



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Geometría diferencial de las curvas
y ecuación de Riccati**

Tesis que presenta

Paola Lemus Basilio

Para obtener el grado de

Maestro en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Haret Codratian Rosu Barbus

San Luis Potosí, S.L.P., Octubre de 2019



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis "***Geometría diferencial de las curvas y ecuación de Riccati***" presentada para obtener el Grado de Maestra en Control y Sistemas Dinámicos, fue elaborada por **Paola Lemus Basilio** y aprobada el quince de octubre del dos mil diecinueve por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus
Director de la tesis

Dr. Eric Campos Cantón
Jurado en el Examen

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Jurado en el Examen

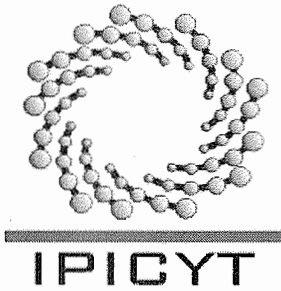
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada
Jurado en el Examen



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Haret Codratian Rosu Barbus.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología con No. de registro: 634451 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

El Secretario Académico del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 042 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Maestría en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 15 días del mes de octubre del año 2019, se reunió a las 11:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Eric Campos Cantón	Presidente	IPICYT
Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus	Secretario	IPICYT
Dr. Cesar Octavio Maldonado Ahumada	Sinodal	IPICYT
Dr. Hugo Cabrera Ibarra	Sinodal	IPICYT

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

MAESTRA EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó la C.

Paola Lemus Basilio

sobre la Tesis intitulada:

Geometría diferencial de las curvas y ecuación de Riccati

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus

El Jurado, después de deliberar, determinó

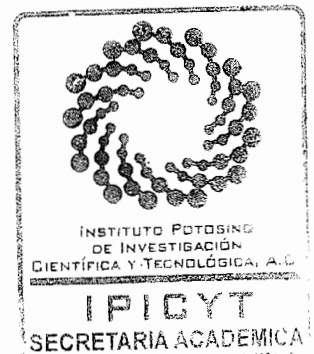
APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 13:00 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe el Secretario Académico del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 15 días del mes de octubre de 2019.


Dr. Marcial Bonilla Marín
Secretario Académico


Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado



A mi familia

Agradecimientos

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo proporcionado a través de la beca otorgada, sin esto no habría sido posible la realización de esta tesis y al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica por la infraestructura, el ambiente académico y el área de trabajo proporcionados.

A mi asesor de tesis Dr. Haret Codratian Rosu por el tiempo, la paciencia, los consejos y la constante motivación con los que me guió así como al comité tutorial formado por los doctores Eric Campos Cantón, César Octavio Maldonado Ahumada y Hugo Cabrera Ibarra por las observaciones siempre útiles que me ofrecieron.

A mis profesores de asignatura por los conocimientos que me compartieron durante las clases, en especial al Dr. Hugo por su paciencia y dedicación, es un gran ejemplo a seguir.

A mi familia por su apoyo incondicional durante todo este tiempo, a mis colegas, compañeros y amigos Claudio, Emilio, Martín, Hugo, David, Edgar, Brayan y Norberto por la motivación brindada además de su amistad y compañerismo.

Resumen

En este trabajo se examina el método de Darboux y Lie para obtener las ecuaciones paramétricas de las curvas tres y dos dimensionales a partir de la ecuación de Riccati que contiene los parámetros intrínsecos de las curvas como coeficientes en la ecuación.

En este método se usa como herramienta principal el sistema de ecuaciones de Frenet-Serret que caracteriza la evolución de un triedro móvil formado por los vectores unitarios tangente, normal y binormal a lo largo de las curvas, llegando a dos ecuaciones de Riccati idénticas para dos funciones diferentes w y z que se expresan en función de las componentes del triedro móvil de Frenet-Serret.

Para ilustrar el método se trabajan ejemplos de varias curvas notables tanto en dos como en tres dimensiones con distintos parámetros de curvatura y torsión.

Abstract

In this thesis work, the Darboux-Lie method to obtain the parametric equation of three and two-dimensional curves starting from the Riccati equation with the intrinsic parameters of the curves as coefficients of the equation is examined.

In this method, the main tool is the system of Frenet-Serret differential equations which characterizes the evolution of the moving trihedron of unit vectors of tangent, normal and binormal along the curve. It provides two identical Riccati equations for two different functions, w and z , which are related to the components of the Frenet-Serret trihedron.

To illustrate the method, several examples of noted curves are worked out both in two and three dimensions, with various curvature and torsion intrinsic parameters.

ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN	<i>1</i>
2	GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE LAS CURVAS	<i>3</i>
2.1	Representación analítica	<i>3</i>
2.2	Longitud de arco de un segmento de curva	<i>10</i>
2.3	La tangente en un punto de la curva	<i>11</i>
2.3.1	Ecuación de la línea tangente	<i>13</i>
2.4	Plano osculador	<i>16</i>
2.5	Curvatura	<i>18</i>
2.6	Torsión	<i>21</i>
2.7	Involutas y Evolutas	<i>23</i>
2.7.1	Las involutas	<i>23</i>
2.7.2	Las evolutas	<i>25</i>
3	FÓRMULAS DE FRENET-SERRET	<i>29</i>
3.1	El triedro móvil	<i>29</i>
3.2	Ecuaciones naturales de las curvas	<i>31</i>
3.3	Hélices	<i>38</i>
3.4	Óvalos	<i>40</i>

4	ECUACIÓN DE RICCATI DE LAS CURVAS POR EL MÉTODO DE DARBOUX Y LIE	45
4.1	Generalidades sobre la ecuación de Riccati	45
4.2	Reducción a la ecuación de Riccati en la geometría diferencial de las curvas	50
4.3	Obtención de las ecuaciones paramétricas a partir de la ecuación de Riccati	53
5	OTROS ASPECTOS COMPLEMENTARIOS EN LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE LAS CURVAS	65
5.1	El concepto de contacto	65
5.2	La esfera osculante	67
5.3	Curvatura integral de una curva y torsión geodésica	68
5.4	Un triedro móvil sobre una superficie	69
5.5	Ecuación diferencial de 4to. orden para las curvas espaciales	69
5.6	Curvatura de una curva plana	70
5.7	Fórmula para el paso variable (el salto) de una hélice cilíndrica con $z=bu^2$	71
6	CONCLUSIONES	75
7	BIBLIOGRAFÍA	77

LISTA DE FIGURAS

2.1	Ilustración de los cosenos directores de un vector l que se encuentra a lo largo de una recta.	4
2.2	Gráfica cartesiana del círculo.	5
2.3	Una hélice cilíndrica de paso constante.	5
2.4	Una hélice cilíndrica de paso variable.	6
2.5	Una hélice dextrógira y una hélice levógira.	7
2.6	Una curva definida por los componentes del radio vector.	9
2.7	Interpretación geométrica del vector $\frac{dx}{ds}$ como límite infinitesimal del vector $\frac{\Delta x}{\Delta s}$.	11
2.8	Gráfica del arco y la cuerda que conectan dos puntos.	12
2.9	Gráfica para determinar la ecuación de la línea tangente.	13
2.10	Gráfica para la geometría de la involuta.	24
2.11	Gráfica para la geometría de la evoluta.	25
3.1	Los planos rectificante, normal y osculador determinados por un triedro móvil sobre una curva espacial.	31
3.2	Un ejemplo de óvalo: la elipse.	41
4.1	La espiral logarítmica.	59
4.2	Espiral de Cornu en el plano Argand.	60
4.3	Una hélice cilíndrica de paso constante levógira resultado del método de Darboux y Lie.	63
5.1	Avance en z a lo largo del cilindro para las hélices de paso constante y variable.	73

La mente intuitiva es un
regalo sagrado...

Albert Einstein, físico alemán

Desde hace muchos siglos las curvas (del latín *curvus*, doblado), entendidas de manera sencilla como sucesiones de puntos, tanto en dos como en tres dimensiones, llamaron la atención del ser humano debido a que se pueden apreciar de manera visual en el entorno entidades u objetos que tienen una semejanza considerable a esta noción. Por ejemplo, en la antigua Grecia se conocía que de todas las curvas planas cerradas de longitud dada L la que está cerrada en forma de círculo posee el área interior máxima. Sin embargo, fue hasta épocas recientes cuando se establecieron los conceptos y herramientas para progresar en el estudio de las nociones de curva y curva plana tales como la topología algebraica, convexidad local y global [2] y [25].

En la actualidad se sabe que las curvas tienen representaciones intrínsecas que son independientes de las coordenadas que se escogen. Uno de los conceptos básicos obtenidos a partir del estudio de las curvas es la característica intrínseca de curvatura ya que si ésta es la misma en dos curvas distintas entonces las dos curvas son idénticas. Lo mismo se puede decir en el caso del otro concepto intrínseco que es la torsión.

De los resultados notables del cálculo diferencial para las curvas en dos y tres dimensiones están las ecuaciones de Frenet- Serret que caracterizan la evolución de un triedro móvil sobre estas curvas. Formuladas hace casi dos siglos en un periodo que se puede considerar perteneciente a la fase inicial de la geometría diferencial, estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales lineales de primer orden proporcionando los cambios en las posiciones de los vectores unitarios de la tangente, normal y binormal conforme avanza un punto a lo largo de la curva y donde los parámetros intrínsecos de una curva, κ y τ , curvatura y torsión respectivamente, entran como coeficientes.

Los conceptos desarrollados en el área de geometría diferencial que permitieron el estudio moderno de las curvas se introducen en el siguiente capítulo. Luego, en el tercer capítulo se retoman los conceptos de tangente, normal y binormal a partir de los cuales se desarrolla la teoría de las fórmulas de Frenet-Serret. En el cuarto capítulo se describe el método ideado por Darboux y Lie a finales del siglo XIX que lleva a una caracterización intrínseca de las curvas a través de la ecuación diferencial de primer orden no lineal de Riccati. En el quinto capítulo presentamos algunos aspectos complementarios sobre los conceptos aplicados a las curvas que pretenden ampliar el contenido de los capítulos previos. El sexto y último capítulo contiene las conclusiones que surgen a partir del desarrollo de este trabajo.

CAPÍTULO 2

GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE LAS CURVAS

Dios hizo los enteros. Todo lo demás es invento del hombre.

Leopold Kronecker,
matemático alemán

En este capítulo se introducen los conceptos fundamentales de la geometría diferencial con los cuales se desarrollan los argumentos necesarios para poder obtener los resultados relevantes del punto de vista matemático referente al caso de las curvas.

2.1. Representación analítica

Autores destacados en el área de la geometría diferencial como Dirk J. Struik sugieren pensar de manera intuitiva de las curvas en el espacio como trayectorias de un punto en movimiento [4]. Entonces las coordenadas rectangulares (x, y, z) del punto pueden ser expresadas como funciones de un parámetro u dentro de un intervalo cerrado:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad u_1 \leq u \leq u_2 \quad (2.1)$$

Es conveniente utilizar a u como el tiempo, aunque no necesariamente, pues podemos pasar de un parámetro a otro por medio de una sustitución $u = f(v)$ sin que la curva misma cambie, es decir, pueden existir muchas representaciones paramétricas de la curva. Esto permite definir la curva como el lugar geométrico de todos los puntos cuyas coordenadas están dadas por las ecuaciones de la curva en forma paramétrica (2.1) cuando u toma todos los valores en el intervalo especificado. Cuando todos los puntos de la curva no yacen en un mismo plano es llamada una curva espacial (tres dimensional) de otra manera es una curva

plana (dos dimensional) [6]. Seleccionamos el marco de los ejes de coordenadas de manera que tenga el sentido dextrógiro ($OX \rightarrow OY \rightarrow OZ$). También denotamos (x, y, z) como (x_1, x_2, x_3) o como $x_i, i = 1, 2, 3$. Entonces la ecuación de la curva toma la forma

$$x_i = x_i(u), \quad u_1 \leq u \leq u_2. \quad (2.2)$$

Para indicar un punto con coordenadas x_i utilizamos la notación $P(x_i)$.

Ejemplo 2.1 *Línea recta.*

Una línea recta en el espacio está dada por la ecuación

$$x_i = a_i + b_i u, \quad (2.3)$$

donde a_i y b_i son constantes y al menos una de las $b_i \neq 0$. Esta ecuación representa una línea que pasa por el punto $P(a_i)$ con cosenos directores proporcionales a b_i , véase Figura 2.1.

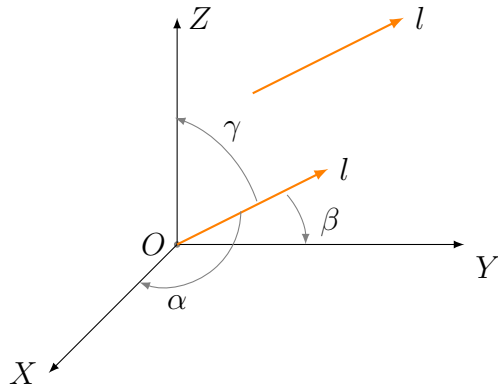


Figura 2.1: Ilustración de los cosenos directores de un vector l que se encuentra a lo largo de la recta (2.3): $b_1 = \cos \alpha, b_2 = \cos \beta, b_3 = \cos \gamma$.

Al despejar u de (2.3) y dando los valores al subíndice $i = 1, 2, 3$ la ecuación (2.3) también puede ser escrita como:

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3}. \quad (2.4)$$

Ejemplo 2.2 *Círculo.*

Siendo una curva plana, tomamos el plano del círculo como $z = 0$ y entonces la parametrización tiene la forma conocida:

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = 0, \quad 0 \leq u < 2\pi. \quad (2.5)$$

donde a es el radio del círculo y $u = \angle XOP$ es el ángulo indicado en la Figura 2.2.

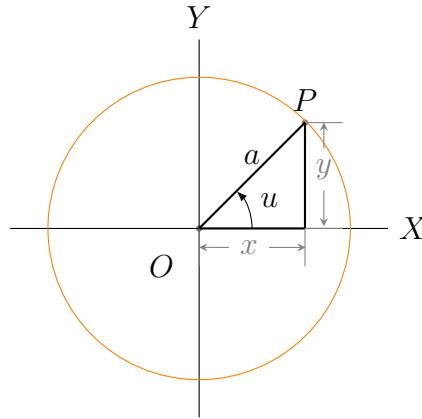


Figura 2.2: Gráfica cartesiana del círculo.

Ejemplo 2.3 *La hélice cilíndrica de paso constante.*
Se representa paramétricamente con las ecuaciones

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = bu, \quad a, b \text{ cte. } > 0. \quad (2.6)$$

Se puede definir como el lugar geométrico de un punto que se mueve sobre la superficie de un cilindro circular recto con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2u^2$, véase Figura 2.3.

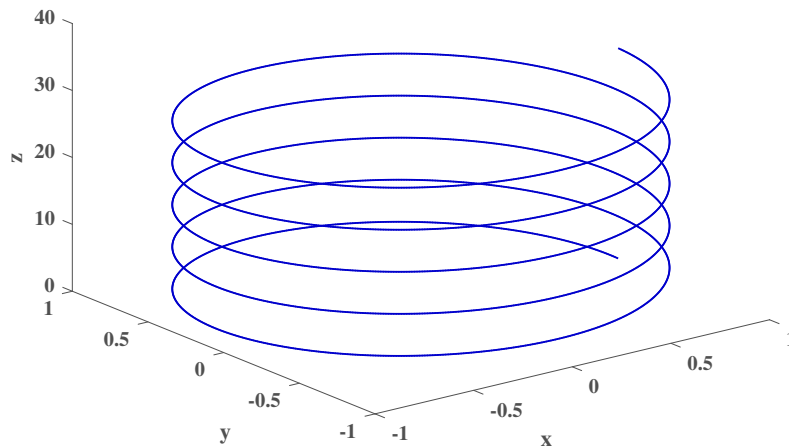


Figura 2.3: Hélice cilíndrica de paso constante $2\pi b$ graficada con los siguientes parámetros: $0 < u < 10\pi$, $a = 1$, $b = 1$.

Se observa que al momento en el que u incrementa por 2π , x y y regresan a su valor original mientras que z incrementa por $2\pi b$. Ese incremento en z es llamado el *paso* de la hélice. Podemos visualizar este tipo de hélices en las cuerdas

o roscas de los tornillos, sacacorchos y en algunos resortes.

Ejemplo 2.4 *Hélice cilíndrica de paso variable.*

Consideramos la siguiente modificación funcional en la tercera ecuación paramétrica del caso anterior

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = bu^2, \quad a, b \text{ cte. } > 0. \quad (2.7)$$

Como se puede percibir de las primeras dos ecuaciones, esta hélice sigue siendo cilíndrica y la tercera ecuación se puede interpretar como un movimiento acelerado de un punto material sobre la pared del cilindro con aceleración constante $2b$. Esto hace que la trayectoria de este punto sea una hélice de paso variable, véase Figura 2.4.

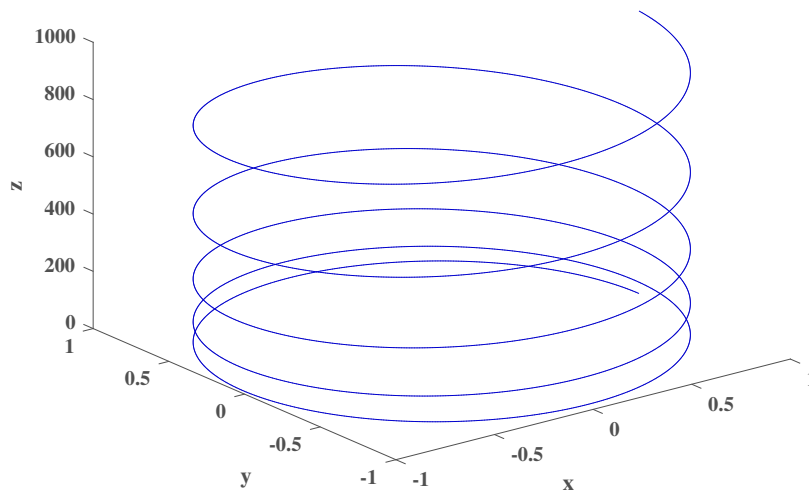


Figura 2.4: Hélice cilíndrica de paso variable graficada para los siguientes parámetros: $0 < u < 10\pi$, $u_0 = 0$, $a = 1$, $b = 1$.

Más detalles sobre el avance de un punto material sobre la pared cilíndrica en ambos casos se dan en la sección 5.7.

Comentario 2.1 *Hélices dextrógiras y levógiras*

En el caso de los ejemplos 2.3 y 2.4 se consideró que b es positivo, lo que corresponde a hélices dextrógiras para las cuales el avance se produce en sentido antihorario. Cuando b es negativa las hélices son levógiras y el sentido de avance es opuesto a las dextrógiras. Los casos dextrógiro y levógiro de la hélice cilíndrica de paso constante son presentados en la Figura 2.5.

Cabe mencionar que el sentido de las hélices es una propiedad intrínseca tal que una hélice levógira nunca puede ser superpuesta a una dextrógira.

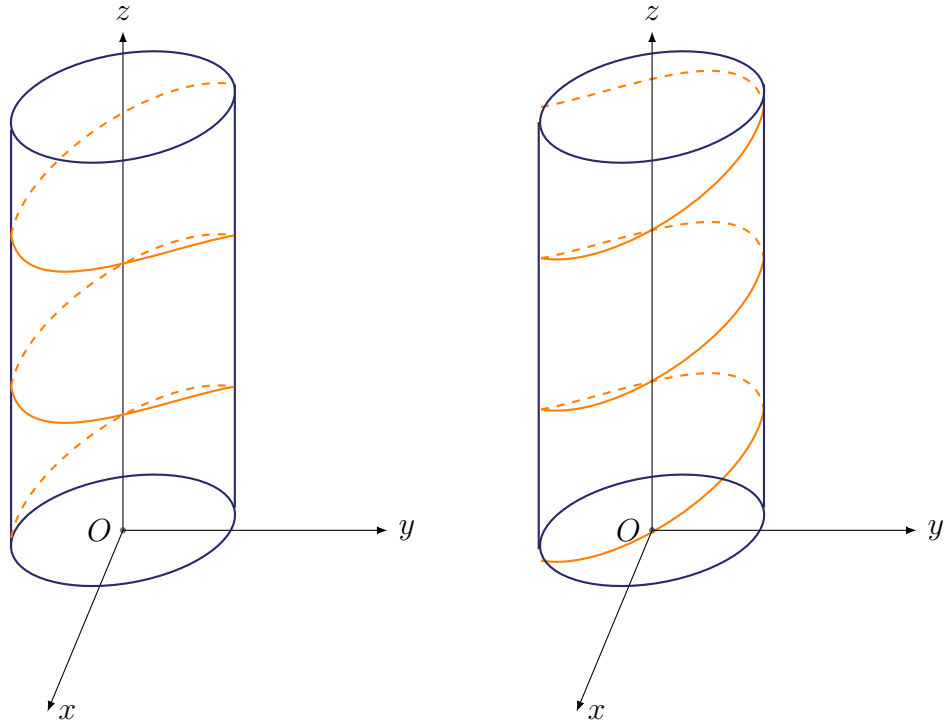


Figura 2.5: Hélices de paso constante: dextrógira a la derecha y levógira a la izquierda.

Las funciones $x_i(u)$ no son todas constantes ya que si dos de ellas son constantes entonces las ecuaciones (2.1) y (2.2) representan a una línea recta paralela a un eje de coordenadas. Las funciones $x_i(u)$ que se consideran en este estudio son continuas en el intervalo de u dado con un número suficiente de derivadas continuas (primeras derivadas en todos los casos, y en algunos casos inusuales hasta derivadas de tercer orden continuas).

Esto es equivalente a decir que en un punto P de la curva, donde tomamos $u = u_0$, existe un conjunto de derivadas finitas $x_i^{(n+1)}(u_0)$, con n suficientemente grande. Entonces se puede expresar $x_i(u_0 + h)$ como en el siguiente desarrollo Taylor [26]:

$$x_i(u_0 + h) = x_i(u) \tag{2.8}$$

$$= x_i(u_0) + \frac{h}{1!} \dot{x}_i(u_0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{x}_i(u_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} x_i^{(n)}(u_0) + o(h^n), \tag{2.9}$$

donde las $\dot{x}_i, \ddot{x}_i, \dots, x_i^{(n)}$ representan derivadas consecutivas con respecto a u y $o(h^n)$ es un término que cumple la condición

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0. \tag{2.10}$$

Esto es válido siempre para todos los valores de n , con $n > 0$, no solamente cuando x_i son funciones reales si no también cuando $x_i(u)$ son funciones complejas

de un u complejo y las primeras derivadas \dot{x}_i existen. Las funciones $x_i(u)$ son entonces *analíticas*. Usualmente consideramos las x_i como funciones reales de una variable real u como se consideró en los ejemplos anteriores. La curva (2.2) con las condiciones (2.8) es llamada un *arco de curva*, pero se continúa utilizando el término *curva* siempre y cuando no ocurra ambigüedad. Los puntos donde todas las \dot{x}_i se anulan son llamados *puntos singulares*, de otra manera son *puntos regulares* con respecto a u . A continuación, cuando se habla de puntos, nos referimos a puntos regulares.

Cuando reemplazamos el parámetro u por otro parámetro u_1

$$u = f(u_1) , \quad (2.11)$$

se establece que $f(u_1)$ es diferenciable, esto es que cuando $du/du_1 \neq 0$ (es decir $df(u_1)/du_1 \neq 0$) los puntos regulares permanecen regulares. Las curvas pueden ser definidas de formas diferentes a (2.1) y (2.2). Podemos utilizar las ecuaciones

$$F_1(x, y, z) = 0 , \quad F_2(x, y, z) = 0 , \quad (2.12)$$

ó

$$y = f_1(x) , \quad z = f_2(x) , \quad (2.13)$$

para definir una curva. La representación (2.13) puede ser considerada una forma especial de (2.1) y (2.2), tomando a x como parámetro y se obtiene de (2.1) y (2.2) eliminando a u de y y x y también de z y x . Esto es siempre posible cuando $dx/du \neq 0$ por lo que u puede ser expresada en términos de x . Al mismo tiempo, la representación (2.13) expresa a la curva C como la intersección de dos cilindros proyectados, véase [23]. Para la hélice circular de paso constante, por ejemplo, la representación (2.13) tiene la forma explícita siguiente

$$y(x) = a \operatorname{sen} \left(\arccos \left(\frac{x}{a} \right) \right) = \sqrt{a^2 - x^2} , \quad (2.14)$$

$$z(x) = b \arccos \left(\frac{x}{a} \right) . \quad (2.15)$$

En cuanto a las ecuaciones (2.12), ellas definen dos funciones implícitas $y(x)$ y $z(x)$ siempre que la expresión

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial y} \neq 0 . \quad (2.16)$$

Véase [10].

Las representaciones (2.12) y (2.13) definen la curva espacial como la intersección de las dos superficies $F_1(x, y, z) = 0$ y $F_2(x, y, z) = 0$, pero tal intersección puede dividirse en varias curvas. Por ejemplo, tomamos una curva espacial dada por las siguientes ecuaciones paramétricas

$$x = u , \quad y = u^2 , \quad z = u^3 , \quad (2.17)$$

las cuales representan una curva espacial C de tercer grado (una parábola cúbica espacial), obteniendo las ecuaciones

$$F_1(x, y, z) \equiv x^2 - y = 0, \quad F_2(x, y, z) \equiv xz - y^2 = 0, \quad (2.18)$$

las cuales representan la intersección de un cilindro y un cono. Esta intersección contiene no solo a la curva (2.13) si no también el eje Z definido como $x = 0$, $y = 0$, véase [23]. Este tipo de ambigüedades sugieren que es mejor usar las definiciones paramétricas de las curvas.

Esto explica por qué frecuentemente se prefiere representar a la curva de la forma (2.1) y (2.2) además de que esta forma permite una aplicación de las ideas de análisis vectorial.

Para este propósito, sea $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ o \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) vectores unitarios en dirección de los ejes positivos X, Y y Z . Entonces podemos denotar una curva C expresando el radio vector $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x}$ de un punto genérico P como una función de u de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \quad (2.19)$$

donde los x_i están dados por (2.1) y (2.2), véase Figura 2.6. Indicamos P no solo por $P(x_i)$ si no también como $P(x)$ o $P(u)$ y además se puede decir también 'la curva $\mathbf{x}(u)$ '.

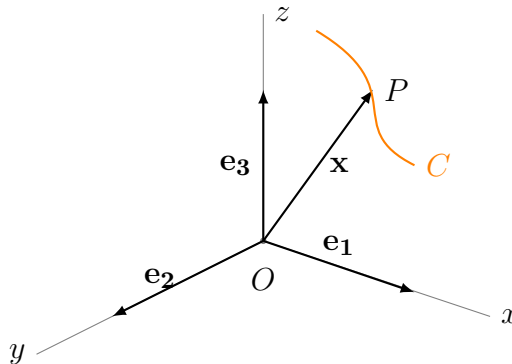


Figura 2.6: La curva C definida por el radio vector \mathbf{x} dado en la ecuación (2.19).

Definición 2.1.1. Las x_i son las *coordenadas* de \mathbf{x} , los vectores $x_1\mathbf{e}_1, x_2\mathbf{e}_2$ y $x_3\mathbf{e}_3$ son las *componentes vectoriales* de \mathbf{x} a lo largo de los ejes de coordenadas.

Usualmente se indica un vector por sus coordenadas, como $\mathbf{x}(x, y, z)$ o como $\mathbf{x}(x_i)$. La *longitud del vector* $|\mathbf{x}|$ está dada por

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (2.20)$$

2.2. Longitud de arco de un segmento de curva

A continuación nos enfocamos en curvas C con u real. Un concepto fundamental en la teoría de curvas es la longitud de arco de un segmento de curva.

Definición 2.2.1. La *longitud de arco* de un segmento de curva entre los puntos $A(u_0)$ y $P(u)$ está dada por la siguiente integral

$$s(u) = \int_{u_0}^u \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\sigma = \int_{u_0}^u \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}} d\sigma . \quad (2.21)$$

Donde la raíz cuadrada se considera positiva y recordando que el punto siempre indica diferenciación con respecto a u :

$$\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/du , \quad \dot{x}_i = dx_i/du . \quad (2.22)$$

La expresión $\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ es el producto escalar de $\dot{\mathbf{x}}$ consigo mismo, el cual en este trabajo se considera siempre positivo para curvas reales. Se asume que $\dot{\mathbf{x}}$ no es cero en ningún lado del intervalo es decir sin puntos singulares.

Para autoconsistencia mencionamos la definición del *producto escalar de dos vectores* $\mathbf{v}(v_i)$ y $\mathbf{w}(w_i)$ definido como sigue:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 . \quad (2.23)$$

Considerando que el ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{w} es φ , la fórmula del cálculo del producto escalar es

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \varphi . \quad (2.24)$$

Cuando $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ resulta $\varphi = \pi/2$ y significa que \mathbf{v} y \mathbf{w} son perpendiculares. Además como en (2.24) entra el coseno que es una función par, el sentido de giro del ángulo φ , sea levógiro o dextrógiro, no importa.

En el caso de un vector unitario \mathbf{u} sabemos que cumple con las condiciones $|\mathbf{u}| = 1$ es decir $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$.

En general, se acepta la idea de que la longitud de arco s crece cuando u crece y el sentido en el cual ocurre el crecimiento se le considera el sentido *positivo* de la curva, de esta manera hablamos de *curvas orientadas*. En geometría diferencial se consideran curvas orientadas e incluso el espacio 3-dimensional es orientado al introducir un sistema de coordenadas dextrógiro, sin embargo, generalmente, los resultados en la mayoría de los casos son independientes de la orientación tanto de las curvas como del espacio. Respecto al cambio del parámetro de la curva, por ejemplo de u a u_1 , este cambio no modifica la longitud de arco que mantiene su forma con u_1 en lugar de u . Esta *invarianza* a las transformaciones de parámetro es más notoria en la ecuación infinitesimal del elemento de arco

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} , \quad (2.25)$$

la cual es independiente de u .

2.3. La tangente en un punto de la curva

Al introducir a s como nuevo parámetro en vez de u (lo que es siempre posible ya que $ds/du \neq 0$) entonces (2.25) muestra que

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} = 1. \quad (2.26)$$

El vector dx/ds es por lo tanto un vector unitario. La interpretación geométrica es la siguiente: el vector Δx une dos puntos $P(x)$ y $Q(x + \Delta x)$ en la curva, el vector $\Delta x/\Delta s$ tiene la misma dirección que Δx y para $\Delta s \rightarrow 0$ se convierte en un vector tangente en P a la curva, véase Figura 2.7.

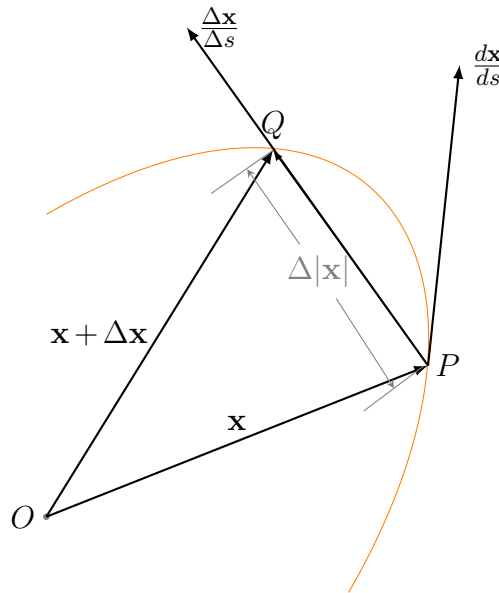


Figura 2.7: Interpretación geométrica del vector $\frac{dx}{ds}$ como límite infinitesimal del vector $\frac{\Delta x}{\Delta s}$.

Definición 2.3.1. El vector

$$t = dx/ds = x' \quad (2.27)$$

es llamado *vector unitario tangente* a la curva en P debido a que su longitud es 1 y su sentido coincide con el del incremento de s .

La notación de prima significa siempre derivada con respecto al arco.

Como

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{du}, \quad (2.28)$$

se observa que $\dot{x} = dx/du$ es también un vector tangente aunque no necesariamente un vector unitario. Usualmente al hecho de que la tangente es la posición

límite de una cuerda que pasa por un punto P y por un punto Q en un intervalo dado de u , cuando $Q \rightarrow P$ se le interpreta como *la tangente pasa por dos puntos consecutivos de la curva*. Es de notar que esta forma de expresarse es utilizada por muchos expertos en geometría diferencial ya que la consideran de gran valor heurístico. El siguiente teorema define lo expresado en el párrafo anterior:

Teorema 2.3.1. *La razón entre el arco y la cuerda que conectan dos puntos P y Q de una curva tiende a la unidad cuando Q tiende a P .*

Demostración. De la Figura 2.8 se observa que Δs es el arco PQ y Δx es la cuerda PQ , entonces para $Q \rightarrow P$:

$$\lim_{\Delta|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta|\mathbf{x}|} = \lim_{\Delta|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}, \quad (2.29)$$

$$= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta s / \Delta u}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta u}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta u}\right)^2}}, \quad (2.30)$$

$$= \frac{\dot{s}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 1. \quad (2.31)$$

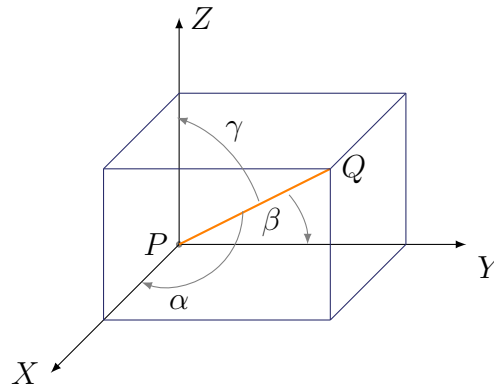


Figura 2.8: Gráfica para la demostración del Teorema 2.3.1.

Cuando $\Delta s \rightarrow 0$, las razones $\Delta x / \Delta s$, $\Delta y / \Delta s$ y $\Delta z / \Delta s$ se aproximan a los cosenos de los ángulos α_1 , α_2 y α_3 , formados por la tangente orientada en P y los semiejes positivos X , Y y Z respectivamente. Esto significa que \mathbf{t} se puede expresar en la forma de componentes:

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_1 \cos \alpha_1 + \mathbf{e}_2 \cos \alpha_2 + \mathbf{e}_3 \cos \alpha_3, \quad (2.32)$$

lo cual del producto punto de $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ lleva a la identidad conocida

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1. \quad (2.33)$$

2.3.1. Ecuación de la línea tangente

Un punto genérico $A(\mathbf{X})$ sobre la línea tangente a la curva en P , véase Figura 2.9, está definido por la ecuación escrita como

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + v\mathbf{t}, \quad \text{donde } v = PA, \quad (2.34)$$

la cual se puede escribir en coordenadas y suponiendo todos los $dx_i \neq 0$ a partir de (2.34) como

$$\frac{X_1 - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{X_2 - x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{X_3 - x_3}{\cos \alpha_3} \quad (2.35)$$

o sabiendo que

$$\frac{dx_i}{ds} = \cos \alpha_i,$$

se escribe también como

$$\frac{X_1 - x_1}{dx_1} = \frac{X_2 - x_2}{dx_2} = \frac{X_3 - x_3}{dx_3}. \quad (2.36)$$

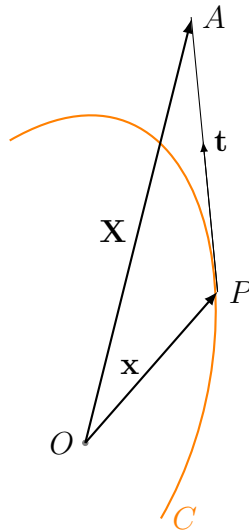


Figura 2.9: Gráfica para determinar la ecuación de la línea tangente.

Ejemplo 2.5 *Línea recta: vector unitario tangente y ecuación de la tangente.*
La línea recta cuya representación paramétrica es

$$x_i = a_i + b_i u, \quad (2.37)$$

y considerando

$$s = \int_0^u \sqrt{\sum b_i^2} d\sigma = (\sum b_i^2)^{1/2} u, \quad (2.38)$$

donde

$$u = \frac{s}{(\sum b_i)^{1/2}}, \quad (2.39)$$

entonces

$$x_i = a_i + b_i \frac{s}{(\sum b_i)^{1/2}}, \quad (2.40)$$

y

$$t_i = x'_i = \frac{b_i}{(\sum b_i)^{1/2}}, \quad (2.41)$$

entonces el vector tangente es

$$\mathbf{t} = \left(\frac{b_1}{(\sum b_i)^{1/2}}, \frac{b_2}{(\sum b_i)^{1/2}}, \frac{b_3}{(\sum b_i)^{1/2}} \right). \quad (2.42)$$

Ejemplo 2.6 *Círculo: vector unitario tangente y ecuación de la tangente.*

Un círculo en el plano xy se representa paramétricamente con las ecuaciones

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = 0, \quad (2.43)$$

de donde al derivar

$$\dot{x} = -a \sin u, \quad \dot{y} = a \cos u, \quad (2.44)$$

pero tomando en cuenta que

$$s = \int_0^u \sqrt{(-a \sin \sigma)^2 + (a \cos \sigma)^2} d\sigma = au, \quad (2.45)$$

de donde $u = s/a$ y se tiene de (2.43)

$$x = a \cos(s/a), \quad y = a \sin(s/a), \quad (2.46)$$

entonces el vector unitario tangente tiene la forma:

$$\mathbf{t}(-\sin u, \cos u). \quad (2.47)$$

y la ecuación de la línea tangente es:

$$\frac{X_1 - a \cos u}{-\sin u} = \frac{X_2 - a \sin u}{\cos u}. \quad (2.48)$$

Ejemplo 2.7 *Hélice circular de paso constante: vector unitario tangente y ecuación de la tangente.*

Las ecuaciones paramétricas que representan una hélice de paso constante son

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = bu, \quad (2.49)$$

al derivar se tiene que

$$\dot{x} = -a \operatorname{sen} u, \quad \dot{y} = a \cos u, \quad \dot{z} = b, \quad (2.50)$$

si consideramos en la derivación que

$$\begin{aligned} s(u) &= \int_0^u \sqrt{(-a \operatorname{sen} \sigma)^2 + (a \cos \sigma)^2 + b^2} d\sigma \\ &= \int_0^u (a^2 + b^2)^{1/2} d\sigma = (a^2 + b^2)^{1/2} \sigma = cu, \end{aligned} \quad (2.51)$$

el vector tangente resulta ser

$$\mathbf{t} \left(-\frac{a}{c} \operatorname{sen} u, \frac{a}{c} \cos u, \frac{b}{c} \right). \quad (2.52)$$

El vector tangente produce un ángulo constante α_3 con el eje Z :

$$\cos \alpha_3 = b/c \quad \text{por lo que} \quad \tan \alpha_3 = a/b. \quad (2.53)$$

Si B es la intersección de la tangente en P con el plano XOY y P_3 la proyección de P en este plano, entonces

$$P_3B = PP_3 \tan \alpha_3 = bu \frac{a}{b} = au = \text{arco de } AP_3. \quad (2.54)$$

Resulta que el lugar geométrico de B es la involuta (definida en la Sección 2.7) del círculo base del cilindro.

Ejemplo 2.8 *Una hélice cilíndrica de paso variable: vector tangente y ecuación de la línea tangente.*

A partir de las ecuaciones paramétricas de la hélice

$$x = a \cos u, \quad y = a \operatorname{sen} u, \quad z = bu^2, \quad a, b \text{ cte. } > 0. \quad (2.55)$$

obteniendo al derivar que

$$\dot{x} = -a \operatorname{sen} u, \quad \dot{y} = a \cos u, \quad \dot{z} = 2bu, \quad a, b \text{ cte. } > 0. \quad (2.56)$$

y considerando que

$$s = \int_0^u \sqrt{(-a \operatorname{sen} \sigma)^2 + (a \cos \sigma)^2 + (2b\sigma)^2} d\sigma = \int_0^u (a^2 + 4b^2\sigma^2)^{1/2} d\sigma \quad (2.57)$$

de donde se tiene que

$$u = \sqrt{\frac{s}{2b^2}}. \quad (2.58)$$

Por lo que el vector tangente es

$$\mathbf{t} = \left(-ab\sqrt{2} \operatorname{sen} u, ab\sqrt{2} \cos u, \frac{1}{2b} u \right). \quad (2.59)$$

2.4. Plano osculador

La tangente a una curva en un punto puede ser definida como la posición límite de una recta que pasa por dos puntos consecutivos de la curva cuando éstos se aproximan. Análogamente se puede ahora tratar de encontrar el plano que pasa por tres puntos consecutivos de la curva, es decir, conocer la posición límite de un plano que pasa por tres puntos cercanos de la curva cuando dos de estos tres puntos se aproximan al tercero. Para este propósito consideremos el plano

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{a} = p, \quad (2.60)$$

que pasa por los puntos P, Q, R en la curva dados por $\mathbf{X} = \mathbf{x}(u_0)$, $\mathbf{X} = \mathbf{x}(u_1)$, $\mathbf{X} = \mathbf{x}(u_2)$, donde \mathbf{X} es un punto genérico del plano, \mathbf{a} es un vector perpendicular al plano y p es constante. La función

$$f(u) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} - p, \quad \text{donde} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(u), \quad (2.61)$$

satisface las condiciones:

$$f(u_0) = 0, \quad f(u_1) = 0, \quad f(u_2) = 0.$$

Y de acuerdo al teorema de Rolle, entonces existen las relaciones

$$f'(v_1) = 0, \quad f'(v_2) = 0, \quad u_0 \leq v_1 \leq u_1, \quad u_1 \leq v_2 \leq u_2,$$

y

$$f''(v_3) = 0, \quad v_1 \leq v_3 \leq v_2.$$

Cuando Q y R se aproximan a P , $u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \rightarrow u_0$ y escribiendo u para u_0 para los valores de \mathbf{a} y p las condiciones:

$$\begin{aligned} f(u) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} - p = 0, \\ f'(u) &= \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}} \text{ en } P(u)) \\ f''(u) &= \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{a} = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Eliminando \mathbf{a} de las ecuaciones (2.62) y (2.60) obtenemos la relación lineal entre los vectores $\mathbf{X} - \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$ (todos $\perp \mathbf{a}$) es:

$$\mathbf{X} - \mathbf{x} + \lambda \dot{\mathbf{x}} + \mu \ddot{\mathbf{x}}, \quad \lambda, \mu \text{ constantes arbitrarias} \quad (2.63)$$

el plano puede estar dado por la expresión en coordenadas como

$$\begin{vmatrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 & X_3 - x_3 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.64)$$

Esta es la ecuación del plano que pasa por estos tres puntos consecutivos de la curva, al cual Johannes Bernoulli dió el nombre de *plano osculador* de la curva en el punto X . Éste pasa por (al menos) *tres puntos consecutivos de la curva*. También pasa por la línea tangente unitaria (dada por $\mu = 0$ en (2.63)). El plano osculador no está determinado cuando $\ddot{\mathbf{x}} = 0$ o cuando $\ddot{\mathbf{x}}$ es proporcional a $\dot{\mathbf{x}}$.

Podemos expresar las ecuaciones (2.63) y (2.64) en otra forma por medio del *producto escalar triple* de tres vectores $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) = \text{etc.} \\ &= (\mathbf{pqr}) = (\mathbf{qrp}) = (\mathbf{rpq}) = \text{etc.} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Es cero cuando los tres vectores (cada uno supone $\neq 0$) son *coplanares*, es decir, pueden moverse en un plano. La siguiente fórmula es útil:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad (2.66)$$

con el caso especial:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2. \quad (2.67)$$

Siempre se tiene que $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$. Cuando $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ entonces \mathbf{w} tiene la dirección de \mathbf{v} , o $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ en este caso decimos que \mathbf{v} y \mathbf{w} son *colineales*.

La ecuación del plano osculador puede ser descrita también al considerar la ecuación (2.65) como la ecuación (2.64):

$$(\mathbf{X} - \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = 0. \quad (2.68)$$

Como dos casos excepcionales, si son válidos en todos los puntos de la curva entonces ambos se cumplen para líneas rectas y solo en ellas:

1. $\ddot{\mathbf{x}} = 0$, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}$, $\mathbf{x} = u\mathbf{a} + \mathbf{b}$,
2. $\ddot{\mathbf{x}} = \lambda \dot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}e^{\lambda t} = \mathbf{c}f_1(t)$, $\mathbf{x} = \mathbf{c}f_2(t) + \mathbf{d}$,

donde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ son vectores fijos.

Si $\ddot{\mathbf{x}} = \lambda \dot{\mathbf{x}}$ ($\ddot{\mathbf{x}} \neq 0$) en un punto de la curva, entonces llamamos a este punto *punto de inflexión*. La tangente en tal punto tiene tres puntos consecutivos en común con la curva.

Ejemplo 2.9 *Plano osculador de una curva plana.*

Las líneas PQ y QR consideradas en (2.60), yacen en el plano de la curva, por lo que el plano osculador coincide con el plano de la curva y consecuentemente es el mismo para todos los puntos de la curva. Cuando la curva es una línea recta, el plano osculador está indeterminado y puede ser cualquier plano que pasa por

la línea.

Ejemplo 2.10 *Plano osculador de una hélice cilíndrica de paso constante.*

La ecuación del plano osculador es

$$\begin{vmatrix} X_1 - a \cos u & X_2 - a \sin u & X_3 - bu \\ -a \sin u & a \cos u & b \\ -a \cos u & -a \sin u & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.69)$$

o escribiendo (x, y, z) para (X_1, X_2, X_3) :

$$bx \sin u - by \cos u + az = abu. \quad (2.70)$$

Esta ecuación se satisface para $x = \lambda \cos u$, $y = \lambda \sin u$, $z = bu$ para todos los valores de λ , la cual (con u fijo) muestra que el plano osculador en P contiene la línea PA paralela al plano XOY que intersecta el eje Z . El plano que pasa por PA y la tangente en P es el plano osculador en P figura (14). El lugar geométrico de las líneas PA indicado por $P_1A_1, P_2A_2, P_3A_3, \dots$, es una superficie llamada *helicoidal dextrógira*.

Ejemplo 2.11 *Plano osculador de una hélice circular de paso variable.*

La ecuación del plano osculador es

$$\begin{vmatrix} X_1 - a \cos u & X_2 - a \sin u & X_3 - bu^2 \\ -a \sin u & a \cos u & 2bu \\ -a \cos u & -a \sin u & 2b \end{vmatrix} = 0, \quad (2.71)$$

cuya expresión escrita en (x, y, z) en lugar de X_1, X_2, X_3 respectivamente se reduce a

$$2ab \left[x(\cos u + u \sin u) + y(\sin u - u \cos u) + a \left(\frac{z}{2b} - \frac{au^2}{2} - 1 \right) \right] = 0. \quad (2.72)$$

2.5. Curvatura

La línea en el plano osculador en P perpendicular a la línea tangente es llamada *normal principal*. En dirección de la normal principal se coloca un vector unitario \mathbf{n} , su sentido puede seleccionarse arbitrariamente de manera que sea el mismo a lo largo de la curva. Tomando a la longitud de arco como parámetro y recordando que se denota la derivación con respecto a s con prima se tiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \quad \mathbf{t} = d\mathbf{x}/ds = \mathbf{x}', \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1, \quad (2.73)$$

al diferenciar $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ se obtiene que el vector $\mathbf{t}' = d\mathbf{t}/ds$ es perpendicular a \mathbf{t} :

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0, \quad (2.74)$$

y como

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}' = \dot{\mathbf{x}}u' , \quad \mathbf{t}' = \ddot{\mathbf{x}}(u')^2 + \dot{\mathbf{x}}u'' , \quad (2.75)$$

se observa que \mathbf{t}' tiene coordenadas $\dot{\mathbf{x}}$ y $\ddot{\mathbf{x}}$ yace en el plano de $\dot{\mathbf{x}}$ y $\ddot{\mathbf{x}}$ y por lo tanto en el plano osculador.

Podemos introducir un factor de proporcionalidad κ tal que

$$\mathbf{k} = \mathbf{t}' = d\mathbf{t}/ds = \kappa \mathbf{n} . \quad (2.76)$$

Definición 2.5.1. El vector \mathbf{k} de (2.76) es llamado *vector de curvatura*, este vector expresa la razón de cambio de la tangente al moverse a lo largo de la curva. El factor κ es llamado *curvatura*, $|\kappa|$ es la longitud del vector de curvatura.

A pesar de que el sentido de \mathbf{n} puede elegirse arbitrariamente, el sentido de $d\mathbf{t}/ds$ está perfectamente determinado por la curva independientemente de su orientación: cuando s cambia de signo, \mathbf{t} también cambia de signo, es decir, el sentido de la tangente unitaria \mathbf{t} depende de la orientación de la curva en cambio la \mathbf{t}' es independiente de ella. Cuando el sentido de \mathbf{n} se toma en el sentido de $d\mathbf{t}/ds$ (como es común hacerlo), entonces κ es positiva siempre pero no nos adherimos a esta convención.

Cuando comparamos los vectores tangentes $\mathbf{t}(u)$ en P y $\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}(u+h)$ en Q al mover \mathbf{t} de P a Q , entonces \mathbf{t} , $\Delta\mathbf{t}$ y $\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}$ forman un triángulo isósceles con dos lados igual a 1, formando el *ángulo de contingencia* $\Delta\varphi$. Observe que el ángulo $\Delta\varphi$ es una función de s porque para cada s que corresponde a cada punto en la curva C determina un valor del ángulo. Como

$$\begin{aligned} |\Delta\mathbf{t}| &= 2 \sin \Delta\varphi/2 \\ &= \Delta\varphi + \text{términos de orden superior en } \Delta\varphi , \end{aligned} \quad (2.77)$$

cuando el ángulo se encuentra para $\Delta\varphi \rightarrow 0$ entonces:

$$|\kappa| = |d\mathbf{t}/ds| = |\mathbf{k}| = |d\varphi/ds| , \quad (2.78)$$

la cual es la definición de curvatura para el caso de curvas planas.

De la ecuación (2.76) se obtiene que

$$\kappa^2 = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}'' . \quad (2.79)$$

Definición 2.5.2. Denominamos κ^{-1} como R , el valor absoluto de R es el *radio de curvatura* el cual es el radio del círculo que pasa por tres puntos consecutivos de la curva, llamado círculo osculador.

Para la prueba se observa que este círculo yace en el plano osculador. Sea un círculo determinado en este plano como la intersección del plano y la esfera dados por

$$(\mathbf{X} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{c}) - r^2 = 0 , \quad (2.80)$$

donde \mathbf{X} es un punto genérico de la esfera, \mathbf{c} es el centro y r es el radio. Esta esfera tiene que pasar por los puntos P, Q, R en la curva dada por $\mathbf{X} = \mathbf{x}(s_0)$, $\mathbf{X} = \mathbf{x}(s_1)$, $\mathbf{X} = \mathbf{x}(s_2)$, el vector \mathbf{c} va del origen a un punto en el plano osculador tal que $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ está en el plano osculador. Con el razonamiento como en la sección 2.4, en la función

$$f(s) = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - r^2, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \quad \mathbf{c}, r \text{ cte.}, \quad (2.81)$$

encontramos, para los valores límite de \mathbf{c} y r las condiciones

$$\begin{aligned} f(s) &= 0, \\ f'(s) &= 0 \quad \text{ó} \quad (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}' = 0, \\ f''(s) &= 0 \quad \text{ó} \quad (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}'' + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}'' + 1 = 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Como $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ yace en el plano osculador, es una combinación lineal de \mathbf{x}' y \mathbf{x}'' . Por lo que

$$\mathbf{x} - \mathbf{c} = \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{x}'', \quad (2.83)$$

donde λ y μ están determinados por las ecuaciones (2.82). Encontramos $\lambda = 0$, $\mu \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}'' = -1$, tal que

$$\mathbf{c} = \mathbf{x} - \mu \mathbf{x}'', \quad (2.84)$$

o en consecuencia de las ecuaciones (2.76) y (2.79):

$$\mathbf{c} = \mathbf{x} + \kappa \mathbf{n} / \kappa^2 = \mathbf{x} + R \mathbf{n}. \quad (2.85)$$

Esto muestra que el centro del círculo osculador yace en la normal principal a una distancia $|R|$ de P . Como $R = \kappa^{-1}$ puede ser positivo o negativo, el vector $R\mathbf{n}$ es independiente del sentido de \mathbf{n} , teniendo el sentido del vector curvatura. Su punto final es también llamado el centro de curvatura.

La ecuación (2.79) muestra algebraicamente que la ecuación de la curva determina κ^2 y no a κ únicamente. Si solo consideremos el radio de curvatura no existe mucha diferencia en qué signo se le asigne a κ . La forma más sencilla es tomar $\kappa > 0$, esto es, tomar el sentido del vector de curvatura en sentido de \mathbf{n} . Pero el signo de κ es de importancia cuando consideramos una familia de vectores de curvatura. Por ejemplo, si tomamos una curva plana (con derivadas continuas) con un punto de inflexión en A , entonces los vectores de curvatura apuntan en diferentes direcciones en ambos lados de A y puede ser conveniente distinguir los lados cóncavo y convexo de la curva con diferentes signos de κ . El campo de vectores unitarios \mathbf{n} a lo largo de las curvas es, por lo tanto, continuo.

Cuando la curva es plana, la imprecisión en la elección del signo de κ se evita postulando que el sentido de rotación de \mathbf{t} a \mathbf{n} es el mismo que el de OX a OY . Entonces κ puede definirse por la ecuación $\kappa = d\varphi/ds$, donde φ es el ángulo del vector tangente con el eje positivo X .

2.6. Torsión

La curvatura mide la razón de cambio de la tangente cuando se mueve a lo largo de una curva. Para la razón de cambio del plano osculador se debe introducir una medida correspondiente. Para esto se introduce la binormal cuya definición es la siguiente.

Definición 2.6.1. La normal al plano osculador en un punto P de una curva espacial es llamada *binormal*.

En P se coloca el *vector unitario binormal* \mathbf{b} de tal manera que el sentido $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{b}$ es el mismo que $OX \rightarrow OY \rightarrow OZ \rightarrow$, en otras palabras como $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares, definimos el vector \mathbf{b} con la fórmula:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} . \quad (2.86)$$

Estos tres vectores $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ pueden tomarse como un nuevo marco de referencia. Los vectores satisfacen las relaciones:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1 , \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 , \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1 , \quad (2.87)$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0 , \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0 , \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0 . \quad (2.88)$$

Definición 2.6.2. El *triedro móvil* está formado por el marco de referencia que se mueve a lo largo de la curva.

La razón de cambio del plano osculador está expresado por el vector

$$\mathbf{b}' = d\mathbf{b}/ds . \quad (2.89)$$

Este vector se encuentra en la dirección de la normal principal, derivando la ecuación $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0$ se obtiene

$$\mathbf{b}' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{t}' = 0 , \quad (2.90)$$

$$(2.91)$$

ó

$$\mathbf{b}' \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{b} \cdot \kappa \mathbf{n} = 0 , \quad (2.92)$$

y de la derivación de $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ se obtiene

$$\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = 0 . \quad (2.93)$$

Ahora al introducir un factor de proporcionalidad τ podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.6.3. En

$$d\mathbf{b}/ds = -\tau \mathbf{n} , \quad (2.94)$$

llamamos al factor de proporcionalidad τ la *torsión* de la curva, la cual puede ser negativa o positiva, como la curvatura, y como en la ecuación de la curva se define solo κ^2 , ésta ecuación define a τ únicamente.

Esto puede mostrarse al expresar a τ como sigue:

$$\begin{aligned}\tau &= -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n})' = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}') \\ &= -\kappa^{-1} \mathbf{x}'' \cdot (\mathbf{x}' \times (\kappa^{-1} \mathbf{x}''))' \\ &= \kappa^{-2} (\mathbf{x}' \mathbf{x}'' \mathbf{x}'''),\end{aligned}\tag{2.95}$$

ó

$$\tau = \frac{(\mathbf{x}' \mathbf{x}'' \mathbf{x}''')}{\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}''}, \quad \mathbf{x}' = d\mathbf{x}/ds.\tag{2.96}$$

Esta fórmula expresa τ en $\mathbf{x}(s)$ y sus derivadas independientemente de la orientación de la curva, así como el cambio de s con $-s$, no afectan al miembro del lado derecho de (2.96). El signo de τ tiene un significado para la curva no orientada. Se discutirá esto más ampliamente a continuación.

Las ecuaciones

$$\mathbf{x}'(s) = d\mathbf{x}/ds = (d\mathbf{x}/du)(du/ds) = \dot{\mathbf{x}}u' = \dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})^{-1/2},\tag{2.97}$$

$$\mathbf{x}'' = \ddot{\mathbf{x}}(u')^2 + \dot{\mathbf{x}}u'' = [(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})\ddot{\mathbf{x}} - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}](\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})^{-2},\tag{2.98}$$

$$\mathbf{x}''' = \ddot{\mathbf{x}}(u')^3 + 3\dot{\mathbf{x}}u'u'' + \dot{\mathbf{x}}u'''\tag{2.99}$$

permiten expresar a κ^2 y a τ en términos de un parámetro arbitrario. Hallando las fórmulas

$$\kappa^2 = \frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \cdot (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})}{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})^3}, \quad \dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/du,\tag{2.100}$$

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}})}{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \cdot (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})}.\tag{2.101}$$

Se observa que los inversos de κ y τ tienen dimensión L tal que $|\kappa^{-1}| = |R|$ es llamado el radio de curvatura, $|\tau^{-1}| = |T|$ es llamado el *radio de torsión*. Sin embargo la cantidad $|T|$ no admite una representación geométrica más elegante como en el caso de $|R|$.

Ejemplo 2.12 *Curvatura y torsión en una hélice circular de paso constante.*

De la ecuación (2.49) derivamos con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\mathbf{x}' \left(-\frac{a}{c} \sin u, \frac{a}{c} \cos u, \frac{b}{c} \right),\tag{2.102}$$

$$\mathbf{x}'' \left(-\frac{a}{c^2} \cos u, -\frac{a}{c^2} \sin u, 0 \right), \quad \left(s \text{ parámetro, } u = \frac{s}{c} \right)\tag{2.103}$$

$$\mathbf{x}''' \left(\frac{a}{c^3} \sin u, -\frac{a}{c^3} \cos u, 0 \right).\tag{2.104}$$

Por lo que la curvatura es

$$\kappa^2 = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}'' = a^2/c^4, \quad \kappa = \pm a/c^2,\tag{2.105}$$

y la torsión es

$$\tau = \frac{(\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}''')}{\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}''} = \frac{b}{c} \begin{vmatrix} -\frac{a}{c^2} \cos u & -\frac{a}{c^2} \sin u \\ \frac{a}{c^3} \sin u & -\frac{a}{c^3} \cos u \end{vmatrix} \frac{c^4}{a^2} = \frac{b}{c^2}. \quad (2.106)$$

Por lo que τ es positivo cuando b es positivo, el cual es el caso cuando la hélice es dextrógira, (véase sección 2.1), τ es negativo para una hélice levógira. Podemos ver también que κ y τ son ambos constantes y de las ecuaciones

$$a = \frac{\pm\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}, \quad b = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}, \quad (2.107)$$

podemos derivar una y sólo una hélice circular con un κ y τ dado y con una posición dada con respecto a los ejes coordenados (cambiar a en $-a$ no cambia la hélice solo cambia a u en $u + \pi$).

Ejemplo 2.13 *Torsión en una curva plana.*

Como b es constante, $\tau = 0$. Si, conversamente, $\tau = 0$, $(\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}) = 0$ ó $\ddot{\mathbf{x}} + \lambda\dot{\mathbf{x}} + \mu\mathbf{x} = 0$ siendo λ y μ funciones de s . Esta es una ecuación lineal homogénea en $\dot{\mathbf{x}}$, la cual se resuelve con una expresión de la forma [11]

$$\dot{\mathbf{x}} = f_1(s)\mathbf{c}_1 + f_2(s)\mathbf{c}_2. \quad (2.108)$$

Por lo que

$$\mathbf{x} = F_1(s)\mathbf{c}_1 + F_2(s)\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \quad (2.109)$$

donde \mathbf{c}_i , $i = 1, 2, 3$ son vectores constantes y las funciones F_j , $j = 1, 2$ son determinadas por las funciones arbitrarias λ y μ . Esto muestra que la curva $\mathbf{x}(s)$ yace en el plano que pasa por el punto final de \mathbf{c}_3 paralelo a \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 . Esto significa que $\mathbf{x}(s)$ puede ser cualquier curva plana. Para líneas rectas la torsión está indeterminada.

Anteriormente a la curvatura y a la torsión se les conocía como la *primera* y *segunda* curvatura y las curvas espaciales eran conocidas como *curvas de doble curvatura*.

Finalizamos esta sección con la mención de que el término torsión es debido a L.I. Vallée, *Traité de géométrie descriptive*, p.295 de la edición de 1825, el término anterior era *flexión*. El nombre de *binormal* es debido a B. de Saint Venant, *Journal de l'École Polytechnique* 18, p.17, 1845.

2.7. Involutas y Evolutas

2.7.1. Las involutas

Definición 2.7.1. Las tangentes a una curva espacial $\mathbf{x}(s)$ generan una superficie. Las curvas en esta superficie que intersectan las líneas

tangentes generadoras en ángulos de 90° se conocen como *involutas* de la curva.

La ecuación de la familia de involutas es de la forma

$$\mathbf{y}_I(s) = \mathbf{x}(s) + \lambda(s)\mathbf{t}(s) . \quad (2.110)$$

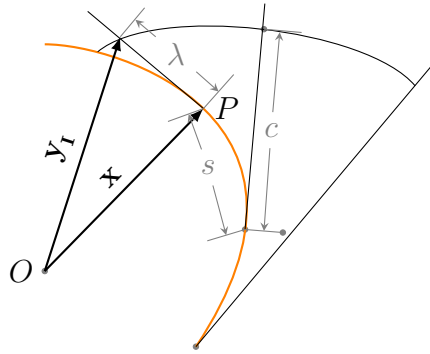


Figura 2.10: Gráfica para la geometría de la involuta.

Donde $\lambda(s)$ se determina de la condición de ortogonalidad del vector tangente de la involuta $d\mathbf{y}_I/ds$ con el vector tangente de la curva, es decir

$$\mathbf{t} \cdot d\mathbf{y}_I/ds = \mathbf{t} \cdot \left(\mathbf{t} + \mathbf{t} \frac{d\lambda}{ds} + \lambda \kappa \mathbf{n} \right) = 1 + \frac{d\lambda}{ds} = 0 \quad (2.111)$$

reescribiendo

$$\frac{d\lambda}{ds} = -1 \quad (2.112)$$

ó

$$d\lambda = -ds \quad (2.113)$$

integrando

$$\int^s d\lambda = - \int^s d\sigma + c \quad (2.114)$$

se obtiene

$$\lambda(s) = c - s . \quad (2.115)$$

La ecuación de la familia de involutas es por lo tanto

$$\mathbf{y}_I = \mathbf{x} + (c - s)\mathbf{t} . \quad (2.116)$$

Para cada valor de c existe una involuta, éstas pueden ser obtenidas imaginando el desenrollado de una cuerda que se supone ajustada a lo largo de la curva, manteniendo la cuerda extendida todo el tiempo.

2.7.2. Las evolutas

Por otro lado está el problema converso, es decir, encontrar las curvas que admitan una curva C dada como involuta es más complicado.

Definición 2.7.2 Las curvas que admiten una curva C dada como involuta son llamadas *evolutas* de C .

Las tangentes de las evolutas son normales a $C(x)$ y podemos escribir para la ecuación de la evoluta y_E :

$$y_E(s) = x(s) + a_1(s)\mathbf{n}(s) + a_2(s)\mathbf{b}(s) . \quad (2.117)$$

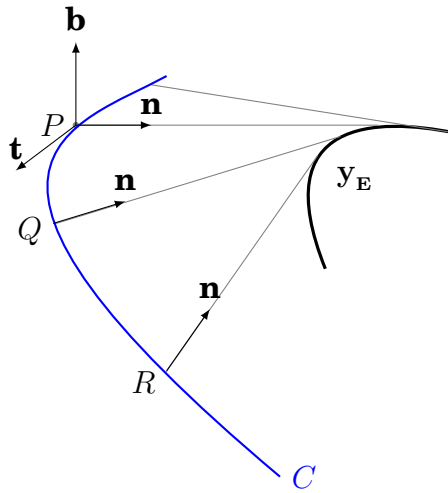


Figura 2.11: Gráfica para la geometría de la evoluta.

Por lo que

$$\frac{dy_E}{ds} = (1 - a_1\kappa)\mathbf{t} + \left(\frac{da_1}{ds} - \tau a_2\right)\mathbf{n} + \left(\frac{da_2}{ds} + \tau a_1\right)\mathbf{b} \quad (2.118)$$

debe de tener la dirección de $a_1\mathbf{n} + a_2\mathbf{b}$, entonces

$$\kappa = 1/a_1 , \quad \text{ó} \quad R = a_1 , \quad (2.119)$$

y

$$\frac{\frac{da_1}{ds} - \tau a_2}{a_1} = \frac{\frac{da_2}{ds} + \tau a_1}{a_2} , \quad (2.120)$$

lo cual puede ser escrito en la forma

$$\frac{\frac{dR}{ds} - \tau a_2}{R} = \frac{\frac{da_2}{ds} + \tau R}{a_2}, \quad (2.121)$$

$$\frac{\frac{dR}{ds}}{R} - \tau \frac{a_2}{R} = \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{ds} + \frac{R}{a_2} \tau, \quad (2.122)$$

$$\tau \left(\frac{R}{a_2} + \frac{a_2}{R} \right) = \frac{\frac{dR}{ds}}{R} - \frac{1}{a_2} \frac{da_2}{ds}, \quad (2.123)$$

$$\tau = \frac{a_2 \frac{dR}{ds} - R \frac{da_2}{ds}}{a_2^2 + R^2}. \quad (2.124)$$

Al integrar esta expresión tenemos

$$\int \frac{a_2 \frac{dR}{ds} - R \frac{da_2}{ds}}{a_2^2 + R^2} = \int \frac{a_2 \left(\frac{dR}{ds} - \frac{R}{a_2} \frac{da_2}{ds} \right)}{a_2^2 \left[1 + \left(\frac{R}{a_2} \right)^2 \right]} = \int \frac{\left(\frac{dR}{ds} - \frac{R}{a_2} \frac{da_2}{ds} \right)}{a_2 \left[1 + \left(\frac{R}{a_2} \right)^2 \right]} = \arctan \left(\frac{R}{a_2} \right) = \int \tau ds + \text{cte.} \quad (2.125)$$

ó

$$\tan \left[\arctan \left(\frac{R}{a_2} \right) \right] = \tan \left(\int \tau ds + \text{cte.} \right) \quad (2.126)$$

y entonces

$$\frac{R}{a_2} = \tan \left(\int \tau ds + \text{cte.} \right) \quad (2.127)$$

ó

$$a_2 = \frac{R}{\tan \left(\int \tau ds + \text{cte.} \right)} = R \left[\cot \left(\int \tau ds + \text{cte.} \right) \right]. \quad (2.128)$$

La ecuación de la evoluta es:

$$\mathbf{y}_E = \mathbf{x} + R \left[\mathbf{n} + \cot \left(\int \tau ds + \text{cte.} \right) \mathbf{b} \right]. \quad (2.129)$$

Esta ecuación muestra que un punto de la evoluta yace en el eje polar del punto correspondiente de la curva y el ángulo bajo el cual dos evolutas diferentes son vistas desde la curva dada es constante. Para curvas planas tenemos

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + R\mathbf{n} + \lambda R\mathbf{b}, \quad (2.130)$$

con λ constante. Para $\lambda = 0$ obtenemos la evoluta plana. Las otras evolutas yacen en el cilindro erigido sobre esta evoluta plana usada como base y con las líneas generadoras perpendiculares al plano las cuales son hélices sobre el cilindro.

El lugar geométrico de los ejes polares es una superficie llamada *la desarrolable polar*. En esta superficie están las ∞^1 de evolutas de la curva y también el

lugar geométrico de las esferas osculantes. Este lugar geométrico no puede ser ninguna de las evolutas, ya que su tangente tiene la dirección de la binormal \mathbf{b} mientras que la tangente a la evoluta tiene la dirección

$$R\mathbf{n} + a_2\mathbf{b} . \quad (2.131)$$

Finalizamos esta sección y también el capítulo con la mención de los aspectos históricos de las curvas. La teoría de evolutas espaciales se debe a Monge (1771, publicado en 1785, el documento está reimpreso en *Applications*). Los estudios consecuentes fueron publicados por Lancret en dos memorias en 1805 y 1811, *Mémoires présentées á l'Institut*, París. Lancret introdujo las ‘développoides’ de una curva, que son curvas cuyas tangentes intersectan a la curva en un ángulo constante diferente de 90° .

CAPÍTULO 3

FÓRMULAS DE FRENET-SERRET

Quien no ha cometido nunca un error, nunca ha intentado nada nuevo.

Albert Einstein, físico alemán

En este capítulo se describe cómo se obtienen las ecuaciones de Frenet-Serret usando los vectores tangente, normal y binormal de un triedro móvil. Se estudian otros temas referentes a las curvas tales como óvalos y algunos casos especiales de hélices.

3.1. El triedro móvil

Hemos encontrado que $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$. Para completar esta información vamos a expresar también $\mathbf{n}' = d\mathbf{n}/ds$ en términos de los vectores unitarios del triedro móvil. Como \mathbf{n}' es perpendicular a \mathbf{n} , entonces $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$, se puede expresar a \mathbf{n}' linealmente en términos de \mathbf{t} y \mathbf{b} :

$$\mathbf{n}' = \alpha_1\mathbf{t} + \alpha_2\mathbf{b} . \quad (3.1)$$

De las ecuaciones (2.87) resulta

$$\alpha_1 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}' = -\mathbf{n} \cdot \kappa\mathbf{n} = -\kappa , \quad (3.2)$$

y

$$\alpha_2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}' = +\mathbf{n} \cdot \tau\mathbf{n} = \tau , \quad (3.3)$$

se tiene para $d\mathbf{n}/ds$:

$$\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} , \quad (3.4)$$

Definición 3.1.1. Las tres ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa\mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau\mathbf{n}\end{aligned}\tag{3.5}$$

junto con $dx/ds = t$ describen el movimiento del triedro móvil a lo largo de la curva. Ellas toman una posición central en la teoría de curvas espaciales y son conocidas como las *fórmulas de Frenet* o de *Serret-Frenet*.

Éstas fueron obtenidas en la tesis de doctorado de F. Frenet, presentada en 1847 en la ciudad de Toulouse, Francia, y se encuentran también en un resumen de la misma con el título “Sur les courbes à double courbure” publicado en *Journal de Mathématique*. en 1852. Por otro lado, el artículo de J.A. Serret fue publicado en la misma revista en 1851 aunque contenía solamente la primera y la tercera de las ecuaciones de Frenet-Serret.

Las coordenadas de \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} son los cosenos de los ángulos que la tangente orientada, la normal principal y la binormal forman con el sentido positivo de los ejes de coordenadas. Cuando indicamos esto con $\mathbf{t}(\cos \alpha_i)$, $\mathbf{n}(\cos \beta_i)$, $\mathbf{b}(\cos \gamma_i)$, $i = 1, 2, 3$, las fórmulas de Frenet toman la siguiente forma coordenada:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \cos \alpha_i &= \kappa \cos \beta_i , \\ \frac{d}{ds} \cos \beta_i &= -\kappa \cos \alpha_i + \tau \cos \gamma_i , \\ \frac{d}{ds} \cos \gamma_i &= -\tau \cos \beta_i .\end{aligned}\tag{3.6}$$

Los tres planos formados por los tres lados del triedro móvil son definidos como sigue

Definición 3.1.2.

1. El *plano osculador*, contiene la tangente principal y la normal principal. Su ecuación es

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{b} = 0 .\tag{3.7}$$

2. El *plano normal*, contiene la normal principal y la binormal. Su ecuación es

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t} = 0 .\tag{3.8}$$

3. El *plano rectificante*, contiene la binormal y la tangente. Su ecuación es

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 .\tag{3.9}$$

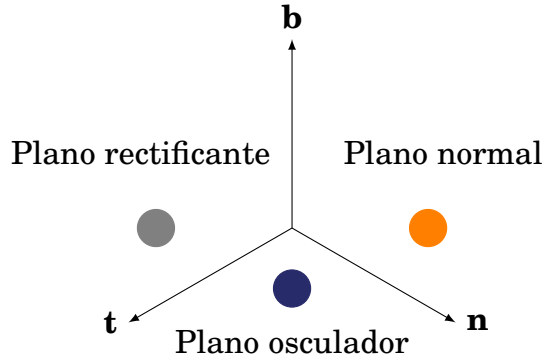


Figura 3.1: Los planos rectificante, normal y osculador determinados por un triedro móvil sobre una curva espacial.

Si tomamos el triedro móvil en P como el triedro de un conjunto de nuevas coordenadas cartesianas x, y, z entonces el comportamiento de la curva cercano a P está expresado por las fórmulas (3.6) en la forma ($\mathbf{x}'' = \kappa\mathbf{n}$, $\mathbf{x}''' = -\kappa^2\mathbf{t} + \kappa'\mathbf{n} + \kappa\tau\mathbf{b}$):

$$x' = 1, \quad y' = 0, \quad z' = 0, \quad (3.10)$$

$$x'' = 0, \quad y'' = \kappa, \quad z'' = 0, \quad (3.11)$$

$$x''' = -\kappa^2, \quad y''' = \kappa', \quad z''' = \kappa\tau. \quad (3.12)$$

De estas ecuaciones se deduce para cuando $s \rightarrow 0$

$$\lim \frac{y}{x^2} = \lim \frac{y'}{2xx'} = \lim \frac{y''}{2x'^2} = \frac{\kappa}{2}, \quad (3.13)$$

$$\lim \frac{z}{x^3} = \lim \frac{z'}{3x^2x'} = \lim \frac{z''}{6x(x')^2} = \lim \frac{z'''}{6(x')^3} = \frac{\kappa\tau}{6}, \quad (3.14)$$

por lo que

$$\lim \frac{z^2}{y^3} = \frac{\kappa^2\tau^2}{36} \frac{8}{\kappa^3} = \frac{2}{9\tau^2\kappa^{-1}} = \frac{2}{9}R\tau^2. \quad (3.15)$$

Esto muestra que las proyecciones de la curva en los tres planos del triedro móvil se comportan cerca de P como las curvas

$$y = \frac{\kappa}{2}x^2 \quad (\text{proyección en el plano osculador}), \quad (3.16)$$

$$z = \frac{\kappa\tau}{6}x^3 \quad (\text{proyección en el plano rectificador}), \quad (3.17)$$

$$z^2 = \frac{2}{9}\tau^2Ry^3 \quad (\text{proyección en el plano normal}). \quad (3.18)$$

3.2. Ecuaciones naturales de las curvas

Cuando una curva está definida por una ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, su forma depende de la elección del sistema de coordenadas. Cuando una curva es movida sin ningún cambio en su forma, su ecuación con respecto al sistema coordenado cambia.

No es inmediatamente obvio si las dos curvas representan a la misma curva excepto por su posición con respecto al sistema de coordenadas. Incluso en el caso de las ecuaciones de segundo grado en el plano (cónicas) determinarlo requiere cierto esfuerzo. Por lo que surge la siguiente pregunta: ¿Es posible caracterizar una curva independientemente del sistema de coordenadas? Esto sí puede hacerse, la ecuación que representa a la curva independientemente del sistema de coordenadas es llamada *ecuación natural* o *ecuación intrínseca*.

[23] Se observa fácilmente que la relación entre curvatura y la longitud de arco proporciona una ecuación natural para una curva plana, de hecho, si se proporciona

$$\kappa = \kappa(s) , \quad (3.19)$$

luego utilizando las relaciones

$$R^{-1} = \kappa = d\varphi/ds , \quad \cos \varphi = dx/ds , \quad \sin \varphi = dy/ds , \quad (3.20)$$

se encuentra que x y y pueden obtenerse efectuando dos integraciones

$$x = \int_{\varphi_0}^{\varphi} R \cos \left(\int_{s_0}^s \kappa d\sigma \right) d\phi , \quad (3.21)$$

$$y = \int_{\varphi_0}^{\varphi} R \sin \left(\int_{s_0}^s \kappa d\sigma \right) d\phi . \quad (3.22)$$

El cambio de constante de integración en x y y se refiere a la traslación, el cambio de constante de integración en φ significa rotación de la curva, por lo que podemos obtener todas las posibles ecuaciones en coordenadas rectangulares seleccionando en cada caso la más conveniente para nuestro propósito.

La representación paramétrica de la curva (3.21) y (3.22) en términos de κ (o de R) y φ fue introducida por Euler y usada para varias curvas espirales incluso para la espiral que ahora es conocida como la espiral de Cornu [7]. La elección de κ y φ como coordenadas naturales puede ser criticada pues s posee una constante arbitraria y κ está determinada solo por el signo. Es por esto que G. Scheffers ha desarrollado un sistema de ecuaciones naturales de una curva plana en la cual $d(\kappa^2)/d\varphi$ está expresada como una función de κ^2 . Véase [21].

Ejemplo 3.1 *Círculo.*

Considerando las ecuaciones paramétricas del círculo (2.5), $\kappa = a^{-1} = R^{-1} = \text{cte.}$, y por otro lado tomando en cuentas las ecuaciones (3.21) y (3.22), para el caso del círculo resulta $x = R \sin \varphi$, $y = -R \cos \varphi$. Escogiendo ahora $\varphi = u + \frac{\pi}{2}$, entonces se obtienen las ecuaciones paramétricas estándar del círculo $x = R \cos u$, $y = R \sin u$. Cuando $\kappa = 0$ obtenemos una línea recta.

Ejemplo 3.2 *Espiral logarítmica.*

Consideremos

$$R = as + b = s \cot \alpha + p \csc \alpha \quad \text{con} \quad (\alpha, p \text{ cte.}) \quad (3.23)$$

Luego

$$\varphi = \alpha + (\tan \alpha) \ln \frac{s \cos \alpha + p}{p}, \quad (\text{eligiendo } s = 0 \text{ para } \varphi = \alpha), \quad (3.24)$$

tenemos

$$R = p(\csc \alpha) \exp(\theta \cot \alpha), \quad \theta = \varphi - \alpha. \quad (3.25)$$

Introduciendo coordenadas polares $x + iy = re^{i\theta}$, encontramos

$$r = p \exp(\theta \cot \alpha). \quad (3.26)$$

Ejemplo 3.3 *Involuta circular.*

Consideremos

$$R^2 = 2as, \quad \varphi = \sqrt{2/a}\sqrt{s}, \quad s = \frac{1}{2}a\varphi^2, \quad (3.27)$$

si

$$R = a\varphi, \quad (3.28)$$

entonces

$$x = a \int \varphi \cos \varphi d\varphi = a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi), \quad (3.29)$$

$$y = a \int \varphi \sin \varphi d\varphi = a(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi). \quad (3.30)$$

Ejemplo 3.4 *Epicicloide.*

Comenzamos con las ecuaciones en x y y :

$$x = (a + b) \cos \psi - b \cos \frac{a+b}{b} \psi, \quad (3.31)$$

$$y = (a + b) \sin \psi - b \sin \frac{a+b}{b} \psi, \quad (3.32)$$

$$s = 4 \frac{b(a+b)}{a} \cos \frac{a\psi}{2b}, \quad (3.33)$$

$$R = \frac{4b(a+b)}{a+2b} \sin \frac{a\psi}{2b}. \quad (3.34)$$

Por lo que la ecuación natural es:

$$\frac{s^2}{A^2} + \frac{R^2}{B^2} = 1, \quad (3.35)$$

donde

$$A = \frac{4b(a+b)}{a}, \quad B = \frac{4b(a+b)}{a+2b}, \quad A > B. \quad (3.36)$$

Cuando $A < B$ obtenemos una hipocicloide. Una epicicloide es el lugar geométrico de un punto de la circunferencia de un círculo cuando rueda por fuera de un círculo fijo, una hepicicloide es cuando rueda por dentro. Cuando A/B es racional, la curva es cerrada. Cuando $a \rightarrow \infty$, $A \rightarrow 4b$, $b \rightarrow 4b$ obtenemos

$$s^2 + R^2 = 16b^2, \quad (3.37)$$

la cual es la ecuación de la *cicloide*, obtenida rodando un círculo de radio b sobre una línea recta.

Analizando el teorema fundamental de las curvas espaciales

Teorema 3.2.1. (Teorema fundamental de las curvas espaciales).

Dadas dos funciones continuas monovaluadas $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, con $s > 0$, entonces existe una y sólo una curva espacial, determinada sólo por su posición en el espacio, para la cual s es la longitud de arco (medida de un punto de la curva), κ es la curvatura y τ es la torsión.

Las ecuaciones $\kappa = \kappa(s)$ y $\tau = \tau(s)$ son las ecuaciones *naturales* o *intrínsecas* de la curva espacial. La prueba es simple cuando nos confinamos a funciones analíticas. Por lo que en el vecindario de un punto $s = s_0$ dadas las series de convergencia en el intervalo $s_1 < s_0 < s_2$ podemos escribir

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s_0) + \frac{h}{1!} \mathbf{x}'(s_0) + \frac{h^2}{2!} \mathbf{x}''(s_0) + \dots, \quad (3.38)$$

donde $h = s - s_0$. Luego, sustituyendo para \mathbf{x}' , \mathbf{x}'' , etc., sus valores con respecto al triedro móvil en $P(s_0)$, obtenemos

$$\mathbf{x}' = \mathbf{t}, \quad \mathbf{x}'' = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{x}''' = -\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa' \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}'''' = \dots, \quad (3.39)$$

tal que

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s_0) + h\mathbf{t} + \frac{1}{2}\kappa h^2 \mathbf{n} + \frac{1}{6}h^3 (-\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa' \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b}) + \dots, \quad (3.40)$$

donde todos los términos pueden encontrarse sucesivamente diferenciando las fórmulas de Frenet y todas las derivadas sucesivas de κ y τ así como las \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , en $P(s_0)$ se suponen existentes debido al carácter analítico de las funciones. Si elegimos en un punto arbitrario $\mathbf{x}(s_0)$ un conjunto arbitrario de tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares y los seleccionamos como \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , entonces la ecuación (3.40) determina únicamente a la curva (dentro del intervalo de convergencia).

Por lo tanto es posible probar el teorema al asumir únicamente que $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son continuas [5]. En este caso aplicamos al sistema de tres ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden en α, β, γ ,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \kappa\beta, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\kappa\alpha + \tau\gamma, \quad \frac{d\gamma}{ds} = -\tau\beta, \quad (3.41)$$

el teorema que concierne a la existencia de soluciones.

Este teorema es como sigue: Dado un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.42)$$

donde las f_i son monovaluadas y continuas en sus $n+1$ argumentos dentro de un intervalo dado (con la condición Lipschitz satisfecha en este caso). Entonces existe un único conjunto de soluciones continuas de este sistema que asume ciertos valores dados $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ cuando $x = x_0$.

Deducimos de este teorema que podemos encontrar en una y sólo una forma tres soluciones continuas $\alpha_1(s), \beta_1(s), \gamma_1(s)$ las cuales asumen para $s = s_0$ los valores 1, 0, 0 respectivamente. Podemos encontrar similarmente tres soluciones continuas $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ tales que

$$\alpha_2(s_0) = 0, \quad \beta_2(s_0) = 1, \quad \gamma_2(s_0) = 0, \quad (3.43)$$

y tres soluciones continuas más $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ tales que

$$\alpha_3(s_0) = 0, \quad \beta_3(s_0) = 0, \quad \gamma_3(s_0) = 1. \quad (3.44)$$

Las ecuaciones (3.41) conllevan a las siguientes relaciones entre α, β, γ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) = \kappa \beta_1 \alpha_1 - \kappa \alpha_1 \beta_1 + \tau \gamma_1 \beta_1 - \tau \beta_1 \gamma_1 = 0, \quad (3.45)$$

ó

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = cte. = 1 + 0 + 0 = 1. \quad (3.46)$$

Similarmente, podemos encontrar dos relaciones más de la misma forma:

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad (3.47)$$

y las tres relaciones adicionales:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3 &= 0, \\ \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Hemos encontrado por lo tanto un conjunto de vectores unitarios mutuamente perpendiculares

$$\mathbf{t}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3), \quad \mathbf{n}(\beta_1 \beta_2 \beta_3), \quad \mathbf{b}(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3), \quad (3.49)$$

donde las $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ son todas funciones del parámetro s ($i = 1, 2, 3$).

Esta es la consecuencia del teorema que si las relaciones (3.46), (3.47) y (3.48) se cumplen, las relaciones

$$\Sigma \alpha_i^2 = \Sigma \beta_i^2 = \Sigma \gamma_i^2 = 1, \quad \Sigma \alpha_i \beta_i = \Sigma \alpha_i \gamma_i = \Sigma \beta_i \gamma_i = 0, \quad (3.50)$$

también se cumplen. Esto significa geoméricamente que cuando $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ son los tres vectores unitarios mutuamente ortogonales definidos con referencia al conjunto $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ entonces $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ son vectores unitarios mutuamente ortogonales con referencia al conjunto $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$.

Existen ∞^1 triedros $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Si integramos \mathbf{t} , entonces la ecuación

$$x = \int_{s_0}^s \mathbf{t} d\sigma \quad (3.51)$$

determina una curva la cual no tiene solo a \mathbf{t} como vector tangente unitario, si no que debido a la ecuación (3.41) también tiene a $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ como triedro móvil, siendo κ y τ la curvatura y la torsión y s , debido a la ecuación (3.51), su longitud de arco. Entonces existe una curva C con $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ dados para la cual el triedro móvil en $P(s_0)$ coincide con los ejes coordenados.

Ahora debemos mostrar que cualquier otra curva \bar{C} la cual puede tener una correspondencia uno-a-uno con C tal que en puntos correspondientes, dados por una s igual, la curvatura y la torsión son las mismas, es congruente con C . Esto significa que \bar{C} puede hacerse coincidir con C con un movimiento en el espacio. Muévase el punto $s = 0$ de \bar{C} al punto $s = 0$ de C (el origen) de tal manera que el triedro $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ de \bar{C} coincide con el triedro $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ de C (el sistema $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$). Sea $(\bar{x}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i)$ y $(x_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ denotando los elementos correspondientes del triedro móvil de \bar{C} y C respectivamente. Entonces la ecuación (3.41) se cumple para $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i)$ y para $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ con el mismo $\kappa(s)$ y $\tau(s)$. Por lo que (omitiendo el índice i por el momento):

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \frac{d\alpha}{ds} + \alpha \frac{d\bar{\alpha}}{ds} + \bar{\beta} \frac{d\beta}{ds} + \beta \frac{d\bar{\beta}}{ds} + \bar{\gamma} \frac{d\gamma}{ds} + \gamma \frac{d\bar{\gamma}}{ds} \\ = \kappa \bar{\alpha} \beta + \kappa \alpha \bar{\beta} - \kappa \bar{\beta} \alpha + \tau \bar{\beta} \gamma - \kappa \beta \bar{\alpha} + \tau \beta \bar{\gamma} - \tau \bar{\gamma} \beta - \tau \gamma \bar{\beta} = 0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

ó

$$\alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta} + \gamma \bar{\gamma} = cte. \quad (3.53)$$

Esta constante es 1, pues es 1 para $s = 0$. Para las $\alpha_i, \dots, \bar{\gamma}_i$ las ecuaciones cumplen

$$\alpha_i \bar{\alpha}_i + \beta_i \bar{\beta}_i + \gamma_i \bar{\gamma}_i = 1, \quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \quad \bar{\alpha}_i^2 + \bar{\beta}_i^2 + \bar{\gamma}_i^2 = 1, \quad (3.54)$$

lo que es equivalente a decir que tres pares vectoriales $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), (\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i)$ tienen ángulo cero con respecto a los otros. Por lo que $\alpha_i = \bar{\alpha}_i, \beta_i = \bar{\beta}_i, \gamma_i = \bar{\gamma}_i$ para todos los valores de s , por lo tanto

$$\frac{d}{ds}(\bar{x}_i - x_i) = 0. \quad (3.55)$$

Esto muestra que $\bar{x}_i - x_i = cte.$, pero esta constante es cero, pues es cero para $s = 0$. Las curvas \bar{C} y C coinciden, por lo que la prueba del teorema fundamental está completa.

Todas las curvas, dados $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ pueden obtenerse una de la otra por un movimiento en el espacio. Las curvas resultantes son por lo menos tres veces diferenciables.

Ejemplo 3.5 *Curva plana.*

$\kappa(s)$ puede ser cualquier función, $\tau = 0$. En particular, si κ es constante, encontramos a partir de las ecuaciones (3.21) y (3.22) al círculo.

Ejemplo 3.6 *Hélice circular.*

$\kappa = \text{cte.}$, $\tau = \text{cte.}$ Podemos observar esto inmediatamente del ejemplo 2.12 en la sección 2.6, pues

$$a = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \quad y \quad b = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \quad (3.56)$$

únicamente determinan la curva

$$x = a \cos s/c, \quad y = a \sin s/c, \quad z = bs/c, \quad \text{donde} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (3.57)$$

y todas las otras curvas del mismo κ y τ dados deben ser congruentes a esta curva.

Ejemplo 3.7 *Curvas esféricas (las curvas que yacen en una esfera).*

Éstas son curvas que satisfacen la ecuación diferencial en coordenadas naturales

$$R^2 + (TR')^2 = a^2, \quad a = \text{cte.} \quad (3.58)$$

Cuando una curva es esférica, todas sus esferas osculantes coinciden con la esfera en la cual la curva yace, por lo que las ecuaciones (3.58) se cumplen, donde a es el radio de la esfera. Conversamente, si las ecuaciones (3.58) se cumplen entonces el radio de la esfera osculante es constante. De acuerdo con las ecuaciones del centro de la esfera osculante (véase sección 5.2):

$$\mathbf{c}' = \mathbf{t} + (-\mathbf{t} + R\tau\mathbf{b}) + R'\mathbf{n} + (TR')'\mathbf{b} - R'\mathbf{n} = \{R\tau + (TR')'\}\mathbf{b} = 0. \quad (3.59)$$

La diferenciación de la ecuación (3.58) muestra que para $\tau \neq 0$, $R' \neq 0$,

$$R\tau + (TR')' = 0, \quad (3.60)$$

por lo que $\mathbf{c}' = 0$, y esto significa que el centro de la esfera osculatoria permanece en el lugar (excepto para $\tau = 0$, $R' = 0$, el círculo). Por lo tanto la ecuación (3.60) es la ecuación diferencial de todas las curvas esféricas. El círculo coincide en esto ya que en el caso del círculo $\tau = 0$, y $R' = 0$ dado $TR' = 0$.

De la ecuación (3.59) se deduce que para una curva no esférica (y no plana), la tangente del lugar geométrico de los centros de las esferas osculantes tiene la dirección de la binormal.

3.3. Hélices

La hélice circular o cilíndrica es un caso especial de una larga clase de curvas llamadas *hélices* o curvas con inclinación constante. Éstas están definidas con la propiedad en la que la tangente tiene un ángulo constante α con una línea fija l en el espacio (con el eje).

Sea un vector unitario \mathbf{a} colocado en la dirección de l . Entonces una hélice está definida por

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{a} = \cos \alpha = \text{cte.} \quad (3.61)$$

Por lo que, utilizando las fórmulas de Frenet:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0 .$$

\mathbf{a} es por lo tanto paralela al plano rectificante de la curva y puede ser expresado en la forma

$$\mathbf{a} = \mathbf{t} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha , \quad (3.62)$$

el cuál al diferenciarlo se obtiene

$$0 = \kappa \mathbf{n} \cos \alpha - \tau \mathbf{n} \sin \alpha = (\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \mathbf{n} , \quad (3.63)$$

ó

$$\kappa / \tau = \tan \alpha , \text{cte.}$$

Para curvas de inclinación constante la razón de curvatura y torsión es constante. Conversamente, si para curvas regulares esta condición se satisface, entonces siempre podemos hallar un ángulo constante tal que

$$\mathbf{n}(\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha) = 0 , \quad (3.64)$$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha) = 0 , \quad (3.65)$$

ó

$$\mathbf{t} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha = \mathbf{a} , \quad (3.66)$$

que es un vector unitario constante a lo largo del eje.

Por lo que

$$\cos \alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} . \quad (3.67)$$

La curva es por lo tanto de inclinación constante. Podemos expresar este resultado como sigue:

Una condición necesaria y suficiente para que una curva tenga inclinación constante es que la razón de curvatura y de torsión sea constante. Este es el Teorema de Lancret, 1802, primera prueba por B. de Saint Venant, en 1845.

La ecuación de una hélice puede ser escrita en la forma (aquí la línea l es el eje Z)

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = s \cos \alpha, \quad (3.68)$$

que muestra que esta curva puede ser considerada como una curva en un cilindro general teniendo un ángulo constante con las líneas generadoras (*loxódromo cilíndrico*). Cuando $\kappa/\tau = 0$ tenemos una línea recta, cuando $\kappa/\tau = \infty$ una curva plana.

Si proyectamos la hélice $\mathbf{x}(s)$ en un plano perpendicular a \mathbf{a} , la proyección \mathbf{x}_1 tiene la ecuación

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}. \quad (3.69)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{t} - \mathbf{a} \cos \alpha, \quad (3.70)$$

y la longitud de arco está dada por

$$ds_1^2 = d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_1 = \sin^2 \alpha ds^2. \quad (3.71)$$

Como

$$d\mathbf{x}_1/ds_1 = \csc \alpha \mathbf{t} - \cot \alpha \mathbf{a}, \quad (3.72)$$

su vector de curvatura es

$$d^2\mathbf{x}_1/ds_1^2 = \kappa \csc \alpha \mathbf{n}, \quad (3.73)$$

y su curvatura $\kappa_1 = \kappa \csc^2 \alpha$.

Es decir: la proyección de una hélice en un plano perpendicular a su eje tiene su normal principal paralela a la normal principal correspondiente de la hélice y su curvatura correspondiente es $\kappa_1 = \kappa \csc^2 \alpha$.

Ejemplo 3.8 Hélice circular.

Si una hélice tiene curvatura constante, entonces su proyección en el plano perpendicular a su eje es una curva plana de curvatura constante, por lo tanto un círculo. La hélice se encuentra en un cilindro de revolución y es por lo tanto una hélice circular.

Ejemplo 3.9 Hélices esféricas.

Si una hélice está en una esfera de radio r , entonces las ecuaciones (3.58) se cumplen, y como $\kappa = \tau \tan \alpha$, después de eliminar τ se tiene

$$r^2 = R^2 [1 + R'^2 \tan^2 \alpha], \quad (3.74)$$

$$\frac{RdR}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \pm ds \cot \alpha , \quad (3.75)$$

la cual, integrando para R y eligiendo adecuadamente la constante de adición en s se tiene

$$R^2 + s^2 \cot^2 \alpha = r^2 . \quad (3.76)$$

La proyección de la hélice en un plano perpendicular a su eje es por lo tanto una curva plana con la ecuación natural

$$R_1^2 + s_1^2 \cos^2 \alpha = r^2 \sin^4 \alpha . \quad (3.77)$$

Este tipo de curva se discute y como $\cos^2 \alpha < 1$, representa una epicloide: Una hélice esférica proyecta en un plano perpendicular a su eje un arco de una epicloide.

Esta proyección es una curva cerrada cuando la razón a/b de la ecuación (3.36) es racional. Utilizando la notación de esta fórmula y de la ecuación (3.35) obtenemos en este caso que

$$\cos \alpha = \frac{B}{A} = \frac{a}{a+2b} , \quad (3.78)$$

es racional.

De

$$B = \frac{4b(a+b)}{a+2b} = r \sin^2 \alpha , \quad (3.79)$$

$$A = \frac{4b(a+b)}{a} = r \sin \alpha \tan \alpha , \quad (3.80)$$

hallamos

$$a = r \cos \alpha , \quad b = \frac{r}{2}(1 - \cos \alpha) = r \sin^2 \alpha / 2 , \quad (a + 2b = r) \quad (3.81)$$

para el radio del círculo fijo y rotatorio. Cuando $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ encontramos como proyección una epicloide de tres cúspides, cada uno de los tres arcos representa parte de una hélice en la esfera.

3.4. Óvalos

Desde otra perspectiva, que es el punto de vista de la geometría diferencial global, es de gran interés el comportamiento de las curvas promediado a lo largo de un arco finito de la curva. En este caso se pueden formular teoremas con base en el cálculo integral a diferencia de los teoremas mencionados hasta ahora que son en términos del cálculo diferencial [22]. Para entender las desemejanzas que pueden ocurrir en esta visión diferente de la geometría de las curvas presentamos el caso de las curvas conocidas como óvalos tomando como referencia [23].

Definición 3.4.1 Un óvalo es una curva real, plana, cerrada y dos veces diferenciable tal que su vector de curvatura siempre apunta hacia el interior.

Entonces en el caso de los óvalos la tangente continuamente está girando a la izquierda cuando se recorre la curva en sentido contrario a las agujas del reloj. Todos los puntos de estas curvas se pueden partir en parejas de puntos *opuestos* en los cuales las tangentes son paralelas pero apuntan en sentidos opuestos. Si en el punto P el vector tangente unitario es t , entonces $t_1 = -t$ es el vector tangente unitario en el punto opuesto P_1 . Entonces la curvatura $\kappa = d\varphi/ds$ no puede cambiar su signo, ya que φ es una función monótona de s , creciente (o decreciente), véase Figura 3.2.

Puede recordarse que en el caso de curvas planas es posible determinar los signos de κ postulando que el sentido de rotación $t \rightarrow n$ es el mismo de $OX \rightarrow OY$. Por esta razón, κ mantiene el mismo signo a lo largo de la curva.

Asumimos la curvatura $\kappa(s)$ diferenciable y positiva, $\kappa(s) > 0$.

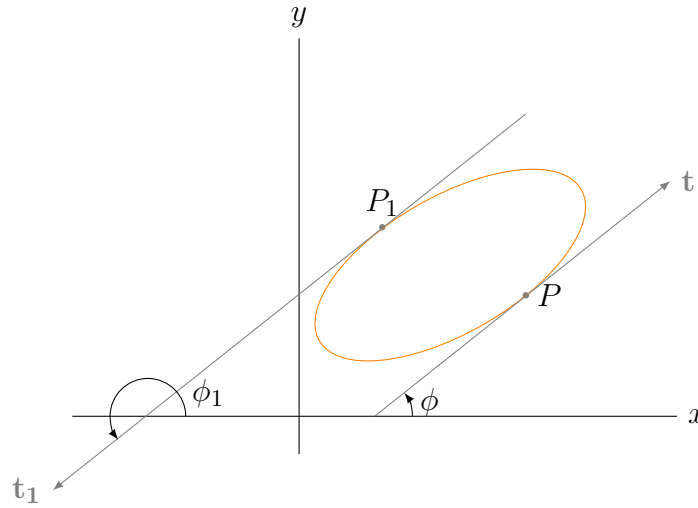


Figura 3.2: Un ejemplo de óvalo: la elipse.

Ejemplo 3.10 *Elipse.*

La elipse tiene las ecuaciones

$$x = a \cos s, \tag{3.82}$$

$$y = b \sen s. \tag{3.83}$$

Y a partir de análisis geométrico obtenemos para $\varphi(s)$ de la elipse

$$\varphi_{elip}(s) = \pi - \arctan \left[\frac{a}{b} \cot(s) - \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \csc(s)} \right] \tag{3.84}$$

cuya κ es

$$\frac{d\varphi}{ds} = \kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \cos(s) - \frac{a}{b}}}. \tag{3.85}$$

Para conocer los extremos de la elipse igualamos $\frac{d\kappa}{ds} = 0$ al evaluar en $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

Definición 3.4.2. Un punto en el óvalo donde κ tiene un valor extremo (máximo o mínimo) es llamado *vértice* del óvalo.

Para los vértices de un óvalo existe el siguiente teorema fundamental. Véase también [2]

Teorema 3.4.1 (Teorema de los cuatro vértices).
Cualquier óvalo tiene al menos cuatro vértices.

Demostración. Observamos que cuando el óvalo no es un círculo tiene al menos dos vértices A y B . Suponga que no existen más, que $d\kappa > 0$ en un lado de AB y $d\kappa < 0$ en el otro lado. Ahora tomemos

$$\int \mathbf{n} dR$$

a lo largo de la curva ($R = k^{-1}$):

$$\oint_C \mathbf{n} dR = R\mathbf{n}|_C - \oint_C R d\mathbf{n} = \oint R\kappa \mathbf{t} ds = \oint \mathbf{t} ds = \oint d\mathbf{x} = 0 .$$

Esto significa que

$$\int_A^B \mathbf{n} dR$$

tiene el mismo valor cuando se toma a lo largo del arco AB donde $dR > 0$ y a lo largo del arco AB donde $dR < 0$. Si tomamos la imagen esférica de \mathbf{n} , en la cual A_1 y B_1 corresponden a A y B , se observa que las dos integrales proporcionan vectores que yacen en segmentos del plano los cuales no pueden alcanzar el cero. Por lo tanto existen más de dos vértices y, como la curva es cerrada, su número es par. Cuatro es posible, por lo que una elipse posee cuatro vértices.

Un conjunto conveniente de fórmulas para los óvalos puede ser obtenido al asociar dos puntos $P(\mathbf{x})$ y $P_1(\mathbf{x}_1)$ del óvalo con tangentes paralelas o puntos opuestos en términos de las ecuaciones:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \bar{\lambda}\mathbf{t} + \bar{\mu}\mathbf{n} , \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(s) , \quad (3.86)$$

donde μ es el *ancho* de la curva en p que es, la distancia entre las dos tangentes paralelas en P . Entonces, denotando las cantidades en P_1 por el índice 1 tenemos

$$\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}, \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n} . \quad (3.87)$$

La diferenciación de las ecuación (3.86) da

$$\mathbf{t}_1 ds_1/ds = \mathbf{t} + \lambda'\mathbf{t} + \lambda\kappa\mathbf{n} + \mu'\mathbf{n} - \mu\kappa\mathbf{t} , \quad (3.88)$$

ó igualando los coeficientes de \mathbf{t} y \mathbf{n} en ambos lados de ésta ecuación:

$$1 + ds_1/ds = -\lambda' + \mu\kappa , \quad (3.89)$$

$$0 = \lambda\kappa + \mu' , \quad (3.90)$$

o en términos de diferenciales, utilizando la ecuación $\kappa ds = d\varphi$

$$ds + ds_1 = -d\lambda + \mu d\varphi, \quad 0 = \lambda d\varphi + d\mu. \quad (3.91)$$

Estas ecuaciones fueron obtenidas por Mellish en 1931 [20], guían a algunos resultados simples en el caso de *curvas de ancho constante* ó *curvas orbiformes*, caracterizadas por la propiedad en la que la distancia entre dos tangentes paralelas es siempre constante. Por lo que $d\mu = 0$. Entonces las ecuaciones (3.89) dan $\lambda = 0$, y la integración de $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ muestra que el perímetro de la curva P es igual a $\mu\pi$:

$$P = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} (ds + ds_1) = \mu \int_0^\pi d\varphi = \mu\pi. \quad (3.92)$$

Es decir que la cuerda que conecta los puntos opuestos de una curva de ancho constante es perpendicular a las tangentes en esos puntos. Por lo que se tiene el siguiente

Teorema 3.4.2. (Teorema de Barbier [27]).

Todas las curvas de ancho constante μ tienen el mismo perímetro $\mu\pi$.

El primero de estos teoremas establece no solo una condición necesaria si no suficiente. Un círculo es una curva de ancho constante, pero existen algunas curvas de ancho constante que no son círculos. Esto puede demostrarse siguiendo el método indicado por Euler. Si deseamos construir una curva de ancho constante con $2n$ vértices, tomamos una curva cerrada diferenciable con n cúspides con una tangente en cada dirección (esas curvas pueden ser llamadas *curvas de ancho cero*). Cualquier involuta de una curva es una curva de ancho constante. Tomemos, por ejemplo, $n = 3$ y comencemos con un punto R en la tangente en el punto P . Entonces desarrollando la involuta de P pasando por B, A, C de regreso a P obtenemos una curva cerrada con dos tangentes en cada dirección, la distancia entre dos puntos opuestos Q, R es $QR = PQ + PR = \text{arc}PB + DB + DB + \text{arc}AB + \text{arc}AC + \text{arc}CP = \text{arc}BC + \text{arc}AB - \text{arc}AC + 2DB$. El vector de curvatura de la involuta en Q y que yace en QP siempre apunta al interior [23].

Las curvas de ancho constante fueron introducidas por L. Euler [8], quien las llamó *curvas orbiformas*.

Barbier relacionó la teoría de estas curvas con el problema de needle en probabilidad [1]. (Para más detalle véase [27]).

CAPÍTULO 4

ECUACIÓN DE RICCATI DE LAS CURVAS POR EL MÉTODO DE DARBOUX Y LIE

Los matemáticos no estudian objetos, si no relaciones entre objetos.

Henri Poincaré, matemático francés

Se presenta el método propuesto por Darboux y Lie sobre la obtención de una ecuación de Riccati para las curvas y a continuación se muestra cómo se obtienen las coordenadas de un punto cualquiera en la curva a partir de ésta misma ecuación. Las soluciones de la ecuación de Riccati que dependen de los parámetros intrínsecos κ y τ juegan un papel primordial en éste método.

4.1. Generalidades sobre la ecuación de Riccati

4.1.1 Ecuación general de Riccati.

Una ecuación general de Riccati tiene la forma

$$y_x = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad (4.1)$$

cuando f_2, f_1, f_0 son arbitrarios la ecuación *no es integrable* por cuadraturas [28].

Hay varios casos particulares de las f_i donde $i = (0, 1, 2)$ cuando la ecuación de Riccati es integrable, uno de estos casos es cuando las funciones f_2, f_1, f_0 son proporcionales, es decir,

$$f_2(x) = a_2\varphi(x), \quad f_1(x) = a_1\varphi(x), \quad f_0(x) = a_0\varphi(x), \quad (4.2)$$

usando (4.1) se puede escribir como

$$y_x = \varphi(x)(a_2y^2 + a_1y + a_0) , \quad (4.3)$$

ó

$$\frac{dy}{a_2y^2 + a_1y + a_0} = \varphi(x)dx , \quad (4.4)$$

y con solución formal

$$\int \frac{dy}{a_2y^2 + a_1y + a_0} = \frac{1}{y_1 - y_2} \left(\int \frac{dy}{y - y_1} - \int \frac{dy}{y - y_2} \right) = \int \varphi(x)dx + \text{cte.} \quad (4.5)$$

donde

$$y_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} . \quad (4.6)$$

Usando la primitiva $\Phi = \int \varphi(x) dx$ e integrando se obtiene la solución explícita:

$$y(x) = \frac{Ky_2e^{y_1\Phi} - y_1e^{y_2\Phi}}{Ke^{y_1\Phi} - e^{y_2\Phi}} \quad (4.7)$$

(4.7) también se puede escribir de las siguientes dos maneras

$$\frac{2}{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}} \tan^{-1} \left(\frac{2a_2y + a_1}{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}} \ln \left(\frac{2a_2y + a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2y + a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}} \right) . \quad (4.8)$$

En el caso cuando $f_2 = 1$ y $f_1(x)$ y $f_0(x)$ son polinomios también se tiene información sobre la solución de la ecuación general de Riccati (4.1).

Si el grado del polinomio

$$\Delta(x) = f_1^2 - 2(f_1)_x - 4f_0 \quad (4.9)$$

es impar, la ecuación de Riccati no puede poseer una solución polinomial.

Si el grado de Δ es par, la ecuación podría poseer solamente soluciones polinomiales de forma:

$$y_+ = -\frac{1}{2} (f_1 + [\sqrt{\Delta}]) \quad \text{ó} \quad y_- = -\frac{1}{2} (f_1 - [\sqrt{\Delta}]) \quad (4.10)$$

donde $[\sqrt{\Delta}]$ denota una parte racional integral de la expansión de $\sqrt{\Delta}$ en potencias decrecientes, (por ejemplo $[\sqrt{x^2 - 2x + 3}] = [\sqrt{(x-1)^2 + 2}] = x - 1$).

Sea la ecuación de Riccati de la forma

$$y' = y^2 + xy - 1 , \quad (4.11)$$

en este caso $[\sqrt{\Delta}] = [x]$ por (4.10) las únicas soluciones podrían ser

$$y_+ = -x, \quad (4.12)$$

$$y_- = 0. \quad (4.13)$$

En este caso $y_+ = -x$ es la única solución de esta ecuación de Riccati.

4.1.2 El uso de soluciones particulares para construir la solución general.

Dada una solución particular $y_0(x)$ de la ecuación de Riccati (4.1) la solución general puede escribirse como

$$y = y_0(x) + Y(x) \left[C - \int Y(x) f_2(x) dx \right]^{-1}, \quad (4.14)$$

donde

$$Y(x) = \exp \left\{ \int [2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)] dx \right\}, \quad (4.15)$$

a la solución particular le corresponde $C = \infty$.

1. Sean $y_1 = y_1(x)$ y $y_2 = y_2(x)$ dos soluciones particulares de la ecuación (4.1), entonces la solución general puede ser calculada por:

$$y = \frac{C y_1 + U(x) y_2}{C + U(x)}, \quad \text{donde } U(x) = \exp \left[\int f_2(y_1 - y_2) dx \right]. \quad (4.16)$$

A la solución particular $y_1(x)$ corresponde $C = \infty$ y a la $y_2(x)$ corresponde $C = 0$.

2. Sean $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_3 = y_3(x)$ tres soluciones particulares distintas de la ecuación (4.1). Entonces la solución general puede encontrarse sin cuadratura:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} \cdot \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = cte.$$

Esto significa que la ecuación de Riccati tiene un sistema fundamental de soluciones. Véase [28]

4.1.3 Algunas transformaciones.

1. La transformación

$$x = \varphi(\xi), \quad y = \frac{\psi_4(\xi)u + \psi_3(\xi)}{\psi_2(\xi)u + \psi_1(\xi)}, \quad (4.17)$$

donde φ , ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 y ψ_4 son funciones arbitrarias, reduce la ecuación de Riccati (4.1) a una ecuación para $u = u(\xi)$.

2. Sea $y_0 = y_0(x)$ una solución particular de la ecuación (4.1). La sustitución $y = y_0 + 1/\omega$ lleva a la ecuación lineal de primer orden para $\omega = \omega(x)$

$$\omega_x + [2f_2(x)y_0 + f_1(x)]\omega + f_2(x) = 0 . \quad (4.18)$$

cuya solución es

$$y = Ce^F + e^F \int e^{-F} \frac{f_0(x)}{g(x)} dx , \quad \text{donde} \quad F(x) = \int \frac{f_1(x)}{g(x)} dx . \quad (4.19)$$

4.1.4 Transformación de la ecuación de Riccati a una ecuación lineal de segundo orden.

La sustitución

$$u(x) = \exp\left(-\int f_2 y dx\right) , \quad (4.20)$$

reduce la ecuación general de Riccati (4.1) a una ecuación lineal de segundo orden:

$$f_2 u_{xx} - [(f_2)_x + f_1 f_2] u_x + f_0 f_2^2 u = 0 , \quad (4.21)$$

la cual puede ser más sencilla de resolver que la ecuación de Riccati original.

4.1.5 Reducción de la ecuación de Riccati a la forma canónica.

La ecuación general de Riccati (4.1) puede ser reducida a la forma canónica [28]

$$\omega_\xi = \omega^2 + \Psi(\xi) . \quad (4.22)$$

con Ψ definido por

$$\Psi(\xi) = F_0 F_2 - \frac{1}{4} F_1^2 + \frac{1}{2} F_1' - \frac{1}{2} F_1 \frac{F_2'}{F_2} - \frac{3}{4} \left(\frac{F_2'}{F_2}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{F_2''}{F_2} , \quad (4.23)$$

por medio de una transformación

$$x = \phi(\xi), \quad y = \frac{1}{F_2} \omega - \frac{1}{2} \frac{F_1}{F_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F_2}\right)' , \quad (4.24)$$

donde

$$F_i(\xi) = f_i(\phi) \phi_\xi \quad (4.25)$$

La transformación (4.24) depende de la función arbitraria $\phi = \phi(\xi)$. Para una ecuación original de Riccati específica, distintas funciones ϕ en (4.24) generarán

distintas funciones Ψ en la ecuación (4.22). En la práctica, la transformación (4.24) es más utilizada como $\phi(\xi) = \xi$.

4.1.6 Construcción de la solución general a través de soluciones particulares.

A partir de la ecuación de Riccati

$$g(x)y_x = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad (4.26)$$

para $f_2 \equiv 0$ se obtiene una ecuación lineal

$$g(x)y_x = f_1(x)y + f_0(x), \quad (4.27)$$

cuya solución es

$$y = Ce^F + e^F \int e^{-F} \frac{f_0(x)}{g(x)} dx, \quad \text{donde } F(x) = \int \frac{f_1(x)}{g(x)} dx. \quad (4.28)$$

Para $f_0 \equiv 0$ se tiene una ecuación de Bernoulli

$$y_x + f(x)y = g(x)y^n, \quad (4.29)$$

con $n = 2$. Con la sustitución

$$\omega(x) = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}, \quad (4.30)$$

se reduce la ecuación

$$\omega_x = (1-n)f_1(x)\omega + (1-n)f_n(x),$$

y se obtiene una ecuación lineal de la forma

$$\omega_x = -f_1(x)\omega - f_2(x). \quad (4.31)$$

con solución de la forma

$$y^{1-n} = Ce^F + (1-n)e^F \int e^{-F} \frac{f_n(x)}{g(x)} dx, \quad \text{donde } F(x) = (1-n) \int \frac{f_1(x)}{g(x)} dx,$$

por lo que con $n = 2$ la solución es

$$\omega(x) = y^{-1} = Ce^F - e^F \int e^{-F} \frac{f_2(x)}{g(x)} dx \quad \text{con } F(x) = - \int \frac{f_1(x)}{g(x)} dx.$$

Ahora cuando $f_0, f_2 \neq 0$ se tiene que dada una solución particular $y_0 = y_0(x)$ de la ecuación de Riccati, la solución general se escribe como

$$y = y_0(x) + \Phi(x) \left[C - \int \Phi(x) \frac{f_2(x)}{g(x)} dx \right]^{-1}, \quad (4.32)$$

donde

$$\Phi(x) = \exp \left\{ \int [2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)] \frac{dx}{g(x)} \right\}. \quad (4.33)$$

A la solución particular $y_0(x)$ le corresponde $C = \infty$.

La sustitución

$$u(x) = \exp \left(- \int \frac{f_2}{g} y dx \right), \quad (4.34)$$

reduce la ecuación de Riccati a una ecuación lineal de segundo orden

$$f_2 g^2 u_{xx} + g[f_2 g_x - g(f_2)_x - f_1 f_2] u_x + f_0 f_2^2 u = 0. \quad (4.35)$$

que es posible que sea más fácil resolver que la ecuación de Riccati original.

4.1.7 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Una ecuación lineal homogénea de segundo orden tiene la forma

$$f_2(x)y_{xx} + f_1(x)y_x + f_0(x)y = 0, \quad (4.36)$$

la solución trivial, $y = 0$ es una solución particular de la ecuación lineal homogénea. La ecuación lineal homogénea de segundo orden puede reducirse a una ecuación de Riccati por medio de la sustitución $u = y_x/y$ obteniendo

$$f_2(x)u_x + f_2(x)u^2 + f_1(x)u + f_0(x) = 0, \quad (4.37)$$

4.2. Reducción a la ecuación de Riccati en la geometría diferencial de las curvas

Se ha visto que la ecuación natural de una curva plana puede resolverse (esto es, que las coordenadas cartesianas pueden encontrarse) en términos de dos cuadraturas. En el caso de una curva espacial, podemos tratar de resolver la tercera ecuación diferencial en $\alpha(s)$ obtenida de la ecuación (3.41) eliminando β y γ . La solución puede, entonces, ser reducida a una ecuación diferencial de primer orden, la denominada *ecuación de Riccati*, que es ampliamente estudiada, pero no un tipo que pueda ser resuelto únicamente por integración. Este método debido a S. Lie y G. Darboux, está basado en que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (4.38)$$

se puede descomponer en

$$(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = (1 + \gamma)(1 - \gamma). \quad (4.39)$$

Introduzcamos las funciones conjugadas complejas w y $-z^{-1}$:

$$w = \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma} = \frac{1 + \gamma}{\alpha - i\beta}, \quad -\frac{1}{z} = \frac{\alpha - i\beta}{1 - \gamma} = \frac{1 + \gamma}{\alpha + i\beta}. \quad (4.40)$$

Luego es posible expresar α, β, γ en términos de w y z :

$$\alpha = \frac{1 - wz}{w - z}, \quad \beta = i \frac{1 + wz}{w - z}, \quad \gamma = \frac{w + z}{w - z}. \quad (4.41)$$

Estas expresiones son equivalentes a la ecuación de la esfera (4.38) en términos de dos parámetros w y z . Al calcular la derivada de (4.40) para w

$$w = \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma}$$

y sustituir α' y β' de las ecuaciones de Frenet-Serret de (3.41) encontramos:

$$\begin{aligned} w' &= \frac{dw}{ds} = \frac{\alpha' + i\beta'}{1 - \gamma} + \frac{\alpha + i\beta}{(1 - \gamma)^2} \gamma' \\ &= \frac{\kappa\beta - i\kappa\alpha + i\tau\gamma}{1 - \gamma} - \frac{w\gamma'}{1 - \gamma} \\ &= -i\kappa w + \frac{\tau(i\gamma - \beta w)}{1 - \gamma}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Y debido a las ecuaciones (4.40) para w donde se despejan α de $w = \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma}$

$$\alpha = (1 - \gamma)w - i\beta, \quad (4.43)$$

y β de $w = \frac{1 + \gamma}{\alpha - i\beta}$ tenemos

$$\beta = i \frac{1 + \gamma - \alpha w}{w}, \quad (4.44)$$

luego encontramos para β al sustituir α que:

$$\beta = i \frac{1 + \gamma - w^2 + w^2\gamma}{2w}. \quad (4.45)$$

Para eliminar β se sustituye la ecuación (4.45) en la derivada (4.42), obteniendo

$$\begin{aligned} w' &= -i\kappa w + \frac{i\tau\gamma}{1 - \gamma} - \frac{i\tau[-w^2(1 - \gamma) + 1 + \gamma]}{2(1 - \gamma)} \\ &= -i\kappa w + \frac{i\tau\gamma}{1 - \gamma} + \frac{i\tau w^2(1 - \gamma)}{2(1 - \gamma)} - \frac{i\tau[(1 - \gamma) + 2\gamma]}{2(1 - \gamma)}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

que proporciona la siguiente ecuación de Riccati:

$$w' = \frac{dw}{ds} = -\frac{i}{2}\tau - i\kappa w + \frac{i\tau}{2}w^2, \quad (4.47)$$

se tiene la ventaja de que también el parámetro γ desaparece. Realizando el mismo tipo de eliminación para dz/ds , al derivar de (4.40)

$$z = \frac{\gamma - 1}{\alpha - i\beta},$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} z' &= \frac{dz}{ds} = \frac{\gamma'}{\alpha - i\beta} - \frac{(\gamma - 1)(\alpha' - i\beta')}{(\alpha - i\beta)^2}, \\ &= \frac{\gamma'}{\alpha - i\beta} - \frac{(\alpha' - i\beta')}{(\alpha - i\beta)} z. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Sustituyendo, α' , β' y γ de Frenet-Serret de (3.41) se obtiene que

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{\tau\beta}{\alpha - i\beta} - \frac{\kappa\beta - i(-\kappa\alpha + \tau\gamma)}{\alpha - i\beta} z, \\ &= -\frac{\tau\beta}{\alpha - i\beta} + \frac{i\tau\gamma - \kappa\beta - i\kappa\alpha}{\alpha - i\beta} z, \\ &= -\frac{\tau\beta}{\alpha - i\beta} + \frac{i\tau\gamma - i\kappa(\alpha - i\beta)}{\alpha - i\beta} z, \\ &= -\frac{\tau\beta}{\alpha - i\beta} + \frac{i\tau\gamma}{\alpha - i\beta} z - i\kappa z. \end{aligned} \quad (4.49)$$

De $z = \frac{\gamma - 1}{\alpha - i\beta}$ despejamos α :

$$\begin{aligned} z(\bar{\alpha} - i\bar{\beta}) &= \bar{\gamma} - 1 \\ \bar{\alpha} - i\bar{\beta} &= \frac{\bar{\gamma} - 1}{z} \\ \bar{\alpha} &= \frac{\bar{\gamma} - 1}{z} + i\bar{\beta}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

y para conocer a β se sustituye $\bar{\alpha}$ y se despeja β en $z = \frac{-\alpha - i\beta}{1 + \gamma}$

$$\begin{aligned} z(1 + \gamma) &= -\bar{\alpha} - i\bar{\beta}, \\ \bar{\beta} &= -i \left[-\left(\frac{\gamma - 1}{z} + i\beta \right) - z(1 + \gamma) \right], \\ \bar{\beta} &= i \frac{\gamma - 1}{z} - \bar{\beta} + iz(1 + \gamma), \\ \bar{\beta} &= i \frac{\gamma - 1 + (1 + \gamma)z^2}{2z}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

y sustituyendo (4.50) en z' :

$$z' = -i\kappa z - \frac{\tau\beta}{\gamma - 1} z + \frac{i\tau\gamma}{\gamma - 1} z^2. \quad (4.52)$$

Sustituyendo (4.51) en z'

$$\begin{aligned}
z' &= -i\kappa z - i\tau \frac{(\gamma-1) + (1+\gamma)z^2}{2(\gamma-1)} + \frac{i\tau\gamma}{\gamma-1} z^2 \\
&= -i\kappa z - \frac{i\tau}{2} - i\tau \frac{(1-\gamma+2\gamma)z^2}{2(\gamma-1)} + \frac{i\tau\gamma}{(\gamma-1)} z^2 \\
&= -i\kappa z - \frac{i\tau}{2} + i\tau \frac{(-1+\gamma)}{2(\gamma-1)} - i\tau \frac{2\gamma}{2(\gamma-1)} z^2 + \frac{i\tau\gamma}{(\gamma-1)} z^2, \tag{4.53}
\end{aligned}$$

encontramos que z satisface la misma ecuación que w , es decir:

$$z' = \frac{dz}{ds} = -\frac{i\tau}{2} - i\kappa z + \frac{i\tau}{2} z^2. \tag{4.54}$$

4.3. Obtención de las ecuaciones paramétricas a partir de la ecuación de Riccati

En general, si se conocen cuatro soluciones particulares de la ecuación de Riccati, $r_i, i = 1, \dots, 4$ entonces la solución general es

$$r = \frac{cr_1 + r_2}{cr_3 + r_4}, \tag{4.55}$$

donde c es una constante de integración arbitraria y las r_i son funciones de s . Recordando que las propiedades fundamentales de una ecuación de Riccati son:

1. Cuando una solución particular se conoce, la solución general puede conocerse a partir de dos integraciones.
2. Cuando dos soluciones particulares se conocen, la solución general puede encontrarse por una sola integración.
3. Cuando tres soluciones particulares r_1, r_2, r_3 se conocen, cualquier otra solución f satisface la ecuación

$$\frac{r - r_1}{r - r_2} : \frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_2} = \text{cte.} \tag{4.56}$$

Es decir que la relación cruzada de cuatro integrales particulares es constante. La ecuación (4.55) es una consecuencia directa de la ecuación (4.56) [14].

Sean f_1, f_2, f_3, f_4 las funciones de s con las cuales la ecuación (4.55) proporciona la solución general de la ecuación (4.42).

Con el propósito de encontrar $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2, 3$, necesitamos tres soluciones w_i y tres soluciones z_i caracterizadas por las constantes c_1, c_2, c_3 para w_i y tres constantes d_1, d_2, d_3 para las z_i : Es decir, las soluciones que se necesitan son:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{c_1 f_1 + f_2}{c_1 f_3 + f_4}, & w_2 &= \frac{c_2 f_1 + f_2}{c_2 f_3 + f_4}, & w_3 &= \frac{c_3 f_1 + f_2}{c_3 f_3 + f_4}, \\
z_1 &= \frac{d_1 g_1 + g_2}{d_1 g_3 + g_4}, & z_2 &= \frac{d_2 g_1 + g_2}{d_2 g_3 + g_4}, & z_3 &= \frac{d_3 g_1 + g_2}{d_3 g_3 + g_4}, \tag{4.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1 - w_1 z_1}{w_1 - z_1} , & \beta_1 &= i \frac{1 + w_1 z_1}{w_1 - z_1} , & \gamma_1 &= \frac{w_1 + z_1}{w_1 - z_1} , \\
\alpha_2 &= \frac{1 - w_2 z_2}{w_2 - z_2} , & \beta_2 &= i \frac{1 + w_2 z_2}{w_2 - z_2} , & \gamma_2 &= \frac{w_2 + z_2}{w_2 - z_2} , \\
\alpha_3 &= \frac{1 - w_3 z_3}{w_3 - z_3} , & \beta_3 &= i \frac{1 + w_3 z_3}{w_3 - z_3} , & \gamma_3 &= \frac{w_3 + z_3}{w_3 - z_3} .
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Las nueve funciones $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ deben satisfacer las seis condiciones de ortogonalidad de la esfera unitaria

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 , \quad i = 1, 2, 3 , \tag{4.59}$$

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = 0 , \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j . \tag{4.60}$$

Las primeras tres se satisfacen automáticamente por virtud de la ecuación (4.38), por lo que se tienen que encontrar las c_i, d_i de tal manera que las tres últimas condiciones también se satisfagan. Una elección de c_i, d_i es suficiente, pues las otras elecciones que se hagan proporcionarán curvas congruentes con la primera elección. Ahora $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$ puede escribirse como sigue:

$$(w_1 - w_2)(z_1 - z_2) = -(w_1 - z_2)(z_1 - w_2) , \tag{4.61}$$

ó

$$2(w_1 z_1 + w_2 z_2) = w_1 z_2 + w_2 z_1 + w_1 w_2 + z_1 z_2 , \tag{4.62}$$

y si sustituimos para w_1, w_2, z_1, z_2 sus valores (véase ecuación (4.55)) con las constantes c_1, c_2, d_1, d_2 respectivamente, obtenemos la misma relación para las constantes:

$$2(c_1 d_1 + c_2 d_2) = c_1 d_2 + c_2 d_1 + c_1 c_2 + d_1 d_2 . \tag{4.63}$$

Similarmente:

$$2(c_2 d_2 + c_3 d_3) = c_2 d_3 + c_3 d_2 + c_2 c_3 + d_2 d_3 , \tag{4.64}$$

$$2(c_3 d_3 + c_1 d_1) = c_3 d_1 + c_1 d_3 + c_3 c_1 + d_3 d_1 . \tag{4.65}$$

Cada solución de estas tres ecuaciones en las seis c_i, d_i desconocidas proporcionará una representación de coordenadas para la curva. Una simple solución es la siguiente:

$$c_1 = 1 , \quad c_2 = i , \quad c_3 = \infty ; \quad d_1 = -1 , \quad d_2 = -i , \quad d_3 = 0 . \tag{4.66}$$

Para verificar esto, se sustituye en las tres ecuaciones los valores de c_1, c_2, d_1, d_2 lo que da $c_3 d_3 = -1$ así como $c_3 d_3 = +1$ lo cual es compatible con $c_3 = \infty, d_3 = 0$. Las c_i y las d_i forman tres pares de números cada par es armónico con respecto a los demás. Este es un resultado directo de las propiedades de la solución general

de Riccati.

Por lo que $w_1 = (f_1 + f_2)/(f_3 + f_4)$, etc. Entonces obtenemos para α_i que [21]:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1 - w_1 z_1}{w_1 - z_1} = \frac{(f_1^2 - f_3^2) - (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1 f_4 - f_2 f_3)}, \\ \alpha_2 &= \frac{1 - w_2 z_2}{w_2 - z_2} = i \left[\frac{(f_1^2 - f_3^2) + (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1 f_4 - f_2 f_3)} \right], \\ \alpha_3 &= \frac{1 - w_3 z_3}{w_3 - z_3} = \frac{(f_3 f_4) - (f_1 f_2)}{f_1 f_4 - f_2 f_3},\end{aligned}\tag{4.67}$$

resultados algebraicos que también se pueden resumir en el siguiente teorema [18] y [4].

Teorema 4.2.1. *Si la solución general de la siguiente ecuación de Riccati de las curvas espaciales*

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{i}{2}\tau(s) - i\kappa(s)r + \frac{i\tau(s)}{2}r^2\tag{4.68}$$

$r = w$ ó $r = z$, se encuentra de la forma

$$r = \frac{cf_1 + f_2}{cf_3 + f_4},\tag{4.69}$$

(f_1, f_2, f_3, f_4 funciones de s que no son todas de manera obligatoria soluciones particulares de la ecuación de Riccati) y c es constante arbitraria entonces la curva dada por las ecuaciones

$$x(s) = \int^s \frac{(f_1^2 - f_3^2) - (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1 f_4 - f_2 f_3)} d\sigma,\tag{4.70}$$

$$y(s) = i \int^s \left[\frac{(f_1^2 - f_3^2) + (f_2^2 - f_4^2)}{2(f_1 f_4 - f_2 f_3)} \right] d\sigma,\tag{4.71}$$

$$z(s) = \int^s \frac{(f_3 f_4) - (f_1 f_2)}{f_1 f_4 - f_2 f_3} d\sigma,\tag{4.72}$$

tiene $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ como la curvatura y la torsión.

Ejemplo 4.1 *Caso de las curvas planas.*

Las curvas planas se caracterizan por $\tau = 0$, por lo tanto la ecuación de Riccati (4.68) se reduce a la ecuación lineal de primer orden la cual es

$$\frac{df}{ds} + i\kappa f = 0,\tag{4.73}$$

por separación de variables

$$df/f = -i\kappa ds,\tag{4.74}$$

y denotando

$$\varphi = \int \kappa ds , \quad (4.75)$$

llegamos a la solución general

$$f = ce^{-i\varphi} , \quad (4.76)$$

En este caso se puede tomar como conjunto de las funciones f_i en la ecuación (4.69) del teorema 4.2.1 el siguiente:

$$f_1 = e^{-i\varphi} , f_2 = 0 , f_3 = 0 , f_4 = 1 , \quad (4.77)$$

que lleva a las ecuaciones (3.21) y (3.22) de la curva plana. Para demostrar esto usamos las ecuaciones (4.67):

$$\alpha_1 = \frac{f_1^2 + f_4^2}{2f_1f_4} = \frac{e^{-2i\varphi(s)} + 1}{2e^{-i\varphi(s)}} = \frac{e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} \cdot 2e^{-i\varphi}} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos \varphi(s) . \quad (4.78)$$

Por el teorema 4.2.1

$$x = \int^s \alpha_1 d\sigma = \int^s \cos \varphi d\sigma = \int^\varphi \frac{1}{\kappa} \cos \phi d\phi , \quad (4.79)$$

que tiene la forma de las ecuaciones naturales presentadas en la sección 3.2. Luego, para α_2 se tiene

$$\alpha_2 = \left[\frac{(f_1^2 - f_4^2)}{2f_1f_4} \right] i = \left[\frac{e^{-2i\varphi} - 1}{2e^{-i\varphi}} \right] i = \left[\frac{e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}}{2} \right] i = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \text{sen } \varphi(s) , \quad (4.80)$$

entonces

$$y = \int^s \alpha_2 d\sigma = \int^s \text{sen } \varphi d\sigma = \int^\varphi \frac{1}{\kappa} \text{sen } \phi d\phi . \quad (4.81)$$

Para α_3 se tiene que

$$\alpha_3 = \frac{(f_3f_4) - (f_1f_2)}{f_1f_4} = \frac{0}{f_1f_4} = \frac{0}{e^{-i\varphi(s)}} = 0 . \quad (4.82)$$

Por lo tanto:

$$z = \int^s \alpha_3 d\sigma = 0 , \quad (4.83)$$

confirmando que la curva estudiada es plana.

Cabe distinguir tres casos de curvas planas del punto de vista de la curvatura:

1. $\kappa = 0$: es el caso de la línea recta para el cual la solución es

$$f_{\text{recta}} = \text{cte.} \quad (4.84)$$

y considerando $f_1 = \text{cte.}$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 1$, α_1 y α_2 toman los valores siguientes

$$\alpha_1 = \frac{k^2 + 1}{2k} = C_1, \quad (4.85)$$

$$\alpha_2 = \frac{k^2 - 1}{2k} = C_3. \quad (4.86)$$

Conforme al teorema 4.2.1 resulta que

$$x(s) = \int^s \frac{k^2 + 1}{2k} d\sigma = C_1 s + C_2, \quad y(s) = \int^s \frac{k^2 + 1}{2k} d\sigma = C_3 s + C_4, \quad (4.87)$$

sustituyendo s se puede llegar a la expresión de la recta

$$y = bx + a \quad (4.88)$$

donde a y b son constantes.

2. $\kappa = \text{cte.}$: es el caso del círculo, para el cual la solución f es:

$$f_o = ce^{-i\kappa s} = c [\cos(\kappa s) - i \sin(\kappa s)]. \quad (4.89)$$

Nótese que f_{cir} es muy semejante a (4.76). Usando esta semejanza tomamos el mismo conjunto de f_i como en (4.77) entonces por semejanza con (4.78) se obtiene

$$\alpha_{1o} = \cos(\kappa s), \quad \alpha_{2o} = \text{sen}(\kappa s). \quad (4.90)$$

Por el teorema 4.2.1

$$x = \int^s \cos(\kappa\sigma) d\sigma = \frac{1}{\kappa} \int^s \cos(\kappa\sigma) d(\kappa\sigma) = \frac{1}{\kappa} \text{sen}(\kappa s), \quad (4.91)$$

$$y = \int^s \text{sen}(\kappa\sigma) d\sigma = \frac{1}{\kappa} \int^s \text{sen}(\kappa\sigma) d(\kappa\sigma) = -\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s). \quad (4.92)$$

Al nombrar $x = Y$ y $y = -X$ se llega a la expresión estándar del círculo en (X, Y)

$$X(s) = \frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s) = R \cos(u), \quad Y(s) = \frac{1}{\kappa} \text{sen}(\kappa s) = R \text{sen}(u). \quad (4.93)$$

donde R es el radio del círculo.

3. $\kappa \neq \text{cte.}$: este es el caso de las espirales para las cuales la solución f es de la forma

$$f_{\text{esp}} = ce^{-i \int^s \kappa(\sigma) d\sigma} = c \left[\cos \left(\int^s \kappa(\sigma) d\sigma \right) - i \sin \left(\int^s \kappa(\sigma) d\sigma \right) \right]. \quad (4.94)$$

A continuación se tratarán algunos casos particulares de espirales.

Ejemplo 4.2 *La espiral logarítmica.*

En 1638, Descartes quiso determinar todas las curvas planas que cumplieran la condición en la que el ángulo entre el radio vector y el vector tangente en un punto de la curva fuera constante, esta curva es la espiral logarítmica [13]. Por otro lado Jacobo Bernoulli fue uno de los investigadores que más estudios le dedicó llamándola la espiral maravillosa debido a sus propiedades matemáticas remarcables. Véase, por ejemplo, la espiral logarítmica de la Figura 4.1.

Si se considera la curvatura de la espiral logarítmica:

$$\kappa(s) = p/s , \quad (4.95)$$

la solución f es en este caso

$$f = C e^{-i \int^s \kappa(\sigma) d\sigma} = C e^{-ip \ln s} = C (\cos(p \ln s) - i \operatorname{sen}(p \ln s)) - \quad (4.96)$$

Ésta misma solución general f se puede escribir en la forma (4.69) del teorema 4.2.1 si se toma el siguiente conjunto de funciones f_i

$$f_1 = e^{-i \int^s \kappa(\sigma) d\sigma} , f_2 = 0 , f_3 = 0 , f_4 = 1 , \quad (4.97)$$

y utilizando (4.78) y (4.80) obtenemos

$$\alpha_1 = \frac{e^{-2ip \ln(s)} + 1}{2e^{-ip \ln(s)}} = \cos(p \ln(s)) , \quad \alpha_2 = \frac{e^{-2ip \ln(s)} - 1}{2e^{-ip \ln(s)}} = \operatorname{sen}(p \ln(s)) . \quad (4.98)$$

Conforme al teorema 4.2.1 se pueden obtener las ecuaciones paramétricas como sigue

$$x = \int^s \alpha_1 d\sigma = \int^s \cos(p \ln(\sigma)) d\sigma = \frac{1}{p} \int^{e^{\frac{u}{p}}} e^{\frac{v}{p}} \cos v dv$$

y utilizando la integración por partes

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{p} \int^{e^{\frac{u}{p}}} e^{\frac{v}{p}} \cos v dv = \frac{1}{p} e^{\frac{u}{p}} \operatorname{sen} u + \frac{1}{p^2} e^{\frac{u}{p}} \cos u - \frac{1}{p^3} \int^{e^{\frac{u}{p}}} \cos v dv \\ &= \frac{p e^{\frac{u}{p}}}{p^2 + 1} [p \operatorname{sen}(u) + \cos(u)] . \end{aligned} \quad (4.99)$$

Para obtener la forma estándar de la ecuación paramétrica para x usamos la identidad trigonométrica $A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta = I \cos(\theta + \Theta)$ donde $A = 1$, $B = p$, por lo que

$$I = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{p^2 + 1} , \quad \Theta = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right) = \tan^{-1}(p) \quad (4.100)$$

entonces

$$x = \frac{p e^{\frac{u}{p}}}{\sqrt{p^2 + 1}} \cos \left(u + \tan^{-1}(p) \right) . \quad (4.101)$$

En el caso de la ecuación paramétrica para la coordenada y

$$y = \int^s \alpha_2 d\sigma = \int^s \sin(p \ln(\sigma)) d\sigma = \frac{1}{p} \int^{e^{\frac{u}{p}}} e^{\frac{v}{p}} \sin v dv \quad (4.102)$$

con la integración por partes

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{p} \int^{e^{\frac{u}{p}}} e^{\frac{v}{p}} \sin v dv = -\frac{1}{p} e^{\frac{u}{p}} \cos u + \frac{1}{p^2} e^{\frac{u}{p}} \sin u - \frac{1}{p^3} \int^{e^{\frac{u}{p}}} e^{\frac{v}{p}} \sin v dv \\ &= \frac{p e^{\frac{u}{p}}}{p^2 + 1} [\sin u - p \cos u] . \end{aligned} \quad (4.103)$$

Usando la identidad trigonométrica $A \sin \theta + B \cos \theta = I \sin(\theta + \Theta)$ donde $A = 1$, $B = -p$, y

$$I = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{p^2 + 1}, \quad \Theta = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right) = \tan^{-1}(-p) \quad (4.104)$$

se llega a

$$y = \frac{p e^{\frac{u}{p}}}{\sqrt{p^2 + 1}} \sin(u - \tan^{-1}(p)) . \quad (4.105)$$

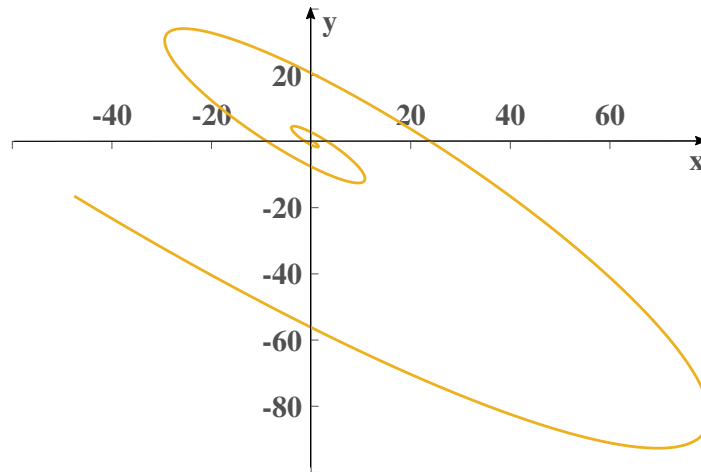


Figura 4.1: La espiral logarítmica $x = \frac{p e^{\frac{u}{p}}}{\sqrt{p^2 + 1}} \cos \left(u + \tan^{-1} \left(\frac{1}{p} \right) \right)$, $y = \frac{p e^{\frac{u}{p}}}{\sqrt{p^2 + 1}} \sin(u - \tan^{-1}(p))$ está graficada para $p = \pi$ y $0 \leq u \leq 5\pi$.

Ejemplo 4.3 *La espiral de Cornu.*

La espiral de Cornu también llamada clotoide es ampliamente utilizada en la construcción de carreteras, su gráfica se muestra en la Figura 4.2, y posee la curvatura proporcional a la longitud de arco.

$$\kappa(s) = \pi s . \quad (4.106)$$

Considerando el siguiente conjunto de funciones f_i

$$f_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}s^2} , f_2 = 0 , f_3 = 0 , f_4 = 1 , \quad (4.107)$$

con las ecuaciones (4.78) y (4.80) para α_1 y α_2 resulta

$$\alpha_1 = \frac{e^{-i\pi s^2} + 1}{2e^{-\frac{\pi}{2}s^2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}s^2\right) , \quad \alpha_2 = \frac{e^{-i\pi s^2} - 1}{2e^{-\frac{\pi}{2}s^2}} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}s^2\right) , \quad (4.108)$$

del teorema 4.2.1 se obtiene que

$$x = \int^s \alpha_1 d\sigma = \int^s \cos\left(\frac{\pi}{2}\sigma^2\right) d\sigma = C_F(s) = C_F\left(\frac{u}{\sqrt{\pi}}\right) , \quad (4.109)$$

$$y = \int^s \alpha_2 d\sigma = \int^s \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\sigma^2\right) d\sigma = S_F(s) = S_F\left(\frac{u}{\sqrt{\pi}}\right) . \quad (4.110)$$

donde C_F y S_F son las integrales de Fresnel.

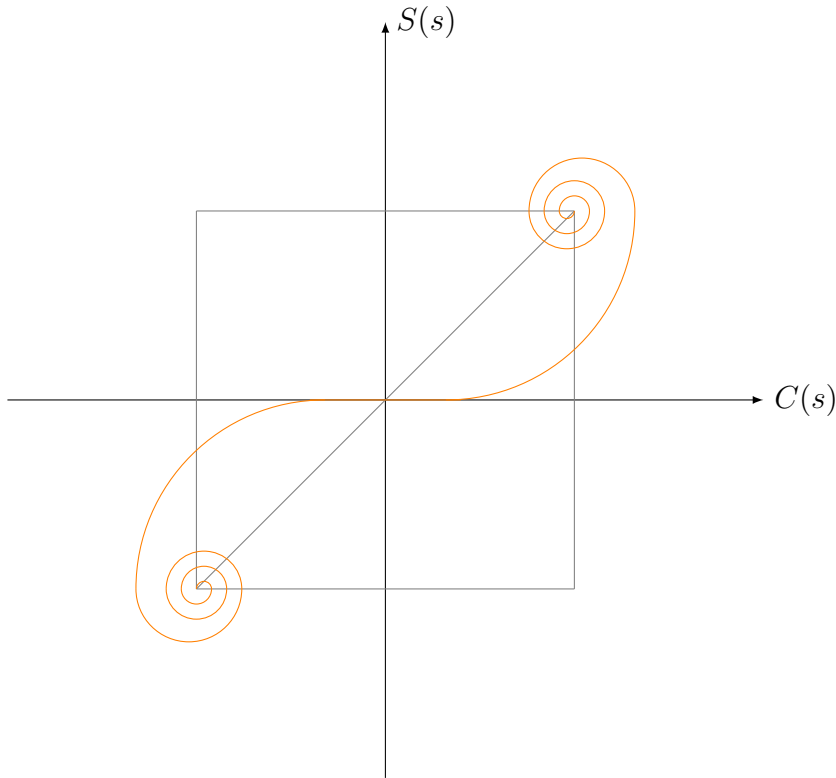


Figura 4.2: Espiral de Cornu en el plano Argand, $S_F(s)$ vs. $C_F(s)$.

Ejemplo 4.4 *La hélice cilíndrica.*

Para este caso los coeficientes κ y τ en la ecuación (4.68) son $\kappa = a/c^2$ y $\tau = b/c^2$ donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, así se tiene que la ecuación de Riccati es

$$\frac{dw}{ds} = \frac{ib}{2\sqrt{a^2 + b^2}}w^2 - i\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}w - \frac{ib}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4.111)$$

o de manera simplificada

$$\frac{dw}{ds} = \frac{i}{2\sqrt{k^2 + 1}}(w^2 - 2kw - 1) \quad (4.112)$$

donde $k = \frac{a}{b}$, con la integración por separación de variables ¹

$$\int^s \frac{dw}{w^2 - 2kw - 1} \equiv \int^s \frac{dw}{(w - w_1)(w - w_2)} = \frac{i}{2\sqrt{k^2 + 1}} \int^s d\sigma \quad (4.113)$$

donde

$$w_{1,2} = k \pm \sqrt{k^2 + 1}, \quad (4.114)$$

lo que lleva a la siguiente solución general

$$w(s) = \frac{K e^{is} w_2 - w_1}{K e^{is} - 1}, \quad (4.115)$$

donde K es la constante de integración. El conjunto de funciones f_i que se considera para este caso es entonces, conforme al teorema 4.2.1

$$f_1 = e^{is} w_2, \quad f_2 = -w_1, \quad f_3 = e^{is}, \quad f_4 = -1. \quad (4.116)$$

Para α_1, α_2 y α_3 resulta

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{e^{2is}(w_2^2 - 1) - (w_1^2 - 1)}{2e^{is}(w_1 - w_2)} = \frac{w_2^2 e^{is} - w_1^2 e^{-is} - e^{is} + e^{-is}}{2(w_1 - w_2)} \\ &= \frac{ik^2}{\sqrt{k^2 + 1}} \operatorname{sen}(s) - k \cos(s), \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{e^{2is}(w_2^2 - 1) + (w_1^2 - 1)}{2e^{is}(w_1 - w_2)} = \frac{w_2^2 e^{is} + w_1^2 e^{-is} - e^{-is} - e^{is}}{2(w_1 - w_2)} \\ &= \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + 1}} \cos(s) - ik \operatorname{sen}(s), \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\alpha_3 = \frac{-e^{is} + w_1 w_2 e^{is}}{w_1 e^{is} - w_2 e^{is}} = \frac{w_1 w_2 - 1}{w_1 - w_2} = -\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}. \quad (4.119)$$

¹Se puede revisar también el caso de la ecuación de Riccati de coeficientes proporcionales en la sección 4.1.1

del teorema 4.2.1 se obtiene que

$$\begin{aligned} x &= \int^s \alpha_1 d\sigma = \int^s \left[\frac{ik^2}{\sqrt{k^2+1}} \operatorname{sen}(\sigma) - k \cos(\sigma) \right] d\sigma \\ &= -\frac{ik^2}{\sqrt{k^2+1}} \cos(s) - k \operatorname{sen}(s), \end{aligned} \quad (4.120)$$

utilizando la identidad trigonométrica $A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta = I \cos(\theta + \Theta)$ donde $A = -\frac{ik^2}{\sqrt{k^2+1}}$, $B = -k$, y

$$I = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}, \quad \Theta = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{i\sqrt{k^2+1}}{k} \right), \quad (4.121)$$

se llega a

$$x = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} \cos \left(s - \tan^{-1} \left(\frac{i\sqrt{k^2+1}}{k} \right) \right) = \frac{a}{c} \cos \left(cu - \tan^{-1} \left(\frac{ic}{a} \right) \right), \quad \text{con } c = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4.122)$$

La coordenada y de la hélice se obtiene análogamente

$$\begin{aligned} y &= \int^s \alpha_2 d\sigma = \int^s \left[\frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}} \cos(\sigma) - ik \operatorname{sen}(\sigma) \right] d\sigma \\ &= \frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}} \operatorname{sen}(s) + ik \cos(s). \end{aligned} \quad (4.123)$$

Por medio de la identidad trigonométrica $A \operatorname{sen} \theta + B \cos \theta = I \operatorname{sen}(\theta + \Theta)$ donde $A = \frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}$, $B = ik$, y

$$I = \sqrt{A^2 + B^2} = -\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}, \quad \Theta = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{i\sqrt{k^2+1}}{k} \right), \quad (4.124)$$

se llega a

$$y = -\frac{k}{\sqrt{k^2+1}} \operatorname{sen} \left(s + \tan^{-1} \left(\frac{i\sqrt{k^2+1}}{k} \right) \right) = \frac{a}{c} \operatorname{sen} \left(-cu - \tan^{-1} \left(\frac{ic}{a} \right) \right). \quad (4.125)$$

Finalmente para la coordenada z se obtiene

$$z = \int^s \alpha_3 d\sigma = -\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} s = -bu, \quad (4.126)$$

lo que corresponde a una hélice cilíndrica levógira. Véase Figura 4.3.

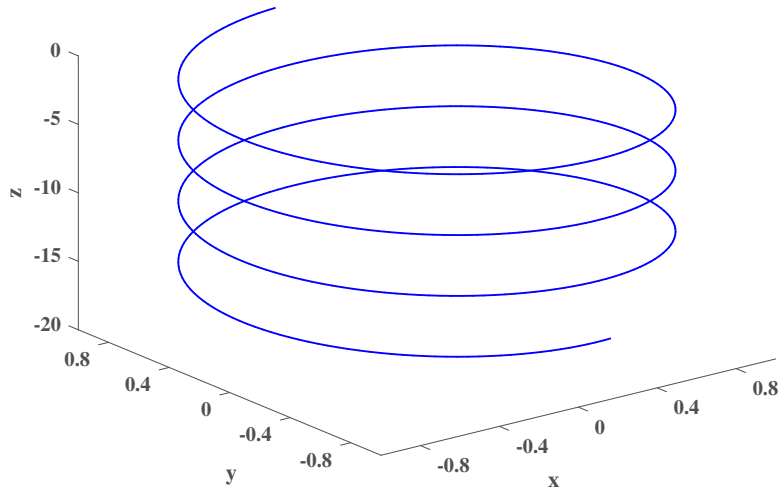


Figura 4.3: Hélice cilíndrica de paso constante levógira graficada para los siguientes parámetros: $0 < u < 10\pi$, $a = 1$, $b = 1$.

CAPÍTULO 5

OTROS ASPECTOS COMPLEMENTARIOS EN LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE LAS CURVAS

Los matemáticos... cuando les hablas, traducen lo dicho a su propia lengua convirtiéndolo todo en algo completamente distinto.

Johann Wolfgang von Goethe,
poeta alemán

Con el propósito de complementar algunos aspectos presentados en los capítulos anteriores, en este capítulo se incluyen varios conceptos, ejemplos y ejercicios referentes a la teoría de las curvas.

5.1. El concepto de contacto

En lugar de establecer que las figuras tienen un cierto número de puntos consecutivos (u otros elementos) en común, se puede estipular que tienen un *contacto* de cierto orden. El estudio de los contactos de curvas y superficies fue iniciado por Lagrange en 1797 [17] y por Cauchy en [3].

La definición de contacto en general es como sigue:

Definición 5.1.1. *Contacto de orden n .*

Sean dos curvas o superficies Σ_1, Σ_2 con un punto regular P en común. Tómesese un punto A en Σ_1 cercano a P y sea AD su distancia a Σ_2 . Entonces Σ_2 tiene un *contacto* de orden n con Σ_1 en P , cuando para $A \rightarrow P$ a lo largo de Σ_1

$$\lim_{A \rightarrow P} \frac{AD}{(AP)^k} \neq 0, \quad \text{para } k = n + 1, \quad (5.1)$$

pero

$$\lim_{A \rightarrow P} \frac{AD}{(AP)^k} = 0, \quad \text{para } k \leq n. \quad (5.2)$$

Cuando Σ_1 es una curva $x(u)$ y Σ_2 una superficie (F_x, F_y, F_z no todas cero)

$$F(x, y, z) = 0, \quad (5.3)$$

hacemos uso del hecho que la distancia AD de un punto $A(x_1, y_1, z_1)$ cercano a P es del mismo orden que $F(x_1, y_1, z_1)$. La prueba general de este hecho requiere teoría de superficies, pero el caso del plano y de la esfera si pueden ser demostrados.

Consideremos ahora la función obtenida al sustituir x_i de la curva Σ_1 en la ecuación (5.3)

$$f(u) = F[x(u), y(u), z(u)]. \quad (5.4)$$

A continuación presentamos un procedimiento que es una generalización simple del método utilizado en las sección 2.4 para obtener las ecuaciones del plano osculador y el círculo osculador. Sea $f(u)$ cercano a $P(u = u_0)$ con derivadas finitas $f^{(i)}(u_0)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Si tomamos $u = u_1$ en A y escribimos $h = u_1 - u_0$ entonces existe un desarrollo Taylor de $f(u)$ de la forma

$$f(u_1) = f(u_0) + hf'(u_0) + \frac{h^2}{2!}f''(u_0) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(u_0) + o(h^{n+1}). \quad (5.5)$$

Aquí $f(u_0) = 0$, como P yace en Σ_2 y h es de orden AP (véase el teorema 2.3.1), $f(u_1)$ es del orden de AD . Por lo que las condiciones necesarias y suficientes para que la superficie tenga un contacto de orden n en P con la curva son que las relaciones en P cumplan que

$$f(u) = f'(u) = f''(u) = \dots = f^{(n)}(u) = 0, \quad f^{(n+1)}(u) \neq 0. \quad (5.6)$$

En estas fórmulas se ha reemplazado u_0 por u .

De la misma forma se encuentra que si Σ_2 es una curva definida por

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad (5.7)$$

las condiciones necesarias y suficientes para un contacto de orden n en P entre las curvas son que en P

$$f_1(u) = f_1'(u) = \cdots = f_1^{(n)}(u) = 0, \quad (5.8)$$

$$f_2(u) = f_2'(u) = \cdots = f_2^{(n)}(u) = 0, \quad (5.9)$$

donde

$$f_1(u) = F_1[x(u), y(u), z(u)], \quad f_2(u) = F_2[x(u), y(u), z(u)], \quad (5.10)$$

y por lo menos una de las dos derivadas $f_1^{(n+1)}(u)$, $f_2^{(n+1)}(u)$ en P no es cero.

Se pueden desarrollar condiciones similares para el contacto entre dos superficies. En vez de AD podemos utilizar segmentos del mismo orden, haciendo por ejemplo $PD = PA$ (entonces $\angle D$ no mayor a 90°).

Si se comparan estas condiciones con la derivación del plano osculador y del círculo osculador entonces se observa que son, en estos casos, idénticos con la condición de que Σ_1 y Σ_2 tiene $n+1$ puntos consecutivos en común. Por lo que se puede decir que en general:

Definición 5.1.2. Dos figuras Σ_1 y Σ_2 teniendo en el punto P un contacto de orden n , tienen $n+1$ puntos consecutivos en común.

Al seguir un razonamiento análogo al de las secciones anteriores 2.4 y 2.5, confinándose al caso expresado por (5.3) se define F con $n+1$ parámetros independientes. Estos son suficientes para permitir a la superficie Σ_2 pasar por $(n+1)$ puntos (u_0, u_1, \dots, u_n) . Si estos $(n+1)$ puntos están juntos en el punto $u = u_0$ entonces las $n+1$ ecuaciones (5.6) se satisfacen, si hubiese más de estas ecuaciones (5.6) entonces los parámetros en F se pueden determinar tal que Σ_2 pase por más de $n+1$ puntos. Un razonamiento similar se usa para otros casos de contacto. A partir de esto y de las secciones 2.4 y 2.5 se puede saber que una tangente tiene contacto de (al menos) orden uno con la curva y que un plano osculador y un círculo osculador tienen un contacto de (al menos) orden dos con la curva. [23]

5.2. La esfera osculante

Se continua aplicando esta teoría para encontrar una esfera que pase por cuatro puntos consecutivos de la curva, la *esfera osculante*. Sea esta esfera dada por la ecuación [19]

$$(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - r^2 = 0, \quad (5.11)$$

donde \mathbf{X} es el vector de coordenadas de un punto genérico de la esfera, \mathbf{c} es el vector de coordenadas del centro de la esfera y r es el radio de la esfera.

Se considera de acuerdo con la ecuación (5.4) que:

$$f(s) = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - r^2, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(s). \quad (5.12)$$

Entonces las ecuaciones (5.6) toman la forma, independiente de $f(s) = 0$:

$$f'(s) = 0 \quad \text{ó} \quad (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (5.13)$$

$$f''(s) = 0 \quad \text{ó} \quad (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \kappa \mathbf{n} + 1 = 0, \quad (5.14)$$

$$f'''(s) = 0 \quad \text{ó} \quad (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot (\kappa' \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{t} + \kappa \tau \mathbf{b}) = 0, \quad (5.15)$$

o con $\tau \neq 0$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} = -R, \quad (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = R\kappa' / \kappa\tau = -R'T. \quad (5.16)$$

Por lo tanto el centro O de la esfera osculante se determina de manera única con la expresión

$$\mathbf{c} = \mathbf{x} + R\mathbf{n} + TR'\mathbf{b}. \quad (5.17)$$

Esta esfera tiene contacto de tercer orden con la curva. Su intersección con el plano osculante es el círculo osculador. Su centro está en el plano normal en una línea paralela a la binormal llamada *eje polar*. El radio de la esfera osculante es

$$r = \sqrt{R^2 + (TR')^2}. \quad (5.18)$$

Cuando la curva tiene curvatura constante (sin ser un círculo), el centro de la esfera osculante coincide con el centro del círculo osculante. Para más información véase [16].

5.3. Curvatura integral de una curva y torsión geodésica

La *curvatura integral* κ_{int} de una curva es la integral de arco del módulo de la curvatura, es decir

$$\kappa_{int}(s) := \int^s |\kappa| d\sigma. \quad (5.19)$$

Para curvas espaciales cerradas la curvatura integral $\geq 2\pi$ con el signo de igualdad cumplido sólo para curvas planas convexas (óvalos) [9].

La *torsión geodésica* τ_g de una superficie con el vector tangente unitario \mathbf{t} está dada por

$$\tau_g(s) = \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{N}/ds), \quad (5.20)$$

donde \mathbf{u} es el vector perpendicular a \mathbf{t} en el plano tangente y \mathbf{N} es un vector que yace en una superficie normal contenida en el plano normal.

5.4. Un triedro móvil sobre una superficie

Si se introduce a lo largo de una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en una superficie el triedro $(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{N})$ de la torsión geodésica entonces la ecuación

$$\mathbf{k} = \kappa_n \mathbf{N} + \kappa_g \mathbf{u} ,$$

se complementa como sigue

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa_n \mathbf{N} + \kappa_g \mathbf{u} , \\ \frac{d\mathbf{u}}{ds} &= -\kappa_g \mathbf{t} - \tau_g \mathbf{N} , \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= \tau_g \mathbf{u} - \kappa_n \mathbf{t} . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Se puede probar a partir de éstas ecuaciones que si dos superficies son tangentes una a la otra a lo largo de una curva y las normales a ellas en los puntos de la curva son dirigidas similarmente, la curva posee la misma curvatura geodésica y la misma torsión geodésica con respecto a ambas superficies y las superficies tienen la misma curvatura normal en la dirección de la curva. Las ecuaciones (5.21) fueron llamadas las Fórmulas generales de Frenet-Serret de la teoría de curvas en superficies [15]. Véase también [12].

El sistema de Frenet-Serret en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{u}' \\ \mathbf{N}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & -\tau_g \\ -\kappa_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} .$$

5.5. Ecuación diferencial de 4to. orden para las curvas espaciales

Si en lugar de utilizar el método de la ecuación de Riccati se busca obtener la $\mathbf{x}(s)$ directamente como solución de las ecuaciones de Frenet-Serret para κ y τ dados ($\kappa, \tau \neq 0$) se obtiene la ecuación homogénea de cuarto orden

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{iv} - \left(2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right) \mathbf{x}''' + \left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{\kappa\kappa'' - 2(\kappa')^2}{\kappa^2} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau}\right) \mathbf{x}'' \\ + \kappa^2 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau}\right) \mathbf{x}' = 0 , \end{aligned} \quad (5.22)$$

con $\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}}$ se obtiene una ecuación homogénea de tercer orden

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}''' - \left(2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right) \tilde{\mathbf{x}}'' + \left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{\kappa\kappa'' - 2(\kappa')^2}{\kappa^2} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau}\right) \tilde{\mathbf{x}}' \\ + \kappa^2 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau}\right) \tilde{\mathbf{x}} = 0 . \end{aligned} \quad (5.23)$$

En general, una ecuación lineal no homogénea de cuarto orden tiene la forma

$$f_4 y_{ssss} + f_3 y_{sss} + f_2 y_{ss} + f_1 y_s + f_0 y = g(s) , \quad f_k = f_k(s) , \quad (5.24)$$

comparando con (5.22) se observa que

$$f_4 = 1, f_3 = -\left(2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right), f_2 = \left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{\kappa\kappa'' - 2(\kappa')^2}{\kappa^2} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau}\right), \quad (5.25)$$

$$f_1 = \kappa^2 \left(\frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau}\right), f_0 = 0, g = 0 . \quad (5.26)$$

Si se conoce una solución particular no trivial $y_0 = y_0(s)$ de la correspondiente ecuación homogénea (con $g \equiv 0$), la sustitución

$$y(s) = y_0(s) \int^s z(\sigma) d\sigma , \quad (5.27)$$

lleva a la ecuación lineal de tercer orden

$$f_4 y_0 z_{sss} + (4f_4(y_0)_s + f_3 y_0) z_{ss} + (6f_4(y_0)_{ss} + 3f_3(y_0)_s + f_2 y_0) z_s + (4f_4(y_0)_{sss} + 3f_3(y_0)_{ss} + 2f_2(y_0)_s + f_1 y_0) z \equiv g . \quad (5.28)$$

Si se conocen dos soluciones particulares no triviales $y_1 = y_1(s)$ y $y_2 = y_2(s)$ linealmente independientes de (5.24) con $g \equiv 0$. Entonces la sustitución

$$y = y_1 \int y_2 \omega d\sigma - y_2 \int y_1 \omega d\sigma , \quad (5.29)$$

lleva a una ecuación lineal de segundo orden

$$f_4 \Delta_1 \omega'' + (3f_4 \Delta_2 + f_3 \Delta_1) \omega' + [f_4(3\Delta_3 + 3\varepsilon) + 2f_3 \Delta_2 + f_2 \Delta_1] \omega = g , \quad (5.30)$$

donde

$$\Delta_1 = y_1' y_2 - y_1 y_2', \Delta_2 = y_1'' y_2 - y_1 y_2'', \Delta_3 = y_1''' y_2 - y_1 y_2''', \varepsilon = y_1'' y_2' - y_1' y_2'' . \quad (5.31)$$

El ω que se usa aquí es distinto al que se presenta en la sección 4.1.

5.6. Curvatura de una curva plana

La curvatura en cualquier punto de una curva plana dada por $y = y(x)$ teniendo primera y segunda derivada está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2 y / dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} , \quad (5.32)$$

donde θ es el ángulo entre la línea tangente a la curva y el eje x y ds es la longitud de arco a lo largo de la curva [24].

Esta es una fórmula importante porque muchas veces las curvas planas se proporcionan de manera funcional en forma $C = y(x)$ para demostrarla se define la curvatura como $d\theta/ds$ y como la pendiente de la línea tangente es $\tan \theta = y'$ y con la definición de la longitud de arco

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (y')^2} dx' , \quad (5.33)$$

derivando respecto a x por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dx} , \quad (5.34)$$

y diferenciando a θ y a s se tiene que

$$\theta = \tan^{-1} y' = \frac{1}{1 + (y')^2} \cdot y'' , \quad (5.35)$$

y que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2} . \quad (5.36)$$

Luego, estos valores se sustituyen en $d\theta/ds$ la definición de curvatura

$$\frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{\frac{y''}{1 + (y')^2}}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y''}{[1 + (y')^2][\sqrt{1 + (y')^2}]} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} . \quad (5.37)$$

5.7. Fórmula para el paso variable (el salto) de una hélice cilíndrica con $z=bu^2$

En los Ejemplos 2.3 y 2.4 se exponen dos de los casos más sencillos sobre hélices cilíndricas una de paso constante y una de paso variable. En el Ejemplo 2.4, para una hélice con el paso variable se designa *salto* (S_n) al avance que realiza con respecto al eje z . El salto S_n depende de las condiciones iniciales.

En la hélice cilíndrica de paso constante se conoce que el paso es $p = 2\pi b$, entonces después de n pasos sobre la pared del cilindro que describe la hélice se puede definir la distancia que avanza en cada paso como

$$Z_n = z_0 + 2\pi bn . \quad (5.38)$$

En el caso de la hélice cilíndrica de paso variable a partir de observar la ecuación $z = bu^2$

$$z_0 = bu_0^2 , \quad (5.39)$$

$$z_1 = bu_1^2 = b(u_0 + 2\pi)^2 , \quad (5.40)$$

donde u tiene avance de 2π se llega a que el salto que tiene la hélice se describe como

$$S_n = 2\pi b(u_n + u_{n-1}) , \quad (5.41)$$

donde u_n es el último u conocido y calculado, por lo que para el salto S_1 se obtiene que $u_1 = u_0 + 2\pi$

$$S_1 = 2\pi b(u_1 + u_0) = 2\pi b(2u_0 + 2\pi) = 4\pi b\left(\frac{\sqrt{z_0}}{\sqrt{b}} + \pi\right) = 4\pi\sqrt{b}(\sqrt{z_0} + \pi\sqrt{b}) \quad (5.42)$$

$$S_2 = 4\pi b(u_1 + \pi) = 4\pi b(u_0 + 3\pi) = 4\pi\sqrt{b}(\sqrt{z_0} + 3\pi\sqrt{b}) \quad (5.43)$$

$$S_3 = 2\pi b(u_3 + u_2) = 4\pi b(u_2 + \pi) . \quad (5.44)$$

De donde se deduce que

$$S_n = 4\pi b[u_0 + (2n - 1)\pi] , \quad (5.45)$$

es decir,

$$S_n = 4\pi\sqrt{b}\left(\sqrt{z_0} + (2n - 1)\pi\sqrt{b}\right) . \quad (5.46)$$

Considerando el ‘salto’ de la hélice para conocer el desplazamiento a lo largo del eje z se sabe que

$$z_1 = z_0 + S_1 .$$

El avance total en el eje z es con el salto S_n

$$z_n = z_0 + \sum_{i=1}^n S_i = z_0 + 4\pi\sqrt{b} \sum_{i=1}^n (\sqrt{z_0} + (2i - 1)\pi\sqrt{b}) ,$$

partiendo de esta ecuación

$$\begin{aligned} z_n &= z_0 + 4\pi\sqrt{b}\sqrt{z_0} \sum_{i=1}^n \left[1 + (2i - 1)\pi\sqrt{\frac{b}{z_0}} \right] \\ &= z_0 + 4\pi\sqrt{bz_0} \left[n + \pi\sqrt{\frac{b}{z_0}} \sum_{i=1}^n (2i - 1) \right] \\ &= z_0 + 4\pi\sqrt{bz_0} \left[n + \pi\sqrt{\frac{b}{z_0}} n^2 \right] . \end{aligned}$$

Por lo tanto la distancia en z con el paso variable es

$$z_n = z_0 + 4\pi\sqrt{bz_0}n + 4\pi bn^2 . \quad (5.47)$$

En la Figura 5.1 se muestra el avance en Z como función de n para ambos casos de hélices.

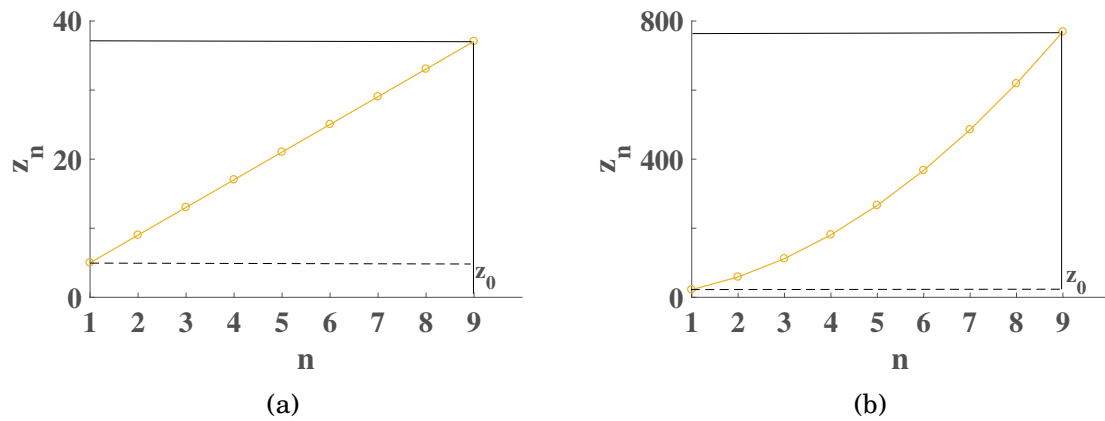


Figura 5.1: Avance en z a lo largo del cilindro para la hélice de paso constante (a) y de paso variable (b). Las hélices fueron graficadas con los siguientes parámetros: $\pi/2 \leq u_0 \leq 3\pi$, $b = 2/\pi$, $1 \leq n \leq 9$.

Las matemáticas puras son,
en cierta forma, la poesía de
las ideas lógicas.

Albert Einstein, físico alemán

El principal objeto de estudio de esta tesis fue el análisis de varios resultados importantes de Lie y Darboux relacionados con el triedro móvil de Frenet-Serret y la obtención de las ecuaciones paramétricas de las curvas dos dimensionales (planas) y tres dimensionales (curvas espaciales). Las ecuaciones del triedro móvil de Frenet-Serret de tales curvas se pueden reducir a una ecuación de Riccati con coeficientes expresados en función de la curvatura y torsión, κ y τ respectivamente, los cuales son los parámetros intrínsecos (naturales) de las curvas.

En el caso de las curvas planas ésta ecuación de Riccati se reduce a una ecuación lineal de primer orden. Según otro resultado importante de Lie y Darboux existe una forma de la solución general de la ecuación de Riccati así como de la misma reducida a la ecuación lineal que puede ser usada para obtener las ecuaciones paramétricas de cualquier curva representada por esas ecuaciones. Este resultado fue usado en esta tesis para varios casos de curvas planas como son el círculo, la espiral logarítmica y la espiral de Cornu (clotoide). En el caso de las curvas espaciales se usa como ejemplo el caso de la hélice cilíndrica.

En general, en el caso de las espirales, para obtener las ecuaciones paramétricas de las coordenadas x y y se requiere la integración por partes. En el caso de la espiral logarítmica se observa que la presencia de una constante arbitraria en la curvatura expresada como función de la longitud de arco introduce una rotación y una deformación de la espiral logarítmica. Esto se puede apreciar en la espiral de la Figura 4.1 graficada con las ecuaciones paramétricas para x y y obtenidas a través del método de Lie y Darboux. En el caso de la espiral de

Cornu no se obtienen rotaciones y/o deformaciones ya que el método de Darboux y Lie proporciona directamente las integrales de de Fresnel en forma estándar.

En el caso de las curvas en tres dimensiones se presenta la hélice cilíndrica de paso constante. Este es el caso más complejo elaborado en esta tesis que se discute a partir de la acuación de Riccati asociada, obteniéndose la solución general de Riccati en la forma propuesta por Lie y Darboux, mostrando el cálculo completo que lleva a la representación paramétrica de esta hélice.

Finalizamos notando que la utilidad del método de Lie y Darboux se debe a que se pueden obtener las ecuaciones paramétricas de cualquier curva espacial a la cual le corresponde una ecuación de Riccati integrable. Lo único que se debe hacer en estos casos es usar la solución general de la ecuación de Riccati en la forma propuesta por Lie y Darboux y luego proceder con el método así como se ha ilustrado en esta tesis para algunos casos representativos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] E. Barbier. Nota sobre el problema de la aguja de Buffon y el juego de los conjuntos convexos. *Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série*, (5): pp. 273-286, 1860. [En francés].
- [2] M. Berger. *Geometry Revealed A Jacob's ladder to modern higher geometry*. Springer, 2010.
- [3] A. Cauchy. *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie, I*. 1826. [En francés].
- [4] G. Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Gauthier-Villars, Cap. 2, 1887. [En francés].
- [5] M. P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza, 1995.
- [6] L. P. Eisenhart. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*. Ginn & Company, p. 28, 1909.
- [7] L. Euler. De constructione aequationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitinae*, 8: pp. 66-85, 1741. [En latín].
- [8] L. Euler. De curvis triangularibus. *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae*, II: pp. 3-30, 1778 y 1780. [En latín].
- [9] W. Fenchel. Sobre la curvatura y la torsión de curvas cerradas en el espacio. *Mathematische Annalen*, 101: pp. 238-252, 1929. [En alemán].
- [10] P. Franklin. *Tratado de cálculo avanzado*. pp. 340-341, 1940. [En inglés].
- [11] P. Franklin. *Methods of advanced calculus*. Mc Graw-Hill Book Company, p. 351, 1944.

- [12] W. C. Graustein. *Differential geometry*. The Macmillan Company, p. 165, 1935.
- [13] A. Gray. *Modern differential geometry of curves and surfaces*. CRC Press, p. 24, 2005.
- [14] E. L. Ince. *Ordinary differential equations*. Dover Books, p. 71, 1927.
- [15] J. Knoblauch. *Grundlagen der differential geometrie*. p. 56, 1913. [En alemán].
- [16] W. Kühnel. *Differential geometry Curves-Surfaces-Manifolds*. American Mathematical Society, 2015.
- [17] J. L. Lagrange. *Traité des fonctions analytiques*. 1797. [En francés].
- [18] S. Lie. *Werke III*. 1882. [En alemán].
- [19] M. M. Lipschutz. *Geometría diferencial*. Mc Graw-Hill, 1971.
- [20] A. P. Mellish. Notes of differential geometry. *Annals of Mathematics*, 32(1): pp. 181-190, 1931.
- [21] G. Scheffers. *Anwendung der Differential und Integralrechnung auf Geometrie*. De Gruyter, 1923.
- [22] D. J. Struik. Differential geometry in the large. *Bull. Am. Math. Soc.*, 37(2): pp. 49-62, 1931.
- [23] D. J. Struik. *Lectures on classical differential geometry*. Dover Publications, 1961.
- [24] E. W. Swokowski. *Calculus with analytic geometry*. Prindle, Weber & Schmidt, p. 696, 1983.
- [25] K. Tapp. *Differential geometry of curves and surfaces*. Springer, p. 6, 2016.
- [26] W. F. Trench. *Introduction to real analysis*. Pearson Education, 2010.
- [27] C. Jordan y R. Fiedler. *Contribution à l'étude des courbes convexes fermées et de certaines courbes qui s'y rattachent*. Hermann, 1912. [En francés].
- [28] A. D. Polyanin y V. F. Zaitsev. *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*. Chapman & Hall/CRC, p. 30, 2da. Edición, 2003.

ÍNDICE ALFABÉTICO

- ángulo de contingencia, **19**
- binormal, **21**
- cicloide, **34**
- congruencia, **36**
- contacto, **66**
- curva, **8**
 - ancho de, **42**
 - arco de, **8**
 - esférica, **37**
 - espacial, **69**
 - orientada, **10**
 - plana, **55, 70**
 - proyección de una, **31**
 - rotación de la, **32**
 - traslación de la, **32**
- curvatura, **19**
 - fórmula de, **70**
 - integral, **68**
 - radio de, **19**
 - vector de, **19**
- ecuación
 - de Riccati forma canónica, **48**
 - de Bernoulli, **49**
 - de Riccati de las curvas, **50, 51**
 - de segundo orden, **48, 50**
 - general de Riccati, **45**
 - natural, **32, 34**
- eje polar, **68**
- elipse, **41**
- epicicloide, **33**
- esfera
 - osculante, **37, 67**
 - unitaria, **54**
- espiral
 - de Cornu, **60**
 - logarítmica, **58**
- evoluta, **25**
- hélice, **38**
 - cilíndrica
 - de paso constante, **61, 71**
 - de paso variable, **71**
 - esférica, **39**
 - salto de una, **71**
- hipocicloide, **34**
- involuta, **24**
- longitud de arco, **10**
- normal, **18**
- osculador
 - círculo, **19**
 - plano, **17**
- óvalo
 - definición de, **41**
 - vértice de un, **42**
- perímetro, **43**
- plano
 - normal, **30**
 - osculador, *véase también* osculador
 - rectificante, **30**

producto escalar de dos vectores, **10**
punto de inflexión, **17**

tangente, **11**

torsión, **21**
geodésica, **68**
radio de, **22**

triedro móvil, **21, 29**
en superficie, **69**

vector

componentes vectoriales de un, **9**
coordenadas de un, **9**
longitud del, **9**