



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Diseño de absorbedor de vibraciones retardado
usando retroalimentación de posición y velocidad.**

Tesis que presenta

Luis Martín Hernández Villa

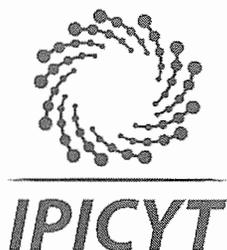
Para obtener el grado de

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

San Luis Potosí, S.L.P., 7 de Octubre del 2019



Constancia de aprobación de la tesis

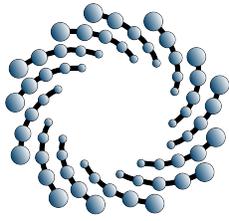
La tesis ***“Diseño de absorbedor de vibraciones retardado usando retroalimentación de posición y velocidad”*** presentada para obtener el Grado de Maestro en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Luis Martin Hernández Villa** y aprobada el siete de octubre del dos mil diecinueve por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
Director de la tesis

Dr. Adrián René Ramírez López
Jurado en el Examen

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Jurado en el Examen

Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
Jurado en el Examen

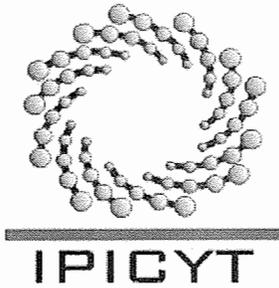


IPICYT

Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. de registro: 636219) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 041 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 7 días del mes de octubre del año 2019, se reunió a las 17:10 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Presidente	IPICYT
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar	Secretario	IPICYT
Dr. Adrián René Ramírez López	Sinodal	IPICYT
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Luis Martin Hernández Villa

sobre la Tesis intitulada:

Diseño de absorbedor de vibraciones retardado usando retroalimentación de posición y velocidad

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

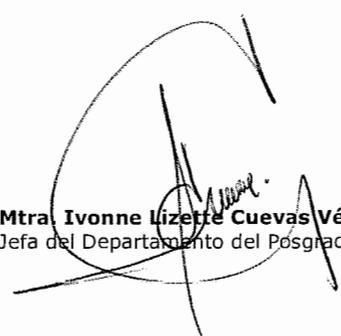
El Jurado, después de deliberar, determinó

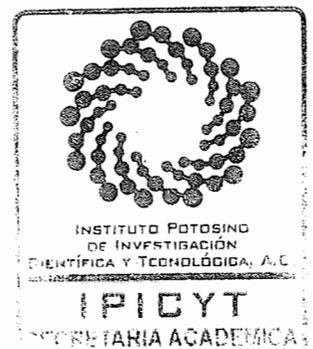
APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 19:02 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 7 días del mes de octubre de 2019.


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado



*Dedicado a
mi hermano menor José que es
mi motivación y a mi hermana
Fernanda que siempre está en
mi memoria y corazón.*

Agradecimientos

- A mi asesor el Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar por su gran apoyo, confianza, sus buenos consejos y sugerencias, así como su paciencia que contribuyeron en mi formación tanto académica como personal.
- A los Doctores Hugo Cabrera Ibarra, Adrián René Ramírez López y Cesar O. Maldonado Ahumada por aceptar ser parte del jurado de tesis, por sus valiosos comentarios y aportaciones que ayudaron a mejorar este trabajo de tesis.
- Al CONACYT y al IPICYT por brindarme la oportunidad de desarrollar esta tesis.
- A mis compañeros de maestría, por ser parte de este proceso, por ser una generación muy unida y compartir gratos momentos. De igual manera a mis compañeros del grupo de retardados, por las excelentes charlas y discusiones de las cuales aprendí bastante.
- A mi amiga Rocio Partida (QEPD), por animarme a continuar con mis estudios, por compartir su alegría conmigo, por su grandiosa amistad.
- En especial a mis padres a quienes les debo todo lo que soy. A mi Padre por ser un ejemplo de vida para mí, por enseñarme que no importan las adversidades, siempre se puede seguir adelante. A mi Madre por ayudarme a construir mis sueños y nunca rendirse, por ser una mujer excepcional.
- A mis hermanos Iván, Adrián, Ángel, Fernanda y José, por todos los momentos que hemos pasado juntos, porque son un gran ejemplo y siempre me incitan a dar lo mejor de mí.
- A mi novia Paola por acompañarme siempre en los momentos fáciles como difíciles, por apoyarme siempre en todo momento.

Resumen

Esta tesis trata sobre el problema de la absorción activa de vibraciones usando un resonador retardado o DR (por sus siglas en inglés). El DR es un concepto que utiliza una retroalimentación de estados con retardo para convertir un sistema mecánico masa-resorte-amortiguador en un sistema mecánico sin amortiguamiento, es decir, en un oscilador. La retroalimentación retardada puede ser mediante el uso de posición, velocidad o aceleración. En este trabajo consideramos como estrategia de control una retroalimentación retardada de posición y velocidad. Para este tipo de DR, el problema de diseño consiste en seleccionar el retardo y las ganancias de posición y velocidad de tal manera que el sistema en lazo cerrado tenga el comportamiento DR.

Realizamos un análisis completo de estabilidad para este sistema y obtenemos la región de estabilidad exacta en el espacio de parámetros de las ganancias. En base a este resultado, se propone una metodología para seleccionar el retardo y los parámetros de ganancias para garantizar el comportamiento deseable del DR.

Palabras clave: *Absorción de vibraciones, Resonador retardado, Estabilidad.*

Abstract

This thesis deals with the active vibration absorption problem using a delayed resonator (DR). The DR is a concept which utilizes a state feedback with delay to convert a mass-damper-spring mechanical system into an undamped mechanical system, i.e., an oscillator. The delayed feedback can be by using position, velocity or acceleration. In this work we consider a position and velocity delayed feedback as control strategy. For this type of DR the design problem consists in selecting the delay and position and velocity gains such that the closed-loop mechanical system has the DR behaviour.

We perform a complete stability analysis on this system and obtain the exact stability region on the gains parameter space. Based on this result, a methodology to select the delay and gains parameters is proposed in order to guarantee the desirable DR behavior.

Keywords: *Vibration absorption, Delayed resonator, Stability.*

Contenido General

Resumen	XIII
Abstract	XV
Contenido general	XVIII
Lista de figuras	XX
Notación	XXI
1 Introducción	1
1.1 Vibraciones mecánicas	1
1.1.1 Sistema Masa-Resorte	3
1.1.2 Sistema Masa-Resorte-Amortiguador	7
1.1.2.1 Sistema Subamortiguado ($\zeta < 1$)	9
1.1.2.2 Sistema Críticamente amortiguado ($\zeta = 1$)	10
1.1.2.3 Sistema Sobremortiguado ($\zeta > 1$)	11
1.2 Absorbedor Pasivo de Vibraciones	12
1.2.1 Absorbedor Masa-Resorte	13
1.2.2 Absorbedor Masa-Resorte-Amortiguador	18
1.3 Estructura de la Tesis	22
2 Formulación del Problema	23
2.1 Absorbedor de vibraciones retardado	23
2.2 Justificación y Objetivo Principal	26

3 Preliminares	29
3.1 Ecuaciones Diferenciales en Diferencias	29
3.1.1 Existencia y Unicidad de soluciones	31
3.2 Ecuaciones Diferenciales en Diferencias Lineales	37
3.2.1 Ubicación de las raíces de un cuasipolinomio	37
3.2.2 Curvas logarítmicas	38
3.2.3 Diagrama de potencias	40
3.3 Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales en Diferencia	44
3.3.1 Criterio de Mikhailov	45
3.3.2 Método de D-Partición	47
4 Resultados Principales	49
4.1 Región de estabilidad	49
4.2 Diseño del DR	66
5 Conclusiones y trabajo futuro	77
Bibliografía	79

Lista de figuras

1.1	Sistema Masa-Resorte.	3
1.2	Respuesta en el tiempo del sistema (1.2) con condiciones iniciales $x=0.5$ y $\dot{x}_0 = 0$	5
1.3	Respuesta en el tiempo del sistema (1.6) para $\omega \rightarrow \omega_n$, con condiciones iniciales $x=0.5$ y $\dot{x}_0 = 0$	6
1.4	Sistema Masa-Resorte-Amortiguador.	7
1.5	Respuesta en el tiempo de (1.18) con condiciones iniciales $x_0 = 0.5$ y $\dot{x}_0 = 0$	10
1.6	Respuesta en el tiempo de 3 soluciones (1.19) con condiciones iniciales $x_0 = 0.5$ y distintas \dot{x}_0	11
1.7	Respuesta en el tiempo de (1.20) con distintas condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0	12
1.8	Sistema primario con absorbedor masa-resorte.	13
1.9	Magnitud y frecuencia normalizada de (1.32), para fireentes valores de μ	17
1.10	Sistema primario con absorbedor masa-resorte-amortiguador.	19
1.11	Magnitud y frecuencia normalizada de (1.32), para distintos valores de ζ	21
1.12	Magnitud y frecuencia normalizada de (1.32), para los casos $\zeta = 0$ y $\zeta = \infty$	22
2.1	Absorbedor de vibraciones retardado.	24
3.1	Representación gráfica del método paso a paso	34
3.2	Region R en la cual no se encuentran raices de $F(s)$	38
3.3	Representación de una curva logarítmica $c(k,y)$ para y suficientemente grande.	39
3.4	Diagrama de potencias.	40
3.5	Sectores logarítmicos asociados a tres curvas logarítmicas.	41
3.6	Diagrama de potencias del cuasipolinomio (3.28).	43
3.7	Ubicación de las raices del cuasipolinomio (3.28).	44
3.8	Hodografo de Mikhailov para el cuasipolinomio (3.28).	46
3.9	Partición del cuasipolinomio (3.34) en el espacio de parámetros (a,b)	48

4.1	Absorbedor Híbrido de vibraciones.	50
4.2	Representación gráfica de $m(\omega)$ para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$	52
4.3	Representación gráfica de $n(\omega)$ con $cah > 1$ para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$	53
4.4	Representación gráfica de $n(\omega)$ con $cah = 1$ para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$	54
4.5	Representación gráfica de $cah < 1$ y $\cos(\omega h)$, para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$	54
4.6	Representación gráfica de $n(\omega)$ con $cah < 1$ para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$	55
4.7	Representación gráfica de $m(\omega)$ y $n(\omega)$, para $\omega \in (0, \frac{2\pi}{h})$	56
4.8	Region de estabilidad Γ	59
4.9	Gráfica de $g(\omega)$ y $p(\omega)$, ilustrando la existencia de soluciones $\hat{\omega}_{k,j}$ para el intervalo $(0, \frac{4\pi}{h})$	61
4.10	Partición del espacio de parámetros (b_1, b_2)	65
4.11	Región de estabilidad en el espacio (b_1, b_2) , en donde se muestra las ganancias $b_1(\omega_{d_j})$ y $b_2(\omega_{d_j})$ para las frecuencias de oscilación $\omega_{d_1} = 5$ rad/s, $\omega_{d_2} = 12$ rad/s y $\omega_{d_3} = 18$ rad/s.	69
4.12	Respuesta en el tiempo del DR para los valores de g_1 y g_2 con $\omega_{d_1} = 5$ rad/s y las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$	70
4.13	Respuesta en el tiempo del DR para los valores de g_1 y g_2 con $\omega_{d_2} = 12$ rad/s y las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$	71
4.14	Respuesta en el tiempo del DR para los valores de g_1 y g_2 con $\omega_{d_3} = 18$ rad/s y las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$	71
4.15	Respuesta en el tiempo del DR para los valores de $g_1 = 50$ N/m y $g_2 = 7.5$ N/m, con condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$	72
4.16	Región de estabilidad en el espacio (b_1, b_2) , en donde se muestra las ganancias $b_1(\omega_{d_j})$ y $b_2(\omega_{d_j})$ para las frecuencias de oscilación $\omega_{d_1} = 8$ rad/s y $\omega_{d_2} = 13.5$ rad/s.	73
4.17	Respuesta en el tiempo del DR para los valores de g_1 y g_2 con $\omega_{d_1} = 8$ rad/s y las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$	74
4.18	Respuesta en el tiempo del DR para los valores de g_1 y g_2 con $\omega_{d_2} = 13$ rad/s y las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$	74
4.19	Respuesta en el tiempo del DR para los valores de $g_1 = 15$ N/m y $g_2 = 4$ N/m, con condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$	75

Notación

\mathbb{R}	El conjunto de los números reales.
\mathbb{R}_+	El conjunto de los números reales positivos.
\mathbb{R}^n	Espacio euclidiano real n -dimensional.
\mathbb{C}	El conjunto de los números complejos.
$ x $	El valor absoluto de un número real x .
$\det(A)$	El determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
$\Delta \arg F(s) \big _C$	El cambio neto del argumento $F(s)$ a lo largo de un contorno C .
$\partial\Gamma$	Frontera de un conjunto Γ .
I	Matriz identidad de dimensión n .
$C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	El espacio de las funciones continuas que mapean $[-h, 0]$ a \mathbb{R}^n .

Introducción

En este capítulo se presenta una breve introducción a las vibraciones mecánicas, mostrando este comportamiento en un sistema masa-resorte y un sistema masa-resorte-amortiguador, ambos de un grado de libertad. Adicionalmente se introduce el concepto de absorbedor pasivo de vibraciones considerando los casos amortiguado y no amortiguado.

1.1. Vibraciones mecánicas

La vibración se define de manera simple como el movimiento repetitivo de un objeto alrededor de una posición de equilibrio, la cual está presente en todas partes y en la mayoría de las ocasiones afecta la naturaleza de los diseños de ingeniería. Es una subdisciplina de la dinámica y aunque en muchos de los casos está presente en los sistemas mecánicos, también se puede encontrar en los sistemas biológicos, por ejemplo la vibración en el oído para escuchar o la vibración de las cuerdas vocales para poder hablar, entre otros. En realidad, las experiencias cotidianas están llenas de vibraciones aunque en su mayoría como formas de disminuirla, por ejemplo los automóviles, trenes e incluso algunas bicicletas tienen dispositivos para reducir la vibración inducida por el movimiento y transmitida al conductor [9].

Las vibraciones que ocurren en la mayoría de las máquinas, vehículos, estructuras, edificios y sistemas dinámicos son no deseables, no sólo debido a los movimientos desagradables que resultan o los esfuerzos dinámicos que pueden conducir a la fatiga y la falla de la estructura o máquina, y las pérdidas y reducción de energía, sino también por el ruido producido. Generalmente se considera al ruido como un sonido no deseado, y dado que el sonido es producido por alguna fuente de movimiento o vibración que causa cambios de presión que se propagan a través del aire u otro medio

de transmisión, el control de la vibración es de fundamental importancia para la atenuación del ruido. Por lo tanto, el análisis de vibraciones de máquinas y estructuras es a menudo un requisito previo y necesario para controlar no sólo la vibración sino también el ruido [1].

La interpretación física del fenómeno de vibración está relacionada con la interacción entre la energía potencial (resorte o elasticidad) y la energía cinética (masa o inercia) y un medio por el cual la energía se disipa gradualmente (amortiguador) [9]. Es decir, la vibración de un sistema implica la transferencia de su energía potencial a energía cinética y de energía cinética a energía potencial, alternativamente. Si el sistema está amortiguado, parte de la energía se disipa en cada ciclo de vibración y debe reemplazarse por una fuente externa si se desea mantener un estado de vibración constante [22].

La vibración puede ser clasificada de varias maneras, algunas de las clasificaciones más importantes son las siguientes.

- **Vibración libre.** Si un sistema después de una perturbación inicial, se deja vibrar por sí sólo, la vibración resultante se conoce como *vibración libre*. Ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema, un ejemplo de este tipo de vibración es la oscilación de un péndulo simple.
- **Vibración forzada.** Si un sistema está sujeto a una fuerza externa (a menudo, un tipo de fuerza repetitiva), la vibración resultante se conoce como *vibración forzada*. La oscilación resultante en máquinas como los motores de diesel es un ejemplo de este tipo de vibración.

Si la frecuencia de la fuerza externa coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, se produce un fenómeno conocido como **resonancia**, donde el sistema sufre oscilaciones de gran magnitud, las cuales pueden ser peligrosas para el sistema. Las fallas de estructuras tales como edificios, puentes, turbinas y alas de aviones se han asociado con la aparición de resonancia.

Por otro lado, si no se pierde o disipa energía en la fricción u otra resistencia durante la oscilación, la vibración resultante se conoce como *vibración no amortiguada*, en cambio si se pierde energía de esta manera la vibración resultante se conoce como *vibración amortiguada*. En muchos sistemas físicos, la cantidad de amortiguación es tan pequeña que puede ignorarse para la mayoría de los propósitos de ingeniería. Sin embargo, la consideración de la amortiguación se vuelve extremadamente importante en el análisis de sistemas vibratorios cerca de la resonancia.

Por último, si todos los componentes básicos de un sistema vibratorio, es decir, el resorte, la masa y el amortiguador se comportan linealmente, la vibración resultante se conoce como *vibración lineal*, sin embargo, si alguno de los componentes básicos se comporta de manera no lineal, la vibración se llama *vibración no lineal*. Los modelos matemáticos que gobiernan el comportamiento

de los sistemas vibratorios lineales y no lineales son lineales y no lineales, respectivamente. Si la vibración es lineal, el principio de superposición se mantiene y las técnicas matemáticas de análisis están bien desarrolladas. Para la vibración no lineal, el principio de superposición no es válido, y las técnicas de análisis son diferentes [22].

1.1.1. Sistema Masa-Resorte

El sistema masa-resorte es uno de los modelos de vibración más básico y es usado con éxito para describir un sorprendente número de dispositivos, máquinas y estructuras. En la Figura 1.1 se muestra la representación de un sistema de un sólo grado de libertad que consta de un cuerpo de masa m que se mueve a lo largo de una superficie horizontal fija y un resorte de rigidez constante k que se fija en un extremo y se une al otro extremo al cuerpo.

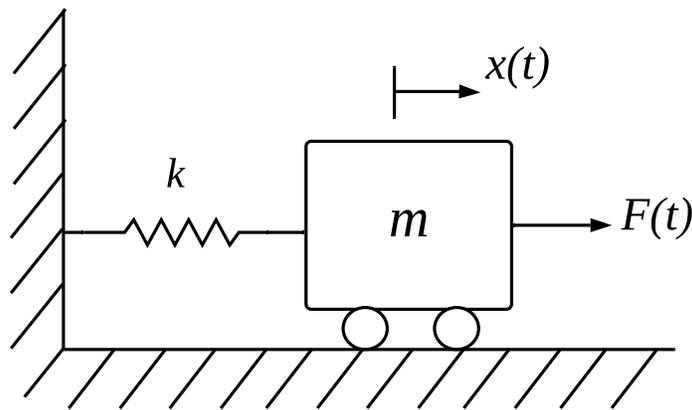


Figura 1.1: Sistema Masa-Resorte.

Si $x(t)$ denota el desplazamiento de la masa m de su posición de equilibrio, entonces la ecuación de movimiento de la Figura (1.1) está dada por

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (1.1)$$

Para el análisis consideremos los casos cuando $F(t) = 0$ y $F(t) \neq 0$, teniendo de este modo los tipos de vibración libre y vibración forzada, respectivamente.

Supongamos que $F(t) = 0$, entonces (1.1) toma la forma

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (1.2)$$

Varios autores [1, 9, 22] utilizan el método de coeficientes contantes como solución a este tipo de sistemas. No obstante, en este caso seguiremos las ideas presentadas en [13] utilizando el enfoque de la matriz fundamental como método de solución de las ecuaciones (1.1) y (1.2).

Sea $y_1(t) = x(t)$ y $y_2(t) = \dot{x}(t)$, entonces la ecuación (1.2) se puede representar de forma vectorial

$$\dot{y} = Ay, \quad (1.3)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix},$$

con $y = [y_1(t), y_2(t)]^T$ y $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, es la frecuencia natural del sistema. La solución de (1.2) para cualquier condición inicial, digamos $y_0 = [y_{01}, y_{02}]^T = [x_0, \dot{x}_0]^T$ puede expresarse de la forma $y(t) = e^{At}y_0, \forall t \geq 0$, donde e^{At} es conocida como la matriz fundamental asociada al sistema (1.3) [6]. La función característica asociada a la matriz A es

$$f(s) = \det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega_n^2 & s \end{bmatrix} = s^2 + \omega_n^2.$$

De modo que, las raíces de $f(s)$ son $s_{1,2} = \pm i\omega_n$. Con los valores de estas raíces se procede al cálculo de la matriz fundamental e^{At} , obteniendo la solución de (1.2) dada por la siguiente expresión

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t), \quad (1.4)$$

con $C_1 = x_0$ y $C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$. En la Figura 1.2 podemos apreciar el comportamiento de la solución (1.4) para los valores de $m = 25$ Kg y un coeficiente de rigidez $k = 4$ N/m, dando una frecuencia natural de $\omega_n = 0.4$ rad/s. Estos valores de m y k se utilizarán en todas las simulaciones presentadas en este capítulo. Dado que el sistema (1.2) es no amortiguado, es decir, no existe ningún elemento que disipe la energía durante el movimiento de la masa, la amplitud del movimiento permanecen constantes con el tiempo.

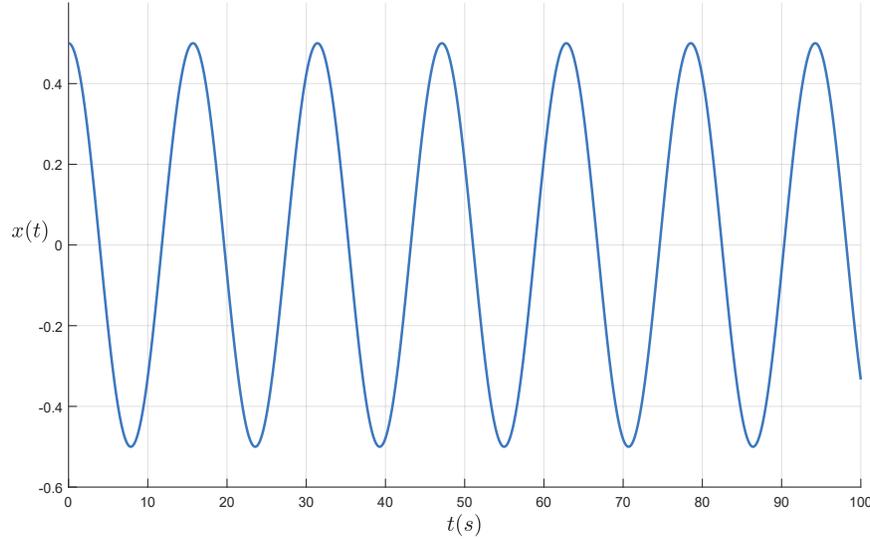


Figura 1.2: Respuesta en el tiempo del sistema (1.2) con condiciones iniciales $x=0.5$ y $\dot{x}_0 = 0$.

Consideremos ahora el caso cuando la vibración es forzada, es decir $F(t) \neq 0$. Supongamos a $F(t)$ como una función de excitación de la forma

$$F(t) = f_0 \cos(\omega t), \quad (1.5)$$

donde f_0 representa la amplitud máxima de excitación y ω denota la frecuencia de excitación. De esta manera, la expresión (1.1) toma la forma

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = F \cos(\omega t), \quad (1.6)$$

con $F = \frac{f_0}{m}$. Expresado en forma vectorial se tiene

$$\dot{y} = Ay + F(t), \quad (1.7)$$

donde $y = [y_1(t), y_2(t)]^T = [x(t), \dot{x}(t)]^T$, la matriz A está definida de igual manera que en (1.3) y $F(t) = [0, F]^T \cos(\omega t)$. La solución de (1.7) para cualquier condición inicial, digamos $y_0 = [y_{01}, y_{02}]^T = [x_0, \dot{x}_0]^T$ está dada por

$$y(t) = e^{At} y_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0.$$

De manera similar al caso anterior la matriz e^{At} es la matriz fundamental asociada al sistema (1.3).

Mediante cálculos directos se obtiene la solución de (1.6) dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (1.8)$$

donde $x_h(t)$ está definida por (1.4) y

$$x_p(t) = \frac{F}{\omega_n^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_n t)].$$

Recordemos que si la frecuencia de excitación se acerca a la frecuencia natural del sistema ocurre el fenómeno conocido como resonancia. Así analicemos este caso, es decir, cuando $\omega \rightarrow \omega_n$. De (1.8) se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} x(t, \omega) &= x_h(t, \omega_n) + \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} x_p(t, \omega) \\ &= x_h(t, \omega_n) + \frac{F}{2\omega_n} t \sin(\omega_n t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

De la expresión (1.9) se puede notar que conforme t crece, la respuesta del sistema crece de igual manera, este incremento no tiene restricciones y ocasiona que el sistema presente problemas físicos, fallas o incluso la destrucción del sistema mismo. En la Figura 1.3 podemos apreciar claramente este comportamiento donde $f_0 = 0.5$ N y $\omega = 0.3999$ rad/s.

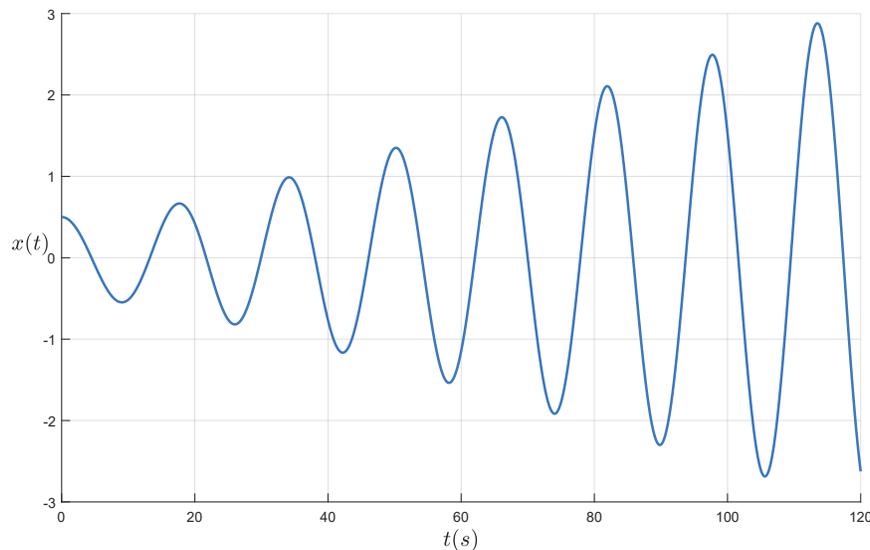


Figura 1.3: Respuesta en el tiempo del sistema (1.6) para $\omega \rightarrow \omega_n$, con condiciones iniciales $x=0.5$ y $\dot{x}_0 = 0$.

1.1.2. Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

La respuesta en el tiempo del sistema masa-resorte predice que este oscilará indefinidamente, sin embargo, la observación diaria indica que los sistemas que oscilan libremente eventualmente desaparecen y estas se reducen a cero [9]. Esta observación sugiere que el modelo representado en la Figura 1.1 y su modelo matemático correspondiente (1.1) deben de modificarse, la razón de lo anterior se debe a las fuerzas disipativas como la fricción. En la Figura 1.4 se muestra la representación de un sistema de un sólo grado de libertad que consta de un cuerpo de masa m que se mueve a lo largo de una superficie horizontal fija, un resorte de rigidez constante k y un coeficiente de amortiguamiento c .

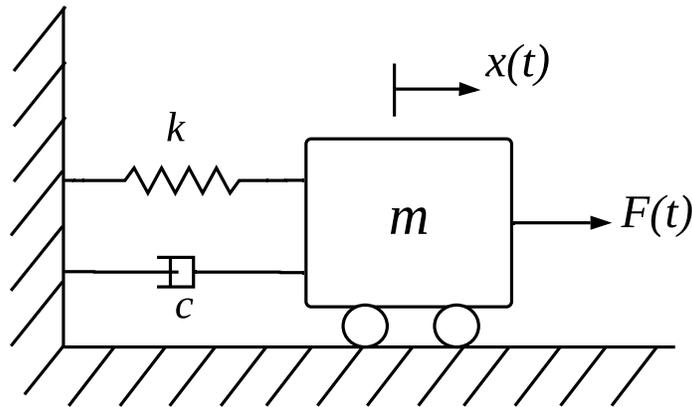


Figura 1.4: Sistema Masa-Resorte-Amortiguador.

Si $x(t)$ denota el desplazamiento de la masa m de su posición de equilibrio, la ecuación de movimiento de la Figura 1.4 está dada por

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (1.10)$$

La ecuación (1.10) en su forma vectorial es

$$\dot{y} = By + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \cos(\omega t),$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix},$$

con $y = [y_1(t), y_2(t)]^T = [x(t), \dot{x}(t)]^T$ y $F = \frac{f_0}{m}$. Para estudiar el comportamiento de este sistema, consideremos el caso cuando no existe fuerza externa aplicada a la masa m , es decir, $F(t) = 0$. De modo que (1.10) toma la forma

$$\dot{y} = By. \quad (1.11)$$

La solución de (1.11) para cualquier condición inicial, digamos $y_0 = [y_{01}, y_{02}]^T = [x_0, \dot{x}_0]^T$, se puede escribir como $y(t) = e^{Bt}y_0, \forall t \geq 0$, donde e^{Bt} es la matriz fundamental asociada al sistema (1.11). La función característica asociado a la matriz B , es

$$f(s) = \det[sI - B] = s^2 + \frac{c}{m}s + \omega_n^2.$$

De modo que, las raíces de $f(s)$ son

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2}. \quad (1.12)$$

Coefficiente de amortiguamiento critico c_c : Se define como el valor de la constante de amortiguamiento c , tal que, el discriminante de (1.12) sea cero, es decir

$$c_c = 2m\omega_n. \quad (1.13)$$

Factor de amortiguamiento ζ : Para cualquier sistema amortiguado, se define el factor de amortiguamiento ζ como

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}. \quad (1.14)$$

Usando las definiciones dadas por (1.13) y (1.14), podemos reescribir (1.12) como

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}. \quad (1.15)$$

Así, la naturaleza de las raíces (1.15) y por ende el comportamiento del sistema (1.11) dependen de la magnitud del factor de amortiguamiento ζ . Más aún, de (1.15), cuando $0 \leq \zeta \leq 1$, se define la *frecuencia natural amortiguada* como

$$\omega_d \triangleq \omega_n \sqrt{|\zeta^2 - 1|}. \quad (1.16)$$

1.1.2.1. Sistema Subamortiguado ($\zeta < 1$)

En este caso el factor de amortiguamiento es menor a 1, de modo que el discriminante en (1.15) es negativo y por consiguiente tenemos un par de raíces complejas conjugadas

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm i \omega_d.$$

Entonces, con los valores de estas raíces se procede con el cálculo de la matriz fundamental e^{Bt} , obteniendo la solución del sistema (1.10) dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} [C_3 \cos(\omega_d t) + C_4 \sin(\omega_d t)], \quad (1.17)$$

con $C_3 = x_0$ y $C_4 = \frac{\zeta \omega_n x_0 + \dot{x}_0}{\omega_d}$. Aplicando leyes de senos y cosenos, así como identidades trigonométricas, es posible reescribir la solución (1.17) como

$$x(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi), \quad (1.18)$$

con $X = \sqrt{C_3^2 + C_4^2}$ y $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{C_4}{C_3} \right)$. La expresión (1.18) es utilizada frecuentemente para describir el comportamiento de los sistemas mecánicos [9]. En la Figura 1.5 se muestra el comportamiento para este tipo de movimiento con los valores de masa m y rigidez k considerados anteriormente dando un valor de $\omega_n = 0.4$ rad/s, tomando el coeficiente de amortiguamiento $c = 5$ Ns/m, obtenemos un factor de amortiguamiento $\zeta = 0.2$ y a su vez $\omega_d = 0.3919$ rad/s. Observemos que el movimiento es oscilatorio con una amplitud que decrece exponencialmente, el factor

de amortiguamiento ζ determina esta tasa de decaimiento. Es importante mencionar que la frecuencia de vibración amortiguada ω_d siempre es menor que la frecuencia natural no amortiguada ω_n . Por último, el caso subamortiguado es muy importante en el estudio de vibraciones mecánicas, debido a que es el único caso con amortiguamiento que conduce a movimiento oscilatorio [9, 22].

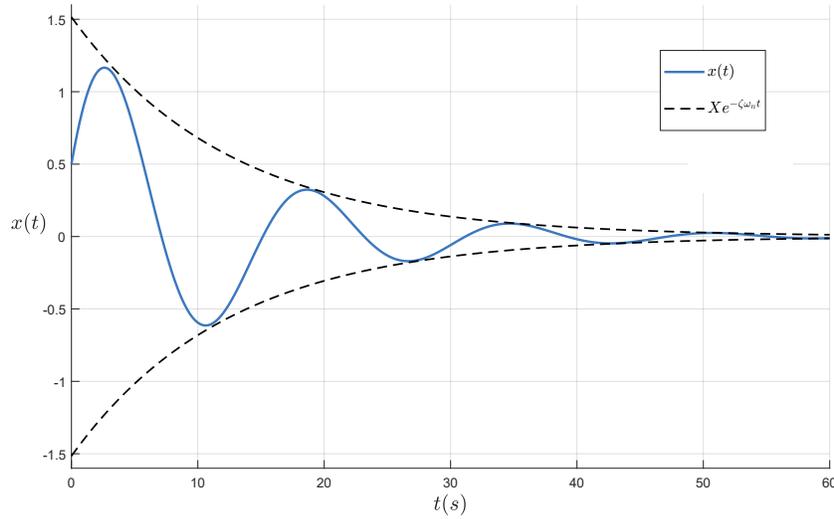


Figura 1.5: Respuesta en el tiempo de (1.18) con condiciones iniciales $x_0 = 0.5$ y $\dot{x}_0 = 0$.

1.1.2.2. Sistema Críticamente amortiguado ($\zeta = 1$)

En este caso el factor de amortiguamiento es igual a 1, de modo que el discriminante de (1.15) es cero y por consiguiente tenemos un par de raíces reales repetidas,

$$s_{1,2} = -\omega_n.$$

Entonces, con los valores de estas raíces se procede con el cálculo de la matriz fundamental e^{Bt} , obteniendo la solución del sistema (1.10) dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = e^{-\omega_n t} [C_5 t + C_6], \quad (1.19)$$

con $C_5 = \omega_n x_0 + \dot{x}_0$ y $C_6 = x_0$. Los sistemas críticamente amortiguados se pueden considerar de varias formas, pueden representar el valor mínimo de la tasa de amortiguamiento que produce un sistema que no es oscilatorio, también puede considerarse como el caso que separa los sistemas

oscilatorios y no oscilatorios [8]. En la Figura 1.6 podemos apreciar el comportamiento de la solución (1.19) considerando $c = 20$ Ns/m, obtenemos un factor de amortiguamiento $\zeta = 1$ y por consiguiente $\omega_d = 0$ rad/s, la solución no es periódica de modo que el movimiento eventualmente disminuirá a cero, además se muestra este comportamiento para distintas condiciones iniciales en la velocidad, es decir, para diferentes valores de \dot{x}_0 .

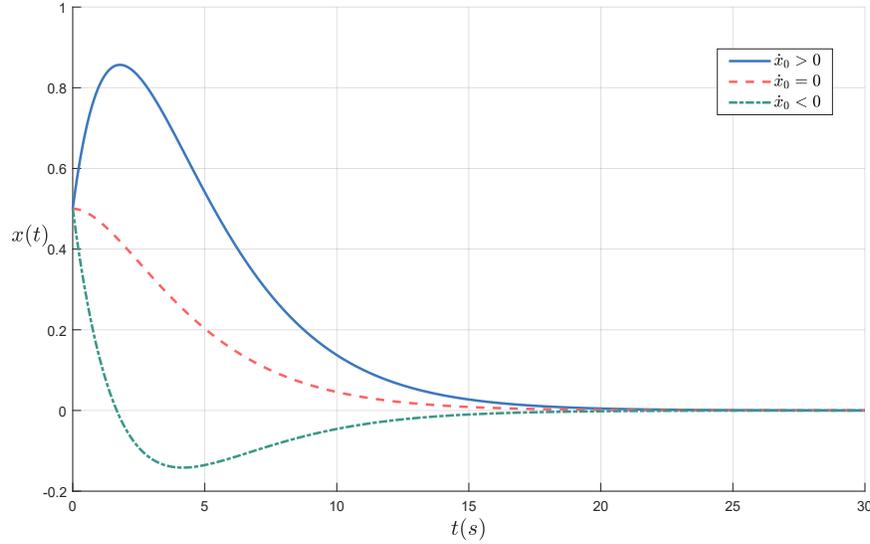


Figura 1.6: Respuesta en el tiempo de 3 soluciones (1.19) con condiciones iniciales $x_0 = 0.5$ y distintas \dot{x}_0 .

1.1.2.3. Sistema Sobremortiguado ($\zeta > 1$)

En este caso el factor de amortiguamiento es mayor a 1, de modo que el discriminante de (1.15) es positivo y por consiguiente tenemos un par de raíces reales,

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_d < 0.$$

Entonces, con los valores de estas raíces procedemos con el cálculo de la matriz fundamental e^{Bt} , obteniendo la solución del sistema (1.10) dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = C_7 e^{(-\zeta \omega_n + \omega_d)t} + C_8 e^{(-\zeta \omega_n - \omega_d)t}, \quad (1.20)$$

con $C_7 = \frac{(\zeta \omega_n + \omega_d)x_0 + \dot{x}_0}{2\omega_d}$ y $C_8 = -\frac{(\zeta \omega_n - \omega_d)x_0 + \dot{x}_0}{2\omega_d}$, la expresión (1.20) muestra que el movimiento libre del sistema no es oscilatorio y decae exponencialmente a cero. En la Figura 1.7 podemos

apreciar el comportamiento de la solución (1.20) considerando $c = 30$ Ns/m, obtenemos un factor de amortiguamiento $\zeta = 1.5$ y por consiguiente $\omega_d = 0.4472$ rad/s, se gráfica la solución (1.20) para distintas condiciones iniciales tanto en la posición x_0 , como en la velocidad \dot{x}_0 .

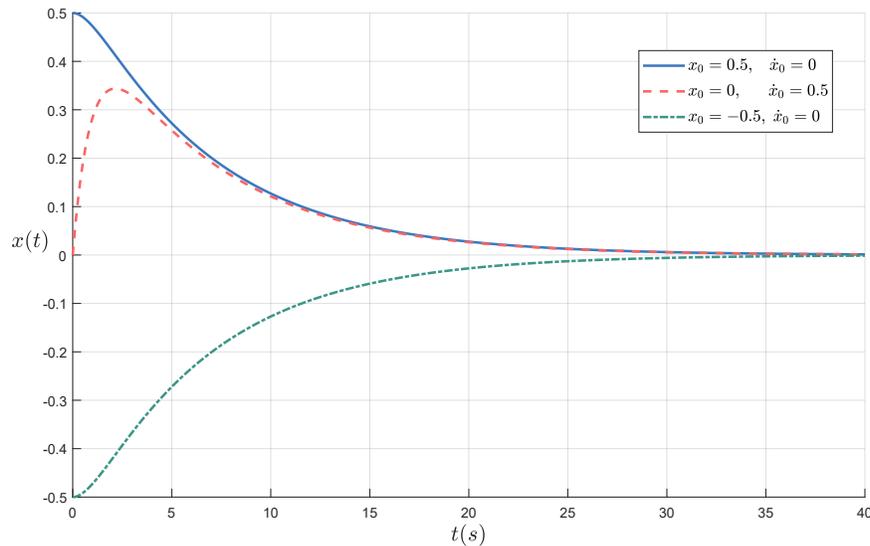


Figura 1.7: Respuesta en el tiempo de (1.20) con distintas condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0 .

1.2. Absorbedor Pasivo de Vibraciones

Se sabe que si un sistema de un grado de libertad es excitado a su frecuencia natural éste entra en resonancia, resultando en grandes amplitudes de vibración lo que ocasiona problemas de tensión, ruido y fatiga. En la mayoría de los sistemas mecánicos esto no es aceptable, de modo que si ni la frecuencia de excitación ni la frecuencia natural se pueden modificar convenientemente entonces esta condición de resonancia a menudo se puede controlar con éxito agregando un sistema adicional de un grado libertad [1].

El absorbedor pasivo de vibraciones es un dispositivo mecánico utilizado para reducir o eliminar las vibraciones no deseadas, consiste en un sistema masa-resorte-amortiguador que se incorpora al sistema primario o estructura principal con el objetivo de protegerlo de las vibraciones ocasionadas ya sea por frecuencias producidas por el mismo sistema o por frecuencias de excitación externas (perturbaciones). La principal modificación introducida por el absorbedor es que aumenta el grado de libertad del sistema primario, es decir, pasa de ser un sistema de un sólo grado

de libertad a un sistema de dos grados de libertad, lo que implica que ahora el sistema tiene dos frecuencias naturales. El absorbedor pasivo está diseñado de tal manera que éstas frecuencias se encuentren alejadas de la frecuencia de excitación, lo cual se logra mediante una configuración correcta de los parámetros de masa, rigidez y amortiguamiento [9, 22].

1.2.1. Absorbedor Masa-Resorte

El absorbedor masa-resorte, es decir, sin amortiguamiento, resulta ser de gran interés ya que se considera como un absorbedor pasivo ideal. Lo anterior se debe a que dicho sistema tiene soluciones oscilatorias para cualesquiera valores de masa y del resorte, de modo que los parámetros del absorbedor pueden elegirse de tal manera que la respuesta del sistema primario sea cero. En la Figura 1.8 se representa un absorbedor masa-resorte que consta de un cuerpo de masa m_a que se mueve a lo largo de una superficie horizontal fija, el cual es adherido al sistema primario mediante un resorte de rigidez constante k_a .

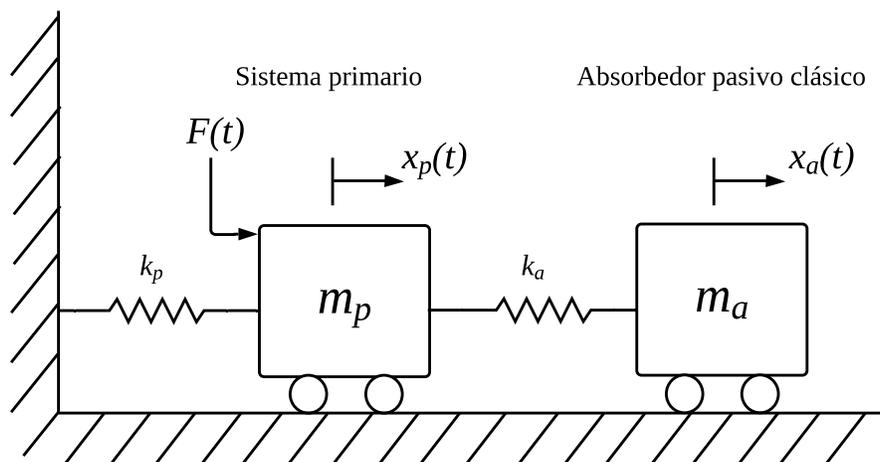


Figura 1.8: Sistema primario con absorbedor masa-resorte.

Denotemos $x_p(t)$ como el desplazamiento del sistema primario de masa m_p de su posición de equilibrio y $x_a(t)$ como el desplazamiento del absorbedor de masa m_a de su posición de equilibrio, entonces las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p + \omega_p^2 + \mu \omega_a^2 (x_p - x_a) &= F_0 \cos(\omega t), \\ \ddot{x}_a + \omega_a^2 (x_a - x_p) &= 0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

donde $F_0 = \frac{F}{m_p}$, $\mu = \frac{m_a}{m_p}$, $\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}$ es la frecuencia natural del sistema primario y $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$ es la frecuencia natural del absorbedor.

El sistema acoplado tiene dos frecuencias naturales debido a que es un sistema de dos grados de libertad; sin embargo, es muy importante aclarar que estas frecuencias no son ω_p y ω_a . Para conocer estas frecuencias es necesario escribir el sistema (1.21) en su forma vectorial para el caso cuando $F = 0$.

$$\dot{y} = Cy,$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(\omega_p^2 + \mu\omega_a^2) & \mu\omega_a^2 & 0 & 0 \\ \omega_a^2 & -\omega_a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con $y = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T = [x_p, x_a, \dot{x}_p, \dot{x}_a]^T$, de modo que la función característica asociada a la matriz C es

$$f(s) = \det(sI - C) = s^4 + s^2(\omega_p^2 + \omega_a^2(\mu + 1)) + \omega_p^2\omega_a^2. \quad (1.22)$$

Tomando $\lambda = s^2$, entonces (1.22) se puede escribir como

$$f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(\omega_p^2 + \omega_a^2(\mu + 1)) + \omega_p^2\omega_a^2, \quad (1.23)$$

Las raíces asociadas a la función (1.23) son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\omega_p^2 + \omega_a^2(\mu + 1) \pm \sqrt{(\omega_p^2 + \omega_a^2(\mu + 1))^2 - 4\omega_p^2\omega_a^2} \right]. \quad (1.24)$$

Es fácil ver que el discriminante en (1.24) es positivo, se sigue entonces que $\lambda_{1,2} < 0$. De tal manera podemos calcular las raíces asociadas a la función característica (1.22) como

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{|\lambda_1|} \quad \text{y} \quad s_{3,4} = \pm\sqrt{|\lambda_2|}, \quad (1.25)$$

Las raíces dadas en (1.25) determinan las frecuencias naturales del sistema acoplado, es decir

$$\omega_{n_1} = \sqrt{|\lambda_1|} \quad \text{y} \quad \omega_{n_2} = \sqrt{|\lambda_2|},$$

las cuales son distintas a ω_p y ω_a . Con estas raíces es posible calcular la matriz fundamental e^{Ct} y por ende la solución al sistema (1.21). Sin embargo, en este caso se presentará un análisis distinto al usado antes de la matriz fundamental para solucionar dicho sistema el cual es propuesto en [9], siendo más conveniente para el diseño del absorbedor.

Así, consideremos el sistema de dos grados de libertad (1.21) y proponemos las soluciones particulares

$$x_p(t) = X_p \cos(\omega t), \quad (1.26)$$

$$x_a(t) = X_a \cos(\omega t). \quad (1.27)$$

Para estas soluciones es necesario encontrar los valores de X_p y X_a . Al sustituir (1.26) y (1.27) en (1.21) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega_p^2 - \omega^2 + \mu \omega_a^2 & -\mu \omega_a^2 \\ -\omega_a^2 & \omega_a^2 - \omega^2 \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} X_p \\ X_a \end{bmatrix} \cos(\omega t) = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\omega t). \quad (1.28)$$

Resolviendo para X_p y X_a en el sistema (1.28) obtenemos

$$X_p = \frac{F_0(\omega_a^2 - \omega^2)}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_p^2 - \omega^2 + \mu \omega_a^2) - \mu \omega_a^4}, \quad (1.29)$$

$$X_a = \frac{F_0 \omega_a^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_p^2 - \omega^2 + \mu \omega_a^2) - \mu \omega_a^4}. \quad (1.30)$$

El objetivo del absorbedor es eliminar la oscilación en la estructura primaria, es decir, que la magnitud X_p sea exactamente cero. Entonces, de la expresión (1.29) se tiene que $X_p = 0$, si $\omega =$

ω_a , de tal manera que $x_p(t) = 0$ y en consecuencia obtenemos que la respuesta en el tiempo del absorbedor es

$$x_a(t) = -\frac{F}{k_a} \cos(\omega t). \quad (1.31)$$

Entonces, el absorbedor oscila con una amplitud $X_a = \frac{F}{k_a}$ y la magnitud de la fuerza actuando sobre el mismo es $k_a X_a = -F$. Por consiguiente, cuando el absorbedor es sintonizado a la frecuencia de excitación su amplitud es igual en magnitud y en dirección contraria a la fuerza de excitación. Al tener una fuerza neta igual a cero actuando sobre la estructura primaria, esta no se mueve, es decir, su movimiento oscilatorio es “absorbido” por el movimiento que provee el absorbedor de vibraciones. Notemos que si la fuerza aplicada al sistema primario es completamente absorbida por el movimiento del absorbedor, el sistema no experimenta el fenómeno de resonancia, porque la frecuencia del absorbedor ω_a , no es una frecuencia natural del sistema acoplado [9].

El éxito de los absorbedores pasivos de vibraciones dependen de varios factores:

- Se debe de conocer la frecuencias de excitación armónica y que ésta no se desvié mucho de su valor constante, en caso de que esto no suceda el absorbedor ya no estará sintonizado y el sistema primario experimentará cierta oscilación.
- Si la frecuencia de excitación armónica varia mucho de su valor constante puede conllevar a que tome el valor de alguna de las frecuencias naturales del sistema, lo que provocaría que el sistema entre en resonancia y eventualmente falle.
- La rigidez del resorte k_a debe ser capaz de soportar la fuerza de excitación.

El problema de evitar la resonancia en el diseño del absorbedor pasivo de vibraciones en caso de que la frecuencia de excitación se aleje de su valor constante, depende de la relación entre la masa principal y la masa del absorbedor, es decir μ , además de la razón de sus frecuencias, la cual se define como $\beta = \frac{\omega_a}{\omega_p}$. De tal manera podemos reescribir la expresión (1.29) en términos de μ y β obteniendo

$$\frac{X_p k_p}{F} = \frac{1 - (\omega / \omega_a)^2}{[1 - (\omega / \omega_a)^2][1 + \mu \beta^2 + \beta^2 (\omega / \omega_a)^2]}. \quad (1.32)$$

En la Figura 1.9 se gráfica $\left| \frac{X_p k_p}{F} \right|$, como función de $\frac{\omega}{\omega_a}$ para distintos valores de μ y es utilizada

para ilustrar cuanto desvío en la frecuencia de excitación puede ser tolerada por el diseño del absorbedor. Si $\left| \frac{X_p k_p}{F} \right| \geq 1$ para algún ω entonces la fuerza propagada al sistema primario es mayor que la fuerza original y el absorbedor deja de ser una mejora. Mientras que el área sombreada en la Figura 1.9 representa los valores de $\frac{\omega}{\omega_a}$ tales que $\left| \frac{X_p k_p}{F} \right| < 1$ y por consiguiente el rango de frecuencias donde el absorbedor ofrece cierta protección al sistema primario [9].

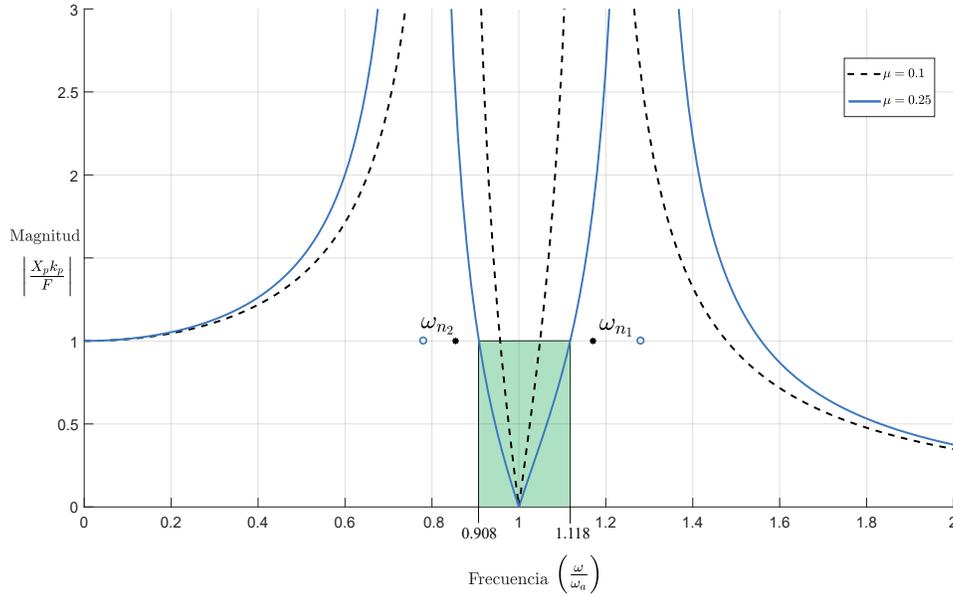


Figura 1.9: Magnitud y frecuencia normalizada de (1.32), para diferentes valores de μ .

El diseño del absorbedor puede ilustrarse de mejor manera al examinar la relación de masas μ y la relación de frecuencias β . Recordemos que del análisis de la función característica (1.22) obtuvimos las frecuencias naturales ω_{n1} y ω_{n2} , de modo que al sustituirlas por la frecuencia de excitación ω en el determinante de la matriz D en (1.28) es igual a cero o equivalentemente en el denominador de (1.29) y (1.29) son cero. Entonces, sustituyendo estas frecuencias en términos de μ y β reemplazamos ω por ω_n en el denominador de (1.32) obteniendo

$$\beta^2 \left(\frac{\omega_n^2}{\omega_a^2} \right) - [1 + \beta^2(1 + \mu)] \left(\frac{\omega_n^2}{\omega_a^2} \right) + 1 = 0. \quad (1.33)$$

Resolviendo (1.33) se obtienen los valores de las frecuencias naturales del sistema acoplado, pero

ahora en términos de μ y β . Nótese que a medida que ω aumenta, las frecuencias naturales se alejan de la condición de operación del absorbedor $\omega = \omega_a$ y se tiene un mayor rango de operación, mientras que si μ es demasiado pequeño el sistema acoplado no tolerará mucha variación en la frecuencia de excitación. Entonces como regla general se elige el rango de valores $0.05 \leq \mu \leq 0.25$, con el cual se garantiza un diseño adecuado en el absorbedor [9, 22]. En la Tabla 1.1 se muestran los valores de μ, β , así como las frecuencias naturales ilustrados en la Figura 1.9.

β	μ	ω_{n_1}	ω_{n_2}	Rango de Operación
1	0.1	0.8543	1.1705	$0.9569\omega_a < \omega < 1.0488\omega_a$
1	0.25	0.7808	1.2808	$0.9081\omega_a < \omega < 1.1180\omega_a$

Tabla 1.1: Rango de operación para ω , con diferentes valores de μ .

1.2.2. Absorbedor Masa-Resorte-Amortiguador

Como se ha discutido en las secciones anteriores, el amortiguamiento siempre está presente en los sistemas mecánicos, en algunas ocasiones el amortiguamiento suele ser pequeño y su efecto en la dinámica del sistema físico es casi imperceptible, mientras que en otros casos el amortiguamiento es grande y su efecto en el comportamiento del sistema físico es bastante significativo. El amortiguamiento disminuye la capacidad de un absorbedor pasivo de vibraciones, sin embargo, se añade en los absorbedores para prevenir resonancias y para mejorar la banda efectiva de operación [9, 22]. En la Figura 1.10 se representa un absorbedor masa-resorte-amortiguador que consta de un cuerpo de masa m_a que se mueve a lo largo de una superficie horizontal fija, el cual es adherido al sistema primario mediante un resorte de rigidez constante k_a , donde c_a representa su coeficiente de amortiguamiento.

Denotemos $x_p(t)$ como el desplazamiento del sistema primario de masa m_p de su posición de equilibrio y $x_a(t)$ como el desplazamiento del absorbedor de masa m_a de su posición de equilibrio,

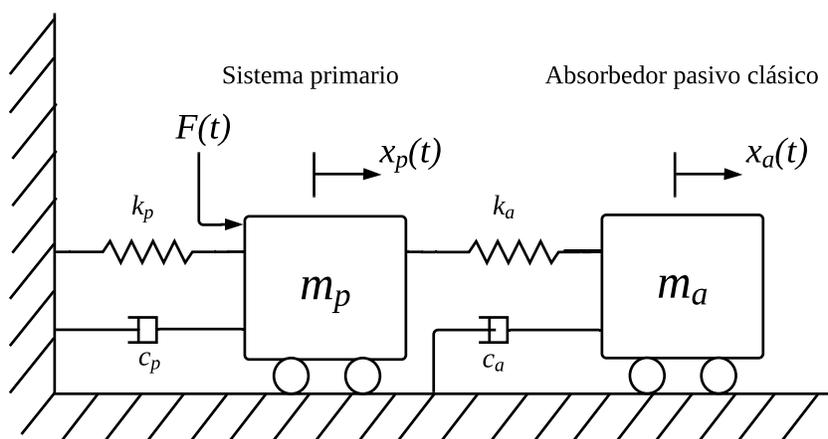


Figura 1.10: Sistema primario con absorbedor masa-resorte-amortiguador.

entonces las ecuaciones de movimiento del sistema son

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p + 2\zeta_p \omega_p \dot{x}_p + \omega_p^2 x_p + \mu \omega_a^2 (x_p - x_a) &= F_0 \cos(\omega t), \\ \ddot{x}_a + 2\zeta_a \omega_a \dot{x}_a + \omega_a^2 (x_a - x_p) &= 0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde F_0 , ω_p , ω_a y μ , están definidos de igual manera que en la sección anterior, mientras que los factores de amortiguamiento del sistema primario y del absorbedor son definidos respectivamente como $\zeta_p = \frac{c_p}{2m_p \omega_p}$ y $\zeta_a = \frac{c_a}{2m_a \omega_a}$.

Para el análisis de la solución del sistema (1.34) procederemos de la misma manera que en la sección anterior, es decir, es posible encontrar condiciones iniciales particulares tales que la solución de (1.34) sea oscilatoria ante una oscilación del mismo tipo. Así, siguiendo el método propuesto en [9] consideremos ahora la función de excitación $F_0 \cos(\omega t)$ escrita de forma más general como $F_0 e^{i\omega t}$ y las soluciones particulares

$$x_p(t) = X_p e^{i\omega t}, \quad (1.35)$$

$$x_a(t) = X_a e^{i\omega t}. \quad (1.36)$$

Para estas soluciones es necesario encontrar los valores de X_p y X_a . Al sustituir (1.26) y (1.27) en (1.21) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \omega_p^2 - \omega^2 + \mu\omega_a^2 + 2\zeta_p\omega_p\omega i & -\mu\omega_a^2 \\ -\omega_a^2 & \omega_a^2 - \omega^2 + 2\zeta_a\omega_a\omega i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ X_a \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t}. \quad (1.37)$$

Las ecuaciones en (1.37) pueden ser estudiadas para distintos casos. Por ejemplo, si el sistema primario está fabricado de metal, es posible que la amortiguación interna sea muy baja y es apropiado considerar $c_p = 0$ [8, 22]. Teniendo en cuenta ésta consideración el factor de amortiguamiento del sistema primario es cero ($\zeta_p = 0$). Resolviendo para X_p y X_a en el sistema (1.37) obtenemos

$$X_p = \frac{F_0(\omega_a^2 - \omega^2 + 2\zeta_a\omega_a\omega i)}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_p^2 - \omega^2) - \mu\omega_a^2\omega^2 + 2\zeta_a\omega_a\omega i(\omega_p^2 - \omega^2 + \mu\omega_a^2)}, \quad (1.38)$$

$$X_a = \frac{F_0\omega_a^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_p^2 - \omega^2) - \mu\omega_a^2\omega^2 + 2\zeta_a\omega_a\omega i(\omega_p^2 - \omega^2 + \mu\omega_a^2)}. \quad (1.39)$$

Es importante notar que la amplitud de la respuesta del sistema primario (1.38) a diferencia del caso sin amortiguamiento no puede ser exactamente cero. De modo que que el amortiguamiento disminuye o deteriora la capacidad del absorbedor al no poder anular exactamente el movimiento del sistema primario. Dado que las expresiones (1.38) y (1.39) son números complejos, podemos calcular la magnitud del sistema primario como

$$\left| \frac{X_p k_p}{F} \right| = \sqrt{\frac{(2\zeta r)^2 + (r^2 - \beta^2)^2}{(2r\zeta)^2(r^2 - 1 - \mu\beta^2)^2 + [(r^2 - 1)(r^2 - \beta^2) - \mu\beta^2 r^2]^2}}, \quad (1.40)$$

donde los parámetros β y μ están definidos de igual manera que el caso anterior, $r = \frac{\omega}{\omega_p}$ es la relación de frecuencia forzada y $\zeta = \frac{c_a}{2m_a\omega_p}$ es el factor de amortiguamiento mixto. La expresión (1.40) muestra que la amplitud de vibración del sistema primario es una función de μ, β, r y ζ . En la Figura 1.11 se muestra la grafica de $\left| \frac{X_p k_p}{F} \right|$ contra la relación de frecuencia forzada r , con los parámetros $\beta = 1$, $\mu = 0.1$ y diferentes valores de ζ . Analizando la Figura 1.11 podemos notar que con los valores de μ y β no necesariamente se obtendrá la menor amplitud conforme ζ aumenta, de hecho se tiene que para $\zeta = 0.1$ se produce una menor amplitud que para $\zeta = 0.05$, de

este modo surge la necesidad de investigar a fondo los valores de μ y β adecuados para obtener una ζ que proporcione la menor amplitud en el sistema primario, este estudio se conoce como *optimización del absorbedor amortiguado* véase [8, 9, 22]. Cabe aclarar que en este trabajo no se profundizará en este tema.

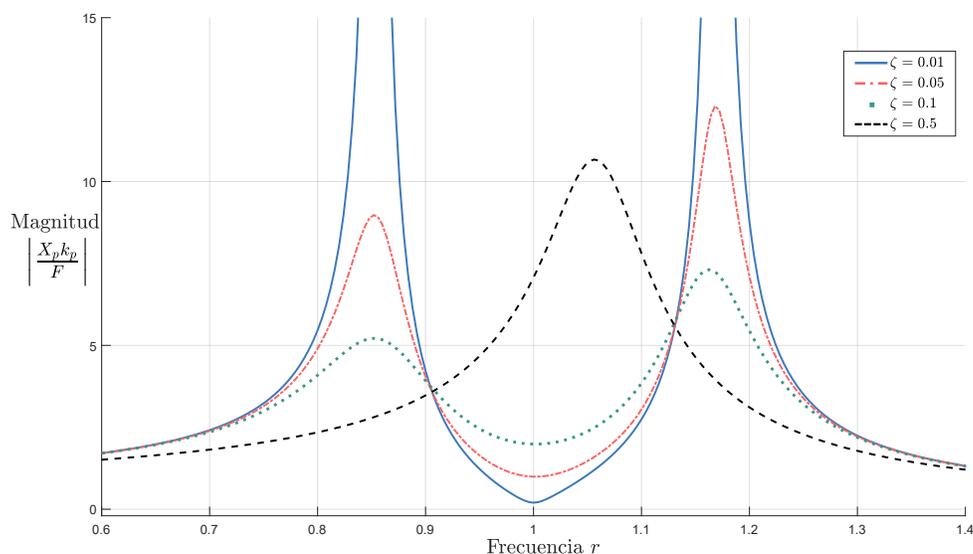


Figura 1.11: Magnitud y frecuencia normalizada de (1.32), para distintos valores de ζ .

Por otro lado se tiene que cuando el coeficiente de amortiguamiento del absorbedor $c_a = 0$, por consiguiente $\zeta = 0$, entonces la resonancia ocurre a las dos frecuencias naturales del sistema acoplado como se analizó en el caso anterior sin amortiguamiento. Si $\zeta = \infty$ ($c_a = \infty$), las dos masas del sistema acoplado virtualmente se unen entre sí y el sistema se comporta como un sistema de un grado de libertad. Para este caso, la resonancia ocurre con $|X_p| \rightarrow \infty$ en

$$r = \frac{\omega}{\omega_p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}} \quad (1.41)$$

En conclusión, la magnitud $|X_p|$ es infinita cuando $c_a = 0$ al igual que cuando $c = \infty$. En la Figura 1.12 se pueden apreciar estos casos.

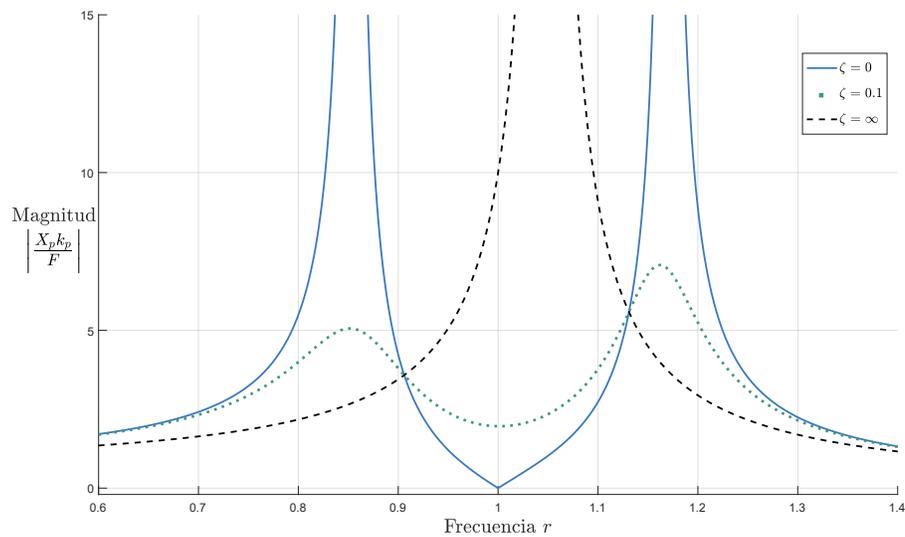


Figura 1.12: Magnitud y frecuencia normalizada de (1.32), para los casos $\zeta = 0$ y $\zeta = \infty$.

1.3. Estructura de la Tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se presentó la mecánica de las vibraciones para un sistema masa-resorte y un sistema masa-resorte-amortiguador, ambos sistemas de un sólo grado de libertad. Posteriormente se introduce el concepto y comportamiento de un absorbedor pasivo de vibraciones, considerando los casos con y sin amortiguamiento. En el Capítulo 2 se presenta el concepto de absorbedor retardado de vibraciones y se plantea el problema general tratado en esta tesis. En el Capítulo 3 se presenta algunos preliminares necesarios para el desarrollo de la tesis, tales como soluciones y estabilidad para los sistemas dinámicos de tipo retardado. El Capítulo 4 está dedicado a presentar los resultados principales de este trabajo de tesis, los cuales abordan el análisis de estabilidad para obtener la región de estabilidad y el diseño del absorbedor retardado de vibraciones. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y el trabajo a futuro.

Formulación del Problema

En este capítulo se presenta el concepto del absorbedor de vibraciones retardado, se exponen las ventajas al considerar este esquema en contraste con un absorbedor pasivo clásico. Adicionalmente se plantea el problema a considerar en este trabajo así como el objetivo general de esta tesis.

2.1. Absorbedor de vibraciones retardado

Como se analizó en el capítulo anterior, un absorbedor pasivo configurado adecuadamente puede realizar una gran atenuación en la respuesta del sistema primario. Para lograr esto se debe configurar correctamente los parámetros de masa, rigidez y amortiguador, los cuales producen una atenuación máxima de las oscilaciones del sistema primario. El problema esencial con este tipo de absorbedor pasivo es su sensibilidad a la frecuencia de excitación. Para solventar las limitaciones de un absorbedor pasivo se suele hacer uso de una retroalimentación al sistema por medio de un actuador. Así, el absorbedor pasivo y activo, también llamado absorbedor híbrido combina la absorción pasiva, con la adaptación que otorga una ley de control activa que se usa para modificar la dinámica del absorbedor. El Control por Análisis Modal y el Control Óptimo, son algunas de estas técnicas de control para la parte activa del absorbedor híbrido, véase [8].

Por otro lado, recordemos que el absorbedor pasivo ideal es un sistema masa-resorte, es decir, sin amortiguamiento ya que dicho sistema tiene soluciones oscilatorias para cualesquiera valores de masa y del resorte. De modo que si el sistema masa-resorte es sintonizado a la frecuencia de excitación, la fuerza provista por el absorbedor es igual en magnitud y en dirección contraria a

la fuerza de excitación y por lo tanto la fuerza neta sobre el sistema primario es igual a cero. Sin embargo, en la mayoría de los sistemas mecánicos el amortiguamiento siempre está presente, este disminuye la capacidad de un absorbedor de vibraciones; no obstante, el amortiguamiento previene resonancias y mejora la banda efectiva de operación del absorbedor [1, 9, 22].

De manera similar, para un absorbedor pasivo y activo, la presencia del amortiguamiento impide que la respuesta del sistema primario sea cero. Esto motivó en [18] a Olgac y Holm-Hansen quienes proponen un absorbedor híbrido, donde la parte activa consiste en una retroalimentación retardada de la posición, a este absorbedor se le conoce como *Absorbedor de Vibraciones Retardado* o Resonador Retardado (DR, por sus siglas en inglés). La estructura mostrada en la Figura 2.1 representa un absorbedor de un grado de libertad con una retroalimentación de fuerza adicional $gx_a(t-h)$ donde g es la ganancia de retroalimentación y h es el retardo de tiempo aplicado al desplazamiento $x_a(t)$.

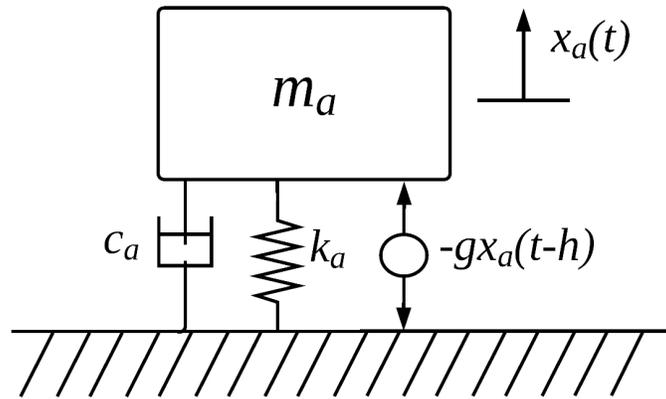


Figura 2.1: Absorbedor de vibraciones retardado.

La idea fundamental del DR es introducir intencionalmente el retardo como un parámetro de control para inducir un comportamiento oscilatorio al sistema masa-resorte-amortiguador. Esta idea contrasta con el enfoque clásico donde se le atribuye usualmente un efecto desestabilizante a los retardos del tiempo [2, 5, 7, 12]. Explícitamente, de la Figura 2.1, donde $x_a(t)$ denota el desplazamiento de la masa m_a de su posición de equilibrio, se tiene la ecuación de movimiento:

$$m_a \ddot{x}_a(t) + c_a \dot{x}_a(t) + k_a x_a(t) = u(t), \quad (2.1)$$

donde la ley de control es

$$u(t) = -gx_a(t-h). \quad (2.2)$$

Evidentemente si $h = 0$, el controlador (2.2) se convierte en un control Proporcional. Específicamente, el objetivo es diseñar la ganancia g y el retardo h tal que la dinámica estable del sistema masa-resorte-amortiguador (2.1), sea similar a un sistema masa-resorte diseñado a una frecuencia natural, es decir, que se comporte como un absorbedor ideal y en consecuencia que la respuesta en estado estable del sistema primario pueda ser cero aún en presencia de amortiguamiento.

Debido al retardo h la función característica asociada al sistema en lazo cerrado (2.1)-(2.2) no es un polinomio sino que ahora es un cuasipolinomio, es decir, es una función trascendental de variable compleja que tiene un número infinito de ceros (raíces) [5]. Entonces el retardo y la ganancia de retroalimentación se seleccionan tales que el cuasipolinomio asociado al sistema en lazo cerrado (2.1)-(2.2) tenga dos raíces situadas en el eje imaginario del plano complejo mientras que las demás se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo. De esta manera se tiene que las raíces dominantes son las raíces sobre el eje imaginario del plano complejo y por consiguiente el sistema es marginalmente estable, es decir, que la respuesta en el tiempo del sistema en lazo cerrado (2.1)-(2.2) es oscilatoria.

De este modo se tienen las siguientes ventajas al considerar un DR en contraste con un absorbedor pasivo clásico.

- El absorbedor pasivo se optimiza mediante la configuración correcta de los parámetros de masa, rigidez y amortiguador, los cuales determinan la frecuencia de oscilación del sistema. El problema es que al diseñar estos parámetros ya no se puede modificar la frecuencia a menos que se modifiquen los parámetros del sistema, además de que esta configuración sólo otorga un rango óptimo de sintonización para una frecuencia del absorbedor. Por otro lado, el DR se sintoniza mediante la ley de control activa a través de la programación del retardo h y su ganancia de retroalimentación g en tiempo real y por consiguiente nos permite modificar la frecuencia de oscilación del absorbedor.
- El amortiguamiento siempre está presente en los sistemas mecánicos, esto conlleva a que el absorbedor pasivo clásico no pueda comportarse como un absorbedor ideal, es decir, no puede tener soluciones oscilatorias para cualesquiera valores de masa y rigidez, por consiguiente la respuesta en el tiempo del sistema primario no puede ser cero. Sin embargo, al considerar un DR con la programación correcta del retardo h y su ganancia de retroalimentación g puede hacer que la respuesta en el tiempo del absorbedor sea oscilatoria, es decir, que se comporte como un absorbedor ideal y de este modo al adherirse al sistema primario poder atenuar todas sus oscilaciones correctamente.

2.2. Justificación y Objetivo Principal

En [18] se propone el siguiente diseño en los parámetros h y g tal que el comportamiento del sistema en lazo cerrado (2.1)-(2.2) sea el de un DR:

$$h = \left(\frac{1}{\omega_c} \right) \left[\tan^{-1}(c_a \omega_c m_a \omega_c^2 - k_a) + 2\pi\ell \right]. \quad (2.3)$$

$$g = \pm \sqrt{(c_a \omega_c)^2 + (k_a - m_a \omega_c^2)^2}, \quad (2.4)$$

donde ω_c es la frecuencia oscilación deseada, con $\ell = 0, 1, 2, \dots$. De modo que dados los valores de h y g determinados respectivamente por (2.3) y (2.4), se tiene que el sistema en lazo cerrado (2.1)-(2.2) oscila a la frecuencia ω_c deseada.

Sin embargo, el primer problema es que formalmente la parametrización (2.3)-(2.4) sólo garantiza que el cuasipolinomio tenga al menos dos raíces situadas en el eje imaginario, pero no garantiza que las demás estén situadas en el semiplano izquierdo del plano complejo. De modo que la parametrización (2.3)-(2.4) puede hacer que se encuentren algunas raíces inestables en el sistema. El segundo problema es que en [18] se muestra que existe una $\omega_{critica}$ tal que $\omega_c > \omega_{critica}$ pero no se muestra como determinar esta frecuencia explícitamente. De hecho se muestra la existencia de $\omega_{critica}$ mediante el estudio de la ubicación de las raíces del cuasipolinomio asociado al sistema en lazo cerrado (2.1)-(2.2) y un análisis de sensibilidad ante la variación de los parámetros h y g . No obstante este enfoque puede resultar no ser el más conveniente debido a la existencia de las infinitas raíces de la función característica.

Existen otros trabajos de Olgac y colaboradores donde se ha estudiado este problema, tal es el caso de [19] donde a partir de la ley de control (2.2) estudian el DR fijo de doble frecuencia. Mientras que en [20, 21] presentan la ley de control:

$$u(t) = -g\ddot{x}_a(t-h), \quad (2.5)$$

donde la ganancia de retroalimentación retardada esta situada en la aceleración.

Por otro lado, en [13] se realizó un estudio para determinar de forma explícita la región de estabilidad a través de la función característica asociada al sistema en lazo cerrado (2.1)-(2.2) para los casos cuando $c_a = 0$ y $c_a \neq 0$. Es importante mencionar que en el caso con amortiguamiento, es

decir, $c_a \neq 0$, se presentan dos regiones de estabilidad dependiendo el valor de c_a .

A partir de estas ideas y resultados proponemos la siguiente ley de control:

$$u(t) = -g_1 x_a(t-h) - g_2 \dot{x}_a(t-h). \quad (2.6)$$

Ahora si $h = 0$, el controlador en (2.6) se convierte en un controlador Proporcional-Derivativo, de esta manera se puede modificar el amortiguamiento a partir de la ganancia derivativa g_2 .

El sistema (2.1)-(2.6) en lazo cerrado se puede escribir como

$$\ddot{x}_a(t) + 2\zeta_a \omega_a \dot{x}_a(t) + \omega_a^2 x_a(t) + b_1 x_a(t-h) + b_2 \dot{x}_a(t-h) = 0, \quad (2.7)$$

donde $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$ es la frecuencia natural, $\zeta_a = \frac{c_a}{2m_a \omega_a}$ es el factor de amortiguamiento, $b_1 = \frac{g_1}{m_a}$ y $b_2 = \frac{g_2}{m_a}$ son las ganancias de retroalimentación.

Entonces, en este trabajo de tesis nos planteamos el siguiente objetivo principal:

Determinar explícitamente la región de estabilidad del sistema (2.7) y proponer un método de diseño tal que este sistema tenga un comportamiento oscilatorio a una frecuencia deseada.

De modo que la estrategia de control ahora consiste en encontrar valores de b_1 , b_2 y h tal que el sistema (2.7) tenga soluciones oscilatorias. En otras palabras, que la función característica asociada al sistema (2.7) tenga un par de raíces sobre en el eje imaginario del plano complejo y las demás raíces se encuentren en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Capítulo 3

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos resultados preliminares necesarios para el desarrollo de este trabajo de tesis. Se introduce una clase de ecuaciones diferenciales funcionales, se abordan los problemas de existencia y unicidad de soluciones, los conceptos de estabilidad, además de mostrar un método frecuencial para el análisis de estabilidad este tipo de ecuaciones.

3.1. Ecuaciones Diferenciales en Diferencias

Uno de los desafíos fundamentales de la ciencia son los de la descripción y la predicción. Al observar ciertos fenómenos, deseamos saber cómo describir lo que vemos en ese instante y cómo determinar el siguiente comportamiento. En muchos casos importantes, para cualquier tiempo t , un vector de dimensión finita $x(t)$ proporciona una representación conveniente y útil del estado del sistema [2]. La mayoría de estos fenómenos pueden ser modelados con ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's), las cuales describen la dinámica del sistema mediante la información que brinda el estado presente t_0 . El caso general de una EDO está descrito de la siguiente manera:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa las variables de estado del sistema y f es una función continua y al menos localmente Lipchitz con respecto a x . De esta manera se asume que el estado futuro del sistema es independiente de los estados pasados y está definido únicamente por el estado presente t_0 . No obstante, haciendo un análisis más detallado, se aprecia que no es suficiente solamente considerar el estado presente, ya que esto sólo es una primera aproximación a la realidad y para

obtener un modelo más realista necesitaríamos incluir información de los estados pasados del sistema [7]. Matemáticamente, esto significa considerar un cambio en la representación clásica de una EDO de la forma (3.1) y ahora considerar ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_k)), \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.2)$$

donde $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_k$ y la función f es continua para todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto a $x(t)$.

Los sistemas que dependen de la información de los estados pasados para determinar su comportamiento futuro son llamados *sistemas dinámicos con retardos*. Como ejemplos de estos sistemas se tienen los sistemas depredador-presa, sistemas de transmisión de datos, sistemas biológicos, etc. Esta área de investigación tiene sus orígenes mucho antes del siglo XX, aunque recibió una mayor atención a principios de 1900 derivado del estudio de procesos biológicos, ecológicos y las aplicaciones prácticas de la ingeniería [5]. A principios de los años cuarenta, Minorsky [14], en su trabajo de sistemas con acción retardada, estableció la importancia de contemplar el retardo de tiempo en los mecanismos con retroalimentación. En 1949, Myshkis [15] introdujo una clase general de ecuaciones con retardos de tiempo como argumentos y cimentó las bases para una teoría general de sistemas lineales. A su vez, Bellman y Danskin [3], mostraron las diversas aplicaciones de ecuaciones involucrando retardos de tiempo en áreas como biología, economía, ingeniería, entre otras. La estabilidad de los sistemas dinámicos con retardos empezó a ser una materia de formal estudio con las contribuciones de Pontryagin y Bellman [2]. En las últimas décadas se han presentado diferentes técnicas y contribuciones al estudio de sistemas dinámicos con retardos, véase [24].

En general, el estudio de sistemas dinámicos con retardo resulta más complicado debido a que este tipo de sistemas son modelados por ecuaciones diferenciales en diferencia (EDD's) o de forma más general por ecuaciones diferenciales funcionales (EDF's), las cuales poseen la característica de tener una naturaleza infinito dimensional a diferencia de las EDO's que son de dimension finita. La presencia de retardos en el sistema pueden introducir comportamientos complejos tales como oscilaciones, inestabilidad y mal desempeño, mientras que existen otros casos donde la presencia de retardos “pequeños” pueden desestabilizar algunos sistemas, pero retardos “grandes” pueden estabilizar otros sistemas [17]. Por otro lado, el uso de leyes de control que incluyen retardos puede contribuir a mejorar los resultados esperados en el sistema, es decir, el retardo puede usarse como parámetro de control, siendo el caso en este trabajo de tesis.

Los retardos pueden aparecer de forma discreta, distribuida o en forma discreta y distribuida a

la vez. Pueden tener también un único o múltiples retardos, ya sean, constantes o variantes en el tiempo, etc.

Una forma general de clasificar las ecuaciones diferenciales en diferencias es la siguiente:

- Ecuaciones de tipo retardada.
- Ecuaciones de tipo neutro.
- Ecuaciones de tipo avanzada.

Para entender mejor esta clasificación consideremos la siguiente ecuación:

$$a_0\dot{x}(t) + a_1\dot{x}(t-h) + b_0x(t) + b_1x(t-h) = f(t), \quad (3.3)$$

la cual es de primer orden en derivadas y diferencias, con $h \in \mathbb{R}_+$ el retardo del tiempo.

Definición 3.1 [2]

Una ecuación de la forma (3.3) se dice ser del tipo retardada si $a_0 \neq 0$ y $a_1 = 0$. Se dice ser de tipo de neutro si $a_0 \neq 0$ y $a_1 \neq 0$. Se dice ser del tipo avanzada si $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$

Si $a_0 = a_1 = 0$ ó $b_0 = b_1 = 0$, entonces la ecuación (3.3) se convierte en una ecuación de diferencia pura, un tipo de ecuación funcional la cual debe ser tratada con gran detalle.

Si $a_0 = b_0 = 0$ ó $a_1 = b_1 = 0$, entonces la ecuación (3.3) se convierte en una EDO .

Una ecuación de tipo retardada permite presentar el comportamiento del sistema en el cual la tasa de cambio o derivada de una cantidad bajo investigación depende de los valores pasados y presentes de dicha cantidad, a su vez, el término de mayor grado en la derivada se sitúa en el término libre de retardo. Una ecuación de tipo neutro permite representar el comportamiento de sistemas en los cuales la tasa de cambio o derivada de una cantidad depende de los valores pasados de la derivada y de los valores pasados y presentes de la cantidad. Una ecuación de tipo avanzada permite representar el comportamiento del sistema en el cual la tasa de cambio o derivada de una cantidad depende de valores presentes y futuros de la cantidad.

3.1.1. Existencia y Unicidad de soluciones

De manera similar al caso de las EDO's, resulta fundamental garantizar existencia y unicidad de soluciones para una EDD. Se sabe que la existencia de una solución particular de una EDO de la

forma (3.1) depende del problema del valor inicial (PVI) el cual es planteado como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \geq 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Sin embargo, este no es el caso cuando se trata de una solución para una EDD, ya que no es suficiente el conocimiento de x_0 y t_0 , ni aún para definir el valor de la derivada de $x(t)$ en $t = t_0$. Para definir una solución de una EDD se requiere conocer un instante inicial t_0 y una función inicial $\varphi : [t_0 - h, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde h es el retardo de tiempo. El espacio en el cual la función inicial está definida se elige dependiendo del problema a tratar. Es relevante resaltar el hecho de que la función inicial φ pueda pertenecer a cualquier espacio funcional da lugar a que los sistemas con retardo pertenecen a una clase particular de sistemas infinito dimensional, mientras que las trayectorias solución de un sistema con retardo sean un vector de dimensión finita [10].

Consideremos la siguiente EDD de tipo retardada, con un sólo retardo en la variable de estado

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \geq 0 \quad (3.5)$$

donde $h > 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, además la función vectorial $f(t, x(t), x(t-h))$ es continua para todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz para $x(t)$. Notese que si $h = 0$, la EDD se reduce a una EDO. Sea $\varphi(t)$ una función definida en $t \in [t_0 - h, t_0]$, supongamos que φ pertenece al espacio de las funciones continuas que mapean $[t_0 - h, t_0]$ a \mathbb{R}^n , es decir, $\varphi \in C([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^n)$.

Así, planteamos el problema de valor inicial de la ecuación (3.5) como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [t_0 - h, t_0], \end{cases} \quad (3.6)$$

donde $\varphi \in C([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^n)$ es la función inicial.

Analicemos lo siguiente: para $t \in [t_0, t_0 + h]$ se tiene $t - h \in [t_0 - h, t_0]$ y $x(t-h) = \varphi(t-h)$. Entonces el sistema (3.6) toma la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi(t-h)), \\ x(t_0) = \varphi(t_0). \end{cases} \quad (3.7)$$

Si definimos $f(t, x(t), \varphi(t-h)) \triangleq f_1(t, x(t))$, entonces el sistema (3.7) puede ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(t, x(t)), \\ x(t_0) = \varphi(t_0). \end{cases} \quad (3.8)$$

Observemos que el sistema (3.8) es un PVI clásico de EDO's. Suponiendo que f_1 es continua con respecto a todos sus argumentos, acotada y al menos localmente Lipchitz con respecto a $x(t)$, entonces de la teoría de EDOs sabemos que existe una única solución $x(t, \varphi)$ definida en $t \in [t_0, t_0 + h]$ que pasa por $\varphi(t_0)$ en el instante t_0 y satisface a su vez la ecuación (3.8).

Para $t \in [t_0 + h, t_0 + 2h]$ se tiene $t - h \in [t_0, t_0 + h]$ y $x(t-h) = \varphi_1(t-h)$. Entonces el sistema (3.6) toma la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_1(t-h)), \\ x(t_0 + h) = \varphi_1(t_0 + h). \end{cases} \quad (3.9)$$

Definiendo $f(t, x(t), \varphi_1(t-h)) \triangleq f_2(t, x(t))$, podemos escribir nuevamente el PVI (3.9) como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_2(t, x(t)), \\ x(t_0 + h) = \varphi_1(t_0 + h). \end{cases} \quad (3.10)$$

Entonces existe una única solución definida en el intervalo $t \in [t_0 + h, t_0 + 2h]$ que pasa por el punto $\varphi_1(t_0 + h)$ y satisface la ecuación (3.10). De esta manera se puede seguir construyendo una solución para los intervalos de longitud h , donde la solución de (3.6) está dada de la forma siguiente:

$$x(t, \varphi) = \begin{cases} \varphi, & t \in [t_0 - h, t_0], \\ \varphi_1, & t \in [t_0, t_0 + h], \\ \varphi_2, & t \in [t_0 + h, t_0 + 2h], \\ \vdots \\ \varphi_n, & t \in [t_0 + (n-1)h, t_0 + nh]. \end{cases} \quad (3.11)$$

Este método de construcción de soluciones para EDD es conocido como *método paso a paso*, véase Figura 3.1.

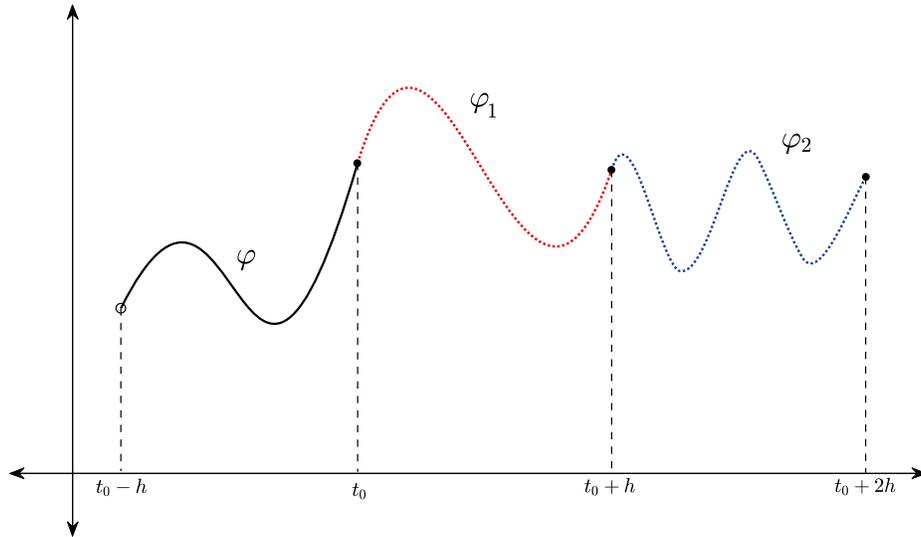


Figura 3.1: Representación gráfica del método paso a paso

Para ilustrar de mejor manera este método, consideremos el caso lineal, es decir consideremos la siguiente ecuación diferencial del tipo retardado:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-h) + f(t), \quad (3.12)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^+$ y $f(t)$ es una función continua.

Se plantea el problema de valor inicial de la siguiente manera

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-h) + f(t), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (3.13)$$

Sea φ continua y definida en $[-h, 0]$, se busca una función $x(t, \varphi)$ que sea solución del PVI (3.13).

Empleando el método paso a paso para construir dicha solución tenemos lo siguiente:

Para $t \in [0, h]$, se tiene que $t-h \in [-h, 0]$, de tal manera que $x(t-h, \varphi) = \varphi(t-h)$ y la ecuación (3.12) toma la forma

$$\dot{x}(t, \varphi) = ax(t, \varphi) + b\varphi(t-h) + f(t).$$

Si definimos $g_0(t) \triangleq b\varphi(t-h) + f(t)$ entonces el sistema (3.13) puede ser descrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t, \varphi) = ax(t, \varphi) + g_0(t), \\ x(0, \varphi) = \varphi(0). \end{cases} \quad (3.14)$$

Observemos que (3.14) es una EDO lineal, de modo que al aplicar el método de variación de constantes obtenemos su solución, la cual está dada por

$$x(t, \varphi) = e^{at} \varphi(0) + \int_0^t e^{a(t-s)} g_0(s) ds, \quad t \in [0, h], \quad (3.15)$$

donde (3.15) existe y es única en $t \in [0, h]$.

Ahora definimos $\varphi_1(t) \triangleq x(t, \varphi)$ para $t \in [0, h]$. Así, para $t \in [h, 2h]$, se tiene que $t - h \in [0, h]$ y por lo tanto $x(t - h, \varphi_1) = \varphi_1(t - h)$. Entonces la ecuación (3.12) toma la forma

$$\dot{x}(t, \varphi_1) = ax(t, \varphi_1) + b\varphi_1(t - h) + f(t).$$

Si definimos $g_1(t) \triangleq b\varphi_1(t - h) + f(t)$ entonces el sistema (3.13) puede ser descrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t, \varphi_1) = ax(t, \varphi_1) + g_1(t), \\ x(h, \varphi_1) = \varphi_1(h). \end{cases} \quad (3.16)$$

Observemos nuevamente que (3.16) es una EDO lineal, cuya solución es de la forma

$$x(t, \varphi_1) = e^{a(t-h)} \varphi_1(h) + \int_h^t e^{a(t-s)} g_1(s) ds, \quad t \in [h, 2h], \quad (3.17)$$

donde (3.17) existe y es única en $t \in [h, 2h]$.

Luego definimos $\varphi_2(t) \triangleq x(t, \varphi_1)$, para $t \in [h, 2h]$. De esta manera se puede seguir construyendo una solución para los intervalos de longitud h , donde la solución de (3.13) está dada por

$$x(t, \varphi) = \begin{cases} \varphi, & t \in [-h, 0], \\ \varphi_1, & t \in [0, h], \\ \varphi_2, & t \in [h, 2h], \\ \vdots \\ \varphi_n, & t \in [(n-1)h, nh], \end{cases} \quad (3.18)$$

donde

$$\varphi_n = e^{a(t-(n-1)h)} \varphi_{n-1}((n-1)h) + \int_{(n-1)h}^t e^{a(t-s)} g_{n-1}(s) ds, \quad t \in [(n-1)h, nh],$$

para $n = 1, 2, \dots$, y $\varphi_0 = \varphi$. Por lo tanto, este proceso nos permite establecer la existencia y unicidad de $x(t, \varphi)$ para $t \geq 0$. Los resultados y propiedades sobre la continuidad de soluciones en el caso de la EDD (3.12) son descritos en los siguientes teoremas.

Teorema 3.1 [7]

Dada una función φ continua en $[-h, 0]$. Entonces existe una única función $x(t, \varphi)$ definida para todo $t \in [-h, \infty)$ que coincide con φ en $[-h, 0]$ y satisface la ecuación (3.12) para $t \geq 0$. Desde luego en $t = 0$ la derivada de (3.12) representa la derivada por la derecha.

Teorema 3.2 [7]

Si $x(t, \varphi)$ es una solución de la ecuación (3.12) definida en el teorema anterior, entonces los siguientes enunciados son válidos:

- (i) $x(t, \varphi)$ tiene primera derivada continua para $t > 0$ y tiene derivada continua en $t = 0$ si y sólo si $\varphi(\theta)$ tiene derivada en $\theta = 0$ con

$$\dot{\varphi}(0) = a\varphi(0) + b\varphi(-h) + f(0) \tag{3.19}$$

- (ii) Si $b \neq 0$ entonces $x(t, \varphi)$ puede extenderse como una solución de (3.12) en el intervalo $[-h - \varepsilon, \infty)$ para $0 < \varepsilon \leq h$ si y sólo si φ tiene primera derivada continua en el intervalo $[-\varepsilon, 0]$ y la ecuación (3.19) se satisface. La extensión por el lado izquierdo requiere más suavidad de φ

El Teorema 3.1 resume los resultados de la solución para una EDD de la forma (3.12) mediante el método paso a paso, mientras que el Teorema 3.2 habla sobre la continuidad en $t = 0$ y la extensión de la solución hacia el lado izquierdo. Ambos resultados contrastan las ideas del problema de existencia y unicidad de las EDO's, donde simplemente a partir de una condición inicial x_0 se puede construir la solución de la ecuación diferencial para todo tiempo $t \in \mathbb{R}^n$.

3.2. Ecuaciones Diferenciales en Diferencias Lineales

Consideremos la EDD lineal invariante en el tiempo de tipo retardada

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^m A_k x(t - h_k), \quad (3.20)$$

donde $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $h_k \in \mathbb{R}_+$, son los retardos de tiempo, con $h_0 = 0$. La función característica asociada a (3.20) es:

$$F(s) = \det \left(sI - \sum_{k=0}^m A_k x(t - h_k) \right). \quad (3.21)$$

La función $F(s)$ se conoce como cuasipolinomio característico asociado a (3.20). Un **cuasipolinomio** $F(s)$ es una función entera de variable compleja, es decir, es una función analítica para toda $s \in \mathbb{C}$, cuya principal característica es que posee un número infinito de raíces.

3.2.1. Ubicación de las raíces de un cuasipolinomio

En general, la estructura de un cuasipolinomio es de la siguiente forma:

$$F(s) = \sum_{j=0}^m p_j(s) e^{\beta_j s}, \quad (3.22)$$

donde $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_m$ son combinaciones lineales de los retardos h_k del sistema y $p_j(s)$ son polinomios de grado menor o igual a n , donde n es la dimensión del vector de estados del sistema. También $F(s)$ se puede reescribir como

$$F(s) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n a_{ji} s^i \right) e^{\beta_j s},$$

donde algunos a_{ji} pueden ser cero.

Es posible mostrar que las raíces de un cuasipolinomio sólo existen en ciertas regiones del plano complejo. Antes de definir estas regiones consideremos el siguiente teorema.

Teorema 3.3 [5]

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\rho(\varepsilon) > 0$ tal que $F(s)$ no tiene raíces dentro de la región

$$R = \left\{ s \in \mathbb{C} : |s| \geq \rho(\varepsilon) \wedge \arg(s) \in \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right] \right\}.$$

El resultado anterior muestra que las raíces de un cuasipolinomio sólo pueden encontrarse en ciertas regiones del plano complejo. Más aún, es posible mostrar que dentro de R^c , es decir, el complemento de R , se pueden construir regiones adicionales donde tampoco existen raíces. En la Figura 3.2 puede verse la representación grafica del Teorema 3.3.

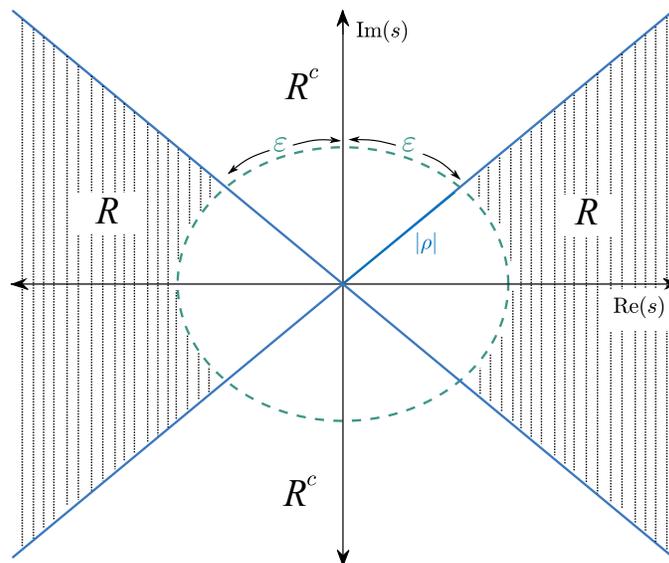


Figura 3.2: Region R en la cual no se encuentran raíces de $F(s)$

3.2.2. Curvas logarítmicas

Para determinar las regiones dentro de R^c donde existen raíces de un cuasipolinomio, es necesario definir curvas logarítmicas en el plano complejo. Sea

$$c(k,y) : s = k \ln(y) + iy, \quad y \geq 1. \tag{3.23}$$

Dados $\varepsilon > 0$ y $k > 0$ existe y suficientemente grande tal que la curva logarítmica $c(k,y) \in R^c$, véase la Figura 3.3.

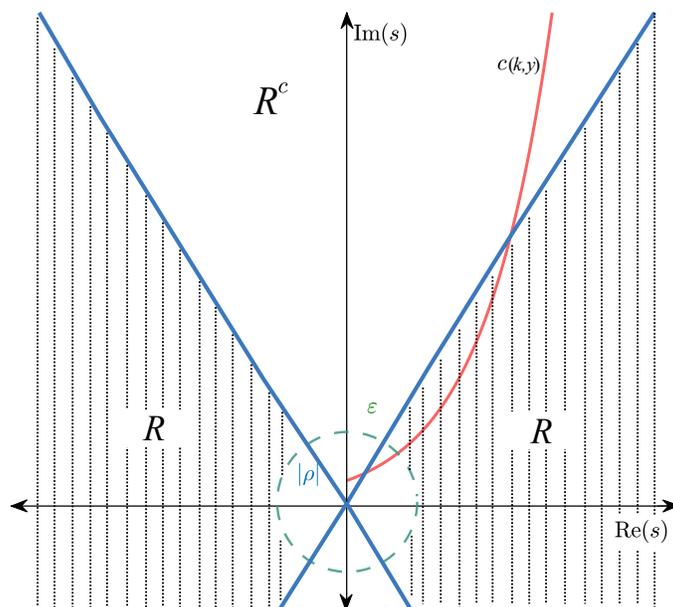


Figura 3.3: Representación de una curva logarítmica $c(k, y)$ para y suficientemente grande.

Reescribamos el cuasipolinomio (3.22) como

$$F(s) = \sum_{v=0}^N a_v s^{j_v} e^{\hat{\beta}_v s}, \quad (3.24)$$

donde $N \leq (n+1)(m+1)$, $a_v \neq 0$, $\hat{\beta}_v, j_v \in \mathbb{R}$ y $(\hat{\beta}_v, j_v) \neq (\hat{\beta}_i, j_i)$, $\forall i, v \in [0, N]$.

A partir del cusipolinomio (3.24) es posible mostrar que cuando $s \in c(k, y)$, $y \geq 1$ suficientemente grande se tiene

$$\left| a_v s^{j_v} e^{\hat{\beta}_v s} \right| \approx |a_v| y^{j_v + k \hat{\beta}_v}.$$

De tal manera que a lo largo de la curva logarítmica los términos de $F(s)$ se comportan como potencias de y . Así, definimos el “peso” del término $a_v s^{j_v} e^{\hat{\beta}_v s}$ a lo largo de una curva logarítmica como

$$p_v \triangleq j_v + k \hat{\beta}_v. \quad (3.25)$$

Es posible mostrar que si existe un solo término de $F(s)$ que tenga mayor peso entonces $F(s)$ no tiene raíces de magnitud grande para ese valor de k . Así, si deseamos encontrar raíces de $F(s)$ deben existir al menos dos términos con el mismo peso.

3.2.3. Diagrama de potencias

Del análisis anterior se sigue que dado k , el peso de un término de $F(s)$ está determinado por la pareja $(\hat{\beta}_v, j_v)$. Con el objetivo de buscar valores de k tales que $F(s)$ tenga al menos dos términos con el mismo peso se construye el **diagrama de potencias**. En términos generales el procedimiento es el siguiente: ubicar las parejas $(\hat{\beta}_v, j_v)$, $v = 0, 1, 2, \dots, N$ en el plano $(\hat{\beta}_v, j_v)$ y trazar el casco convexo de estos puntos, véase Figura 3.4. Una vez formado este casco, la parte superior está conformada por un numero finito de segmentos, digamos ℓ . Para cada segmento se define un vector ortogonal $(k_j, 1)$, $j = 1, 2, \dots, \ell$. Cabe resaltar que dados k_j y $\hat{\beta}$ la pareja $(\hat{\beta}_v, j_v)$ con mayor peso es la de mayor j_v . Para estos valores de k_j se tiene que al menos dos parejas $(\hat{\beta}_v, j_v)$ tienen el mismo peso p_v . En la Fig. 3.4 se puede apreciar un ejemplo de un diagrama de potencias para cuatro segmentos que forman el casco convexo con sus respectivos vectores ortogonales $(k_j, 1)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Cabe mencionar que al calcular los valores de k_j estos pueden ser positivos, negativos o cero.

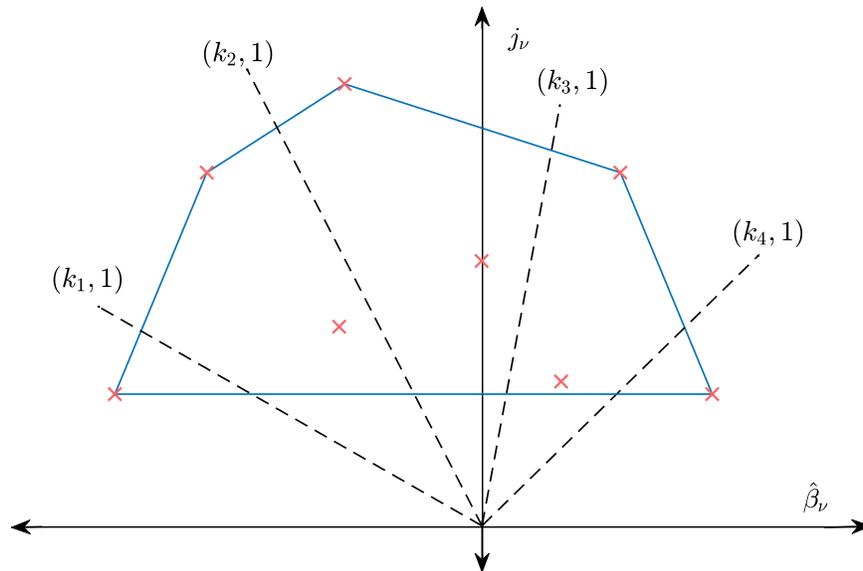


Figura 3.4: Diagrama de potencias.

Con el diagrama de potencias es posible definir las regiones de no existencia de raíces de R^c , para esto definimos una curva logarítmica de la forma (3.23) para cada $(k_j, 1)$, $j = 1, 2, \dots, \ell$. Además dado $\varepsilon > 0$ definimos los sectores logarítmicos

$$S_j = \{s \in \mathbb{C} : (k_j - \varepsilon) \ln(y) < \text{Re}(s) < (k_j + \varepsilon) \ln(y), \text{Im}(s) = y, y \geq 1\}, \quad (3.26)$$

Para mostrar la existencia de raíces de $F(s)$ es necesario utilizar el siguiente resultado.

Teorema 3.5 (Principio del argumento) [4]

Sea C un contorno cerrado sin cruces (simple), descrito en el sentido positivo (sentido contrario a las manecillas del reloj), y sea F una función analítica dentro y sobre C , excepto posiblemente en polos interiores a C . Supongamos además que F no tiene ceros sobre C . Entonces

$$\Delta \arg F(s) \Big|_C = 2\pi(N - P),$$

donde N y P son respectivamente el número de ceros y el número de polos de F , contando sus multiplicidades, interiores a C .

Definiendo un contorno cerrado en los sectores logarítmicos S_j , $j = 0, 1, \dots, \ell$ y utilizando el Principio del argumento (Teorema 3.5) es posible mostrar la existencia de raíces en los sectores S_j . El número de raíces dentro de los sectores es un número infinito (contable).

Observación. Las raíces de $F(s)$ con magnitudes “grandes” en el semiplano inferior del plano complejo se encuentran en los sectores logarítmicos dados por la imagen reflejada de S_j , $j = 1, 2, \dots, \ell$, con respecto al eje real, es decir, sus complejos conjugados.

Además, con los valores k_j del diagrama de potencias se obtiene una clasificación para un cuasipolinomio de la forma (3.24) en sus tres diferentes tipos:

- Si $k_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, \ell$, entonces $F(s)$ es de tipo retardado.
- Si existe al menos un $k_j = 0$ y $k_i < 0$, $\forall j \neq i$, entonces $F(s)$ es de tipo neutro.
- Si existe al menos un $k_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, \ell$, entonces $F(s)$ es de tipo avanzado.

Para ilustrar de mejor manera los conceptos y resultados del análisis realizado en esta sección consideremos el siguiente cuasipolinomio

$$F(s) = s^2 + as + b + cse^{-hs} + de^{-hs}, \quad (3.28)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. El cuasipolinomio (3.28) se puede escribir de la forma (3.24) como

Cabe resaltar que a la derecha de cualquier línea vertical en el plano complejo se tiene un número finito de raíces de $F(s)$ cuando este es de tipo retardado (véase Figura 3.7).

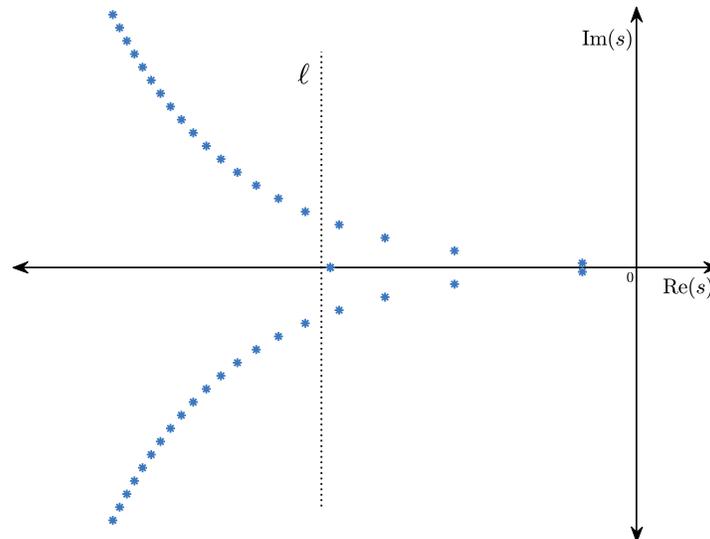


Figura 3.7: Ubicación de las raíces del cuasipolinomio (3.28).

3.3. Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales en Diferencia

En general, la estabilidad de los sistemas dinámicos con retardos puede ser dividida en dos enfoques principales:

- Estabilidad en el dominio de la frecuencia: los criterios de estabilidad basados en el dominio de la frecuencia son herramientas que surgen como una extensión de los métodos clásicos, en los cuales se realiza un análisis del comportamiento de las raíces de las funciones características asociadas a los sistemas. Algunos de estos métodos incluyen resultados como el criterio de Mikhailov y método de D-particiones [5], los cuales abordaremos más adelante en esta sección.
- Estabilidad en el dominio del tiempo: los criterios de estabilidad en el dominio del tiempo para sistemas con retardos se presentan a partir de los trabajos de Razumikhin [23] y de Krasovskii [11]. Los cuales surgen como una generalización de la teoría de Lyapunov clásica aplicada para sistemas dinámicos sin retardo.

Cabe mencionar que el estudio de ambos enfoques resulta ser más complicado que su similar para los sistemas sin retardo [5]. En este trabajo de tesis se utilizan métodos basados en el enfoque

frecuencial para el estudio de estabilidad de un sistema de tipo retardado, por consiguiente en esta sección se abordan algunos conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo.

Recordemos la estructura de una EDD lineal invariante en el tiempo de tipo retardada

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^m A_k x(t - h_k), \quad (3.29)$$

donde $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices del sistema y $h_k \in \mathbb{R}_+$, $k = 0, 1, \dots, m$ son los retardos del sistema, con $h_0 = 0$. La función característica asociada a (3.20) es:

$$F(s) = \det \left(sI - \sum_{k=0}^m A_k x(t - h_k) \right). \quad (3.30)$$

Definición 3.2 [5]

La función característica (3.30) se dice estable si

$$F(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C}_+. \quad (3.31)$$

Se dice que es estable independiente del retardo si (3.31) se mantiene para todo $h_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, m$. El sistema (3.29) se dice estable si su función característica (3.30) es estable, y se dice que el **sistema es estable independientemente del retardo** si (3.30) es estable independiente del retardo.

La definición anterior nos dice que el sistema (3.29) es estable independiente del retardo si la estabilidad permanece con respecto a todos los valores posibles del retardo. Por otra parte, si el sistema es estable sólo para algunos valores de retardos positivos, entonces se dice que la estabilidad depende del retardo. Note que el concepto de estabilidad presentado en la definición 3.2 es de hecho la definición de estabilidad asintótica.

Nota: De manera similar que los sistemas sin retardo, la estabilidad asintótica en los sistemas con retardo lineales implica la estabilidad exponencial.

3.3.1. Criterio de Mikhailov

El criterio de Mikhailov se usa para determinar la estabilidad de los sistemas dinámicos que se describen mediante ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes [12]. Al igual que el criterio de Nyquits, ambos son métodos frecuenciales que utilizan el principio

del argumento de funciones analíticas en el plano complejo (Teorema 3.5, sección 3.2.3). Este resultado es bastante general y puede aplicarse al estudio de la estabilidad de sistemas con y sin retardo. Para mostrar el criterio de Mikhailov para los sistemas lineales con retardos reescribamos el cuasipolinomio (3.30) como

$$F(s) = \sum_{k=0}^m p_k(s)e^{\lambda_k s}, \quad (3.32)$$

donde $\deg p_k(s) \leq n$, con n la dimensión del vector de estados $x(t)$ en (3.29).

Teorema 3.6 (Criterio de Mikhailov) [12]

El cuasipolinomio de la forma (3.32) sin ceros en el eje imaginario, es estable si y sólo si

$$\Delta \arg F(i\omega) \Big|_0^{+\infty} = \frac{n\pi}{2}. \quad (3.33)$$

El criterio de Mikhailov para EDD de tipo retardado (Teorema 3.6) permite analizar la estabilidad de un cuasipolinomio por medio de una gráfica conocida como el Hodógrafo de Mikhailov o gráfico de Mikahilov en el cual se realiza un barrido de frecuencias $\omega \in [0, \infty)$ para el cuasipolinomio (3.32) y se gráfica $Re(F(i\omega))$ contra $Im(F(i\omega))$ en el plano complejo. En la Figura 3.8 podemos observar el gráfico de Mikhailov para el cuasipolinomio (3.28) para los valores $a = 5$, $b = 4$, $c = 2$ y $d = 5$, realizando un barrido en la frecuencia con un rango $\omega = [0, 12]$ rad/s, tal que el sistema es estable.

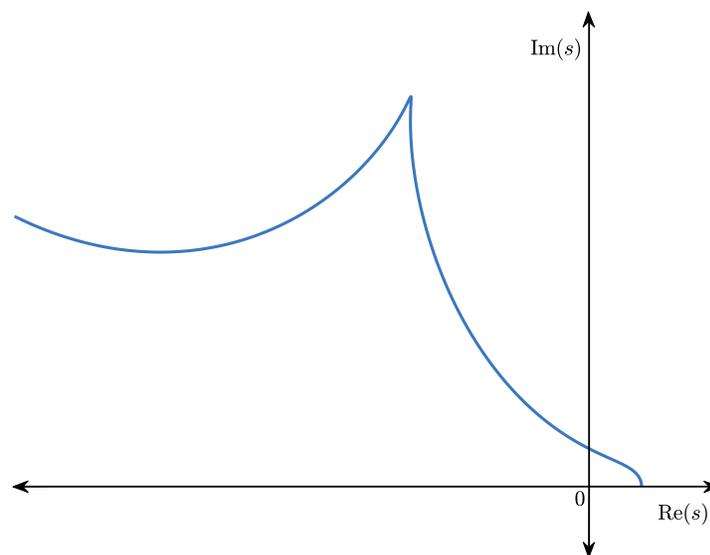


Figura 3.8: Hodografo de Mikhailov para el cuasipolinomio (3.28).

3.3.2. Método de D-Partición

En esta sección revisaremos el método de D-particiones o D-descomposición propuesto por Neimark [16]. Este método solo puede usarse para dos parámetros del cuasipolinomio $F(s)$ y consiste en dividir el espacio de parámetros en regiones acotadas por hipersuperficies, las cuales corresponden a los valores de parámetros tales que $F(s)$ tiene un par de raíces imaginarias puras. Debido a la propiedad de continuidad de las raíces de $F(s)$ con respecto a los parámetros se tiene que en cada región, delimitada por las hipersuperficies, el cuasipolinomio $F(s)$ tiene el mismo número de raíces con parte real positiva.

Para ilustrar de mejor manera el método consideremos el siguiente cuasipolinomio

$$F(s) = s - a - be^{-hs}, \quad (3.34)$$

donde $a, b, h \in \mathbb{R}_+$. Observemos que si $s = 0$, entonces obtenemos la recta $a + b = 0$. Ahora suponiendo $s = i\omega \neq 0$ es una raíz de (3.34), es decir, $F(i\omega) = 0$, entonces

$$F(i\omega) = (i\omega) - a - be^{-i\omega h} = 0. \quad (3.35)$$

Utilizando la identidad de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ en (3.35) tenemos

$$F(i\omega) = (i\omega) - a - b[\cos(\omega h) - i\sin(\omega h)]. \quad (3.36)$$

De (3.36) separando la parte real e imaginaria, se obtiene

$$a - b\cos(\omega h) = 0, \quad (3.37)$$

$$\omega + \sin(\omega h) = 0. \quad (3.38)$$

Resolviendo para a y b el sistema de ecuaciones (3.37)-(3.38) obtenemos la parametrización

$$a(\omega) = \frac{\omega \cos(\omega h)}{\sin(\omega h)}, \quad (3.39)$$

$$b(\omega) = \frac{-\omega}{\sin(\omega h)}. \quad (3.40)$$

Como $\sin(\omega h) = 0$ para $\omega = \frac{k\pi}{h}$, con $k = 0, 1, \dots$, entonces para que la parametrización (3.39)-(3.40) esté bien definida $\omega \in \left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, \dots$

Variando ω en cada uno de los intervalos $\left(\frac{k\pi}{h}, \frac{(k+1)\pi}{h}\right)$, para $k = 0, 1, \dots$, se obtienen un conjunto de curvas (hipersuperficies), véase Figura 3.9. Las curvas particionan el espacio (a, b) en un conjunto infinito de regiones donde para cada parámetros (a, b) dentro de cada región, se tiene que $F(s)$ tiene el mismo número de raíces con parte real positiva. Usando el criterio de Mikhailov es posible encontrar el número de raíces con parte real positiva en cada una de las regiones, véase Figura 3.9, donde p denota el número de raíces con parte real positiva. Evidentemente $p = 0$ es la región de estabilidad en el espacio (a, b) para $F(s)$. Obsérvese que en la región de estabilidad (región sombreada de la Figura 3.9), se pueden distinguir dos subregiones: la región de estabilidad independiente del retardo y la región de estabilidad dependiente del retardo (región achurada).

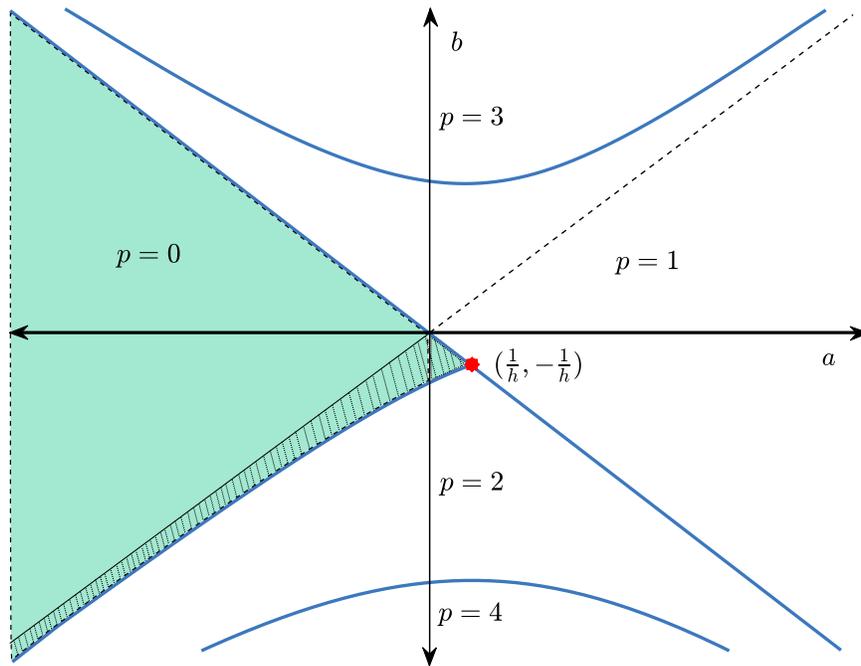


Figura 3.9: Partición del cuasipolinomio (3.34) en el espacio de parámetros (a, b) .

Resultados Principales

En este capítulo se muestran los principales resultados de este trabajo de tesis. Primero se presenta el análisis de estabilidad del esquema DR propuesto con retroalimentación de posición y velocidad determinando analíticamente la región de estabilidad. Posteriormente presentamos un método de diseño para el comportamiento oscilatorio del DR. Los resultados se ilustran mediante algunos ejemplos numéricos.

4.1. Región de estabilidad

Recordemos el esquema DR propuesto como investigación en este trabajo de tesis, el cual consiste en un sistema mecánico de un grado de libertad (sistema masa-resorte-amortiguador) con una retroalimentación $u(t)$, la cual en este caso es de posición y velocidad retardada, véase Figura 4.1. Explícitamente de la Figura 4.1 la ecuación de movimiento considerando $x_a(t)$ como el desplazamiento en el tiempo de la masa m_a se tiene

$$m_a \ddot{x}_a(t) + c_a \dot{x}_a(t) + k_a x_a(t) = u(t), \quad (4.1)$$

Bajo la ley de control

$$u(t) = -g_1 x_a(t-h) - g_2 \dot{x}_a(t-h), \quad (4.2)$$

se obtiene el sistema en lazo cerrado

$$\ddot{x}_a(t) + 2\zeta_a \omega_a \dot{x}_a(t) + \omega_a^2 x_a(t) + b_1 x_a(t-h) + b_2 \dot{x}_a(t-h) = 0, \quad (4.3)$$

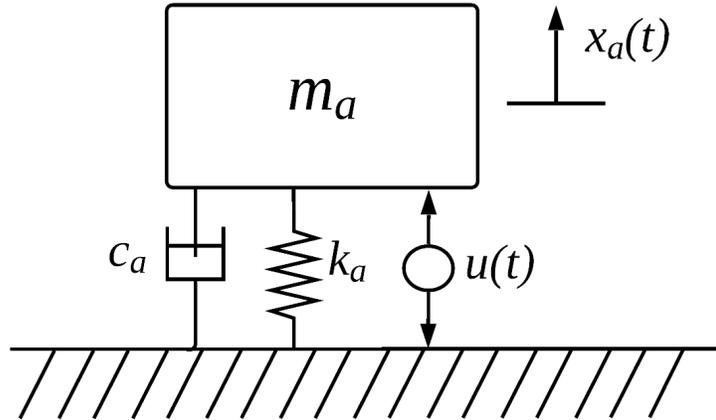


Figura 4.1: Absorbedor Híbrido de vibraciones.

donde $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$ es la frecuencia natural, $\zeta_a = \frac{c_a}{2m_a\omega_a}$ es el factor de amortiguamiento, $b_1 = \frac{g_1}{m_a}$ y $b_2 = \frac{g_2}{m_a}$ son las ganancias de retroalimentación.

El problema consiste en diseñar b_1, b_2 y h tales que el sistema (4.3) tenga soluciones oscilatorias. Para lograr resolver este problema primeramente nos planteamos realizar un análisis de estabilidad de (4.3). Explícitamente dado $h > 0$ pretendemos encontrar el conjunto completo de parámetros b_1 y b_2 tales que (4.3) sea estable, es decir, la región de estabilidad en el espacio de parámetros (b_1, b_2) para (4.3).

La función característica asociada al sistema (4.3) es

$$f(s) = s^2 + 2\zeta_a\omega_a s + \omega_a^2 + b_1 e^{-hs} + b_2 s e^{-hs}. \quad (4.4)$$

Para el análisis de estabilidad es conveniente considerar el siguiente cuasipolinomio:

$$Q(s) = s^2 + cas + a^2 + b_1 e^{-hs} + b_2 s e^{-hs}, \quad (4.5)$$

donde $a, c, h \in \mathbb{R}_+$. El cuasipolinomio (4.4) es un caso particular del cuasipolinomio (4.5) cuando $a^2 = \omega_a^2$ y $c = 2\zeta_a$.

Para el resultado de estabilidad, es necesario considerar el siguiente lema:

Lema 4.1

Dados cualesquiera $h, a, c \in \mathbb{R}_+$, la función

$$g(\omega) = \frac{ca \sin(\omega h) + \omega \cos(\omega h)}{\cos(\omega h) - 1}, \quad (4.6)$$

tiene máximos locales en $\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h} \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, donde ω_k^* son soluciones de la ecuación $m(\omega) = n(\omega)$, para $\omega \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h} \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, con

$$m(\omega) = \frac{\sin(\omega h)}{\cos(\omega h) - 1}, \quad (4.7)$$

y

$$n(\omega) = \frac{cah - \cos(\omega h)}{\omega h}. \quad (4.8)$$

Si $h, a, c \in \mathbb{R}_+$ satisfacen que

$$1 \leq c \leq \frac{3\pi}{2ah}, \quad (4.9)$$

entonces $\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(4k+3)\pi}{2h} \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, y

$$g(\omega_k^*) \geq \frac{a^2}{\omega_k^*}.$$

Demostración.-

Claramente la función $g(\omega)$ dada por (4.6) está bien definida cuando $\cos(\omega h) \neq 1$, es decir, cuando $\omega \neq \frac{2k\pi}{h}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. La derivada de $g(\omega)$ es

$$\frac{d}{d\omega} [g(\omega)] = \frac{\omega h}{\cos(\omega h) - 1} [m(\omega) - n(\omega)], \quad (4.10)$$

donde $m(\omega)$ y $n(\omega)$ están dadas por (4.7) y (4.8) respectivamente. Observese que $\frac{d}{d\omega} [g(\omega)]$ está bien definida de igual manera para $\omega \neq \frac{2k\pi}{h}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Entonces $\frac{d}{d\omega} [g(\omega)] = 0$ si y sólo si $m(\omega) = n(\omega)$ para algún $\omega \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h} \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Ahora analizaremos las funciones $m(\omega)$ y $n(\omega)$ dadas por (4.7) y (4.8) respectivamente.

Por un lado, $m(\omega)$ satisface las siguientes propiedades:

$$\lim_{\omega \rightarrow \frac{2k\pi}{h}^-} m(\omega) = +\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \frac{2k\pi}{h}^+} m(\omega) = -\infty \quad \text{y} \quad m\left(\frac{(2k+1)\pi}{h}\right) = 0,$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ Con esta información es posible graficar el comportamiento de $m(\omega)$, véase la Figura 4.2.

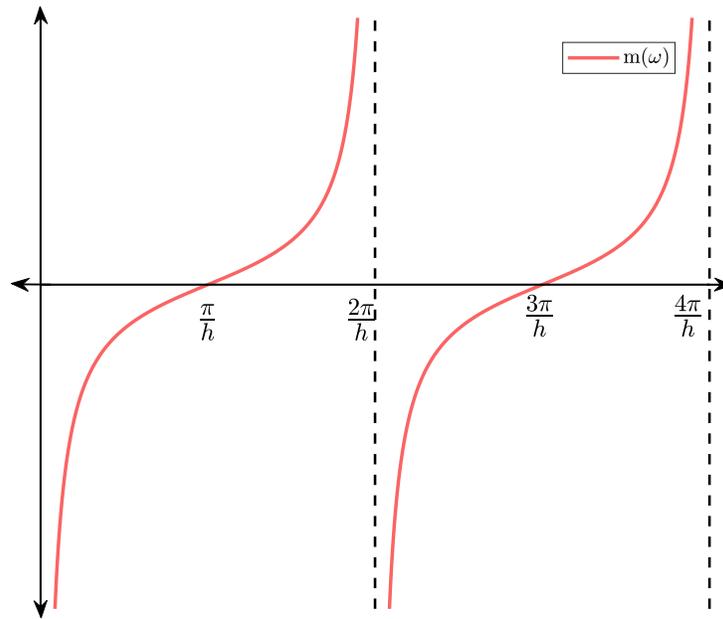


Figura 4.2: Representación gráfica de $m(\omega)$ para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$.

Como se puede apreciar, el comportamiento de $m(\omega)$ depende del parámetro $h > 0$.

Por otro lado, para el comportamiento de $n(\omega)$ no sólo depende del parámetro h sino que también de los parámetros a y c , de hecho el parámetro cah juega un rol importante en el comportamiento de la función $n(\omega)$. Observemos que cómo $cah - \cos(\omega h)$ está acotada para todo $\omega \in \mathbb{R}_+$, se tiene que $n(\omega)$ es una función decreciente de ω .

A continuación analizaremos los siguientes tres casos posibles dependiendo del valor del parámetro cah .

Caso 1 ($cah > 1$).

En este caso, por un lado tenemos que $cah - \cos(\omega h) > 1 - \cos(\omega h) > 0$, lo que implica que

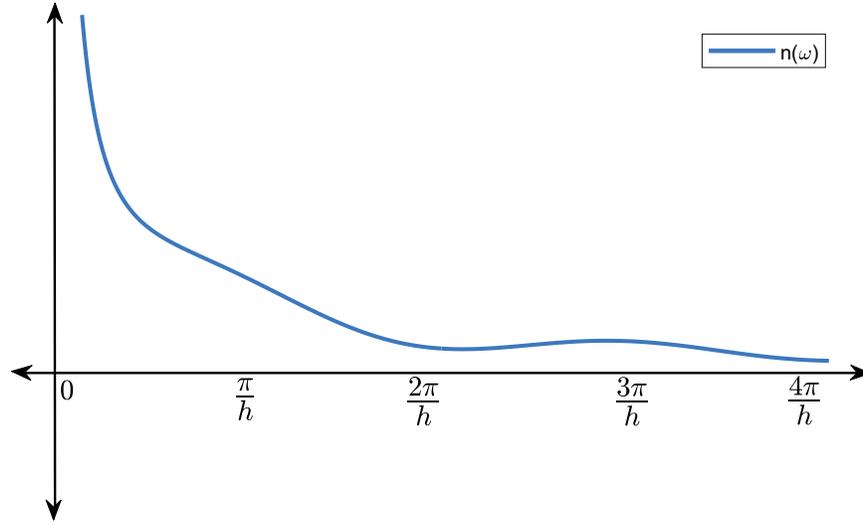


Figura 4.3: Representación gráfica de $n(\omega)$ con $cah > 1$ para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$.

$n(\omega) > 0$. Por otro lado, observemos que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} n(\omega) = +\infty.$$

Es decir, en este caso la función decreciente $n(\omega)$ es positiva, como se ilustra en la Figura 4.3.

Caso 2 ($cah = 1$).

En este caso, se tiene que $cah - \cos(\omega h) = 0$ cuando $\omega = \frac{2k\pi}{h}$, para $k = 0, 1, 2, \dots$, adicionalmente se tiene

$$n\left(\frac{(2k+1)\pi}{h}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{h}\right)}{(2k+1)\pi} = \frac{2}{(2k+1)\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Por otro lado, observese que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} n(\omega) = 0.$$

Así, en este caso la función decreciente $n(\omega)$ satisface que $n(\omega) > 0$, $\omega \neq \frac{2k\pi}{h}$ y $n(\omega) = 0$, cuando $\omega = \frac{2k\pi}{h}$, para $k = 0, 1, 2, \dots$, véase la Figura 4.4 donde se ilustra su comportamiento.

Caso 3 ($cah < 1$).

En este caso, existen valores $\omega_k \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$, tales que $cah - \cos(\omega h) = 0$, véase la Figura 4.5 y por lo tanto $n(\omega_k) = 0$, para $k = 0, 1, 2, \dots$

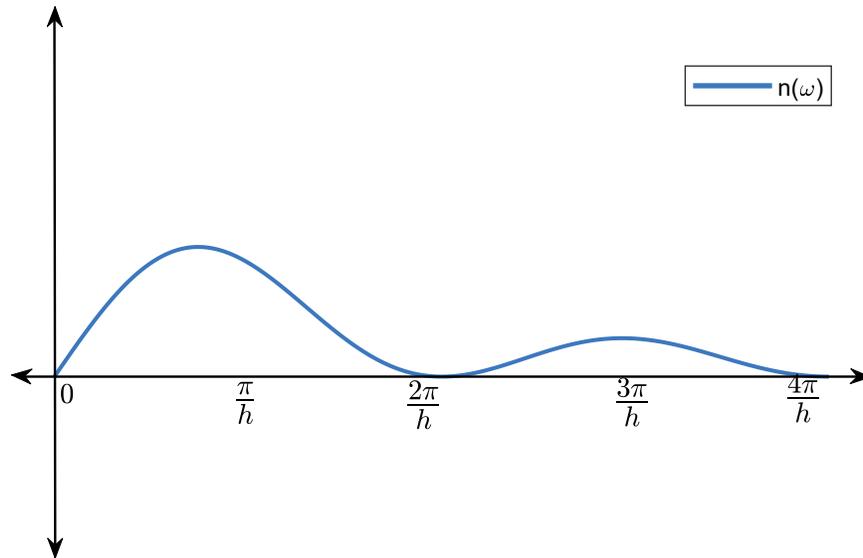


Figura 4.4: Representación gráfica de $n(\omega)$ con $cah = 1$ para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$.

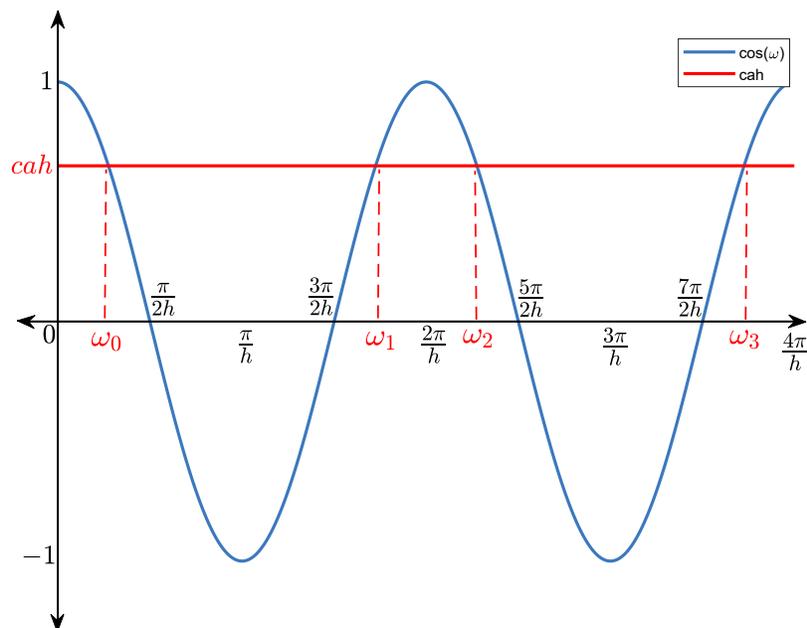


Figura 4.5: Representación gráfica de $cah < 1$ y $\cos(\omega h)$, para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$.

Por otro lado, observese que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} n(\omega) = -\infty.$$

Así, en este caso la función decreciente $n(\omega)$ toma valores positivos y negativos y su comportamiento es como se ilustra en la Figura 4.6.

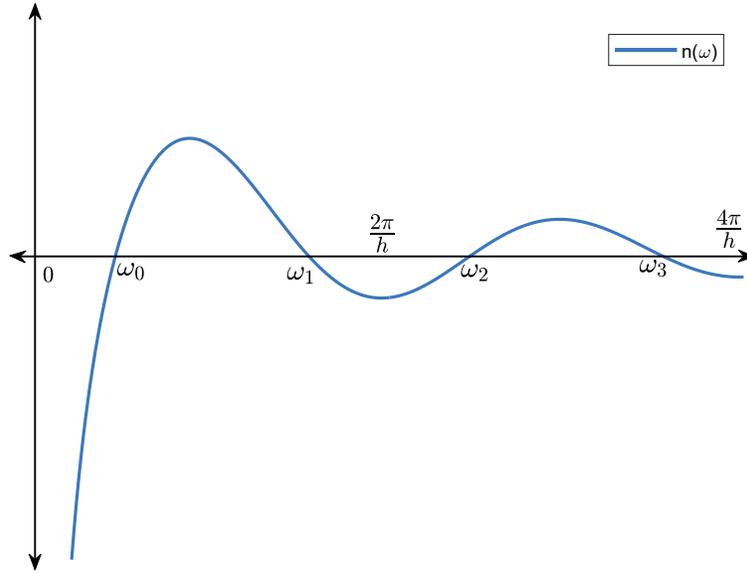


Figura 4.6: Representación gráfica de $n(\omega)$ con $cah < 1$ para $\omega \in (0, \frac{4\pi}{h})$.

En todos los casos, existen $\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, véase Figura 4.7, tales que

$$m(\omega_k^*) = n(\omega_k^*).$$

y por lo tanto

$$\left. \frac{d}{d\omega} [g(\omega)] \right|_{\omega=\omega_k^*} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Del análisis del caso 3, es decir, cuando $cah < 1$, se tiene que $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} n(\omega) = -\infty$, y por otro lado del hecho que $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} m(\omega) = -\infty$, podría ocurrir en principio que exista $\tilde{\omega} \in (0, \frac{\pi}{h})$, tal que $n(\tilde{\omega}) = m(\tilde{\omega})$.

Supongamos que existe tal $\tilde{\omega} \in (0, \frac{\pi}{h})$. Entonces

$$\frac{\sin(\tilde{\omega}h)}{\cos(\tilde{\omega}h) - 1} = \frac{cah - \cos(\tilde{\omega}h)}{\tilde{\omega}h}.$$

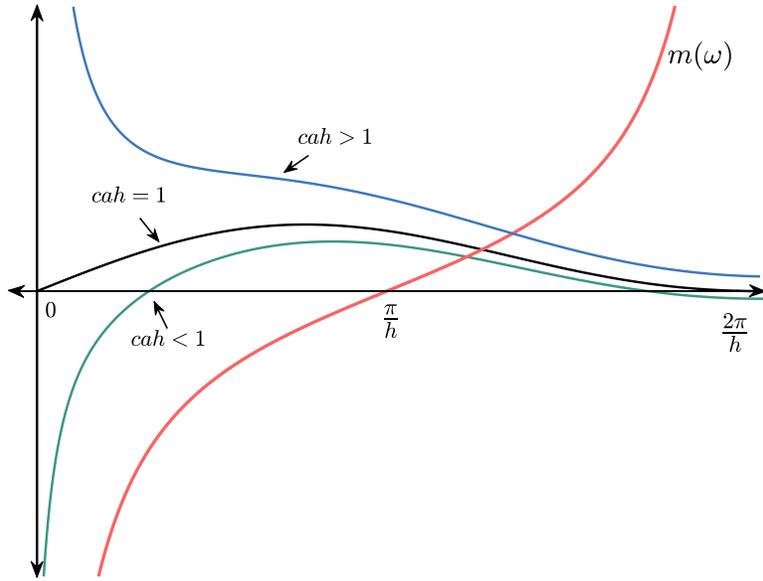


Figura 4.7: Representación gráfica de $m(\omega)$ y $n(\omega)$, para $\omega \in (0, \frac{2\pi}{h})$.

Se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}h \sin(\tilde{\omega}h) &= [\cos(\tilde{\omega}h) - 1] [cah - \cos(\tilde{\omega}h)] \\ &= cah \cos(\tilde{\omega}h) - \cos^2(\tilde{\omega}h) - cah + \cos(\tilde{\omega}h) \\ &= cah \cos(\tilde{\omega}h) - [1 - \sin^2(\tilde{\omega}h)] - cah + \cos(\tilde{\omega}h), \end{aligned}$$

o bien

$$\sin(\tilde{\omega}h) [\tilde{\omega}h - \sin(\tilde{\omega}h)] = [1 + cah] [\cos(\tilde{\omega}h) - 1]. \quad (4.11)$$

Como $\sin(\omega h) > 0$, $\omega h - \sin(\omega h) > 0$ y $\cos(\omega h) - 1 < 0$, para $\omega \in (0, \frac{\pi}{h})$, entonces la expresión (4.11) no se satisface, lo que contradice la existencia de $\tilde{\omega}$, tal que $n(\tilde{\omega}) = m(\tilde{\omega})$.

Recordemos que de (4.10) $\frac{d}{d\omega} [g(\omega)]$ está dada por

$$\frac{d}{d\omega} [g(\omega)] = \frac{\omega h}{\cos(\omega h) - 1} [m(\omega) - n(\omega)],$$

Observemos que en todos los casos se tiene que

$$m(\omega) < n(\omega), \quad \omega \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \omega_k^* \right),$$

y

$$m(\omega) > n(\omega), \quad \omega \in \left(\omega_k^*, \frac{(2k+2)\pi}{h} \right),$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Tomando en cuenta lo anterior y el hecho que $\cos(\omega h) - 1 < 0$ cuando $\omega \neq \frac{2k\pi}{h}$, se sigue que $\frac{d}{d\omega} [g(\omega)] > 0$ para $\omega \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \omega_k^* \right)$ y $\frac{d}{d\omega} [g(\omega)] < 0$ para $\omega \in \left(\omega_k^*, \frac{(2k+2)\pi}{h} \right)$. Por lo tanto, $g(\omega)$ tiene un máximo local en ω_k^* , para $k = 0, 1, 2, \dots$

Ahora mostraremos que bajo la condición (4.9) se tiene de hecho que

$$\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(4k+3)\pi}{2h} \right) \subset \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

Para lo anterior observemos que

$$n\left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}\right) = \frac{2cah}{(4k+3)\pi} \quad \text{y} \quad m\left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}\right) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Es claro que $n\left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}\right)$ es una secuencia decreciente de k . En el caso $k = 0$ tenemos $n\left(\frac{3\pi}{2h}\right) = \frac{2cah}{3\pi} \leq 1$, de modo que

$$n\left(\frac{(4k+3)\pi}{2h}\right) \leq n\left(\frac{3\pi}{2h}\right) \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Como $m(\omega)$ es creciente mientras que $n(\omega)$ es decreciente para $\omega \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h} \right)$, se sigue que $\omega_k^* \leq \frac{(4k+3)\pi}{2h}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, lo que muestra (4.12).

Observando que de $m(\omega_k^*) = n(\omega_k^*)$ se tiene

$$\cos(\omega_k^* h) - 1 = \frac{\omega_k^* h \sin(\omega_k^* h)}{cah - \cos(\omega_k^* h)},$$

entonces $g(\omega_k^*) = \frac{c^2 a^2}{\omega_k^{*2}} + p(\omega_k^*)$, donde

$$p(\omega_k^*) = \frac{\cos(\omega_k^* h)}{\omega_k^* h \sin(\omega_k^* h)} [ca(\omega_k^* h - \sin(\omega_k^* h)) - \omega_k^* h \cos(\omega_k^* h)].$$

Como $\omega_k^* h - \sin(\omega_k^* h) > 0$, $\cos(\omega_k^* h) < 0$ y $\sin(\omega_k^* h) < 0$, para $\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(4k+3)\pi}{2h}\right)$, con $k = 0, 1, 2, \dots$, entonces $p(\omega_k^*) > 0$. Se sigue que

$$g(\omega_k^*) \geq \frac{c^2 a^2}{\omega_k^*}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

De (4.9) se tiene que $c \geq 1$, lo que implica

$$g(\omega_k^*) \geq \frac{a^2}{\omega_k^*}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

lo que termina la demostración. ■

Proposición 4.1

Considere $h, a, c \in \mathbb{R}_+$, satisfaciendo las desigualdades

$$1 \leq c \leq \frac{3\pi}{2ah} \quad \text{y} \quad c > (\sqrt{2} + 1)^2 ah. \quad (4.13)$$

Entonces todas las raíces de $Q(s)$, dado por (4.5), tienen parte real negativa si y sólo si el par (b_1, b_2) pertenece a la región Γ , véase Figura 4.8, cuya frontera en el espacio de parámetros (b_1, b_2) está dada por

$$\partial\Gamma = \{(b_1(\omega), b_2(\omega)) : \omega \in (0, \hat{\omega})\} \cup \{(b_1, b_2) = (-a^2, b_2), b_2 \in (b_2(0), b_2(\hat{\omega}))\}, \quad (4.14)$$

donde $b_1(\omega)$ y $b_2(\omega)$ están dados por

$$b_1(\omega) = ca\omega \sin(\omega h) + (\omega^2 - a^2) \cos(\omega h), \quad (4.15)$$

$$b_2(\omega) = \frac{1}{\omega} [(\omega^2 - a^2) \sin(\omega h) - ca\omega \cos(\omega h)], \quad (4.16)$$

mientras que $\hat{\omega}$ es la solución de la ecuación

$$\frac{a^2}{\omega} = \frac{ca \sin(\omega h) + \omega \cos(\omega h)}{\cos(\omega h) - 1}, \quad \omega \left(0, \frac{\pi}{h}\right). \quad (4.17)$$

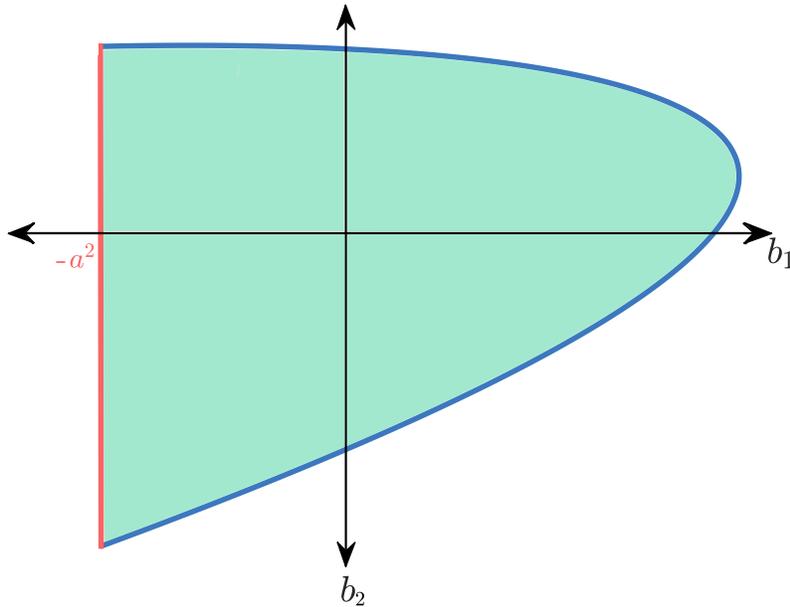


Figura 4.8: Region de estabilidad Γ .

Demostración.-

Observemos que $s = 0$ es una raíz de $Q(s)$, si y sólo si $b_1 = -a^2$. Ahora supongamos que $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, es una raíz de $Q(s)$, es decir

$$(i\omega)^2 + cai\omega + a^2 + b_1e^{-hi\omega} + b_2(i\omega)e^{-hi\omega} = 0.$$

Usando la identidad de Euler $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i\sin(\omega)$ y separando la parte real e imaginaria en la ecuación anterior obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-\omega^2 + a^2 + b_1 \cos(\omega h) + b_2 \omega \sin(\omega h) = 0, \quad (4.18)$$

$$ca\omega - b_1 \sin(\omega h) + b_2 \omega \cos(\omega h) = 0. \quad (4.19)$$

Resolviendo (4.18) y (4.19) para b_1 y b_2 obtenemos la parametrización dada por (4.15)-(4.16). Observemos que la parametrización (4.15)-(4.16) está bien definida para toda $\omega \in \mathbb{R}_+$. De hecho (4.16) está bien definida para $\omega = 0$ aunque involucre el factor $\frac{1}{\omega}$, debido a que por L'Hopital

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow 0^+} b_2(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} [(2\omega + cah) \sin(\omega h) + (h(\omega^2 - a^2) - ca) \cos(\omega h)] \\
 &= -a^2 h - ca \\
 &= \lim_{\omega \rightarrow 0^-} b_2(\omega)
 \end{aligned}$$

Así, $b_2(\omega)$ está bien definida en $\omega = 0$, y $b_2(0) \triangleq -a^2 h - ca$, mientras que $b_1(0) = -a^2$. La parametrización (4.15)-(4.16) define una curva continua en el espacio de parámetros (b_1, b_2) . Para cada par (b_1, b_2) sobre la curva, el cuasipolinomio tiene un par de raíces imaginarias puras. Como $b_1(0) = -a^2$, se sigue que la curva interseca la recta $b_1 + a^2 = 0$, en el punto $(b_1(0), b_2(0)) = (-a^2, -a^2 h - ca)$. Para determinar explícitamente las intersecciones de la curva para $\omega \neq 0$, buscamos soluciones de la ecuación $b_1(\omega) = -a^2$, es decir, soluciones de la ecuación

$$p(\omega) = g(\omega), \quad (4.20)$$

donde $g(\omega)$ está dada en el Lema 4.1 y

$$p(\omega) = \frac{a^2}{\omega}. \quad (4.21)$$

Bajo las hipótesis sobre los parámetros $1 \leq c \leq \frac{3\pi}{2ah}$, se sigue del Lema 4.1 que existen

$$\omega_k^* \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{h}, \frac{(4k+3)\pi}{2h} \right),$$

tales que $g(\omega_k^*) > p(\omega_k^*) > 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Como $g(\omega_k^*)$ es un máximo local de $g(\omega)$ en el intervalo $\left(\frac{2k\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h} \right)$ se sigue que $g(\omega)$ es creciente para $\omega \in \left(\frac{2k\pi}{h}, \omega_k^* \right)$ y decreciente para $\omega \in \left(\omega_k^*, \frac{(2k+2)\pi}{h} \right)$. Por otro lado, la función $p(\omega)$ es estrictamente positiva y decreciente para toda $\omega \in \mathbb{R}_+$.

Se sigue entonces que existen $\hat{\omega}_{k,0}$ y $\hat{\omega}_{k,1}$ satisfaciendo

$$\frac{(4k+1)\pi}{2h} < \hat{\omega}_{k,0} < \frac{(2k+1)\pi}{h} < \omega_k^* < \hat{\omega}_{k,1} < \frac{(2k+2)\pi}{h},$$

tales que $g(\hat{\omega}_{k,j}) = p(\hat{\omega}_{k,j})$, para $k = 0, 1, 2, \dots$, y $j = 0, 1$, véase la Figura 4.9.

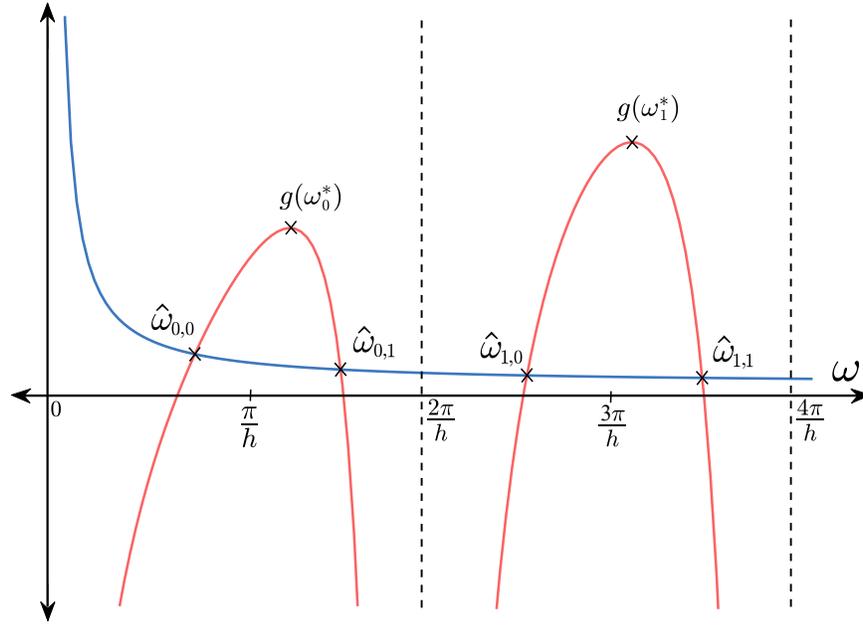


Figura 4.9: Gráfica de $g(\omega)$ y $p(\omega)$, ilustrando la existencia de soluciones $\hat{\omega}_{k,j}$ para el intervalo $(0, \frac{4\pi}{h})$.

En otras palabras, en cada intervalo $(\frac{2k\pi}{h}, \frac{(2k+2)\pi}{h})$ existen un par de soluciones de la ecuación (4.20), lo que significa que la curva determinada por la parametrización (4.15)-(4.16) interseca la recta $b_1 + a^2 = 0$ un número infinito de veces.

Para determinar los valores de $b_2(\hat{\omega}_{k,j})$ observemos que de $g(\hat{\omega}_{k,j}) = p(\hat{\omega}_{k,j})$, se tiene

$$(\hat{\omega}_{k,j}^2 - a^2) = \frac{-a^2 - ca\hat{\omega}_{k,j} \sin(\hat{\omega}_{k,j}h)}{\cos(\hat{\omega}_{k,j}h)}.$$

Utilizando esta igualdad obtenemos

$$b_2(\hat{\omega}_{k,j}) = \frac{-a[a \sin(\hat{\omega}_{k,j}h) + c\hat{\omega}_{k,j}]}{\hat{\omega}_{k,j} \cos(\hat{\omega}_{k,j}h)}, \quad \forall k, j = 0, 1. \quad (4.22)$$

La expresión (4.22) determina el valor de b_2 en el cruce con la recta $b_1 + a^2 = 0$.

Analicemos los valores de $b_2(\hat{\omega}_{k,0})$. Como $\hat{\omega}_{k,0} \in (\frac{(4k+1)\pi}{2h}, \frac{(2k+1)\pi}{h})$ se tiene que $\sin(\hat{\omega}_{k,0}h) > 0$ y $\cos(\hat{\omega}_{k,0}h) < 0$ y por lo tanto $b_2(\hat{\omega}_{k,0}) > 0$.

Del análisis de las soluciones de (4.20), es decir, $g(\omega) = p(\omega)$ se sigue $\hat{\omega}_{k,0} \rightarrow \frac{(4k+1)\pi}{2h}$ cuando $\omega \rightarrow \infty$, entonces

$$-1 < \cos(\hat{\omega}_{k,0}h) < \cos(\hat{\omega}_{(k+1),0}h) < 0. \quad (4.23)$$

Observemos que

$$b_2(\hat{\omega}_{k,0}) > q(\hat{\omega}_{k,0}) \triangleq \frac{-ac}{\cos(\hat{\omega}_{k,0}h)} > 0,$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. De (4.23) se tiene que

$$q(\hat{\omega}_{(k+1),0}) = \frac{-ac}{\cos(\hat{\omega}_{(k+1),0}h)} > \frac{-ac}{\cos(\hat{\omega}_{k,0}h)} = q(\hat{\omega}_{k,0}),$$

es decir, $q(\hat{\omega}_{k,0})$ es creciente lo que implica que $b_2(\hat{\omega}_{k,0})$ es creciente para $k = 0, 1, 2, \dots$

Ahora analizaremos los valores de $b_2(\hat{\omega}_{k,1})$. Observemos que

$$p\left(\frac{3\pi}{2h} + \frac{2k\pi}{h}\right) = \frac{2a^2h}{(4k+3)\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$g\left(\frac{3\pi}{2h} + \frac{2k\pi}{h}\right) = ca, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Como $1 \leq c \leq \frac{3\pi}{2ah}$, las siguientes desigualdades se satisfacen

$$c \geq 1 \geq \frac{1}{c} \geq \frac{2ah}{3\pi}.$$

Entonces

$$g\left(\frac{3\pi}{2h} + \frac{2k\pi}{h}\right) = ca \geq \frac{2a^2h}{3\pi} = p\left(\frac{3\pi}{2h}\right) \geq p\left(\frac{3\pi}{2h} + \frac{2k\pi}{h}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Del comportamiento decreciente de $g(\omega)$ y $p(\omega)$ para $\omega \in \left(\omega_k^*, \frac{(2k+2)\pi}{h}\right)$ se sigue que

$$\hat{\omega}_{k,1} \geq \frac{3\pi}{2h} + \frac{2k\pi}{h}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Por otro lado

$$p\left(\frac{7\pi}{4h} + \frac{2k\pi}{h}\right) = \frac{4a^2h}{(8k+7)\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$\begin{aligned} g\left(\frac{7\pi}{4h} + \frac{2k\pi}{h}\right) &= \frac{ca\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{7\pi}{4h} + \frac{2k\pi}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1} \\ &= \left[\sqrt{2} + 1\right] \left[ca - \left(\frac{7\pi}{4h} + \frac{2k\pi}{h}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Como $ca \leq \frac{3\pi}{2ah}$, entonces $ca - \left(\frac{7\pi}{4h} + \frac{2k\pi}{h}\right) < ca - \frac{7\pi}{4h} < 0$. Así, $p\left(\frac{7\pi}{4h} + \frac{2k\pi}{h}\right) > 0$ y $g\left(\frac{7\pi}{4h} + \frac{2k\pi}{h}\right) < 0$, para toda $k = 0, 1, 2, \dots$, y en consecuencia

$$\hat{\omega}_{k,1} \leq \frac{7\pi}{4h} + \frac{2k\pi}{h}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En conclusión $\hat{\omega}_{k,1}$ satisface las siguientes desigualdades

$$\frac{3\pi}{2h} + \frac{2k\pi}{h} \leq \hat{\omega}_{k,1} \leq \frac{7\pi}{4h} + \frac{2k\pi}{h}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Entonces de (4.25) se tiene que

$$0 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) < \cos(\hat{\omega}_{k,1}h) < \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.26)$$

y

$$-1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) < \sin(\hat{\omega}_{k,1}h) < \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}. \quad (4.27)$$

De (4.26) se sigue que

$$\cos(\hat{\omega}_{k,1}h) - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}} - 1, \quad (4.28)$$

y

$$-h \cos(\hat{\omega}_{k,1}h) > -\frac{h}{\sqrt{2}}. \quad (4.29)$$

De la desigualdad $x > \sin(x) > -x$, para $x > 0$, se tiene que

$$h > \frac{\sin(\hat{\omega}_{k,1}h)}{\hat{\omega}_{k,1}} > -h. \quad (4.30)$$

Entonces, de (4.29) y (4.30) la desigualdad

$$a \left(\frac{\sin(\hat{\omega}_{k,1}h)}{\hat{\omega}_{k,1}} - h \cos(\hat{\omega}_{k,1}h) \right) > a \left(-h - \frac{h}{\sqrt{2}} \right) = -ah \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (4.31)$$

se satisface para $k = 0, 1, 2, \dots$. La condición $c > \left(\sqrt{2} + 1 \right)^2 ah$ es equivalente a

$$c \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) < -ah \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (4.32)$$

Luego, de (4.28), (4.31) y (4.32) se tiene que

$$c (\cos(\hat{\omega}_{k,1}h) - 1) < a \left(\frac{\sin(\hat{\omega}_{k,1}h)}{\hat{\omega}_{k,1}} - h \cos(\hat{\omega}_{k,1}h) \right).$$

Como $\cos(\hat{\omega}_{k,1}h) > 0$ y $a > 0$, entonces

$$\frac{ca}{\cos(\hat{\omega}_{k,1}h)} [\cos(\hat{\omega}_{k,1}h) - 1] < \frac{a^2}{\cos(\hat{\omega}_{k,1}h)} \left[\frac{\sin(\hat{\omega}_{k,1}h)}{\hat{\omega}_{k,1}} - h \cos(\hat{\omega}_{k,1}h) \right],$$

o equivalentemente

$$b_2(\hat{\omega}_{k,1}) = \frac{-a [a \sin(\hat{\omega}_{k,1}h) + c \hat{\omega}_{k,1}]}{\hat{\omega}_{k,1} \cos(\hat{\omega}_{k,1}h)} < -a^2 h - ca = b_2(0).$$

Así, bajo la condición sobre los parámetros a, c y h se satisface que $b_2(\hat{\omega}_{k,1}) < b_2(0)$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Ahora del análisis de las soluciones de $g(\omega) = p(\omega)$ se sigue que $\hat{\omega}_{k,1} \rightarrow \frac{3\pi}{2h} + \frac{2\pi}{h}$ cuando $\omega \rightarrow \infty$. Por consiguiente se tiene

$$0 < \cos(\hat{\omega}_{(k+1),1}h) < \cos(\hat{\omega}_{k,1}h) < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.33)$$

De (4.30), es decir

$$\frac{\sin(\hat{\omega}_{k,1}h)}{\hat{\omega}_{k,1}} > -h$$

se tiene que la expresión

$$-\frac{a^2}{\cos(\hat{\omega}_{k,1}h)} \left(\frac{\sin(\hat{\omega}_{k,1}h)}{\hat{\omega}_{k,1}} \right) < \frac{a^2 h}{\cos(\hat{\omega}_{k,1}h)},$$

se satisface para $k = 0, 1, 2, \dots$, y por tanto

$$\begin{aligned} b_2(\hat{\omega}_{k,1}) &< \frac{a^2 h}{\cos(\hat{\omega}_{k,1} h)} - \frac{ac}{\cos(\hat{\omega}_{k,1} h)} \\ &= \frac{a}{\cos(\hat{\omega}_{k,1} h)} (ah - c). \end{aligned}$$

Como $c > (\sqrt{2} + 1)^2 ah$ se tiene que $ah - c < 0$. Definamos $r(\hat{\omega}_{k,1}) = \frac{a(ah-c)}{\cos(\hat{\omega}_{k,1} h)}$. Entonces de (4.33) se tiene que

$$r(\hat{\omega}_{(k+1),1}) = \frac{a(ah-c)}{\cos(\hat{\omega}_{(k+1),1} h)} < \frac{a(ah-c)}{\cos(\hat{\omega}_{k,1} h)} = r(\hat{\omega}_{k,1})$$

De modo que la secuencia $r(\hat{\omega}_{k,1})$ es decreciente, lo que implica que $b_2(\hat{\omega}_{k,1})$ es también decreciente.

Con el análisis anterior de la curva continua definida por la parametrización (4.15)-(4.16) y sus intersecciones con la recta $b_1 + a^2 = 0$, bajo las condiciones de los parámetros, podemos determinar las regiones Ψ_j , $j = 0, 1, \dots$, véase la Figura 4.10.

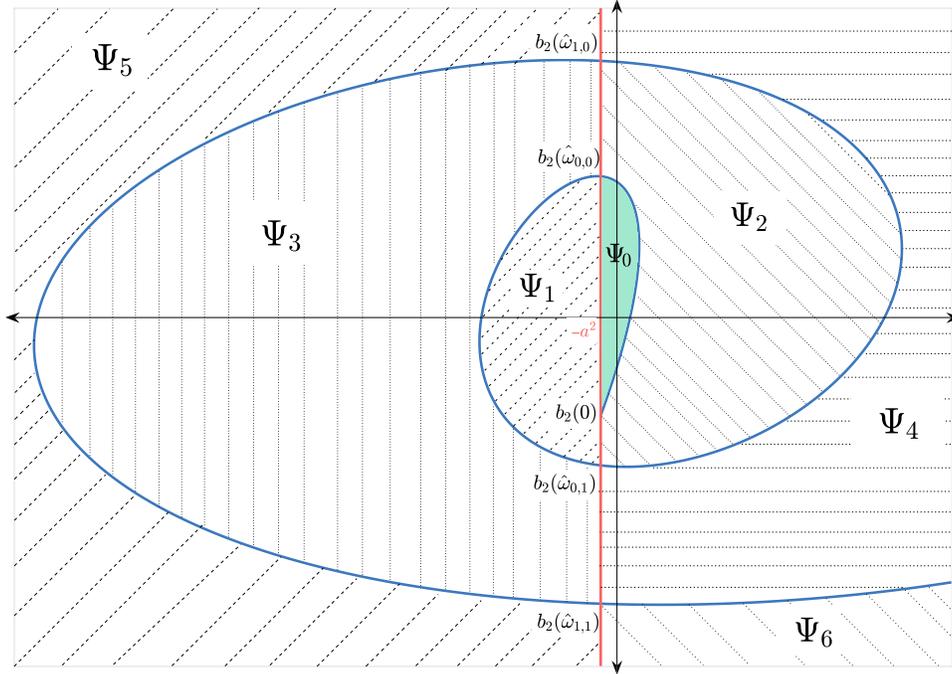


Figura 4.10: Partición del espacio de parámetros (b_1, b_2) .

Para todo par (b_1, b_2) en cada una de las regiones Ψ_j se tiene la propiedad que el cuasipolinomio correspondiente $Q(s)$ posee el mismo número de raíces con parte real positiva y buscamos aquella región donde $Q(s)$ no tiene raíces con parte real positiva, es decir, la región de estabilidad.

Usando el criterio de estabilidad de Mikhailov se demuestra que para todo (b_1, b_2) dentro de la región $\Gamma = \Psi_0$, cuya frontera está determinada por la curva definida por (4.15)-(4.16) para $\omega \in [0, \hat{\omega}_{0,0}]$ y el segmento $(b_1, b_2) = (-a^2, b_2)$ con $b_2 \in (b_2(0), b_2(\hat{\omega}_{0,0}))$ es la región de estabilidad, lo que termina la demostración. ■

4.2. Diseño del DR

Recordemos que el objetivo del “Delayed Resonator” (DR) es diseñar las ganancias g_1, g_2 y el retardo $h > 0$, tales que el sistema (4.1) en lazo cerrado con la ley de control (4.2), es decir,

$$m_a \ddot{x}_a(t) + c_a \dot{x}_a(t) + k_a x_a(t) + g_1 x_a(t-h) + g_2 \dot{x}_a(t-h) = 0, \quad (4.34)$$

tenga soluciones oscilatorias a una frecuencia deseada. Recordemos también que el sistema (4.34) se puede reescribir como

$$\ddot{x}_a(t) + 2\zeta_a \omega_a \dot{x}_a(t) + \omega_a^2 x_a(t) + b_1 x_a(t-h) + b_2 \dot{x}_a(t-h) = 0, \quad (4.35)$$

donde $\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$ es la frecuencia natural, $\zeta_a = \frac{c_a}{2m_a \omega_a}$ es el factor de amortiguamiento, con $b_1 = \frac{g_1}{m_a}$ y $b_2 = \frac{g_2}{m_a}$.

La Proposición 4.1 proporciona condiciones necesarias y suficientes sobre las ganancias b_1 y b_2 garantizando la estabilidad exponencial del sistema

$$\ddot{x}_a(t) + c \dot{x}_a(t) + a^2 x_a(t) + b_1 x_a(t-h) + b_2 \dot{x}_a(t-h) = 0, \quad (4.36)$$

para los parámetros $a, c, h \in \mathbb{R}_+$, satisfaciendo

$$1 \leq c \leq \frac{3\pi}{2ah} \quad \text{y} \quad c > (\sqrt{2} + 1)^2 ah, \quad (4.37)$$

Es claro que (4.34) es un caso particular de (4.36) con $a = \omega_a$ y $c = 2\zeta_a$. Debido a que las condiciones necesarias y suficientes de la Proposición 4.1 proveen una parametrización de la frontera de la región de estabilidad, es posible utilizar este resultado para diseñar el comportamiento DR del sistema (4.36) y por consiguiente del sistema (4.34).

De forma más precisa, la frontera de la región de estabilidad Γ , determinada por la parametrización

$$\begin{aligned} b_1(\omega) &= c\omega \sin(\omega h) + (\omega^2 - a^2) \cos(\omega h), \\ b_2(\omega) &= \frac{1}{\omega} [(\omega^2 - a^2) \sin(\omega h) - c\omega \cos(\omega h)], \end{aligned}$$

cuando ω varia en el intervalo $(0, \hat{\omega})$, donde $\hat{\omega}$ es la solución de la ecuación

$$\frac{a^2}{\omega} = \frac{c\omega \sin(\omega h) + \omega \cos(\omega h)}{\cos(\omega h) - 1}, \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right),$$

nos permite diseñar un comportamiento DR para (4.36). Esto debido a que para todo $(b_1(\omega), b_2(\omega)) \in \partial\Gamma$ se tiene que el cuasipolinomio correspondiente al sistema (4.36) tiene un par de raíces imaginarias puras $s = \pm i\omega$ para $\omega \in (0, \hat{\omega})$ y las otras raíces se encuentran en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo. Está ubicación de las raíces implica que el sistema (4.36) tenga soluciones oscilatorias a una frecuencia ω .

Es claro que lo anterior implica que el rango de frecuencias donde es posible diseñar el comportamiento DR está restringido al intervalo $(0, \hat{\omega})$. Por otro lado, el resultado de la Proposición 4.1 impone la siguiente restricción sobre la clase de sistemas (4.34) a la cual se les puede inducir un comportamiento DR, es decir, bajo las hipótesis en los parámetros se tiene

$$c = 2\zeta_a \geq 1 \Leftrightarrow \zeta_a \geq \frac{1}{2}. \quad (4.38)$$

Si bien la restricción $\zeta_a \geq \frac{1}{2}$ limita la clase de sistemas, es lo suficientemente general para considerar los tres casos característicos de sistemas de segundo orden:

- a) Subamortiguado para $\zeta_a \in [\frac{1}{2}, 1)$.
- b) Criticamente amortiguado $\zeta_a = 1$.
- c) Sobreamortiguado $\zeta_a > 1$.

En lo siguiente consideramos aquellos sistemas (4.34) que satisfacen la condición (4.38).

Con base a lo anterior se propone el siguiente procedimiento de diseño para el comportamiento DR:

- 1) Dados m_a, k_a y $c_a \in \mathbb{R}_+$, determinar

$$a = \omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}} \quad \text{y} \quad c = 2\zeta_a = \frac{c_a}{m_a \omega_a}.$$

- 2) Seleccionar el valor de h satisfaciendo la desigualdad

$$h \leq \min \left\{ \frac{3\pi}{2ac}, \frac{c}{(\sqrt{2}+1)^2 ac} \right\}. \quad (4.39)$$

- 3) Calcular la frecuencia $\hat{\omega}$ como solución numérica de la ecuación

$$\frac{a^2}{\omega} = \frac{ca \sin(\omega h) + \omega \cos(\omega h)}{\cos(\omega h) - 1}, \quad \omega \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right). \quad (4.40)$$

- 4) Seleccionar la frecuencia deseada de oscilación $\omega_d \in (0, \hat{\omega})$ para el DR.

- 5) Calcular las ganancias b_1 y b_2 mediante las siguientes expresiones:

$$b_1 \triangleq b_1(\omega_d) = ca\omega_d \sin(\omega_d h) + (\omega_d^2 - a^2) \cos(\omega_d h),$$

$$b_2 \triangleq b_2(\omega_d) = \frac{1}{\omega_d} [(\omega_d^2 - a^2) \sin(\omega_d h) - ca\omega_d \cos(\omega_d h)],$$

- 6) Calcular las ganancias de retroalimentación $g_1 = b_1 m_a$ y $g_2 = b_2 m_a$.

Para ilustrar de mejor manera los resultados obtenidos y el método de diseño propuesto mostraremos algunos ejemplos numéricos. Para todos los ejemplos numéricos se utilizarán los valores de $m_a = 1$ kg, $k_a = 4$ N/m, obteniendo una frecuencia natural $\omega_a = 2$ rad/s. Recordemos que los valores de $b_1 = \frac{g_1}{m_a}$ y $b_2 = \frac{g_2}{m_a}$ están definidos por las ganancias de retroalimentación introducidas al sistema, de modo que en este caso dado el valor de la masa del sistema m_a , se tiene que las ganancias $g_1 = b_1$ y $g_2 = b_2$.

Ejemplo 1 ($\zeta_a < 1$).

Considerando un coeficiente de amortiguamiento $c_a = 3 \text{ Ns/m}$, obtenemos el factor de amortiguamiento $\zeta_a = 0.75$, es decir el caso subamortiguado. Calculamos los valores de $a = 2$ y $c = 1.5$, de modo que la condición (4.39) toma la siguiente forma

$$h \leq \min \{0.1098 \text{ s}, 1.5708 \text{ s}\}.$$

Consideremos $h = 0.1 \text{ s}$. Luego, mediante cálculos numéricos obtenemos la solución de (4.40)

$$\hat{\omega} \approx 17.5523 \text{ rad/s}.$$

En la Figura 4.11 podemos observar la región de estabilidad que se genera en el espacio de parámetros (b_1, b_2) para los valores de a, c y h dados. Así, la frecuencia de oscilación ω_d para el DR se puede escoger en el intervalo $(0, 17.55)$ rad/s. Seleccionemos la frecuencia deseada de oscilación $\omega_{d_1} = 5$ rad/s, la cual está en el rango permitido de frecuencias, de modo que podemos obtener las ganancias $g_1 = b_1 = 25.6206 \text{ N/m}$ y $g_2 = b_2 = -0.6192 \text{ N/m}$ (véase Figura 4.11). En la Figura 4.12 se gráfica la respuesta en el tiempo del absorbedor de vibraciones retardado, donde apreciamos que su comportamiento es oscilatorio.

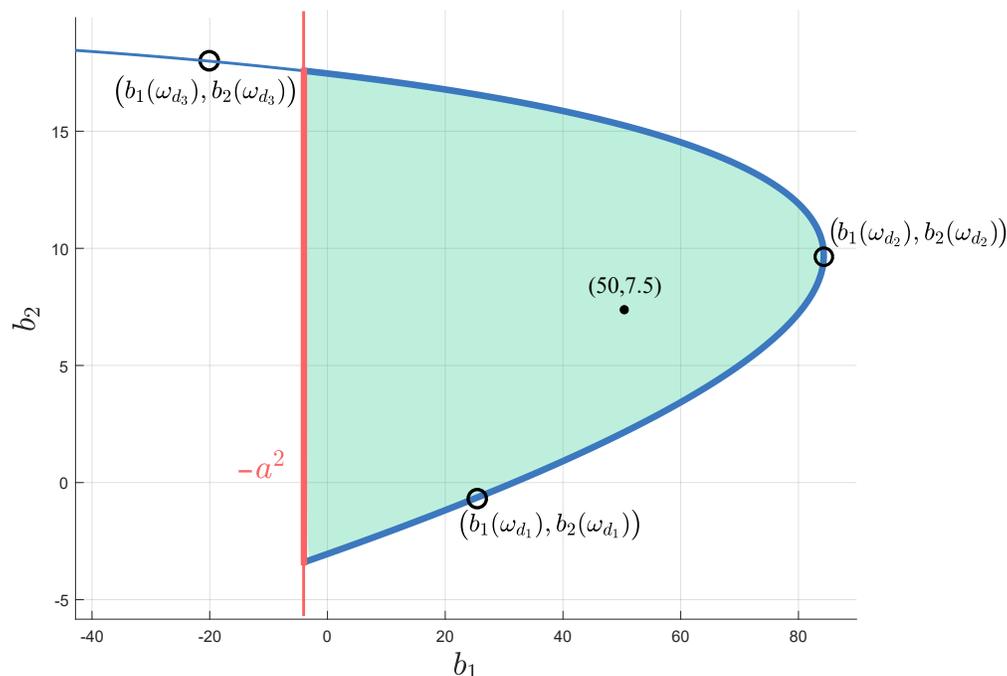


Figura 4.11: Región de estabilidad en el espacio (b_1, b_2) , en donde se muestra las ganancias $b_1(\omega_{d_j})$ y $b_2(\omega_{d_j})$ para las frecuencias de oscilación $\omega_{d_1} = 5$ rad/s, $\omega_{d_2} = 12$ rad/s y $\omega_{d_3} = 18$ rad/s.

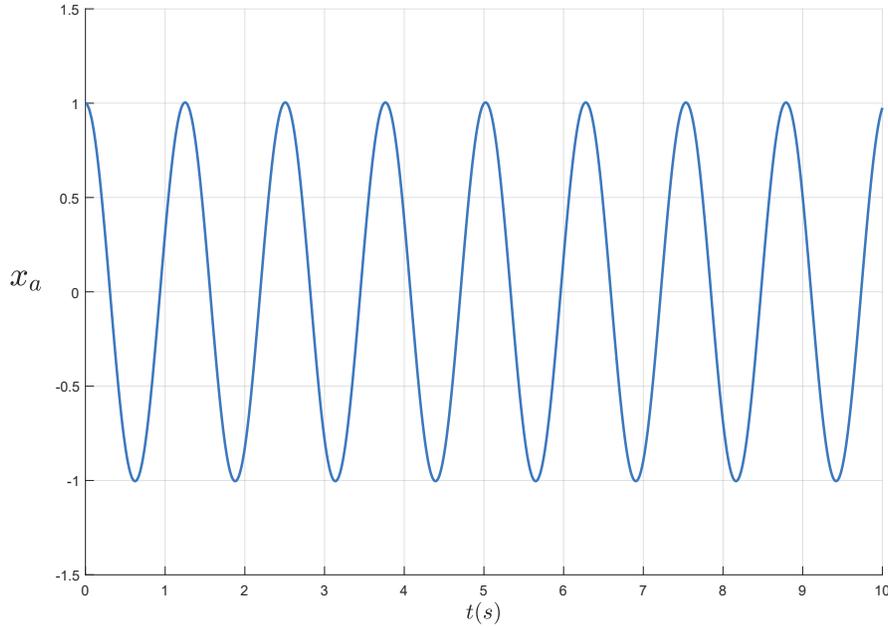


Figura 4.12: Respuesta en el tiempo del DR para los valores de g_1 y g_2 con $\omega_{d_1} = 5$ rad/s y las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

Una de las ventajas del absorbedor retardado de vibraciones es que se pueden escoger distintas frecuencias de oscilación, siempre y cuando $\omega_d \in (0, \hat{\omega})$. De esta manera elijamos ahora la frecuencia deseada de oscilación $\omega_{d_2} = 12$ rad/s, la cual está en el rango permitido de frecuencias en la región de estabilidad (véase Figura 4.11), de modo que podemos obtener las ganancias $g_1 = b_1 = 84.2835$ N/m y $g_2 = b_2 = 9.7867$ N/m. En la Figura 4.13 se gráfica la respuesta en el tiempo del sistema (4.34), donde apreciamos que su comportamiento es oscilatorio.

Elijamos ahora $\omega_{d_3} = 18$ rad/s, la cual ya no forma parte del rango permitido de frecuencias, teniendo que $g_1 = b_1 = -20.1169$ N/m y $g_2 = b_2 = 17.9945$ N/m. En la Figura 4.11 podemos observar la región de estabilidad que se genera en el espacio (b_1, b_2) , donde estos valores de ganancias b_1 y b_2 no forman parte de la región de estabilidad, mientras que en la Figura 4.14 se gráfica la respuesta en el tiempo del sistema (4.34), donde apreciamos que su comportamiento es inestable.

Es claro ver que si se eligen valores ω_d tales que las ganancias b_1 y b_2 están fuera de la frontera de estabilidad $\partial\Gamma$, entonces la respuesta en el tiempo del sistema (4.34) será inestable. Por otro lado, la Proposición 4.1 establece que al elegir valores de b_1 y b_2 dentro de la región de estabilidad Γ , la respuesta en el tiempo del sistema (4.34) será exponencialmente estable. De esta manera elijamos los valores $(b_1, b_2) = (50, 7.5)$ N/m los cuales pertenecen a la región de estabilidad Γ (véase Figura 4.11). En la Figura 4.15 podemos apreciar la respuesta en el tiempo del sistema

(4.34) donde su comportamiento es estable.

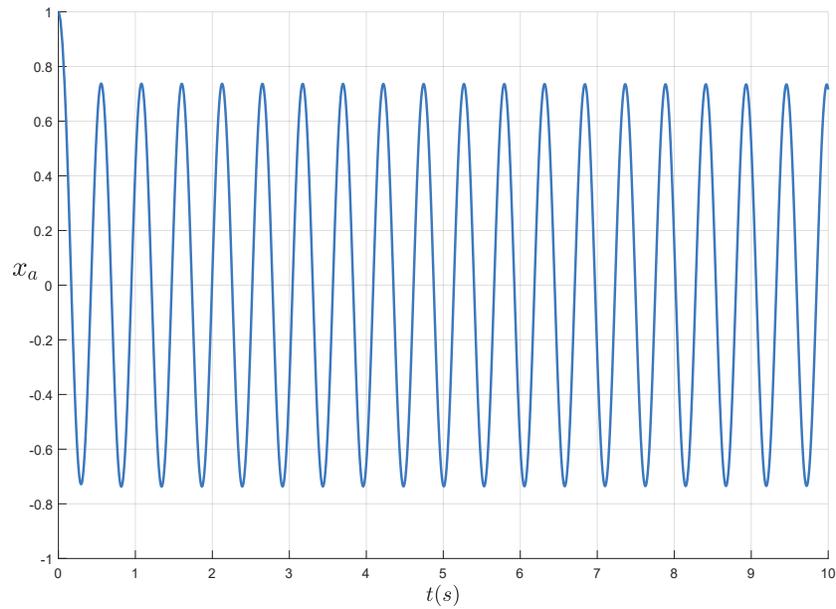


Figura 4.13: Respuesta en el tiempo del DR para los valores de g_1 y g_2 con $\omega_{d_2} = 12$ rad/s y las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

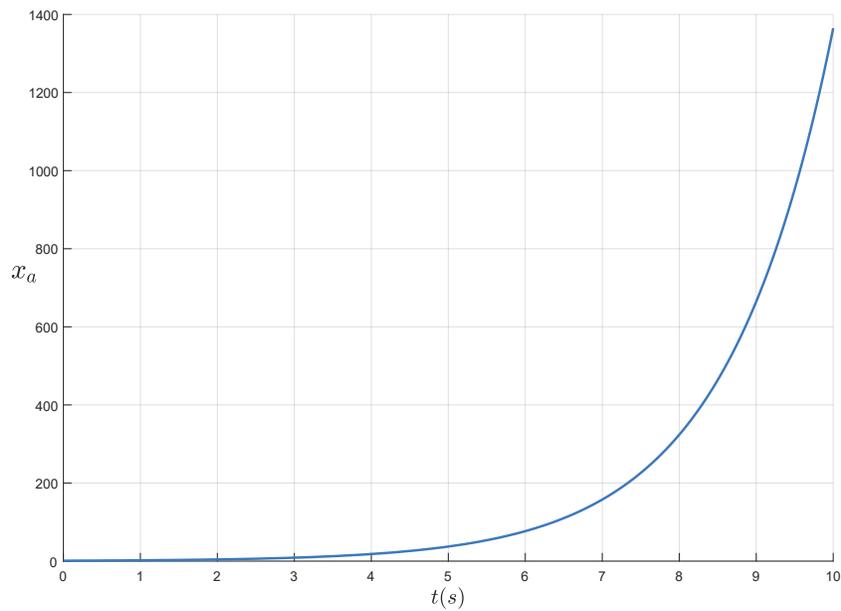


Figura 4.14: Respuesta en el tiempo del DR para los valores de g_1 y g_2 con $\omega_{d_3} = 18$ rad/s y las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

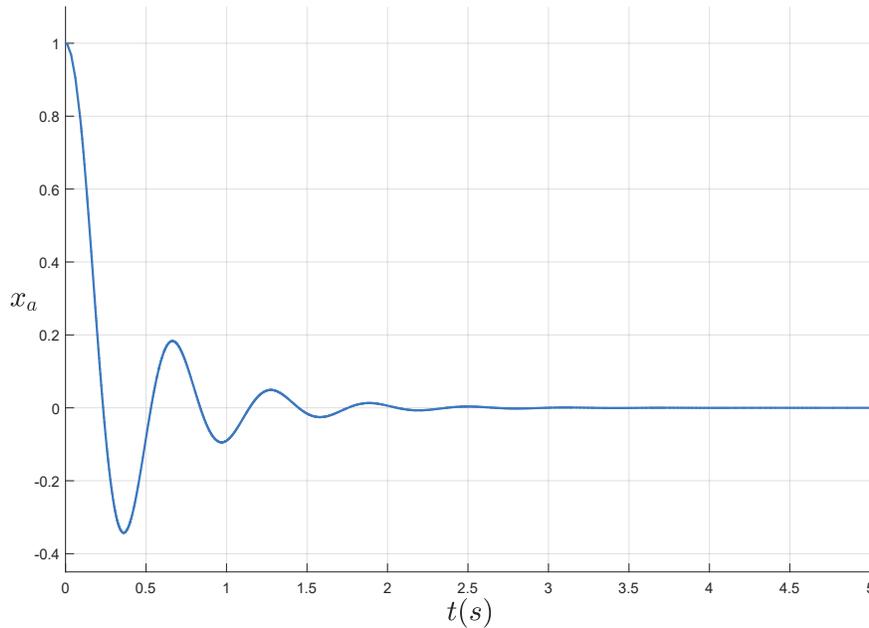


Figura 4.15: Respuesta en el tiempo del DR para los valores de $g_1 = 50 \text{ N/m}$ y $g_2 = 7.5 \text{ N/m}$, con condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

Ejemplo 2 ($\zeta_a > 1$).

Como analizamos la condición en el factor de amortiguamiento del absorbedor ζ_a es lo suficientemente general para considerar los tres casos característicos de sistemas de segundo orden. Así, analicemos ahora el caso sobreamortiguado, es decir $\zeta_a > 1$. Considerando un coeficiente de amortiguamiento $c_a = 5 \text{ Ns/m}$, obtenemos el factor de amortiguamiento $\zeta_a = 1.25$. Calculamos los valores de $a = 2$ y $c = 2.5$, de modo que la condición (4.39) toma la siguiente forma

$$h \leq \min \{0.1831 \text{ s}, 0.9425 \text{ s}\}.$$

Consideremos $h = 0.15 \text{ s}$. Mediante cálculos numéricos obtenemos la solución de (4.40)

$$\hat{\omega} \approx 13.1031 \text{ rad/s}.$$

En la Figura 4.11 podemos observar la región de estabilidad que se genera en el espacio de parámetros (b_1, b_2) para los valores de a, c y h dados. Así, la frecuencia de oscilación ω_d para el DR se puede escoger en el intervalo $(0, 13.10) \text{ rad/s}$. Considerando $\omega_{d_1} = 8 \text{ rad/s}$ obtenemos las

ganancias $g_1 = b_1 = 59.0230 \text{ N/m}$ y $g_2 = b_2 = 5.1785 \text{ N/m}$ los cuales pertenecen a $\partial\Gamma$ y de este modo obtenemos que la respuesta en el tiempo del sistema es oscilatoria, véase Figura 4.17. Por otro lado al considerar $\omega_{d_2} = 13.5 \text{ rad/s}$ que no forma parte del rango permitido de frecuencias, por lo que obtenemos las ganancias $g_1 = b_1 = -17.5504 \text{ N/m}$ y $g_2 = b_2 = 14.0587 \text{ N/m}$ las cuales no forman pertenecen a $\partial\Gamma$ y por consiguiente se tiene que la respuesta en el tiempo del sistema es inestable, véase Figura 4.18.

Por último, al considerar un par de ganancias $(b_1, b_2) = (15, 4) \text{ N/m}$ dentro de la región de estabilidad obtenemos que la respuesta en el tiempo del sistema es exponencialmente estable. En la Figura 4.19 se aprecia este comportamiento sobreamortiguado de la respuesta en el tiempo del sistema en contraste al caso anterior (Figura 4.15) donde el factor de amortiguamiento ζ_a era menor a 1, es decir la respuesta en el tiempo del sistema era subamortiguada.

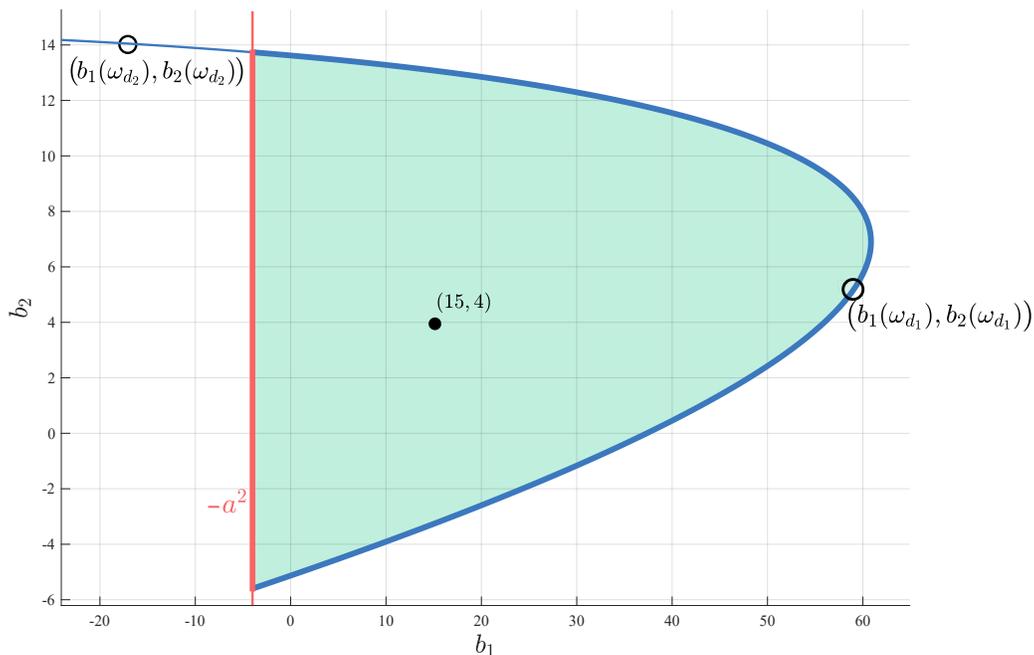


Figura 4.16: Región de estabilidad en el espacio (b_1, b_2) , en donde se muestra las ganancias $b_1(\omega_{d_j})$ y $b_2(\omega_{d_j})$ para las frecuencias de oscilación $\omega_{d_1} = 8 \text{ rad/s}$ y $\omega_{d_2} = 13.5 \text{ rad/s}$.

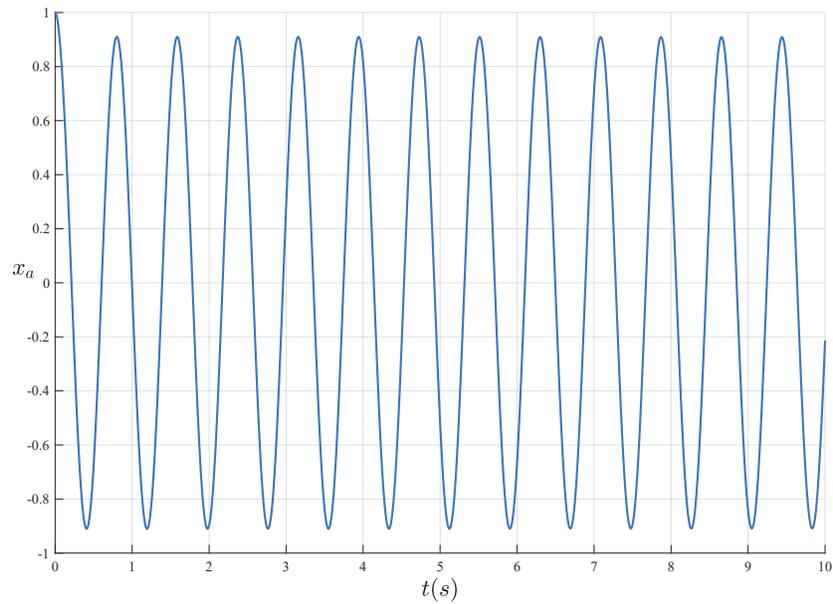


Figura 4.17: Respuesta en el tiempo del DR para los valores de g_1 y g_2 con $\omega_{d_1} = 8$ rad/s y las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

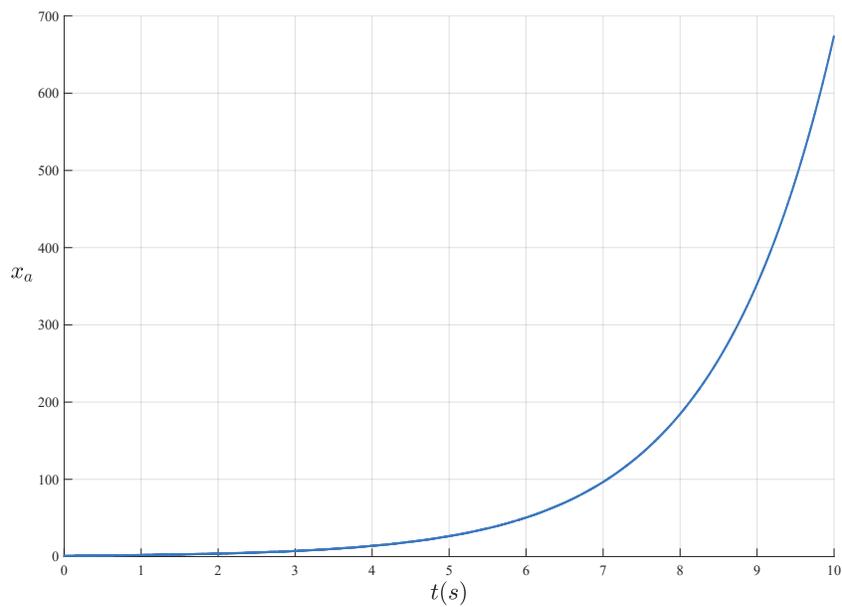


Figura 4.18: Respuesta en el tiempo del DR para los valores de g_1 y g_2 con $\omega_{d_2} = 13$ rad/s y las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

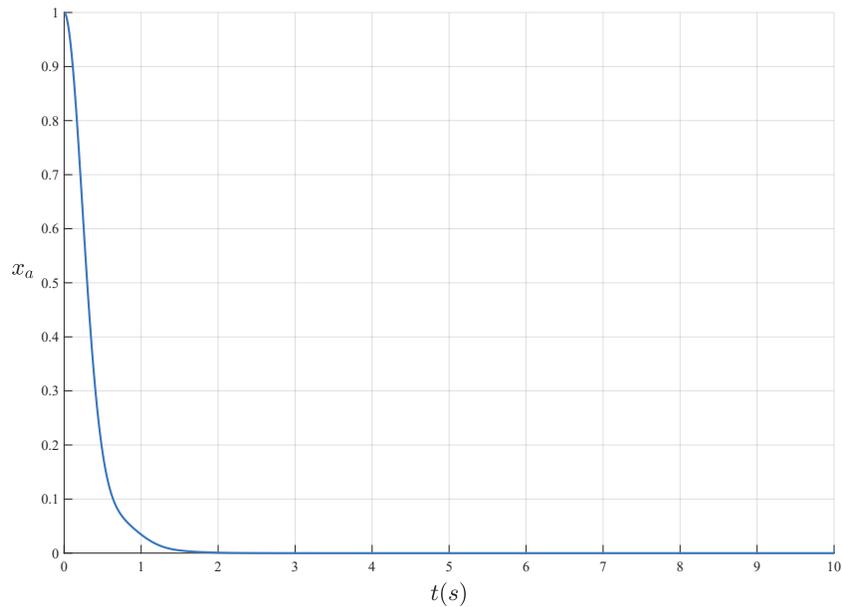


Figura 4.19: Respuesta en el tiempo del DR para los valores de $g_1 = 15$ N/m y $g_2 = 4$ N/m, con condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

En base al análisis realizado en esta sección así como los resultados mostrados en la misma podemos concluir que dados los valores masa, resorte y amortiguador respectivamente podemos calcular la frecuencia natural ω_a y el factor de amortiguamiento ζ_a , con los cuales es posible seleccionar el valor del retardo h y elegir la frecuencia deseada de oscilación $\omega_d \in (0, \hat{\omega})$ tal que el sistema tenga un comportamiento DR, siempre y cuando estemos en el rango de frecuencias permitido. Cuando se selecciona ω_d fuera del rango permitido se tiene que la respuesta en el tiempo del absorbedor es inestable, caso contrario cuando seleccionamos valores de ganancias (b_1, b_2) tales que se encuentren dentro de la región de estabilidad Γ donde tenemos que el comportamiento del absorbedor es exponencialmente estable.

Además, aún teniendo una restricción en los parámetros (en específico el parámetro del amortiguamiento), es posible considerar los tres casos característicos de sistemas de segundo orden y tener un amplia gama de aplicación del DR.

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo de tesis se realizó un análisis de estabilidad para un absorbedor híbrido de un grado de libertad donde su parte activa consiste en una retroalimentación de la posición y velocidad retardada, el cual es conocido como absorbedor de vibraciones retardado o DR.

Conclusiones

1. Se determinó explícitamente la región de estabilidad del sistema (4.36), proporcionando condiciones necesarias y suficientes sobre las ganancias de retroalimentación b_1 y b_2 , todo esto bajo las hipótesis que deben satisfacer los parámetros del sistema (masa, rigidez y amortiguador).
2. Se realizó el diseño del DR considerando la región de estabilidad y garantizando que la respuesta en el tiempo del sistema (4.36) sea oscilatoria. Además se mostró que al seleccionar cualesquiera de las ganancias de retroalimentación pertenecientes a la región de estabilidad se tendrá que el comportamiento del sistema será exponencialmente estable.
3. Con el resultado de estabilidad se determinó el rango de frecuencias donde es posible garantizar un comportamiento DR para el sistema (4.36). En comparación con el trabajo de Olgac y Holm-Hansen donde muestran que existe una $\omega_{critica}$ donde el DR deja de ser estable, es decir, encuentran una frecuencia donde ya no es posible garantizar este comportamiento, pero no muestran como determinar explícitamente dicha frecuencia, mientras que en este trabajo de tesis siempre es posible determinar explícitamente este rango de frecuencias para el comportamiento DR.

4. El resultado del análisis de estabilidad impone cierta restricción sobre la clase de sistemas de un grado de libertad a los cuales se les puede inducir un comportamiento DR, pero a su vez esta restricción es lo suficientemente general para considerar los tres casos característicos de sistemas de segundo orden (Sobreamortiguado, Críticamente amortiguado y Subamortiguado).
5. Por último se muestra que el retardo h , puede ser utilizado como parámetro de control, siendo de utilidad al considerarse en el sistema, lo cual contrasta los esquemas convencionales, donde el retardo se le atribuyen usualmente efectos desestabilizantes.

Trabajo Futuro

1. Determinar explícitamente las diferentes regiones de estabilidad que se pueden producir al variar las restricciones sobre los parámetros físicos del sistema (4.36).
2. Quitar la restricción sobre la clase de sistemas a los cuales se les puede inducir un comportamiento DR y así poder considerar los casos subamortiguados tales que $\zeta_a < \frac{1}{2}$.
3. Realizar un análisis de robustez de los parámetros del sistema (4.36) y del controlador.
4. Elaborar el análisis de estabilidad del sistema acoplado, es decir, cuando el absorbedor de vibraciones con retardo se adhiere al sistema primario.

Bibliografía

- [1] BEARDS, C., F., *Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems*, Butterworth-Heinemann, 1995.
- [2] BELLMAN, R., E. AND COOKE, K., L., *Differential-difference equations*. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press. New York, 1963
- [3] BELLMAN, R., E. AND DANSKIN, J., M., *A survey of the mathematical theory of time-lag, retarded control, and hereditary processes*. Rand corporation, 1954.
- [4] CHURCHILL, R. AND BROWN, J., *Complex Variables and Applications*, five edition ed. McGraw-Hill, 1992.
- [5] GU, K., KHARITONOV, V. AND CHEN, J., *Stability of Time-Delay Systems*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: Control engineering. Birkhäuser Boston, 2003.
- [6] HALE, J., *Ordinary Differential Equations*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2009.
- [7] HALE, J. AND LUNEL, S., *Introduction to Functional Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2013.
- [8] INMAN, D., *Vibration with control*. Wiley, 2006.
- [9] INMAN, D., *Engineering Vibration*, Pearson Prentice Hall, 2008.
- [10] KHARITONOV, V., *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Birkhäuser, 2013
- [11] KRASOVSKII, V., *On the applications of the second Lyapunov method for equations with delay*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 20: (1956), 315-327.

- [12] KOLMANOVSKII, V., B. AND NOSOV, V., R., *Stability of Functional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering 180, AP, 1986.
- [13] MARTINEZ B., E., *Diseño de Absorbedores de vibraciones con retardos*, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, Julio 2016.
- [14] MINORSKY, N., *Self-excited oscillations in dynamic systems possessing retarder actions*. J- Appl. Mech. 9 (1942), 65-71.
- [15] MYSHKIS, A., D., *General theory of differential equations with retarded arguments*. Uspekhi Mat. Nauk 4, 33 (1949), 99-141.
- [16] NEIMARK, J. *D-subdivision and spaces of quasi-polynomials*. Prikl. Mat. Mekh 13:,4 (1949), 349-380.
- [17] NICOLESCU, S., *Delay Effects on Stability: A Robust COntrol Approach*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer London, 2003.
- [18] OLGAC, N., AND HOLM-HANSEN, B.,T., *A novel active vibration absorption technique: delayed resonator*, Journal of Sound and Vibration, 176 (1), 93-104, 1994.
- [19] OLGAC, N., ELMALI, H. AND S.VIJAYAN, *Introduction to the dual frequency fixed delayed resonator*. Journal of Sound and Vibration, 189 (3), 355-367, 1996.
- [20] OLGAC, N., ELMALI, H., AND M. HOSEK. *Active vibration control of distributed systems using delayed resonator with acceleration feedback*. Journal os Dynamic Systems, Measurement and Control, 119 (1997) 380-389.
- [21] OLGAC, N., VYHLÍDAL, T. AND KUCERA, V., *Delayed resonator with acceleration feedback- Complete stability analysis by spectral methods and vibration absorber desing*. Journal of Sound and Vibration, 333, 6781-9795, 2014.
- [22] RAO, S. *Mechanical Vibrations*. five edition ed. Prentice Hall, 2011.
- [23] RAZUMIKHIN, B. *On the stability of systems with a delay*. Prikl, Mathematics and Mechanics, 20, (4): (1956), 500-512.
- [24] RICHARD, J., P., *Time-delay system: an overview of some recent advances and open problems*. Automatica 29, 10 (2003), 1667-16694.