destacar sobre los datos de la Tabla 2.1 es que las columnas correspondientes a los controladores HXH02_{GC} y ZZ17 resultan coincidir, esto debido a que localmente —para estos valores de ganancias y para las funciones empleadas para en el regulador ZZ17 descritas en (2.14)— la ley de control ZZ17 tiene la misma estructura que el controlador HXH02_{GC}, de modo que la acción de control generada por el regulador ZZ17 coincide con la generada por HXH02_{GC}, en tanto que los argumentos de las funciones involucradas en la ley de control ZZ17 se encuentren dentro del dominio donde coinciden.

De hecho, para este caso —de acuerdo a la notación empleada para describir las funciones (2.14)— la acción de control del regulador ZZ17 está dada localmente por

$$\tau = -\text{sig}(\bar{q})^{\alpha_1} - \text{sig}(\dot{q})^{\alpha_2} + g(q)$$

la cual coincide con la del regulador HXH02_{GC} cuando las ganancias son unitarias. Nótese que para otras ganancias y/o condiciones iniciales distintas, esta última obser-

α_1	HXH02 _{GC}		HXH02 _{ID}		ZZ17		SB15	
	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE
0.6	1.80	2.7508e-09	0.89	5.2541e-10	3.06	5.2490e-08	1.29	6.6833e-13
0.8	1.73	6.7500e-08	0.82	1.6663e-08	2.28	1.2577e-07	1.01	2.4682e-10
1	1.77	3.1041e-07	1.05	6.5042e-08	1.85	2.5181e-07	1.05	6.5042e-08

α_1	HXH02 _{GC}		HXH02 _{ID}		ZZ17		SB15	
	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE
0.6	1.80	5.8194e-09	0.86	1.2615e-06	3.06	6.9725e-07	1.45	4.2562e-12
0.8	1.72	6.4718e-07	0.81	6.7163e-05	2.27	4.9205e-06	1.04	1.1126e-06
1	1.76	1.6110e-05	1.08	7.2765e-04	1.84	1.6087e-05	1.08	7.2765e-04

α_1	HXH02 _{GC}		HXH02 _{ID}		ZZ17		SB15	
	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE	$t_{0.01}^s$	ISE
0.6	1.80	6.6652e-08	0.81	3.6431e-05	3.04	2.5402e-05	1.50	1.0179e-11
0.8	1.70	8.0870e-06	0.79	8.3123e-04	2.25	7.3917e-05	1.13	7.3903e-05
1	1.73	1.4044e-04	1.13	0.0055	1.81	1.4049e-04	1.13	0.0055

Tabla 2.3: Tiempos de estabilización e ISE's sin y con incertidumbre paramétrica del 5% y 15%, arriba, en medio y abajo, respectivamente. Parámetros de simulación: $K_1 = \text{diag}[100, 100]$, $K_2 = \text{diag}[20, 20]$, $k = 10$, $\gamma = 10$.

vación no necesariamente se cumple.

Caso 2

Para este caso se consideraron los parámetros y ganancias de control $K_1 = \text{diag}[3, 3]$, $K_2 = \text{diag}[4, 4]$, $k = 1$ y $\gamma = 3$ (véase la Tabla 2.2). Para esta sintonización de ganancias, si bien no se observa un patrón general sobre el tiempo de estabilización —tanto para el caso sin incertidumbre y con desviaciones paramétricas del 5% y 15%—, nótese que aunque existen reguladores para los cuales el tiempo de estabilización es menor en el caso en el que el controlador es de tipo asintótico, las medidas del ISE son menores cuando la estabilización es en tiempo finito, y de hecho se observa una tendencia de éstas a aumentar conforme lo hace el parámetro de control α_1 .

Finalmente se observa que para la desviación paramétrica del 15%, con los controladores HXH02_{GC} y ZZ17 se generan los menores ISE's, siendo HXH02_{GC} con el que se obtienen los mejores resultados, mientras que con HXH02_{ID} y SB15 se obtienen los ISE's más altos, siendo HXH02_{ID} el que genera la evaluación menos deseable.

Caso 3

Para este caso se consideraron los parámetros y ganancias de control $K_1 = \text{diag}[100, 100]$, $K_2 = \text{diag}[20, 20]$, $k = 10$ y $\gamma = 10$ (véase la Tabla 2.3). Aquí, en comparación con los casos 1 y 2 descritos arriba, debido al valor de las ganancias de control se tiene una respuesta más rápida del sistema y menores errores de posición.

En el caso ideal, sin incertidumbre paramétrica, el controlador SB15 produce las menores medidas de ISE, aunque esto deja de cumplirse conforme la desviación paramétrica aumenta, a excepción cuando $\alpha_1 = 0.6$. En todos los casos, sin y con incertidumbre paramétrica, se observa que el valor del ISE es menor cuando la estabilización es en tiempo finito y respecto a los casos con desviaciones paramétricas del 5% y 15% el controlador con mejor tiempo de estabilización es HXH02_{ID}, aunque al mismo tiempo es el que presenta los ISE's más altos. En contraste, se observa que el controlador HXH02_{GC} produce los menores ISE's cuando $\alpha = 0.8$ y $\alpha = 1$. Algunos comentarios y conclusiones de acuerdo a los datos obtenidos y lo observado en las simulaciones se presentan a continuación.

Conclusiones

Si bien en la mayoría de los casos presentados se observa que en ausencia de incertidumbre paramétrica el controlador SB15 genera los mejores (menores) ISE's, esta cualidad se pierde cuando la incertidumbre paramétrica aumenta, siendo de hecho uno de los reguladores que genera mayor error de estado estable junto con HXH02_{ID}; esto hace pensar que aquellos controladores cuyo diseño está basado mayormente en los elementos que forman parte de la dinámica del sistema, como lo son HXH02_{ID} y SB15, el error de estado estable tiende a ser más grande ante incertidumbre paramétrica, en comparación con aquellos controladores que compensan menos la dinámica del sistema.

Por otro lado, respecto al tiempo de estabilización en la mayoría de los casos son los reguladores HXH02_{ID} y SB15 en los que éste es menor, sin embargo, de acuerdo a lo que se menciona en el párrafo anterior esto no necesariamente implica que su desempeño sea el mejor dado que ante incertidumbre paramétrica estos controladores generan los ISE's más altos.

Aunque, de manera general, en la mayoría de los casos los esquemas de control en tiempo finito parecen generar los menores valores de ISE comparado con los controladores de tipo asintótico, como se observa en los casos en los que la incertidumbre paramétrica es lo suficientemente pequeña, un hecho observable y que resulta de interés —como se muestra en Tabla 2.1— es que cuando la desviación paramétrica es del 15%, los controladores HXH02_{ID} y SB15 generan ISE's más pequeños cuando son de tipo asintótico. Así, podría concluirse que ante pequeña incertidumbre paramétrica los reguladores de tipo finito dan un mejor resultado, aunque en general esto no se cumple necesariamente cuando la incertidumbre en los parámetros aumenta considerablemente.

En este punto, es importante mencionar que la comparación de las leyes de control aquí presentadas no resulta directa, ya que, si bien en principio los reguladores HXH02_{ID}, HXH02_{GC} y ZZ17 parecen tener una estructura “similar”, el regulador SB15 no posee la misma naturaleza —teniendo una estructura totalmente distinta a la de los otros controladores—, lo cual complica su comparación con los otros estabilizadores.

Por lo anterior y como una extensión a los resultados obtenidos hasta el momento, vía simulación, donde se compara el desempeño de distintos reguladores en ausencia y presencia de incertidumbre paramétrica, en el siguiente capítulo se estudian de manera analítica, y en un contexto más general —refiriéndose al de *seguimiento en tiempo finito*— algunos aspectos de robustez de una ley de control continua en tiempo finito para el seguimiento de sistemas mecánicos con entrada acotada, recientemente propuesta en la literatura. Tales aspectos de robustez resultan importantes para la teoría de estabilidad en tiempo finito, particularmente sobre la relación entre los controladores de tipo finito y asintótico ante perturbaciones en sistemas mecánicos.

Capítulo 3

Seguimiento en tiempo finito y aspectos de robustez

Un problema más general al de regulación tratado en el capítulo anterior es el de seguimiento de trayectorias en sistemas mecánicos. En este capítulo, se presenta una ley de control continua que resuelve el *problema de seguimiento en tiempo finito*, evitando además la saturación de las entradas, la cual fue recientemente propuesta en la literatura, y para la cual se estudiarán algunos aspectos de robustez. En la Sección 3.1 se presenta la ley de control de seguimiento y en la Sección 3.2 se presentan los resultados obtenidos sobre los aspectos de robustez de dicha ley. Finalmente en la Sección 3.3 se presentan algunas simulaciones que permiten visualizar los resultados analíticos previamente mostrados.

3.1. Control de seguimiento en tiempo finito con restricciones de entrada

Considérese la ecuación de movimiento de un sistema mecánico con efecto de amortiguamiento lineal de n grados de libertad totalmente actuado descrito en la Sección 1.4

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.1)$$

sujeto a¹

$$\tau_i = T_i \text{sat} \left(\frac{u_i}{T_i} \right), \quad i = \overline{1, n} \quad (3.2)$$

donde u_i representa la variable de control relativa al i -ésimo grado de libertad, y T_i es una constante positiva tal que $|\tau_i| < T_i$, $i = \overline{1, n}$, y considérese la siguiente caracterización del tipo de trayectorias $q_d(t)$ para las cuales el esquema de control presentado a continuación asegura el objetivo de seguimiento bajo la restricción de entrada a considerar.

¹Esto con el objetivo de considerar el caso con entradas acotadas.

Suposición 3.1.1. [23] $q_d \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\dot{q}_d(t)\| \leq B_{dv}$ y $\|\ddot{q}_d(t)\| \leq B_{da}$, $\forall t \geq 0$, para algunas constantes positivas B_{dv} , B_{da} lo suficientemente pequeñas para asegurar que $\mu_M B_{da} + k_C B_{dv}^2 + f_M B_{dv} < T_j - B_{g_j}$, $j = \overline{1, n}$, y $B_{dv} < f_m/k_C$.

Además, sobre la matriz F del término de fuerzas de amortiguamiento lineales se hace la siguiente suposición:

Suposición 3.1.2. F es simétrica, definida positiva, y en consecuencia $f_m \|x\|^2 \leq x^T F x \leq f_M \|x\|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, para algunas constantes $f_M \geq f_m > 0$.

Considérese la siguiente ley de control propuesta por Zamora-Gómez *et al.* en [23]:

$$u(t, q, \dot{q}) = -s_1(K_1 \bar{q}) - s_2(K_2 \bar{\dot{q}}) + H(q) \ddot{q}_d(t) + C(q, \dot{q}_d(t)) \dot{q}_d(t) + F \dot{q}_d(t) + g(q) \quad (3.3)$$

donde $\bar{q} = q - q_d(t)$ y $\bar{\dot{q}} = \dot{q} - \dot{q}_d(t)$; para cada $i = 1, 2$: $K_i = \text{diag}[k_{i1}, \dots, k_{in}]$, es una matriz diagonal definida positiva; para toda $x \in \mathbb{R}^n$, $s_i(x) = (\sigma_{i1}(x_1), \dots, \sigma_{in}(x_n))^T$, y para cada $j = \overline{1, n}$, σ_{ij} es una función fuertemente pasiva acotada para $(\kappa_i, a_i, b_i, \bar{\kappa}_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i) \in \mathbb{R}_{>0}^6$ localmente Lipschitz-continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con $a_1 \in (0, 1]$, $a_2 = \frac{2a_1}{1+a_1} \in (0, 1]$, y tal que

$$B_j \triangleq \max_{(\varsigma_1, \varsigma_2) \in \mathbb{R}^2} |\sigma_{1j}(\varsigma_1) + \sigma_{2j}(\varsigma_2)| < T_j - \mu_M B_{da} - k_C B_{dv}^2 - f_M B_{dv} - B_{g_j} \quad (3.4)$$

Entonces, se tiene el siguiente resultado, demostrado en [23]:

Teorema 3.1.3. *Considérese el sistema (3.1)–(3.2) en lazo cerrado con la ley de control (3.3), sujeto a las Suposiciones 1.4.3–1.4.6 y 3.1.1–3.1.2. Para cualesquiera matrices diagonales definidas positivas K_1 y K_2 , $|\tau_j(t)| = |u_j(t)| < T_j$, $j = \overline{1, n}$, $\forall t \geq 0$, y la solución trivial del sistema en lazo cerrado $\bar{q}(t) = 0_n$ es:*

1. *globalmente uniformemente estable en tiempo finito, si $a_1 \in (0, 1)$.*
2. *globalmente uniformemente asintóticamente estable con estabilidad exponencial (local) si $a_1 = 1$.*

Como bien se menciona en [1], aunque (1.18) resulta ser un modelo más general a (1.19), en ambos casos siguen existiendo aspectos no modelados, tales como otros tipos de amortiguamiento y perturbaciones, etc. Dado esta problemática, un aspecto deseable de un controlador es que sea robusto ante este tipo de fenómenos. En este sentido, en la siguiente sección se reformula el análisis del sistema (3.1)–(3.2) en lazo cerrado con la ley de control (3.3) bajo la consideración de perturbaciones acotadas que coinciden con la entrada. En este nuevo escenario, se desarrolla un análisis local para determinar el acotamiento ulterior de las soluciones y con qué controlador, entre tiempo finito y exponencial, se obtiene la menor cota ulterior.

3.2. Robustez de la ley de control

Para estudiar la robustez del sistema (3.1)–(3.2) en lazo cerrado con la ley de control (3.3), se supone la existencia de una perturbación $\varrho(t, q, \dot{q})$ a la entrada del sistema (véase la Figura 3.1), la cual satisface lo siguiente:

Suposición 3.2.1. $\|\varrho(t, q, \dot{q})\| \leq M_\varrho$, para alguna constante positiva M_ϱ , o equivalentemente $|\varrho_j(r, q, \dot{q})| \leq \bar{\varrho}_j$, para alguna contante positiva $\bar{\varrho}_j$, para $j = \overline{1, n}$, $\forall (t, q, \dot{q}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Ya que la ley de control (3.3) evita la saturación de los pares de control, a fin de seguir conservando esta propiedad en presencia de perturbación, se supone que

$$\tau_i = T_i \text{sat} \left(\frac{u_i + \varrho_i}{T_i} \right) \quad (3.5)$$

donde u_i y ϱ_i representan la variable de control (o la salida del controlador) y la perturbación existente, respectivamente, relativas al i -ésimo grado de libertad, con T_i una constante positiva tal que $|\tau_i| < T_i$, $i = \overline{1, n}$. Se considera lo siguiente sobre las cotas de saturación.

Suposición 3.2.2. Considerando el sistema (3.1), bajo la restricción de entrada impuesta por (3.5), se supone que $T_i > B_{g_i} + \bar{\varrho}_i \forall i = \overline{1, n}$.

Para asegurar el cumplimiento del objetivo de control y evitar además la saturación de las entradas al sistema en presencia de perturbaciones, se hace la siguiente suposición sobre las trayectorias a seguir:

Suposición 3.2.3. $q_d \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\dot{q}_d(t)\| \leq B_{dv}$ y $\|\ddot{q}_d(t)\| \leq B_{da}$, $\forall t \geq 0$, para constantes positivas B_{dv} , B_{da} lo suficientemente pequeñas tal que $\mu_M B_{da} + k_C B_{dv}^2 + f_M B_{dv} < T_j - B_{g_j} - \bar{\varrho}_j$, $j = \overline{1, n}$, y $B_{dv} < f_m/k_C$.

Observación 3.2.4. A fin de continuar evitando la saturación de las entradas en presencia de perturbaciones, se supone además que

$$B_j \triangleq \max_{(\varsigma_1, \varsigma_2) \in \mathbb{R}^2} |\sigma_{1j}(\varsigma_1) + \sigma_{2j}(\varsigma_2)| < T_j - \mu_M B_{da} - k_C B_{dv}^2 - f_M B_{dv} - B_{g_j} - \bar{\varrho}_j \quad (3.6)$$

en lugar de la condición (3.4).

Observación 3.2.5. A diferencia del sistema no perturbado, ecuaciones (3.1)-(3.2) en lazo cerrado con (3.3) en donde $\bar{q}(t) \equiv 0_n$ es una solución de equilibrio en ausencia de perturbaciones, en general, las soluciones en lazo cerrado no necesariamente convergen a la trayectoria deseada cuando existen perturbaciones, y en su evolución en el tiempo

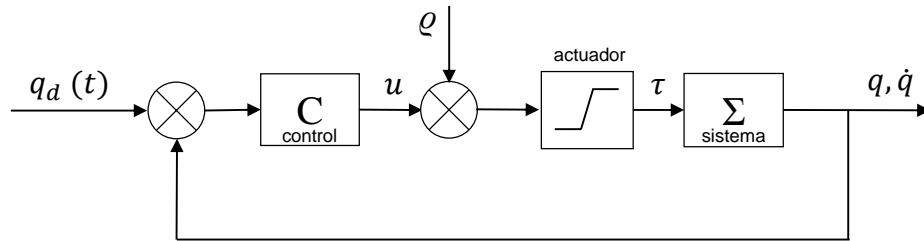


Figura 3.1: Diagrama en lazo cerrado de un sistema de control con entrada de perturbación ϱ y restricciones de entrada.

está presente el efecto de la perturbación $\varrho(t, q, \dot{q})$. En estos casos, resulta conveniente, si es posible, determinar si al menos las variables de error permanecen acotadas y asegurar además que la respuesta post transitoria reside en alguna región alrededor de la trayectoria deseada. En este sentido, bajo las consideraciones hechas sobre $\varrho(t, q, \dot{q})$, el siguiente resultado indica que las soluciones de (3.1) en lazo cerrado con (3.3) son ulteriormente acotadas en presencia de perturbaciones, y más aún, se caracteriza la cota ulterior en términos de un parámetro de control.

Para estudiar el acotamiento de las soluciones del sistema en lazo cerrado se realiza un análisis de tipo Liapunov para lo cual se define la función

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T H(\bar{q} + q_d(t)) \dot{\bar{q}} + \sum_{j=1}^n \int_0^{\bar{q}_j} \sigma_{1j}(k_{1j} z_j) dz_j + \epsilon \rho^T(\bar{q}) H(\bar{q} + q_d(t)) \dot{\bar{q}} \quad (3.7)$$

donde ϵ es una constante positiva; $\rho(\bar{q}) = h(\bar{q}; b_1/k_{1M})\bar{q}$, donde $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}; (0, 1])$, es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, uniformemente en $\mathbb{R}_{>0}$, y tal que, para cada $c > 0$, ρ es una función continuamente diferenciable que satisface

$$\|\rho(x)\| = h(x; c)\|x\| \leq \min\{\|x\|, c\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.8)$$

y

$$-h(x; c) < D_x h(x; c) < 0, \quad \forall x \neq 0_n \quad (3.9)$$

Un ejemplo de una familia de funciones h con tales propiedades es $h(x; c) = \frac{c}{[c^\lambda + \|x\|^\lambda]^{1/\lambda}}$, para cualquier $\lambda > 0$.²

Observación 3.2.6. [23] De acuerdo con (3.9), la función h resulta ser decreciente en cualquier dirección radial y en consecuencia —ya que $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow (0, 1]$ — $h(x; c) \rightarrow \varpi$ conforme $\|x\| \rightarrow \infty$ para alguna constante no negativa ϖ ; adicionalmente, sobre cualquier vecindad compacta y conexa del origen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, h está acotada inferiormente por un valor positivo $h_{m,\Omega}$, más precisamente: $1 \geq h(0_n; c) \geq h(x; c) \geq \inf_{x \in \Omega} h(x; c) \triangleq h_{m,\Omega} = \inf_{x \in \partial\Omega} h(x; c) > \varpi \geq 0$, $\forall x \in \Omega$.

Observación 3.2.7. [23] Sea $\rho(\bar{q})$ como se define en (3.7) y sea $h_1 = h(\bar{q}; b_1/k_{1M})$, entonces para todo $\bar{q} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

1. $\|\rho(\bar{q})\|^{1+a_1} \leq h_1(\bar{q})S_1(\bar{q}) \leq S_1(\bar{q})$,
2. $\|\rho(\bar{q})\|^2 \leq (b_1/k_{1M})^{1-a_1} h_1(\bar{q})S_1(\bar{q})$.

En lo consecuente, se mostrará que para un valor de ϵ lo suficientemente pequeño, se cumple lo enunciado en la Observación 3.2.5; en particular, el objetivo se logra con $\epsilon < \varepsilon \triangleq \min\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_{2,h_{1m}}, \epsilon_{3,h_{1m}}\}$, donde

$$\epsilon_0 = \frac{\mu_m}{\mu_M}, \quad \epsilon_1 = \frac{2\kappa_1 k_{1m}^{a_1}}{\mu_M(1+a_1)} \left(\frac{b_1}{k_{1M}} \right)^{a_1-1}, \quad \epsilon_{2,h} = \frac{d}{\bar{c}\bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2}} \left[\frac{\bar{h}\kappa_1 k_{1m}^{a_1} (1+a_1)}{2\bar{c}\bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2}} \right]^{1/a_1}$$

²En efecto, dado $\rho_\lambda(x) = h_\lambda(x; c)x$, $\lambda > 0$, con $h_\lambda(x; c) \triangleq c/[c^\lambda + \|x\|^\lambda]^{1/\lambda}$, se verifica que luego de algunas operaciones que $D_x h_\lambda(x; c) = -h_\lambda(x; c)(\|\rho_\lambda(x)\|/c)^\lambda$, de donde se corrobora que $-h_\lambda(x; c) < D_x h_\lambda(x; c) < 0$, $\forall x \neq 0_n$.

$$\epsilon_{3,h} \triangleq \frac{\hbar \kappa_1 k_{1m}^{a_1} d}{2\hbar \kappa_1 k_{1m}^{a_1} \nu_1 + \nu_2^2}, \quad h_{1m} \triangleq \inf_{\bar{q} \in B_{b_1/k_{1M}}^n} h_1(\bar{q}) = \inf_{\bar{q} \in \partial B_{b_1/k_{1M}}^n} h_1(\bar{q}), \quad d = f_m - k_C B_{dv}$$

$$\nu_1 = \frac{k_C b_1}{k_{1M}} + \mu_M, \quad \nu_2 = (2k_C B_{dv} + f_M) \left(\frac{b_1}{k_{1M}} \right)^{(1-a_1)/2}$$

$k_{1m} = \min_j \{k_{1j}\}$, $k_{1M} = \max_j \{k_{1j}\}$, $k_{2m} = \min_j \{k_{2j}\}$, $k_{2M} = \max_j \{k_{2j}\}$ y $\bar{c} = \bar{c}_{1+a_1,2}^{1+a_1}$ es una constante positiva derivada de la Observación 1.3.29. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 3.2.8. *Considérese el sistema (3.1) sujeto a (3.5) en lazo cerrado con la ley de control (3.3) bajo las Suposiciones 1.4.3–1.4.5, 3.1.2, 3.2.1–3.2.3 y la Observación 3.2.4. Entonces, para cualesquiera matrices diagonales definidas positivas K_1 y K_2 , $|\tau_j(t)| = |u_j(t)| < T_j$, $j = \overline{1, n}$, $\forall t \geq 0$, y para perturbaciones con M_ρ lo suficientemente pequeña y condiciones iniciales $(\bar{q}(t_0), \dot{\bar{q}}(t_0))$ suficientemente cercanas a $(0_n, 0_n)$, existe un $T \geq 0$ tal que para cada $a_1 \in (0, 1]$, las soluciones del sistema en lazo cerrado son ulteriormente acotadas, con una cota ulterior de la forma*

$$cu(a_1) = b \left(\frac{M_\rho}{c} \right)^{\Gamma(a_1)} \quad (3.10)$$

donde b y c son constantes positivas y $\Gamma(a_1)$ es una función tal que $\Gamma(a_1) \geq 1 \quad \forall a_1 \in (0, 1]$, con $\Gamma(a_1) = 1 \iff a_1 = 1$.³

Demostración: Por las Suposiciones 1.4.3–1.4.5, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.3, la desigualdad (3.6), y de la definición de $u(t, q, \dot{q})$ se sigue que $\forall (t, q, \dot{q}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |u_j(t, q, \dot{q}) + \rho_j(t, q, \dot{q})| &\leq |u_j(t, q, \dot{q})| + |\rho_j(t, q, \dot{q})| \\ &\leq |\sigma_{1j}(k_{1j}\bar{q}_j) + \sigma_{2j}(k_{2j}\dot{\bar{q}})| + \|H(q)\| \|\ddot{q}_d(t)\| \\ &\quad + \|C(q, \dot{q}_d(t))\| \|\dot{q}_d(t)\| + \|F\| \|\dot{q}_d(t)\| + |g_j(q)| + \bar{\rho}_j \\ &\leq B_j + \mu_M B_{da} + k_C B_{dv}^2 + f_M B_{dv} + B_{g_j} + \bar{\rho}_j < T_j \end{aligned}$$

Así, junto con la ecuación (3.5) se tiene que $|\tau_j| = |u_j + \rho_j| = |u_j(t, q, \dot{q}) + \rho_j(t, q, \dot{q})| < T_j \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, lo cual prueba que a lo largo de las trayectorias del sistema $|\tau_j(t)| = |u_j(t) + \rho_j(t)| < T_j$, $\forall j = \overline{1, n}$, $\forall t \geq 0$, y por lo tanto bajo la ley de control (3.3), los valores de saturación de las entradas T_j nunca son alcanzados. Luego, sustituyendo (3.3) en lugar de τ en (3.1), el sistema en lazo cerrado se escribe como

$$H(q)\ddot{\bar{q}} + C(q, \dot{\bar{q}})\dot{\bar{q}} + C(q, \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} + F\dot{\bar{q}} = -s_1(K_1\bar{q}) - s_2(K_2\dot{\bar{q}}) + \rho(t, q, \dot{q}) \quad (3.11)$$

Ahora, basados en el Teorema 1.3.6 para probar que las soluciones de (3.11) son ulteriormente acotadas, como primer paso se muestra que $V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$, definida en (3.7),

³Las expresiones de b , c y $\Gamma(a_1)$ se mostrarán durante la demostración de este resultado.

está acotada por funciones de clase \mathcal{K} . Para esto, nótese entonces que,

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) \geq \frac{\mu_m}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{\kappa_1 k_{1m}^{a_1}}{1+a_1} S_1(\bar{q}) - \epsilon \mu_M \|\dot{\bar{q}}\| \|\rho(\bar{q})\| \quad (3.12a)$$

$$\geq \frac{\mu_m}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{\kappa_1 k_{1m}^{a_1}}{1+a_1} S_1(\bar{q}) - \frac{\epsilon \mu_M}{2} (\|\dot{\bar{q}}\|^2 + \|\rho(\bar{q})\|^2) \quad (3.12b)$$

$$\geq \frac{\mu_m}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{\kappa_1 k_{1m}^{a_1}}{1+a_1} S_1(\bar{q}) - \frac{\epsilon \mu_M}{2} \left(\|\dot{\bar{q}}\|^2 + \left(\frac{b_1}{k_{1M}} \right)^{1-a_1} S_1(\bar{q}) \right) \quad (3.12c)$$

$$= \frac{1}{2} \kappa_{mv} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \kappa_{mp} S_1(\bar{q}) \triangleq W_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \quad (3.12d)$$

donde (3.12a) se obtiene de la Propiedad 1.4.1, el Lema 1.3.31 y la Suposición 1.4.3, con $S_1(\bar{q}) = S_0(\bar{q}; a_1, b_1/k_{1M})$ como se define en el Lema 1.3.31; (3.12b) se sigue de aplicar la desigualdad de Young (con $\phi = 2$ y $\psi = 2$ de acuerdo con la notación del Lema 1.3.27); de la Observación 3.2.7 se obtiene (3.12c), y agrupando términos se tiene (3.12d), con

$$\begin{aligned} \kappa_{mv} &= \mu_m - \epsilon \mu_M \\ \kappa_{mp} &= \frac{\kappa_1 k_{1m}^{a_1}}{1+a_1} - \frac{\epsilon \mu_M}{2} \left(\frac{b_1}{k_{1M}} \right)^{1-a_1} \end{aligned}$$

donde $\kappa_{mv} > 0$ si $\epsilon < \epsilon_0$ y $\kappa_{mp} > 0$ si $\epsilon < \epsilon_1$. Así, bajo la suposición de que $\epsilon < \epsilon_0$ y $\epsilon < \epsilon_1$, $V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$ está acotada inferiormente por $W_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ que es una función definida positiva y radialmente desacotada y por lo tanto también lo es $V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$. Ahora, definiendo $r = \min\{b_1/k_{1M}, b_2/k_{2M}\}$, $\zeta_1 = \min\{1, k_{1M}/b_1\}$, $\omega_1 = \min\{\kappa_{mv}, \kappa_{mp}\zeta_1\}$ y $x = \|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\|$, de la definición de $S_1(\bar{q})$ —como en el Lema 1.3.31— $\forall a_1 \in (0, 1]$, sobre $\mathbb{R}_{\geq 0} \times B_r^n \times B_r^n$ de (3.12d) se tiene que

$$\begin{aligned} V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) &\geq \kappa_{mv} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \kappa_{mp} \|\bar{q}\|^{1+a_1} \\ &= \kappa_{mv} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \kappa_{mp} \|\bar{q}\|^{a_1-1} \|\bar{q}\|^2 \\ &\geq \kappa_{mv} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \kappa_{mp} \left(\frac{b_1}{k_{1M}} \right)^{a_1-1} \|\bar{q}\|^2 \\ &\geq \kappa_{mv} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \kappa_{mp} \zeta_1 \|\bar{q}\|^2 \\ &\geq \min\{\kappa_{mv}, \kappa_{mp}\zeta_1\} (\|\bar{q}\|^2 + \|\dot{\bar{q}}\|^2) \\ &= \omega_1 (\|\bar{q}\|^2 + \|\dot{\bar{q}}\|^2) \\ &= \omega_1 \|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\|^2 = \omega_1 x^2 \triangleq \alpha_1(x) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por otro lado, de la Suposición 1.4.3, el Lema 1.3.33 y (3.8):

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) \leq \frac{\mu_M}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{\bar{\kappa}_1 k_{1M}^{a_1} \bar{c}}{1+a_1} \|\bar{q}\|^{1+a_1} + \epsilon \mu_M \|\bar{q}\| \|\dot{\bar{q}}\| \triangleq W_2(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \quad (3.14)$$

Así, definiendo $\zeta_2 = \max\{1, b_2/k_{2M}\}$, $\zeta_3 = \max\{1, b_1/k_{1M}\}$ y $\zeta_4 = \max\{1, k_{1M}\} \geq$

$\max_{a_1 \in (0,1]} \left\{ \frac{k_{1M}^{a_1}}{1+a_1} \right\}$, $\forall a_1 \in (0, 1]$, sobre $R_{\geq 0} \times B_r^n \times B_r^n$ se sigue de (3.14) que

$$V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) \leq \frac{\mu_M}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \frac{\bar{\kappa}_1 k_{1M}^{a_1} \bar{c}}{1+a_1} \|\bar{q}\|^{1+a_1} + \frac{\epsilon \mu_M}{2} \|\bar{q}\|^2 + \frac{\epsilon \mu_M}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_M}{2} (1+\epsilon) \|\dot{\bar{q}}\|^{1-a_1} \|\dot{\bar{q}}\|^{1+a_1} + \frac{\epsilon \mu_M}{2} \|\bar{q}\|^{1-a_1} \|\bar{q}\|^{1+a_1} + \frac{\bar{\kappa}_1 k_{1M}^{a_1} \bar{c}}{1+a_1} \|\bar{q}\|^{1+a_1} \\ &\leq \frac{\mu_M}{2} (1+\epsilon) \left(\frac{b_2}{k_{2M}} \right)^{1-a_1} \|\dot{\bar{q}}\|^{1+a_1} + \frac{\epsilon \mu_M}{2} \left(\frac{b_1}{k_{1M}} \right)^{1-a_1} \|\bar{q}\|^{1+a_1} + \frac{\bar{\kappa}_1 k_{1M}^{a_1} \bar{c}}{1+a_1} \|\bar{q}\|^{1+a_1} \\ &\leq \frac{\mu_M}{2} (1+\epsilon) \zeta_2 \|\dot{\bar{q}}\|^{1+a_1} + \frac{\epsilon \mu_M}{2} \zeta_3 \|\bar{q}\|^{1+a_1} + \bar{\kappa}_1 \bar{c} \zeta_4 \|\bar{q}\|^{1+a_1} \\ &\leq \left[\frac{\mu_M}{2} (1+\epsilon) \zeta_2 + \frac{\epsilon \mu_M}{2} \zeta_3 + \bar{\kappa}_1 \bar{c} \zeta_4 \right] \|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\|^{1+a_1} \\ &= \omega_2 x^{1+a_1} \triangleq \alpha_2(x) \end{aligned} \quad (3.15b)$$

con $\omega_2 = \frac{\mu_M}{2} (1+\epsilon) \zeta_2 + \frac{\epsilon \mu_M}{2} \zeta_3 + \bar{\kappa}_1 \bar{c} \zeta_4$, y donde (3.15a) se obtiene al aplicar la desigualdad de Young (con $\phi = 2$ y $\psi = 2$), y (3.15b) se sigue de considerar que $\|\bar{q}\| \leq \|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\|$ y $\|\dot{\bar{q}}\| \leq \|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\|$.

De este modo, $\forall a_1 \in (0, 1]$, sobre $R_{\geq 0} \times B_r^n \times B_r^n$ se tiene que $\alpha_1(x) \leq V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) \leq \alpha_2(x)$, donde

$$\alpha_1(x) = \omega_1 x^2, \quad \alpha_2(x) = \omega_2 x^{1+a_1} \quad (3.16)$$

son funciones de clase \mathcal{K} , con

$$\alpha_1^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{\omega_1}}, \quad \alpha_2^{-1}(x) = \left[\frac{x}{\omega_2} \right]^{\frac{1}{1+a_1}} \quad (3.17)$$

Como siguiente paso, se calcula la derivada de $V(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$ a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3.11) obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) &= -\dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{q}_d(t)) \dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T F \dot{\bar{q}} - \epsilon \rho^T(\bar{q}) C(q, \dot{q}_d(t)) \dot{\bar{q}} - \epsilon \rho^T(\bar{q}) F \dot{\bar{q}} - \epsilon \rho^T(\bar{q}) s_1(K_1 \bar{q}) \\ &\quad - \epsilon \rho^T(\bar{q}) s_2(K_2 \dot{\bar{q}}) + \epsilon \dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{\bar{q}}) \rho(\bar{q}) + \epsilon \dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{q}_d(t)) \rho(\bar{q}) + \epsilon \dot{\bar{q}}^T H(\bar{q} + q_d(t)) \rho'(\bar{q}) \dot{\bar{q}} \\ &\quad - \dot{\bar{q}}^T s_2(K_2 \dot{\bar{q}}) + \dot{\bar{q}}^T \varrho(t, q, \dot{q}) + \epsilon \rho^T(\bar{q}) \varrho(t, q, \dot{q}) \end{aligned}$$

donde el valor de $H(q) \ddot{q}$ se sustituye de la ecuación (3.11) y $\rho'(\bar{q}) = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{q}}(\bar{q})$.

Aquí, $\dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$ puede ser acotada superiormente como⁴

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) &\leq - \left[d - \epsilon \nu_1 - \frac{\epsilon \bar{c} \bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2} a_2 \gamma^{-1}}{2} \right] \|\dot{\bar{q}}\|^2 \\ &\quad + \epsilon \nu_2 [h_1(\bar{q}) S_1(\bar{q})]^{1/2} \|\dot{\bar{q}}\| - \epsilon \left[\kappa_1 k_{1m}^{a_1} - \frac{\bar{c} \bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2} \gamma^{a_1}}{1+a_1} \right] h_1(\bar{q}) S_1(\bar{q}) \\ &\quad - \dot{\bar{q}}^T s_2(K_2 \dot{\bar{q}}) + M_\varrho \|\dot{\bar{q}}\| + \epsilon M_\varrho \|\bar{q}\| \end{aligned} \quad (3.19)$$

⁴Véase el Apéndice

lo cual puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} [h_1(\bar{q})S_1(\bar{q})]^{1/2} \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} [h_1(\bar{q})S_1(\bar{q})]^{1/2} \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} - \frac{k_{mv}}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 \\ & -\epsilon k_{mp,1} h_1(\bar{q}) S_1(\bar{q}) - \dot{\bar{q}}^T s_2(K_2 \dot{\bar{q}}) + M_\rho \|\dot{\bar{q}}\| + \epsilon M_\rho \|\bar{q}\| \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$Q_{\bar{h}} = \begin{pmatrix} \epsilon \bar{h} \kappa_1 k_{1m}^{a_1} & -\epsilon \nu_2 \\ -\epsilon \nu_2 & d - 2\epsilon \nu_1 \end{pmatrix}, \quad k_{mp,\bar{h}} \triangleq \frac{\bar{h} \kappa_1 k_{1m}^{a_1}}{2} - \frac{\bar{c} \bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2} \gamma^{a_1}}{1 + a_1}, \quad k_{mv} \triangleq d - \epsilon \bar{c} \bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2} a_2 \gamma^{-1}$$

$$\gamma \in (\gamma_m, \gamma_{M,h_{1m}}), \quad \gamma_m \triangleq \frac{\epsilon \bar{c} \bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2} a_2}{d}, \quad \gamma_{M,\bar{h}} \triangleq \left(\frac{\bar{h} \kappa_1 k_{1m}^{a_1} (1 + a_1)}{2 \bar{c} \bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2}} \right)^{1/a_1}$$

Aquí, se verifica fácilmente que

1. $\gamma_m < \gamma_{M,h_{1m}}$ si $\epsilon < \epsilon_{2,h_{1m}}$,
2. Q_1 es definida positiva, si $\epsilon < \epsilon_{3,1}$,
3. $k_{mp,1} > 0$, si $\gamma < \gamma_{M,1}$, lo cual es cierto dado que $\gamma < \gamma_{M,h_{1m}} < \gamma_{M,1}$,
4. $k_{mv} > 0$, si $\gamma_m < \gamma$.

Ahora, se analiza la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (3.11) sobre $\mathbb{R}_{\geq 0} \times B_r^n \times B_r^n$, la cual a partir de (3.19), la Observación 3.2.6, el punto 2 del Lema 1.3.31 y la definición de h_{1m} , toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left[d - \epsilon \nu_1 - \frac{\epsilon \bar{c} \bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2} a_2 \gamma^{-1}}{2} \right] \|\dot{\bar{q}}\|^2 \\ & + \epsilon \nu_2 \|\bar{q}\|^{(1+a_1)/2} \|\dot{\bar{q}}\| - \epsilon \left[h_{1m} \kappa_1 k_{1m}^{a_1} - \frac{\bar{c} \bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2} \gamma^{a_1}}{1 + a_1} \right] \|\bar{q}\|^{1+a_1} \\ & - \kappa_2 k_{2m}^{a_2} \|\dot{\bar{q}}\|^{1+a_2} + M_\rho \|\dot{\bar{q}}\| + \epsilon M_\rho \|\bar{q}\| \end{aligned} \quad (3.21)$$

que puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\bar{q}\|^{(1+a_1)/2} \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T Q_{h_{1m}} \begin{bmatrix} \|\bar{q}\|^{(1+a_1)/2} \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} - \frac{k_{mv}}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 \\ & + f(\|\bar{q}\|) + g(\|\dot{\bar{q}}\|) \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ están dadas por

$$f(\varsigma) = -\epsilon k_{mp,h_{1m}} \varsigma^{1+a_1} + \epsilon M_\rho \varsigma \quad (3.23)$$

$$g(\varsigma) = -\kappa_2 k_{2m}^{a_2} \varsigma^{1+a_2} + M_\rho \varsigma \quad (3.24)$$

y además

1. $Q_{h_{1m}}$ es definida positiva, si $\epsilon < \epsilon_{3,h_{1m}}$,
2. $k_{mp,h_{1m}} > 0$, si $\gamma < \gamma_{M,h_{1m}}$.

Ahora, para aplicar el Teorema 1.3.6, se quisiera que $\Psi(\|\bar{q}\|, \|\dot{\bar{q}}\|) = f(\|\bar{q}\|) + g(\|\dot{\bar{q}}\|) \leq 0$ en alguna región conveniente. Para probar que esto ocurre se analizan las propiedades de f y g las cuales satisfacen lo siguiente: f se anula en $\varsigma = 0$ y en

$$x_0 \triangleq \left(\frac{M_\rho}{k_{mp,h_{1m}}} \right)^{1/a_1} > 0$$

mientras que g se anula en $\varsigma = 0$ y en

$$y_0 \triangleq \left(\frac{M_\rho}{\kappa_2 k_{2m}^{a_2}} \right)^{1/a_2} > 0$$

Además, $f > 0$ en el intervalo $(0, x_0)$ y $g > 0$ en el intervalo $(0, y_0)$, y tanto f como g tienen un valor máximo que se alcanzan en los puntos

$$x_0^- \triangleq \left(\frac{M_\rho}{k_{mp,h_{1m}}(1+a_1)} \right)^{1/a_1}$$

y

$$y_0^- \triangleq \left(\frac{M_\rho}{\kappa_2 k_{2m}^{a_2}(1+a_2)} \right)^{1/a_2}$$

respectivamente, los cuales satisfacen $0 < x_0^- < x_0$, $0 < y_0^- < y_0$, $\forall a_1 \in (0, 1]$ y $\forall a_2 \in (0, 1]$. De este modo, $f(x_0^-) = \max_{\varsigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}} f(\varsigma) \triangleq f_{max}$ y $g(y_0^-) = \max_{\varsigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}} g(\varsigma) \triangleq g_{max}$.

Finalmente, $\forall \varsigma > x_0$ y $\forall \varsigma > y_0$, $f < 0$ y $g < 0$, respectivamente; $\frac{df}{d\varsigma}(\varsigma) < 0$ siempre que $\varsigma > x_0^-$ y $\frac{dg}{d\varsigma}(\varsigma) < 0$ siempre que $\varsigma > y_0^-$, y más aún, conforme $\varsigma \rightarrow \infty$, $f \rightarrow -\infty$ y $g \rightarrow -\infty$.

Derivado de estas propiedades, existen $\bar{x} > x_0 > 0$ y $\bar{y} > y_0 > 0$ tales que $f(\bar{x}) = -g_{max}$ y $g(\bar{y}) = -f_{max}$, y más aún,

$$\begin{aligned} f + g_{max} &\leq 0, & \forall \bar{q} \text{ tal que } \|\bar{q}\| &\geq \bar{x} \\ g + f_{max} &\leq 0, & \forall \dot{\bar{q}} \text{ tal que } \|\dot{\bar{q}}\| &\geq \bar{y} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sea $\bar{\mu} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$, entonces $\|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\| \geq \bar{\mu}$ implica que

$$\begin{aligned} \|\bar{q}\| &\geq \bar{x} & \forall \|\dot{\bar{q}}\| &\leq \bar{y} \\ \|\dot{\bar{q}}\| &\geq \bar{y} & \forall \|\bar{q}\| &\leq \bar{x} \end{aligned} \quad (3.26)$$

y nótese —a partir de (3.25) y (3.26)— que $\|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\| \geq \bar{\mu}$ implica que:

- i) $\|\bar{q}\| \geq \bar{x} \Rightarrow f + g \leq f + g_{max} \leq 0$, ó bien
- ii) $\|\bar{q}\| \leq \bar{x} \Rightarrow \|\dot{\bar{q}}\| \geq \bar{y} \Rightarrow g + f \geq g + f_{max} \leq 0$

o equivalentemente:

$$\text{iii) } \|\dot{\bar{q}}\| \geq \bar{y} \Rightarrow g + f \leq g + f_{max} \leq 0, \text{ ó bien}$$

$$\text{iv) } \|\dot{\bar{q}}\| \leq \bar{y} \Rightarrow \|\bar{q}\| \geq \bar{x} \Rightarrow f + g \geq f + g_{max} \leq 0$$

Así, si $\|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\| \geq \bar{\mu}$, se cumple que $f + g \leq 0$. Más aún, para cualquier valor $\mu \geq \bar{\mu}$, si $\|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\| \geq \mu$, por transitividad se sigue satisfaciendo que $f + g \leq 0$. Luego, se tiene que $f + g \leq 0 \forall (\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ tal que $\|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\| \geq \mu \geq \bar{\mu}$, en particular para μ como se define más adelante en la ecuación (3.28).

Ya que $\bar{x} > x_0$ y $\bar{y} > y_0$, existen $\theta_1, \theta_2 > 1$ tales que $\bar{x} = \theta_1 x_0$ y $\bar{y} = \theta_2 y_0$, de modo que $\theta_m \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \geq \bar{\mu}$, con $\theta_m = \max\{\theta_1, \theta_2\}$. Ahora, sean $\xi_1 = \min\{1, k_{2m}\}$, $\xi_2 = \min\{k_{mp, h_{1m}}, \kappa_2 \xi_1\}$, $\zeta = \xi_2 / \sqrt{2\theta_m}$, y supóngase que $M_\rho < \zeta$, entonces se tiene que

$$\theta_m \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \theta_m \left[\left(\frac{M_\rho}{k_{mp, h_{1m}}} \right)^{\frac{2}{a_1}} + \left(\frac{M_\rho}{\kappa_2 k_{2m}^{a_2}} \right)^{\frac{2}{a_2}} \right]^{1/2} \quad (3.27a)$$

$$\leq \theta_m \left[\left(\frac{M_\rho}{k_{mp, h_{1m}}} \right)^{\frac{2}{a_1}} + \left(\frac{M_\rho}{\kappa_2 \xi_1} \right)^{\frac{2}{a_2}} \right]^{1/2} \quad (3.27b)$$

$$\leq \theta_m \left[\left(\frac{M_\rho}{k_{mp, h_{1m}}} \right)^{\frac{2}{a_2}} + \left(\frac{M_\rho}{\kappa_2 \xi_1} \right)^{\frac{2}{a_2}} \right]^{1/2} \quad (3.27c)$$

$$\leq \theta_m \left[\left(\frac{M_\rho}{\xi_2} \right)^{\frac{2}{a_2}} + \left(\frac{M_\rho}{\xi_2} \right)^{\frac{2}{a_2}} \right]^{1/2} \quad (3.27d)$$

donde (3.27b) se obtiene al acotar el término $1/k_{2m}^{a_2}$, $\forall a_1 \in [0, 1]$ y de la definición de ξ_1 . Por otro lado, (3.27c) se satisface siempre que $M_\rho < k_{mp, h_{1m}}$ y $a_1 \leq a_2$; en este sentido, nótese que si $M_\rho < \zeta$, entonces

$$1 > \frac{M_\rho}{\zeta} = \frac{2\theta_m M_\rho}{\xi_2} > \frac{M_\rho}{\xi_2}$$

por lo que $M_\rho < \xi_2$ y de la definición de ξ_2 se sigue que $M_\rho < k_{mp, h_{1m}}$, mientras que $a_1 \leq a_2$ se sigue de la definición de a_2 . Finalmente, (3.27d) se sigue de la definición de ξ_2 . En adición, como $2 \leq 2^{1/a_2}$ y $\theta_m \leq \theta_m^{1/a_2} \forall a_2 \in (0, 1]$, a partir de (3.27d)

$$\theta_m \left[2 \left(\frac{M_\rho}{\xi_2} \right)^{\frac{2}{a_2}} \right]^{1/2} = \left(\frac{2^{a_2/2} \theta_m^{a_2} M_\rho}{\xi_2} \right)^{1/a_2} \leq \left(\frac{\sqrt{2} \theta_m M_\rho}{\xi_2} \right)^{1/a_2} = \left(\frac{M_\rho}{\zeta} \right)^{1/a_2}$$

obteniendo finalmente que

$$\theta_m \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leq \left(\frac{M_\rho}{\zeta} \right)^{1/a_2} \triangleq \mu \quad (3.28)$$

Observación 3.2.9. Nósete que si $\frac{M_\rho}{\zeta} < 1$, entonces el valor de μ en (3.28) está acotado para todo $a_2 \in (0, 1]$.

De lo anterior se concluye que

$$\Psi(\|\bar{q}\|, \|\dot{\bar{q}}\|) = f(\|\bar{q}\|) + g(\|\dot{\bar{q}}\|) \leq 0, \quad \forall(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \text{ tal que } \|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\| \geq \mu$$

teniendo así en (3.22) que

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\bar{q}\|^{(1+a_1)/2} \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T Q_{h_{1m}} \begin{bmatrix} \|\bar{q}\|^{(1+a_1)/2} \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} - \frac{k_{mv}}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 \triangleq -W_3(\bar{q}, \dot{\bar{q}}), \quad \forall \|(\bar{q}, \dot{\bar{q}})\| \geq \mu$$

donde

$$W_3(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\bar{q}\|^{(1+a_1)/2} \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix}^T Q_{h_{1m}} \begin{bmatrix} \|\bar{q}\|^{(1+a_1)/2} \\ \|\dot{\bar{q}}\| \end{bmatrix} + \frac{k_{mv}}{2} \|\dot{\bar{q}}\|^2 \quad (3.29)$$

es una función definida positiva.

Finalmente, se aplica el Teorema 1.3.6, con V definida como en (3.7), $\alpha_1(x)$ y $\alpha_2(x)$ definidas como en (3.16), $\alpha_1^{-1}(x)$ y $\alpha_2^{-1}(x)$ como en (3.17), y

$$\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) = \left[\frac{\omega_1 r^2}{\omega_2} \right]^{\frac{1}{1+a_1}}, \quad \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \left[\frac{M_\rho}{\zeta} \right]^{\frac{(1+a_1)^2}{4a_1}}$$

además de $W_3(x)$ dada por (3.29), con μ dado como en (3.28), y la condición (1.7) dada por

$$M_\rho < \zeta \left[\frac{\omega_1 r^2}{\omega_2} \right]^{\frac{2a_1}{(1+a_1)^2}}$$

con $M_\rho < \zeta$ una condición necesaria de acuerdo a las suposiciones hechas para aplicar el Teorema 1.3.6, teniendo entonces que las condiciones para considerar M_ρ suficientemente pequeña se escriben como

$$M_\rho < \varpi = \zeta \min \left\{ 1, \left[\frac{\omega_1 r^2}{\omega_2} \right]^{\frac{2a_1}{(1+a_1)^2}} \right\} \quad (3.30)$$

mientras que para considerar condiciones iniciales $(\bar{q}(t_0), \dot{\bar{q}}(t_0))$ lo suficientemente cercanas a $(0_n, 0_n)$ debe cumplirse que

$$\|(\bar{q}(t_0), \dot{\bar{q}}(t_0))\| \leq \left[\frac{\omega_1 r^2}{\omega_2} \right]^{\frac{1}{1+a_1}}$$

Además, $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) \triangleq \mathbf{cu}(a_1)$ corresponde a la cota ulterior, la cual tiene la forma dada en (3.10), con

$$b = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}, \quad c = \zeta \quad \text{y} \quad \Gamma(a_1) = \frac{(1+a_1)^2}{4a_1}$$

donde, ya que $\frac{d\Gamma}{da_1}(a_1) = -\frac{1-a_1}{4a_1^2} \leq 0 \forall a_1 \in (0, 1]$, con $\frac{d\Gamma}{da_1}(a_1) = 0 \iff a_1 = 1$, entonces $\Gamma(a_1)$ es decreciente en el intervalo $(0, 1]$; más específicamente con $\Gamma(a_1) \geq 1 \forall a_1 \in (0, 1]$ y $\Gamma(a_1) = 1 \iff a_1 = 1$. Así —de acuerdo al Teorema 1.3.6— existe un $T \geq 0$ tal que para cada $a_1 \in (0, 1]$, las soluciones del sistema en lazo cerrado $\bar{q}(t) = q(t) - q_d(t)$, $\dot{\bar{q}}(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t)$ satisfacen

$$\|(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t))\| \leq \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \left[\frac{M_\rho}{\zeta} \right]^{\frac{(1+a_1)^2}{4a_1}}, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (3.31)$$

■

Observación 3.2.10. *Obsérvese que como función de a_1 , $\mathbf{cu}(a_1)$ resulta ser estrictamente creciente en el intervalo $(0, 1]$, siempre que $M_\rho < \zeta$ —como se supone en (3.30)—. Para visualizar esto, se calcula*

$$\frac{d\mathbf{cu}}{da_1}(a_1) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \left[\frac{M_\rho}{\zeta} \right]^{\Gamma(a_1)} \ln \left(\frac{M_\rho}{\zeta} \right) \frac{d\Gamma}{da_1}(a_1)$$

Así, ya que $M_\rho < \zeta$ (lo cual implica que $\ln \frac{M_\rho}{\zeta} < 0$) y como $\Gamma(a_1) \geq 1 \forall a_1 \in (0, 1]$, con $\Gamma(a_1) = 1 \iff a_1 = 1$, entonces

$$\frac{d\mathbf{cu}}{da_1}(a_1) \geq 0 \forall a_1 \in (0, 1], \quad \text{con} \quad \frac{d\mathbf{cu}}{da_1}(a_1) = 0 \iff a_1 = 1$$

De este modo, se visualiza que la cota ulterior es más pequeña en el caso en que a_1 es fraccionario, esto es, cuando la estabilidad otorgada por el controlador (3.3) es en tiempo finito.

De lo anterior, es posible concluir que para perturbaciones con cota lo suficientemente pequeña el controlador en tiempo finito (3.3) es robusto en el sentido de que el sistema perturbado no se desestabiliza y, por otro lado, cuando a_1 es fraccionario el error post transitorio es menor que cuando $a_1 = 1$, por lo que el radio de la bola en la que las soluciones del sistema —expresadas en variables de error— son ulteriormente acotadas es más pequeño cuando el controlador es de tiempo finito, y por lo tanto en este caso, la respuesta del sistema permanece más cercana a la trayectoria deseada.

Observación 3.2.11. *Como consecuencia de considerar que $M_\rho < \zeta$ —como se supone en (3.30)—, se tiene que $\mathbf{cu}(a_1) \rightarrow 0$ conforme $a_1 \rightarrow 0$. Aunque este hecho llama la atención desde el punto de vista teórico, lo cierto es que en la práctica no es recomendable emplear valores del parámetro de control a_1 muy pequeños (i.e. cercanos a cero) ya que suele presentarse el llamado efecto de chattering que generalmente se desea evitar.*

3.3. Simulaciones

Para simulaciones realizadas correspondientes al resultado de la Proposición 3.2.8 se considera el modelo de un robot manipulador de 2 gdl expuesto en [2], cuyos elementos, siguiendo la notación de (1.18), están dados por

$$\begin{aligned}
 H(q) &= \begin{pmatrix} 2.351 + 0.168 \cos q_2 & 0.102 + 0.084 \cos q_2 \\ 0.102 + 0.084 \cos q_2 & 0.102 \end{pmatrix} \\
 C(q, \dot{q}) &= \begin{pmatrix} -0.084 \dot{q}_2 \sin q_2 & -0.084(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ 0.084 \dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{pmatrix} \\
 F &= \begin{pmatrix} 2.288 & 0 \\ 0 & 0.175 \end{pmatrix} \\
 g(q) &= \begin{pmatrix} 38.465 \sin q_1 + 1.825 \sin(q_1 + q_2) \\ 1.825 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Particularmente, para la implementación de la ley de control (3.3), se emplearon las funciones $\sigma_{ij}(\varsigma) = \text{sgn}(\varsigma) \min\{|\varsigma|^{a_1}, M_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, las cuales resultan ser fuertemente pasivas acotadas [23]; considerando $M_{11} = M_{21} = 50$, $M_{12} = M_{22} = 3$ y el valor del parámetro de control a_1 indicado en cada simulación.

Como primer caso, se supone una perturbación variante en el tiempo que entra al sistema, siguiendo el esquema de la Figura 3.1, modelada por

$$\varrho(t, q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \sin(2t) \\ \frac{1}{5} \cos(2t) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

y una trayectoria deseada dada por

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right) \\ -\frac{\pi}{4} + \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) \end{bmatrix}$$

Cabe destacar que la consideración de la perturbación seleccionada es tal que cumpla el requerimiento sobre tener una cota (en norma) lo suficientemente pequeña y que a su vez permita corroborar el resultado analítico obtenido en la sección anterior, haciendo referencia a la Proposición 3.2.8.

Las condiciones iniciales de posición y velocidad fueron tomadas iguales a cero en ambos eslabones del manipulador. En las gráficas de la Figura 3.2 se presenta el caso ideal —sin perturbación— para las ganancias de control $K_1 = \text{diag}[10, 3]$ y

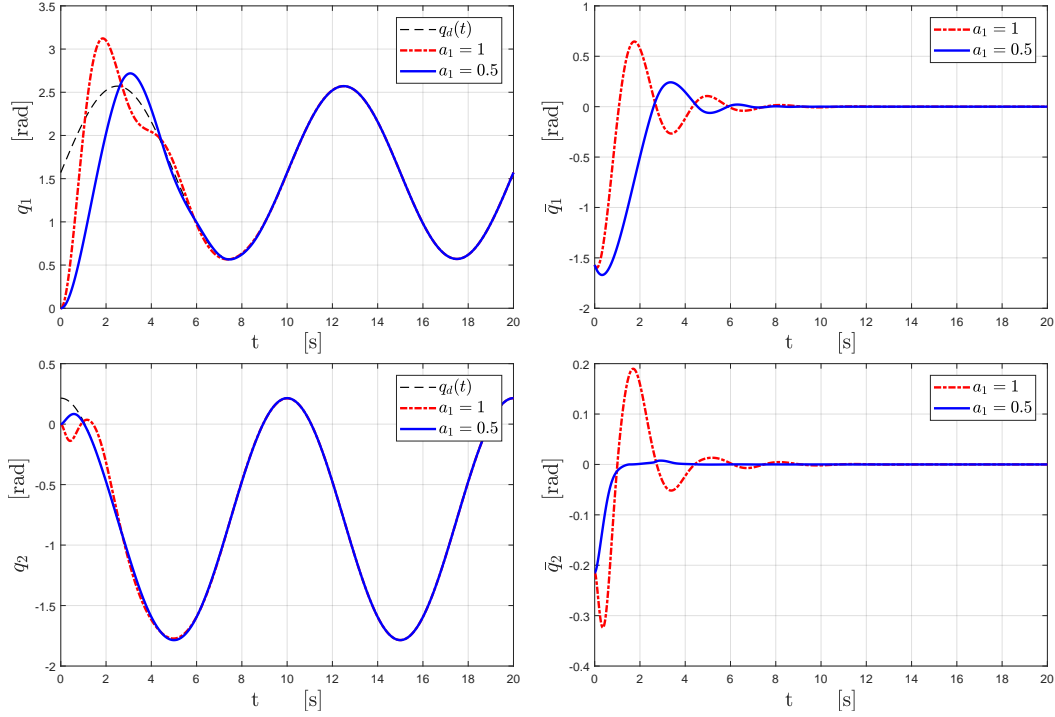


Figura 3.2: Posiciones y errores de posición de los eslabones del sistema. Ganancias: $K_1 = \text{diag}[10, 3]$, $K_2 = \text{diag}[0.5, 0.5]$.

$K_2 = \text{diag}[0.5, 0.5]$, donde se observa que se cumple el objetivo de seguimiento en ambos eslabones, tanto en el caso de estabilización en tiempo finito (a_1 fraccionario) como en el de estabilización exponencial ($a_1 = 1$).

Por otro lado, en la Figura 3.3 se presenta el caso considerando la perturbación (3.32). Como puede observarse en estas gráficas, tanto para el caso del controlador en tiempo finito como para el exponencial, los errores de posición nunca son idénticamente iguales a cero de manera permanente, sin embargo, éstos son menores cuando el controlador es en tiempo finito. Es importante resaltar que selección de los parámetros y ganancias de control no se hizo para visualizar desempeño del controlador sino, más bien, para poder visualizar el resultado analítico demostrado. En la misma figura, puede observarse que la norma del vector de errores de posición y velocidad es más cercana a cero en el post transitorio para el controlador en tiempo finito.

Un segundo caso, presentado en la Figura 3.4, se tiene considerando las ganancias de control $K_1 = \text{diag}[100, 50]$ y $K_2 = \text{diag}[25, 10]$. Aquí, en lugar de tomar en cuenta una perturbación que entra al sistema, como la dada en (3.32), se considera una desviación uniforme en los parámetros del modelo del sistema utilizado para construir la señal de control del 2% —*i.e.* todos los parámetros del sistema involucrados en el controlador

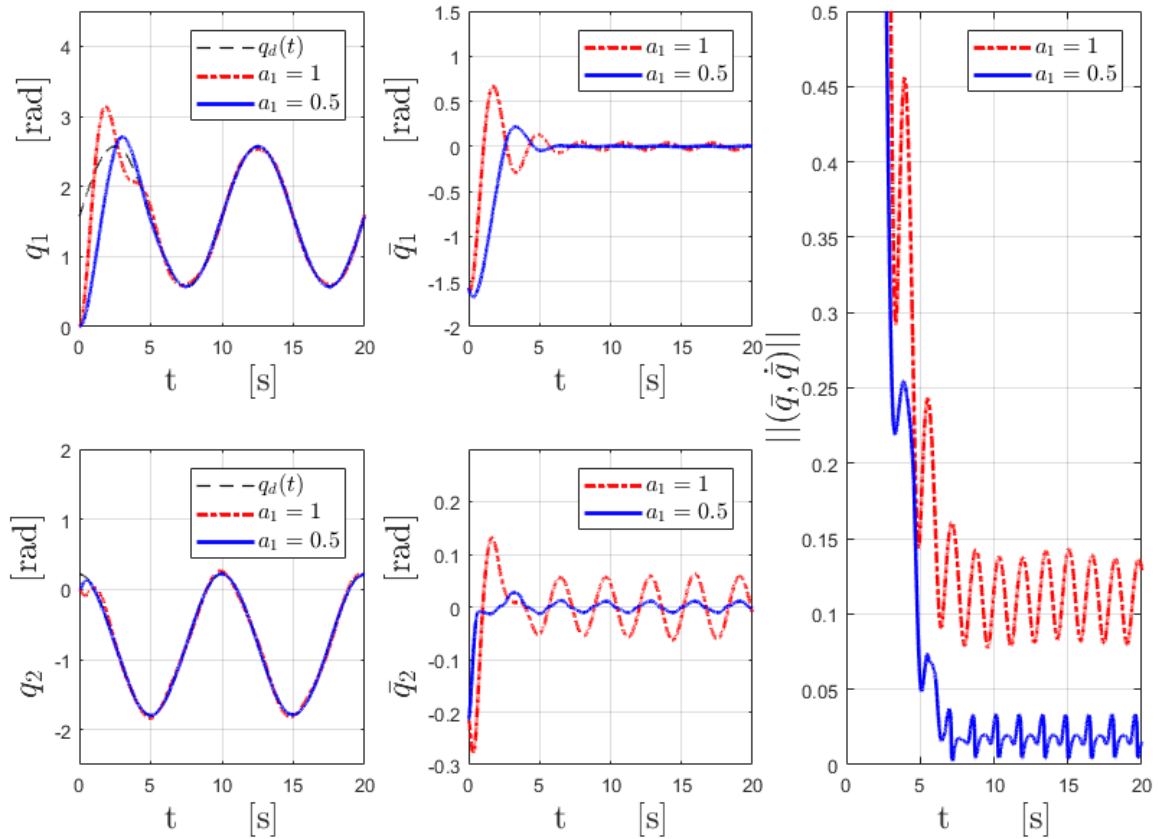


Figura 3.3: Posiciones y errores de posición de los eslabones del sistema y norma del vector de error de posición y velocidad. Ganancias: $K_1 = \text{diag}[10, 3]$, $K_2 = \text{diag}[0.5, 0.5]$.

fueron aumentados en 2%— y una trayectoria deseada dada por

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} + \sin t \\ \frac{\pi}{4} + \cos t \end{bmatrix}$$

Aquí, es posible notar un efecto similar al observado en el caso anterior en donde con el controlador en tiempo finito los eslabones del sistema se aproximan más a la trayectoria deseada que con el controlador exponencial.

De este modo, a partir de las simulaciones realizadas se corrobora lo establecido en la Proposición 3.2.8, el cual es uno de los resultados de este trabajo, en donde se prueba que además de que en presencia de pequeñas perturbaciones el sistema no se desestabiliza, sus trayectorias se aproximan más a la trayectoria deseada en el caso en el que el controlador es de tipo finito —esto es, cuando el parámetro de control a_1 es fraccionario— que cuando el controlador es de tipo exponencial —correspondiente al caso en que $a_1 = 1$ —.

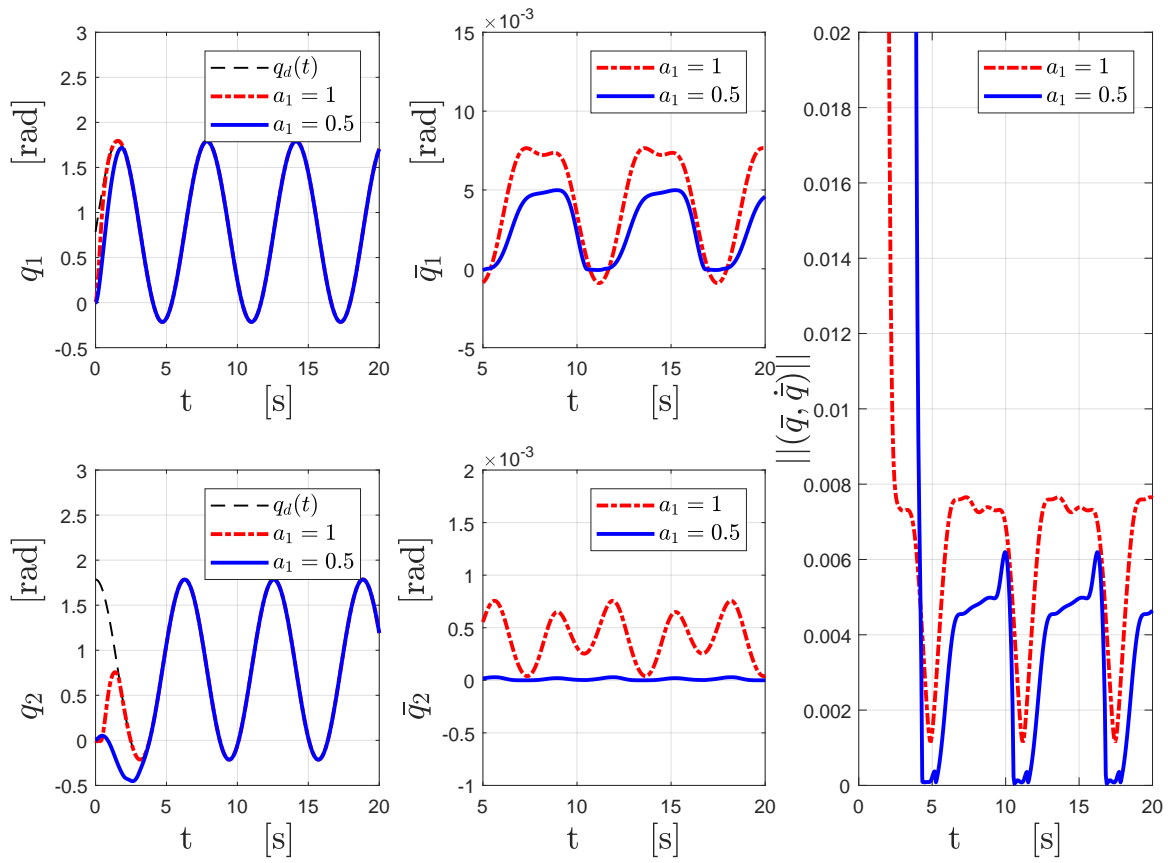


Figura 3.4: Posiciones y errores de posición de los eslabones del sistema. Ganancias: $K_1 = \text{diag}[100, 50]$, $K_2 = \text{diag}[25, 10]$.

Capítulo 4

Resumen y Conclusiones

En este trabajo se realizó un estudio comparativo de cuatro leyes de control continuas presentes en la literatura —referidas aquí por las siglas HXH02_{GC}, HXH02_{ID}, SB15 y ZZ17, expuestas en [13], [22] y [25]— que resuelven el problema de regulación en tiempo finito en sistemas mecánicos de n gdl. Para este propósito se definieron dos aspectos a evaluar, los cuales se enfocan en la respuesta y señal de control considerando restricciones de entrada y en la respuesta ante incertidumbre paramétrica.

Un punto a resaltar sobre todos los algoritmos de control involucrados en este proyecto es que mediante la variación de uno de sus parámetros es posible obtener estabilidad en tiempo finito o estabilidad de tipo asintótica de la solución trivial en lazo cerrado $\bar{q}(t) \equiv 0_n$, donde $\bar{q} = q - q_d$ define el error de posición, y q_d es una posición constante deseada. Por lo tanto, en el estudio comparativo se incluyeron, tanto los resultados obtenidos para el caso en tiempo finito como asintótico —siendo más específicos, resultados relativos al valor del ISE y tiempo de estabilización— a fin de comparar el desempeño que se tiene con cada tipo de estabilizador.

Sobre las conclusiones hechas en esta etapa, relativas a la consideración de entradas acotadas, se determinó que en aquellos reguladores en los cuales inicialmente no se consideran las limitaciones físicas de los actuadores, la respuesta del sistema tiende a deteriorarse, haciéndose más oscilatoria, aumentando también el tiempo de estabilización. En adición, las señales de control se saturan en los límites de operación máximos permitidos por los actuadores, con cambios de un límite a otro en intervalos de tiempo muy pequeños, lo que resulta desfavorable. En el mismo sentido, en los algoritmos de control que inicialmente no están diseñados para ser implementados con entradas acotadas —tales como HXH02_{GC}, HXH02_{ID} y SB15— puede ocurrir que su desempeño cambie con respecto al comportamiento esperado, en contraste con las leyes de control que en su diseño consideran restricciones de entradas, lo cual está más apegado a la realidad con respecto a aquéllos que no lo consideran, como la propuesta en [25].

Para la evaluación del aspecto referente a la incertidumbre paramétrica se supuso una desviación uniforme en los parámetros del modelo del sistema utilizado para construir la señal de control —particularmente, todos los parámetros del sistema que forman

parte del controlador fueron aumentados cierto porcentaje de su valor original— y se calculó el valor de ISE generado por cada algoritmo de control. Con respecto a este aspecto, en ausencia y presencia de incertidumbre paramétrica se tienen las siguientes conclusiones:

1. La medición del ISE aumenta —en todos los reguladores— conforme lo hace dicha incertidumbre.
2. Se observó que en el caso ideal —sin incertidumbre paramétrica— el ISE medido por cada regulador en tiempo finito es menor al producido por el mismo controlador cuando la estabilidad es de tipo asintótica.
3. Se observó que cuando la incertidumbre paramétrica es pequeña los controladores en tiempo finito tienen un mejor resultado que los controladores de tipo asintótico, generando una menor medición de ISE.
4. Cuando la incertidumbre paramétrica aumenta considerablemente se observó que existen casos en los que los controladores de tipo asintótico tienen una menor medición de ISE que los de tiempo finito
5. En presencia de incertidumbre paramétrica, el ISE producido por los reguladores tiende a ser más grande en aquéllos cuyo diseño está basado mayormente en los términos que forman parte del modelo del sistema en comparación con los que compensan menos la dinámica del sistema.

Adicionalmente al estudio comparativo de distintos estabilizadores, se realizó un análisis local sobre la robustez de la ley de *control de seguimiento en tiempo finito con entradas acotadas* expuesta en [23]. Aquí, se demostró que ante pequeñas perturbaciones el sistema no se desestabiliza y que las soluciones del sistema en lazo cerrado son ulteriormente acotadas, con una cota superior de la forma

$$\mathbf{cu}(a_1) = b \left(\frac{M_g}{c} \right)^{\Gamma(a_1)}$$

donde b y c son constantes positivas y $\Gamma(a_1)$ es una función de a_1 tal que $\Gamma(a_1) \geq 1$, con $\Gamma(a_1) = 1 \iff a_1 = 1, \forall a_1 \in (0, 1]$.

Para este algoritmo de control se demuestra en [23] que en ausencia de perturbaciones, la solución trivial $\bar{q}(t) \equiv 0_n$ del sistema en lazo cerrado es estable en tiempo finito cuando $0 < a_1 < 1$ y asintóticamente estable, con estabilidad exponencial (local), cuando $a_1 = 1$. Así, por las características de la cota superior \mathbf{cu} , se concluye que en presencia de perturbaciones con cota suficientemente pequeña, las variables de error del sistema entran en tiempo finito a una bola cuyo radio es más pequeño cuando el controlador es en tiempo finito que cuando la estabilidad es de tipo asintótica. De este modo, la variación post transitoria es menor en el caso de tiempo finito y por lo tanto las soluciones del sistema se acercan más a la trayectoria deseada.

De las conclusiones mencionadas anteriormente y a través del trabajo realizado, se logran establecer de manera más sólida algunas de las relaciones entre los controladores en tiempo finito y los de tipo asintótico, poniendo en evidencia algunas de las ventajas que los primeros poseen —como mayor robustez ante incertidumbre paramétrica— y que se han citado en numerosos artículos, *e.g* [7, 12, 14].

Como trabajo futuro se plantea extender los resultados obtenidos —relativos al análisis de robustez de la ley de control (3.3) enunciados en la Proposición 3.2.8— de manera global, esto es, mostrar que en presencia de perturbaciones con cota suficientemente pequeña, el sistema no se desestabiliza y que las soluciones del sistema en lazo cerrado son uniformemente acotadas para cualquier condición inicial. Así mismo, otro posible rumbo del trabajo consistiría en corroborar analíticamente el fenómeno observado en las simulaciones realizadas en el Capítulo 2 se presenta, refiriéndose a que cuando la incertidumbre paramétrica aumenta considerablemente los controladores de tipo asintóticos generan una menor cota superior que los de tiempo finito.

Apéndice

A continuación se presentan algunos resultados importantes previos a acotar los términos de $\dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$

Proposición 4.0.1. *Sea $\rho(\bar{q})$ como se define en (3.7), entonces $\|\frac{\partial \rho}{\partial x}(x)\| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ —la demostración de esta propiedad puede consultarse en [23, Remark 3.2]—.*

Lema 4.0.2. *Sea s_2 como se define en (3.3) y sea $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$ la p -norma usual, entonces $\|s_2(K_2\dot{\bar{q}})\|_{\frac{2}{a_2}} \leq \bar{\kappa}_2 \|K_2\dot{\bar{q}}\|^{a_2}$.*

Demostración: De la definición de s_2 se tiene que $s_2(K_2\dot{\bar{q}}) = (\sigma_{21}(k_{21}\dot{\bar{q}}_1), \dots, \sigma_{2n}(k_{2n}\dot{\bar{q}}_n))^T$, de modo que

$$\|s_2(K_2\dot{\bar{q}})\|_{\frac{2}{a_2}} = \left[|\sigma_{21}(k_{21}\dot{\bar{q}}_1)|^{\frac{2}{a_2}} + \dots + |\sigma_{2n}(k_{2n}\dot{\bar{q}}_n)|^{\frac{2}{a_2}} \right]^{\frac{a_2}{2}}$$

Por otro lado, de la Observación 1.3.32 se sigue que $(\sigma_{2j}(\varsigma))^2 \leq \bar{\kappa}_2^2 |\varsigma|^{2a_2}, \forall j = \overline{1, n}$. Luego

$$\begin{aligned} \|s_2(K_2\dot{\bar{q}})\|_{\frac{2}{a_2}} &= \left[|\sigma_{21}(k_{21}\dot{\bar{q}}_1)|^{\frac{2}{a_2}} + \dots + |\sigma_{2n}(k_{2n}\dot{\bar{q}}_n)|^{\frac{2}{a_2}} \right]^{\frac{a_2}{2}} \\ &\leq \left[(\bar{\kappa}_2^2 |k_{21}\dot{\bar{q}}_1|^{2a_2})^{\frac{1}{a_2}} + \dots + (\bar{\kappa}_2^2 |k_{2n}\dot{\bar{q}}_n|^{2a_2})^{\frac{1}{a_2}} \right]^{\frac{a_2}{2}} \\ &= \left[\bar{\kappa}_2^{\frac{2}{a_2}} (|k_{21}\dot{\bar{q}}_1|^2 + \dots + |k_{2n}\dot{\bar{q}}_n|^2) \right]^{\frac{a_2}{2}} = \bar{\kappa}_2 \|K_2\dot{\bar{q}}\|^{a_2} \end{aligned}$$

Ahora, a partir de la expresión de $\dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$ dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) &= -\dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T F\dot{\bar{q}} - \epsilon \rho^T(\bar{q})C(q, \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} - \epsilon \rho^T(\bar{q})F\dot{\bar{q}} - \epsilon \rho^T(\bar{q})s_1(K_1\bar{q}) \\ &\quad - \epsilon \rho^T(\bar{q})s_2(K_2\dot{\bar{q}}) + \epsilon \dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{\bar{q}})\rho(\bar{q}) + \epsilon \dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{q}_d(t))\rho(\bar{q}) + \epsilon \dot{\bar{q}}^T H(\bar{q} + q_d(t))\rho'(\bar{q})\dot{\bar{q}} \\ &\quad - \dot{\bar{q}}^T s_2(K_2\dot{\bar{q}}) + \dot{\bar{q}}^T \varrho(t, q, \dot{q}) + \epsilon \rho^T(\bar{q})\varrho(t, q, \dot{q}), \end{aligned}$$

se acotan sus términos de la siguiente manera.

Primer y segundo términos: De las Suposiciones 1.4.4, 3.1.2 y 3.1.1 se sigue $-\dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} - \dot{\bar{q}}^T F\dot{\bar{q}} \leq -(f_m - k_C B_{dv}) \|\dot{\bar{q}}\|^2 = -d \|\dot{\bar{q}}\|^2$, con $d = f_m - k_C B_{dv}$.

Tercer, cuarto, séptimo, octavo y noveno términos: De las Suposiciones 1.4.4 y 3.1.1 se sigue que $-\epsilon\rho^T(\bar{q})C(q, \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} + \epsilon\dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{q}_d(t))\rho(\bar{q}) \leq 2\epsilon k_C \|\rho(\bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\|$. De la Suposición 3.1.2 $-\epsilon\rho^T(\bar{q})F\dot{\bar{q}} \leq \epsilon f_M \|\rho(\bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\|$. Por otro lado, de la Suposición 1.4.4 y la ecuación (3.8) se sigue que $\epsilon\dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{q})\rho(\bar{q}) \leq \epsilon k_C \|\rho(\bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\|^2 \leq \epsilon k_C \left(\frac{b_1}{k_{1M}}\right) \|\dot{\bar{q}}\|^2$. Y finalmente, de la Suposición 1.4.3 y por la Proposición 4.0.1 se tiene que $\epsilon\dot{\bar{q}}^T H(\bar{q} + q_d(t))\rho'(\bar{q})\dot{\bar{q}} \leq \epsilon\mu_M \|\dot{\bar{q}}\|^2$. Luego, sumando las cotas obtenidas y uniendo términos semejantes, y por el segundo punto de la Observación 3.2.7, se sigue que $-\epsilon\rho^T(\bar{q})C(q, \dot{q}_d(t))\dot{\bar{q}} - \epsilon\rho^T(\bar{q})F\dot{\bar{q}} + \epsilon\dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{q})\rho(\bar{q}) + \epsilon\dot{\bar{q}}^T C(q, \dot{q}_d(t))\rho(\bar{q}) + \epsilon\dot{\bar{q}}^T H(\bar{q} + q_d(t))\rho'(\bar{q})\dot{\bar{q}} \leq 2\epsilon k_C B_{dv} \|\rho(\bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\| + \epsilon f_M \|\rho(\bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\| + \epsilon k_C \left(\frac{b_1}{k_{1M}}\right) \|\dot{\bar{q}}\|^2 + \epsilon\mu_M \|\dot{\bar{q}}\|^2 \leq \epsilon\nu_2 [h_1(\bar{q})S_1(\bar{q})]^{1/2} \|\dot{\bar{q}}\| + \epsilon\nu_1 \|\dot{\bar{q}}\|^2$, donde $\nu_1 = \frac{k_C b_1}{k_{1M}} + \mu_M$ y $\nu_2 = (2k_C B_{dv} + f_M) \left(\frac{b_1}{k_{1M}}\right)^{\frac{1-a_1}{2}}$.

Quinto término: De la definición de ρ y Lema 1.3.31 se sigue que, $-\epsilon\rho^T(\bar{q})s_1(K_1\bar{q}) = -\epsilon h_1(\bar{q})\dot{\bar{q}}^T s_1(K_1\bar{q}) \leq -\epsilon\kappa_1 k_{1m}^{a_1} h_1(\bar{q})S_1(\bar{q})$.

Sexto término: De la desigualdad de Hölder —considerando $\phi = 1 + a_1$ y $\psi = 2/a_2$, de acuerdo con la notación del Lema 1.3.26— se sigue que $-\epsilon\rho^T(\bar{q})s_2(K_2\dot{\bar{q}}) \leq \epsilon|\rho^T(\bar{q})s_2(K_2\dot{\bar{q}})| \leq \epsilon\|\rho(\bar{q})\|_{1+a_1} \|s_2(K_2\dot{\bar{q}})\|_{2/a_2}$. Luego, por el Lema 4.0.2 y la Observación 1.3.29 se sigue que

$$\epsilon\|\rho(\bar{q})\|_{1+a_1} \|s_2(K_2\dot{\bar{q}})\|_{2/a_2} \leq \epsilon(\bar{c}\|\rho(\bar{q})\|) (\bar{\kappa}_2 \|K_2\dot{\bar{q}}\|^{a_2})$$

donde $\bar{c} = c_{1+a_1,2}$ es una constante positiva obtenida como se indica la Observación 1.3.29. Posteriormente, del primer punto de la Observación 3.2.7 y la desigualdad de Young —siguiendo la notación del Lema 1.3.27, con $\phi = 1 + a_1$ y $\psi = 2/a_2$ — se obtiene

$$\begin{aligned} \epsilon(\bar{c}\|\rho(\bar{q})\|) (\bar{\kappa}_2 \|K_2\dot{\bar{q}}\|^{a_2}) &\leq \epsilon\bar{c}\bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2} (\gamma^{a_2/2} [h_1(\bar{q})S_1(\bar{q})]^{1/(1+a_1)}) (\gamma^{-a_2/2} \|\dot{\bar{q}}\|^{a_2}) \\ &\leq \epsilon\bar{c}\bar{\kappa}_2 k_{2M}^{a_2} \left(\frac{\gamma^{a_1}}{1+a_1} h_1(\bar{q})S_1(\bar{q}) + \frac{a_2}{2} \gamma^{-1} \|\dot{\bar{q}}\|^2 \right) \end{aligned}$$

para algún $\gamma \in (\gamma_m, \gamma_{M, h_{1m}})$, donde γ_m y $\gamma_{M, h_{1m}}$ son como se definen al inicio de la Proposición 3.2.8.

Undécimo y duodécimo términos: De la Suposición 3.2.1 se sigue que $\dot{\bar{q}}^T \varrho(t, q, \dot{q}) + \epsilon\rho^T(\bar{q})\varrho(t, q, \dot{q}) \leq M_\varrho \|\dot{\bar{q}}\| + \epsilon M_\varrho \|\dot{\bar{q}}\|$.

Finalmente, dejando indicado el décimo término y sumando las cotas obtenidas, se obtiene la cota superior de \dot{V} expuesta en la ecuación (3.19).

Bibliografía

- [1] AGUIÑAGA-RUIZ, E. Control de movimiento de robot manipuladores con entradas acodadas. Tesis de Maestría, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A.C., 2006.
- [2] AGUIÑAGA-RUIZ, E., ZAVALA-RÍO, A., SANTIBAÑEZ, V. Y REYES, F. Global trajectory tracking through static feedback for robot manipulators with bounded inputs. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 17, (2009), 934–944.
- [3] ARMSTRONG, B. *Control of Machines with Friction*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [4] BACCIOTTI, A. Y ROSSIER, L. *Liapunov functions and stability in control Theory*, 2 ed. Springer, 2005.
- [5] BERNSTEIN, D. *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, 2 ed. Princeton University Press, 2009.
- [6] BHAT, S. Y BERNSTEIN, D. Finite-time stability of homogeneous systems. *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, (1997).
- [7] BHAT, S. Y BERNSTEIN, D. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *Siam. J. Control Optim.*, 38, (2000), 751–766.
- [8] BHAT, S. Y BERNSTEIN, D. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 17, (2005), 101–127.
- [9] BROGLIATO, B., LOZANO, R., MASCHKE, B. Y EGELAND, O. *Dissipative systems analysis and control*, 2 ed. Springer, 2007.
- [10] HARDY, G., LITTLEWOOD, J. Y PÓLYA, G. *Inequalities*. Cambridge Mathematical Library, 1934.
- [11] HONG, Y., HUANG, J. Y XU, Y. On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 46, (2001), 305–309.
- [12] HONG, Y., WANG, J. Y CHENG, D. Adaptive finite-time control of nonlinear systems with parametric uncertainty. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 51, (2006), 858–862.

- [13] HONG, Y., XU, Y. Y HUANG, J. Finite-time control for robot manipulators. *Systems and Control Letters*, 46, (2002), 243–253.
- [14] HUANG, X., LIN, W. Y YANG, B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 41, (2005), 881–888.
- [15] KAWSKI, M. Homogeneous stabilizing feedback laws. *Control Theory Adv. Technol.*, 6, (1990), 497–516.
- [16] KELLY, R., SANTIBAÑEZ, V. Y LORÍA, A. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer, 2005.
- [17] KHALIL, H. *Nonlinear Systems*, 3 ed. Prentice Hall, 2002.
- [18] M'CLOSKEY, R. Y R.M., M. Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 42, (1997), 614–618.
- [19] MOULAY, E. Y PERRUQUETTI, W. Finite time stability conditions for non-autonomous continuous systems. *Int. J. Control*, 81, (2008), 797–803.
- [20] OGATA, K. *Ingeniería de Control Moderna*, 5 ed. Pearson, 2010.
- [21] ORTEGA, R., LORIA, A., NICLASSON, P. Y SIRA-RAMÍREZ, H. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems*. 1998.
- [22] SANYAL, A. Y BOHN, J. Finite-time stabilisation of simple mechanical systems using continuous feedback. *International Journal of Control*, 88, (2015), 783–791.
- [23] ZAMORA-GÓMEZ, G., ZAVALA-RÍO, A., LÓPEZ-ARAUJO, D., CRUZ-ZAVALA, E. Y NUÑO, E. Continuous control for fully-damped mechanical systems with input constraints: finite-time and exponential tracking. *IEEE, Transactions on Automatic Control*. Early Access. DOI: 10.1109/TAC.2019.2921667, (2019).
- [24] ZAVALA-RÍO, A. Y FANTONI, I. Global finite-time stability characterized through a local notion of homogeneity. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 59, (2014), 471–477.
- [25] ZAVALA-RÍO, A. Y ZAMORA-GÓMEZ, G. Local-homogeneity-based global continuous control for mechanical systems with constrained inputs: finite-time and exponential stabilisation. *International Journal of Control*, 90, (2017), 1037–1051.