INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

Funcionales de Lyapunov-Krasovskii para sistemas con retardo de tipo neutro en la forma de Hale

Tesis que presenta

Abraham Moisés Canul Pech

Para obtener el grado de

Doctor en Control y Sistemas Dinámicos

Director de la Tesis:

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

San Luis Potosí, S.L.P., 21 de Junio del 2022

Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Funcionales de Lyapunov-Krasovskii para sistemas con retardo de tipo neutro en la forma de Hale.** Presentada para obtener el Grado de Doctor en Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Abraham Moisés Canul Pech** y aprobada el veintiuno de junio de dos mil veintidos por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de la División de Matemáticas Aplicadas del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
Director de la tesis

Dr. Eric José Avila Vales
Jurado en el examen

Dr. Hugo Cabrera Ibarra
Jurado en el examen

Dr. David Antonio Lizárraga Navarro
Jurado en el examen

Dr. Adrián René Ramírez López
Jurado en el examen

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

La Secretaria Académica del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 022 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Control y Sistemas Dinámicos está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 21 días del mes de junio del año 2022, se reunió a las 11:00 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Hugo Cabrera Ibarra	**Presidente**	**IPICYT**
Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar	**Secretario**	**IPICYT**
Dr. Adrián René Ramírez López	**Sinodal**	**IPICYT**
Dr. David Antonio Lizárraga Navarro	**Sinodal**	**IPICYT**
Dr. Eric José Avila Vales	**Sinodal externo**	**UADY**

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

DOCTOR EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

sustentó el C.

Abraham Moisés Canul Pech

sobre la Tesis intitulada:

Funcionales de Lyapunov-Krasovskii para sistemas con retardo de tipo neutro en la forma de Hale

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLO

Dándose por terminado el acto a las 12:40 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe la Secretaria Académica del Instituto.

A petición del interesado y para los fines que al mismo convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 21 días del mes de junio de 2022.

Dra. Lina Raquel Riego Ruiz
Secretaria Académica

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

IPICYT
SECRETARÍA ACADÉMICA
INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.

Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de control y sistemas dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. de registro: **295308**) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

(Página en Blanco que se va a utilizar para colocar la copia del acta de examen.)

A mi madre y a la memoria de mi padre

Agradecimientos

Deseo dedicar estas líneas para agradecer a todos los que me acompañaron, apoyaron y que hicieron posible que este trabajo se culminara con éxito. Primero y antes que todo agradecerle a Dios por sus bendiciones recibidas, proveerme sabiduría y conocimientos cada día. También quiero expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a mis padres Santiago R. Canul Canul (+) y María E. Pech May por sus consejos, e incondicional apoyo y por motivarme. A mis hermanos por la motivación recibida durante estos años.

También deseo expresar mi más sincera gratitud al Dr. Daniel Melchor Aguilar profesor de la división de control y sistemas dinámicos del IPICYT, por su constante estímulo, útil critica, su entusiasmo, por su paciencia, por su dirección, sus enseñanzas, su estima y sobre todo por transmitir su conocimiento de los sistemas con retardos, sus emotivas conversaciones, motivaron, inspiraron e hicieron fascinante el desarrollo de esta investigación. Sin su ayuda esta tesis no habría sido posible. Quiero dar las gracias al Dr. Eric José Avila Vales del cuerpo académico Análisis aplicado y ecuaciones diferenciales, de la facultad de matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán por haberme introducido en el estudio de los sistemas con retardos, por sus consejos, por su amabilidad, por su confianza, por los innumerables apoyos que he recibido de él, por ser parte del jurado de esta tesis así por sus valiosos comentarios. También quiero agradecer a los Doctores David Antonio Lizárraga Navarro, Hugo Cabrera Ibarra, y Adrián René Ramírez López de la división de control y sistemas dinámicos del IPICYT por aceptar ser parte del jurado de tesis, por sus cuidadosas lecturas de la tesis, por sus valiosos comentarios y aportaciones que ayudaron a mejorar este trabajo de tesis.

Agradezco a mis compañeros del grupo de retardos a Héctor Arismendi por el apoyo brindado cuando llegué a SLP y por su amistad, Adrián y Luis por su amistad brindada, solíamos invertir tiempo en charlas interesantes y discusiones en la pizarra, desde luego nos inspirábamos en las charlas del profesor Daniel Melchor.

Agradezco también a mis amigos Xavier Canché y Andrea Ek por todo el apoyo que recibí de ellos. También a Luis, Paola y Emilio por las convivencia que tuvimos.

Finalmente, Agradezco el apoyo brindado por el IPICYT y el CONACYT, que me dotó con una beca para el desarrollo de la presente tesis.

Resumen

Los sistemas con retardos de tipo neutro son sistemas dinámicos que involucran en su descripción matemática estados presentes y pasados, así como derivadas de estados pasados. Existen esencialmente dos formas de representar los sistemas de tipo neutro. La primera es donde las derivadas de los estados presentes y pasados aparecen de manera independiente. La segunda es donde las derivadas de los estados presentes y pasados aparecen mediante la derivada de un operador en diferencia. Esta segunda forma se conoce como sistemas de tipo neutro en la forma de Hale.

En la literatura estas dos formas de sistemas neutros se usan indistintamente. Sin embargo, si se estudia con detenimiento se observa que las dos formas no son equivalentes, debido a que sus soluciones respectivas tienen propiedades diferentes. Más concretamente, el problema de valor inicial para la primera forma requiere que se definan la función inicial y su derivada, mientras que el problema de valor inicial para la forma de Hale está bien planteado para funciones iniciales que sólo son continuas, ya que no requiere que la solución sea diferenciable, sino sólo el operador en diferencia. En este trabajo de tesis presentaremos un procedimiento para construir funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo para sistemas lineales con retardo de tipo neutro en la forma de Hale. Esta construcción se realiza sin asumir la diferenciabilidad de las funciones iniciales, como requiere dicha clase de sistemas, pero no así considerada en los trabajos existentes.

Las funcionales dependen de una función matricial la cual es la extensión natural de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardo de tipo retardado. Las funcionales construidas permiten obtener un resultado converso de Lyapunov para la estabilidad exponencial de los sistemas y estimados exponenciales de las soluciones.

Palabras clave: *Sistemas con retardo de tipo neutro en la forma de Hale, Matrices de Lyapunov, Funcionales de Lyapunov-Krasovskii, Funcionales de tipo completo.*

Abstract

Neutral-type delay systems are dynamic systems that involve present and past states as well as derivatives of past states in their mathematical description. There are essentially two ways of representing neutral-type systems. The first one is where the derivatives of the present and past states appear in an independent way. The second one is where the derivatives of the present and past states appear by the derivative of a difference operator. This second form is known as neutral delay systems in the Hale's form.

In the literature, these two forms of neutral systems are used interchangeably. However, if it is studied carefully then it is observed that the two forms are not equivalent, due to that their respective solutions have different properties. More precisely, the initial value problem for the first form requires that the initial function and its derivative are defined, while the initial value problem for the Hale form is well-posed for initial functions which are only continuous, since it is not required that the solution is differentiable, but only the difference operator. In this thesis, we will present a procedure for constructing Lyapunov-Krasovskii functionals of the complete type for linear neutral delay systems in the Hale's form. This construction is carried out without assuming the differentiability of the initial functions, as required for such a class of systems, but not thus considered in the existing works.

The functionals depend on a matrix-valued function which is the natural extension of the Lyapunov matrix for retarded type time delay systems. The constructed functionals allow deriving a Lyapunov converse result for the exponential stability of the systems and exponential estimates of the solutions.

Keywords: *Neutral delay systems in the Hale's form, Lyapunov matrices, Lyapunov-Krasovskii functionals, Functionals of complete type.*

Contenido General

Lista de figuras

Notación

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}^n$	El espacio euclidiano real $n-$dimensional.
$\mathbb{R}^{n\times n}$	El espacio de las matrices reales de dimensión $n \times n$.
$I_{n\times n}$	Matriz identidad de dimensión $n \times n$.
$\|x\|$	Norma euclidiana del vector x.
$\|A\|$	Norma matricial inducida de la matriz A.
$C \triangleq C([-h,0],\mathbb{R}^n)$	El espacio de las funciones continuas que mapean el intervalo $[-h,0]$ a $\mathbb{R}^n$.
$PC \triangleq PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$	El espacio de las funciones continuas a pedazos que mapean el intervalo $[-h,0]$ a $\mathbb{R}^n$.
$C^1 \triangleq C^1([-h,0],\mathbb{R}^n)$	El espacio de las funciones continuamente diferenciables que mapean el intervalo $[-h,0]$ a $\mathbb{R}^n$.
$PC^1 \triangleq PC^1([-h,0],\mathbb{R}^n)$	El espacio de las funciones continuamente diferenciables a pedazos que mapean el intervalo $[-h,0]$ a $\mathbb{R}^n$.
0_h	Función trivial $\mathbb{R}^n-$valuada, $0_h(\theta) = 0 \in \mathbb{R}^n, \theta \in [-h,0]$.
$\parallel \varphi \parallel_h$	Norma de convergencia uniforme $\parallel \varphi \parallel_h = \sup_{\theta\in[-h,0]} \parallel \varphi(\theta) \parallel$.
x_t	Restricción de $x(t)$, $x_t : \theta \to x(t+\theta), \theta \in [-h,0]$.
W^T	Transpuesta de una matriz W.
$W > 0, (W \geq 0)$	Matriz simétrica W positiva definida, (positiva semidefinida).
$\lambda_{min}(A)$	El valor propio mínimo de la matriz A.

$det(A)$	Determinante de la matriz A.
$A \otimes B$	El producto de Kronecker de las matrices A y B.
$Vec(A)$	Vectorización de la matriz A.

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo contiene una presentación elemental de los sistemas de tipo neutro. Primeramente, se mencionan diversas áreas donde surgen los sistemas de tipo neutro. Luego se presentan los sistemas de tipo neutro y se describe el problema de valor inicial. Además, el teorema de estabilidad de Lyapunov-Krasovskii para sistemas de tipo neutro también es presentado. Seguidamente, se presentan los sistemas de tipo neutro en la forma de Hale; temas relacionados a la existencia, unicidad, continuación de las soluciones del problema de valor inicial, así como conceptos de estabilidad y resultados de estabilidad en el enfoque Lyapunov-Krasovskii para esta clase de sistemas también son presentados. Finalmente, se presenta la estructura general de esta tesis.

1.1. Sistemas con retardo

En muchas aplicaciones, se supone que el estado futuro del sistema dinámico es independiente de los estados pasados y está determinado únicamente por el estado presente. Estos sistemas dinámicos son modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \geq t_0, \tag{1.1}$$

donde $x(t)$ representa la variable de estado del sistema y f es una función continua y al menos localmente Lipschitz con respecto a x. Sin embargo, bajo una investigación más detallada, se hace evidente que considerar solamente el estado presente es sólo una primera aproximación a la realidad y que un modelo más realista incluiría información de los estados pasados del sistema

[6]. Matemáticamente, esto significa considerar un cambio en la descripción clásica de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la forma (1.1) y ahora considerar ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \geq t_0, \tag{1.2}$$

donde $h > 0$ es el retardo de tiempo y la función f es continua en todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto al segundo argumento. Esta clase de sistemas descritos por la ecuación (1.2) son conocidas como sistemas con retardos de tipo retardado.

Existen sistemas dinámicos que no pueden ser descritos sólo conociendo su estado presente y pasado, sino que requieren información de la derivada de su estado pasado para determinar su comportamiento futuro. Esta clase de sistemas dinámicos son modelados por sistemas con retardos de tipo neutro. Existen dos formas de representar matemáticamente los sistemas de tipo neutro. La primera es de la forma siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)), \quad t \geq t_0. \tag{1.3}$$

Aquí $h > 0$ representa el retardo de tiempo y la función f es continua en todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto al segundo argumento.

Existen diversas aplicaciones que conducen de manera natural a sistemas con retardo de tiempo de tipo neutro (1.3). Para un estudio detallado del modelado de los sistemas de tipo neutro, el lector puede consultar las referencias siguientes: [14], [15]. Por ejemplo, sistemas con retardo de tiempo de tipo neutro de la forma (1.3) aparecen en modelos de molienda de alimentación (Infeed Grinding model). La clase de sistemas (1.3) también se encuentran en el estudio de estabilidad de turbinas y problemas de aerodinámica. En el campo de la dinámica poblacional, el modelo sencillo de Verhulst fue modificado a una ecuación de tipo neutro de la forma (1.3) la cual sirvió como modelo en experimentos de dinámica poblacional, véase [16]. En [2] desarrollaron un procedimiento sistemático para reducir un modelo de población estructurada a un sistema de tipo neutro de la forma (1.3).

Por otro lado, existe otra manera de representar a los sistemas con retardo de tipo neutro, y ésta es de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t-h)] = f(t, x_t), \quad t \geq 0. \tag{1.4}$$

Aquí la funcional $f(t, \varphi)$ está definida para $t \in [0, \infty)$, $f : [0, \infty) \times PC \mapsto \mathbb{R}^n$ es continua en ambos argumentos y localmente Lipschitz con respecto al segundo argumento, la matriz D es constante de dimensión $n \times n$ y $h > 0$ es el retardo. Observe que la derivada del estado presentes y la derivada del estado pasado aparecen como la derivada de la diferencia $x(t) - Dx(t-h)$. La clase de sistemas de la forma (1.4) es conocida como sistemas con retardo de tiempo de tipo neutro en la forma de Hale, debido a que el profesor Jack K. Hale presentó esta clase de sistemas y obtuvo resultados fundamentales para esta clase de sistemas [6].

En principio se creía que el estudio y análisis de la clase de ecuaciones de tipo neutro (1.4) se trataba de un problema puramente matemático. Sin embargo, existen una gran variedad de aplicaciones que motivan el estudio de los sistemas (1.4); por ejemplo, sistemas físicos descritos por ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico [6] y [18]. Estas ecuaciones a menudo se pueden reducir a la forma de ecuaciones diferenciales en diferencias acopladas. En la literatura se encuentran trabajos muy interesantes, pero casi olvidados, de I. P. Kabakov y A. A. Sokolov publicados en 1946, pero probablemente trabajados y escritos varios años antes. Ellos trataron los fenómenos de propagación asociados con la generación combinada de calor y electricidad en los que intervienen tuberías de vapor sin pérdidas. Modelos similares se presentaron en ingeniería hidráulica: para el caso de plantas hidráulicas que incorporan conducciones de agua, y en ingeniería eléctrica y electrónica, donde se incluyen líneas de transmisión LC sin pérdidas. La aplicación clásica fue presentada por Brayton y Miranker en 1964, un modelo que describe un circuito de diodos túnel incorporando una línea de transmisión sin pérdidas [21]. Gran parte del trabajo de Brayton depende del hecho de que el problema de contorno puede ser reducido a un problema de valor inicial para una ecuación diferencial en diferencias de tipo retardado asociada a una ecuación en diferencias. Esta reducción, propuesta por Brayton en 1968, es efectuada por consideraciones físicas de un problema particular. En el mismo año, Cooke y Krume obtuvieron un método sistemático para efectuar dicha reducción, y es aplicable a los sistemas en derivadas parciales de tipo hiperbólico independientemente de su origen físico [21]. Los problemas antes mencionados (sistemas de ecuaciones diferenciales en diferencias acopladas) pueden ser expresados como sistemas con retardo de tipo neutro en la forma de Hale [5] y [21].

Cabe mencionar que los sistemas con retardo de tipo neutro en la forma Hale han sido ampliamente preferidos durante los últimos años ya que muchas generalizaciones de la teoría de control para los sistemas con retardos de tipo retardado se cumplen fácilmente, véase por ejemplo [13] y [20].

En este trabajo de tesis, llamaremos sistemas con retardo de tipo neutro a los sistemas de la forma (1.3) y sistemas con retardo de tipo neutro en la forma de Hale a los de la forma (1.4).

1.2. Sistema con retardo de tipo neutro

Considere

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)), \quad t \geq t_0 \geq 0, \tag{1.5}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $h > 0$ es el retardo de tiempo. La función vectorial $f(t, u, v, w)$ está definida para $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, y $w \in \mathbb{R}^n$. Se considera que esta función es continua en todos sus argumentos y localmente Lipschitz con respecto al segundo argumento.

Para estudiar la existencia y unicidad de solución de la ecuación (1.5) es necesario plantear el problema de valor inicial o problema de Cauchy. Para definir una solución de (1.5) se requiere conocer un instante inicial $t_0 \geq 0$ y una función inicial $\varphi : [t_0 - h, t_0] \mapsto \mathbb{R}^n$. A diferencia de las ecuaciones de tipo retardadas, la función inicial $\varphi(t)$ no sólo debe ser continua, sino también debe tener derivada continua. La función inicial φ debe pertenecer a un espacio funcional, supongamos, C^1. Es importante resaltar que del hecho que la función inicial pertenezca a un espacio funcional se sigue que las ecuaciones de tipo neutro pertenecen a una clase particular de sistemas infinito dimensional.

El problema de valor inicial de la ecuación (1.5) se escribe como

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} & = & f(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)), \quad t \geq t_0 \geq 0, \\ x(t) & = & \varphi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0]. \end{cases} \tag{1.6}$$

donde $\varphi \in C^1$ es la función inicial.
El método de solución más natural para el problema (1.6) es el método paso a paso, el cual consiste en determinar la solución $x(t)$ en intervalos de tiempo de longitud h. A continuación, ilustraremos el proceso de construcción de solución del problema (1.6).

Para $t \in [t_0, t_0 + h]$, el argumento $t - h \in [t_0 - h, t_0]$ y, en consecuencia el tercer argumento $x(t-h)$ de la función f es igual a la función inicial $\varphi(t-h)$. Como φ es continuamente diferenciable en $[t_0 - h, t_0]$ entonces existe $\dot{\varphi}$ y es continua en el intervalo $[t_0 - h, t_0]$, por tanto el argumento

$\dot{x}(t-h) = \dot{\varphi}(t-h)$. Así se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t,x(t),\varphi(t-h),\dot{\varphi}(t-h)), \quad t \in [t_0,t_0+h] \\ x(t_0) &= \varphi(t_0). \end{cases} \tag{1.7}$$

Si definimos a $f(t,x(t),\varphi(t-h),\dot{\varphi}(t-h)) \triangleq F^{(1)}(t,x(t))$, entonces el sistema (1.7) se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= F^{(1)}(t,x(t)), \quad t \in [t_0,t_0+h] \\ x(t_0) &= \varphi(t_0). \end{cases} \tag{1.8}$$

Observe ahora que (1.8) es un problema clásico de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias. La función $F^{(1)}$ es continua en todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto a x, entonces por el Teorema 3.1 en [7] se tiene que existe una única solución $x(t,t_0,\varphi(t_0))$ del problema de valor inicial (1.8) y esta solución es continuamente diferenciable en el intervalo $[t_0-h,t_0]$.

Definamos como una nueva función inicial a la solución anterior como sigue $x(t,t_0,\varphi(t_0)) \triangleq \varphi_1(t)$, para $t \in [t_0,t_0+h]$.

Para el paso siguiente, de nuevo considere la ecuación (1.5), ahora para $t \in [t_0+h,t_0+2h]$ y con función inicial $\varphi_1(t)$. Entonces, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t,x(t),\varphi_1(t-h),\dot{\varphi}_1(t-h)), \quad t \in [t_0+h,t_0+2h] \\ x(t_0+h) &= \varphi_1(t_0+h). \end{cases} \tag{1.9}$$

Definiendo $f(t,x(t),\varphi_1(t-h),\dot{\varphi}_1(t-h)) \triangleq F^{(2)}(t,x(t))$, entonces el sistema (1.9) se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= F^{(2)}(t,x(t)), \quad t \in [t_0+h,t_0+2h] \\ x(t_0+h) &= \varphi_1(t_0+h). \end{cases} \tag{1.10}$$

Observe que la función $F^{(2)}$ satisface las condiciones del Teorema 3.1 presentado en [7], esto es $F^{(2)}$ es continua en todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto a su segundo argumento y por tanto existe una única solución $x(t,t_0+h,\varphi_1(t_0+h))$ del problema de valor inicial (1.10). Esta solución tiene la propiedad de ser continuamente diferenciable en $[t_0+h,t_0+2h]$.

El procedimiento anterior puede repetirse para t en el intervalo $[t_0+2h,t_0+3h]$ y de hecho para cualquier intervalo $[t_0+(k-1)h,t_0+kh]$, $k=0,1,2,....$ Así una solución $x(t,t_0,\varphi)$ de (1.6) definida por la función inicial $\varphi(t)$ estará determinada por

$$x(t,t_0,\varphi)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in[t_0-h,t_0]\\ \varphi_1(t), & t\in[t_0,t_0+h]\\ \varphi_2(t), & t\in[t_0+h,t_0+2h]\\ & \vdots\\ \varphi_k(t), & t\in[t_0+(k-1)h,t_0+kh]\end{cases}$$

Debido a la hipótesis que $f(t,u,v,w)$ es continua en todos sus argumentos y al menos localmente Lipschitz con respecto a su segundo argumento, independientemente de v y w, entonces existe única solución $x(t,t_0,\varphi)$ de (1.6) que coincide con $\varphi(t)$ en $[t_0-h,t_0]$. Por tanto, el procedimiento anterior, conocido como método paso a paso nos permite mostrar la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación (1.6) para todo $t\geq t_0\geq 0$.

1.2.1. Teorema de Lyapunov-Krasovskii para sistemas de tipo neutro

En El'sgol'ts y Norkin [4] se muestra como los teoremas de Lyapunov-Krasovskii para sistemas de tipo retardado, se pueden generalizar para sistemas con retardo de tipo neutro. Los conceptos de estabilidad y el teorema de Lyapunov-Krasovskii, que se presentan a continuación, se encuentran escrito en una forma moderna en Kolmanovskii y Nosov [15], pero su origen se debe esencialmente a El'sgol'ts .

Denotemos por W un espacio normado de funciones absolutamente continuas $\varphi(\theta)$ definidas en $[-h,0]$ con derivadas cuadradas integrables. Defina la norma en W como

$$\|\varphi\|_W^2=\varphi^2(0)+\int_{-h}^{0}\dot{\varphi}^2(\theta)d\theta.$$

Denote Q_H una esfera en W : $Q_H=\{\varphi(\theta):\|\varphi\|_W\leq H\}$. Considere el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x_t,\dot{x}_t),\quad t\geq t_0, \tag{1.11}$$

$$x_t=x(t+\theta),\quad \theta\in[-h,0]$$

$$x_{t_0}(\theta)=\varphi(\theta),\quad \dot{x}_{t_0}(\theta)=\dot{\varphi}(\theta),\quad \theta\in[-h,0]. \tag{1.12}$$

Sea la funcional $f:\mathbb{R}\times Q_H\longrightarrow\mathbb{R}^n$ continua en sus argumentos y satisface la condición de Lipschitz con respecto al segundo y tercer argumento, y sea la constante de Lipschitz con respecto al tercer argumento menor que 1. Entonces se puede probar que para cualquier $\varphi\in W$ existe una única solución del sistema (1.11) con condición inicial (1.12) tal que $x_t \in W$ para toda $t \geq t_0$. Suponga que

$$f(t,0,0) = 0, \quad \|f(t,\varphi,\dot{\varphi})\| \leq M, \quad \|\varphi\|_W \leq H, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Definición 1.1 [15]

La solución trivial $x(t) = 0$, del sistema (1.11)-(1.12) se dice ser estable si para cualquier $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tal que $\|\varphi\|_W \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ implica que $\|x(t,t_0,\varphi)\| \leq \varepsilon$. La solución trivial $x(t) = 0$ se dice ser asintóticamente estable si es estable y $\varphi(t) \in \Omega(t) \subset W$ implica que $x(t,t_0,\varphi) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$. El dominio $\Omega(t_0)$ es llamado región de atracción en un instante de tiempo t_0.

Sea la funcional $v(t,\varphi,\dot{\varphi})$ continua en la esfera Q_H y satisface la condición de Lipschitz en el segundo y tercer argumento. Denote por $v(t) = v(t,x_t,\dot{x}_t)$, donde x_t es una solución del sistema (1.11)-(1.12). Suponga que la funcional es absolutamente continua en t para cualquier solución $x(t)$. Denote por $\dot{v}(t)$ la derivada derecha de $v(t,x_t,\dot{x}_t)$ a lo largo de la solución del sistema (1.11)-(1.12), es decir,

$$\dot{v}(t) = \overline{\text{lím}}_{\Delta t \to +0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Denote w_i, $i = 1,2,3$ funciones continuas no decrecientes tales que $w_i(0) = 0$, $w_i(u) > 0$ para $u > 0$.

Teorema 1.1 [15]

Suponga que la funcional $v(t,x_t,\dot{x}_t)$ existe y satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} w_1(\|x_t\|_W) \leq v(t,x_t,\dot{x}_t) \leq w_2(\|x_t\|_W), \\ \dot{v}(t) \leq 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Entonces la solución trivial de (1.11) es estable. Si

$$\dot{v}(t) \leq -w_3(\|x(t)\|), \tag{1.15}$$

entonces la solución trivial de (1.11), es asintóticamente estable.

Observe que el estudio de estabilidad de los sistemas con retardo de tipo neutro no es sencillo, ya que las funcionales dependen no sólo de x_t, sino también de $\dot{x}_t$. A continuación mostramos un ejemplo de como aplicar el Teorema 1.1.

Considere la ecuación

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + c(t)\dot{x}(t-h), \quad t \geq 0, \tag{1.16}$$

donde a, $h > 0$ son constantes y $c(t)$ es una función continua para $t \geq 0$. Definamos la funcional

$$v(t, x_t, \dot{x}_t) = x^2(t) + \frac{1}{a}\int_{t-h}^{t} \dot{x}^2(s)ds. \tag{1.17}$$

Para $a > 0$ la funcional (1.17) satisface la condición (1.14) del Teorema 1.1, es decir,

$$c_1 \|x_t\|_W^2 \leq v(t, x_t, \dot{x}_t) \leq c_2 \|x_t\|_W^2$$

donde $c_1 = \text{mín}\{1, \frac{1}{a}\}$ y $c_2 = \text{máx}\{1, \frac{1}{a}\}$. Calculando la derivada de la funcional (1.17) a lo largo de las soluciones de la ecuación (1.16), se obtiene

$$\dot{v}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) + \frac{1}{a}[\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(t-h)], \tag{1.18}$$

como $x(t)$ satisface (1.16), para $a > 0$ y $|c(t)| < 1$, de (1.18) se obtiene

$$\dot{v}(t) = -ax^2(t) - \frac{1}{a}[1 - c^2(t)]\dot{x}^2(t-h) \leq -ax^2(t).$$

Por tanto la funcional $V(t, x_t, \dot{x}_t)$, satisface la condiciones (1.14) y (1.15) del Teorema 1.1. Esto implica la estabilidad asintótica de la solución trivial de (1.16).

1.3. Sistemas con retardo de tipo neutro en la forma de Hale

En esta sección presentamos los sistemas con retardo de tipo neutro en la forma de Hale. Temas relacionados a la existencia, unicidad y continuación de las soluciones para tales sistemas son presentados. Las demostraciones de los resultados que presentamos se encuentran en [12] y son mostrados para funciones iniciales en el espacio PC^1, sin embargo bajo un estudio más detallado de las demostraciones se hace evidente que estos resultados también son válidos para funciones iniciales en el espacio PC. Por tanto, enunciaremos los resultados relacionados a la existencia, unicidad y continuación de las soluciones para sistemas de tipo neutro en la forma de Hale, considerando el espacio de funciones iniciales PC.

Considere el siguiente sistema de tipo neutro en la forma de Hale:

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t-h)] = f(t, x_t), \quad t \geq 0. \tag{1.19}$$

Aquí la funcional $f(t, \varphi)$ está definida para $t \in [0, \infty)$ y $\varphi \in PC$,

$$f : [0, \infty) \times PC \mapsto R^n,$$

es continua en ambos argumentos y localmente Lipschitz con respecto al segundo argumento. La matriz D es constante de dimensión $n \times n$ y $h > 0$ es el retardo. La diferencia $x(t) - Dx(t-h)$ es llamada operador en diferencia.

Para definir una solución de la ecuación (1.19) es necesario especificar un instante inicial $t_0 \geq 0$ y una función inicial $\varphi : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \;\; \theta \in [-h, 0]. \tag{1.20}$$

El estado del sistema (1.19) en un instante de tiempo $t \geq t_0$ se define como

$$x_t : \theta \to x(t + \theta), \; \theta \in [-h, 0],$$

es decir x_t es la restricción de la solución $x(t)$ en el intervalo $[t-h, t]$.

Observación 1. En el caso de sistemas invariantes en el tiempo suponemos que $t_0 = 0$ y omitimos el argumento t_0 en la notación.

Suposición 1. La diferencia $x(t, t_0, \varphi) - Dx(t-h, t_0, \varphi)$ es continua y diferenciable para $t \geq t_0$, excepto posiblemente en un número contable de puntos. Esto no implica que $x(t, t_0, \varphi)$ sea diferenciable o incluso continua para $t \geq t_0$.

Suposición 2. En el sistema (1.19) se supone que la derivada derecha de la diferencia $x(t, t_0, \varphi) - Dx(t-h, t_0, \varphi)$ existe en $t = t_0$.

Suposición 3. Se supone que $x(t, t_0, \varphi)$, $t \in [t_0 - h, t_0 + \tau]$, $\tau > 0$ es solución de (1.19) si la solución se satisface casi en cualquier punto de $[t_0 - h, t_0 + \tau]$.

1.3.1. Existencia de soluciones

El siguiente teorema resuelve el problema de la existencia y de la unicidad de soluciones del sistema (1.19) con función inicial (1.20).

Teorema 1.2 [12]

Suponga que la funcional $f : [0,\infty) \times PC \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface las siguientes condiciones:

i) Para cualquier $H > 0$ existe $M(H) > 0$ tal que $\| f(t,\varphi) \| \leq M(H)$, $(t,\varphi) \in [0,\infty) \times PC$, $\| \varphi \|_h \leq H$.

ii) La funcional $f(t,\varphi)$ es continua con respecto a ambos argumentos.

ii) La funcional $f(t,\varphi)$ es Lipschitz con respecto al segundo argumento, es decir, para cualquier $H > 0$ existe una constante de Lipschitz $L(H)$ tal que

$$\| f(t,\varphi^{(1)}) - f(t,\varphi^{(2)}) \| \leq L(H) \| \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} \|_h$$

se satisface para $t \geq 0$, $\varphi^{(k)} \in PC$ y $\| \varphi^{(k)} \|_h \leq H$, $k = 1,2$.

Entonces, dado $t_0 \geq 0$ y una función inicial en $\varphi \in PC$ existe $\tau > 0$ tal que el problema de valor inicial (1.19)-(1.20) admite única solución definida en el intervalo $[t_0 - h, t_0 + \tau]$.

El Teorema 1.2 muestra que la solución del problema de valor inicial (1.19)-(1.20) existe en el intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$, para $\tau > 0$ mientras que en la aplicación práctica se busca una solución definida para todo $t \geq t_0$. La pregunta ahora es si la solución se puede extender a un intervalo más amplio que el intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$. El teorema de existencia y unicidad se puede aplicar sucesivamente para extender la solución y encontrar un intervalo más amplio.

Para cada solución existe un intervalo máximo $[t_0, t_0 + T)$ en el cual está definida la solución. El siguiente resultado proporciona condiciones bajo las cuales cualquier solución del sistema (1.19) está definida en el intervalo $[t_0, \infty)$.

Teorema 1.3 [12]

Supongamos que el sistema (1.19) satisface las condiciones del Teorema 1.2. Adicionalmente supongamos que $f(t,\varphi)$ satisface la desigualdad

$$\|f(t,\varphi)\| \leq \eta\left(\|\varphi\|_h\right), \quad t \geq 0,\ \varphi \in PC,$$

donde la función $\eta(r)$, $r \in [0,\infty)$, es una función continua, no decreciente y tal que para cualquier $r_0 \geq 0$ se satisface la siguiente igualdad:

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{r_0}^{R} \frac{dr}{\eta(r)} = \infty.$$

Entonces, cualquier solución $x(t,t_0,\varphi)$ del sistema (1.19) está definida en $[t_0, \infty)$.

1.3.2. Continuidad de las soluciones

En esta subsección se presentan las propiedades de continuidad de las soluciones del sistema (1.19) con respecto a las condiciones iniciales así como a las perturbaciones del lado derecho del sistema. Estas propiedades de continuidad son una consecuencia directa del siguiente Teorema.

Teorema 1.4 [12]

Supongamos que el lado derecho del sistema (1.19), $f(t,\varphi)$, satisface las condiciones del Teorema 1.2. Sea $x(t,t_0,\varphi)$ la solución de (1.19) con condición inicial

$$x(t_0+\theta)=\varphi(\theta),\ \ \theta\in[-h,0].$$

Dado un sistema perturbado de la forma

$$\frac{d}{dt}[y(t)-Dy(t-h)]=f(t,y_t)+g(t,y_t),\ \ t\geq 0,$$

donde la funcional $g(t,\varphi)$ es continua en $[0,\infty)\times PC$, satisface la condición de Lipschitz con respecto al segundo argumento y

$$\|g(t,\varphi)\|\leq m,\ \ t\geq 0,\varphi\in PC.$$

Sea $y(t,t_0,\psi)$ la solución del sistema perturbado con condición inicial

$$y(t_0+\theta)=\psi(\theta),\theta\in[-h,0].$$

Si ambas soluciones están definidas para $t\in[t_0,t_0+T]$, donde $0<T<\infty$, entonces existen constantes positivas α,β, y γ tales que la siguiente desigualdad se satisface:

$$\|x(t,t_0,\varphi)-y(t,t_0,\psi)\|\leq(\alpha\|\psi-\varphi\|_h+\beta m)\,e^{\gamma(t-t_0)},\ \ t\in[t_0,t_0+T].$$

Corolario 1.1 [12] Sea $g(t,\varphi)\equiv 0$. Entonces $m=0$ y ambas funciones $x(t,t_0,\varphi)$ y $y(t,t_0,\psi)$ son soluciones del sistema (1.19). Supongamos que estas soluciones están definidas para $t\in[t_0,t_0+T]$. Entonces, para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $\|\psi-\varphi\|_h<\delta$, entonces la siguiente desigualdad se satisface:

$$\|x(t,t_0,\varphi)-x(t,t_0,\psi)\|<\varepsilon\ \ t\in[t_0,t_0+T].$$

En otras palabras $x(t,t_0,\varphi)$ depende continuamente de la función inicial φ.

Corolario 1.2 [12] Sea $\psi(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Entonces las soluciones del sistema (1.19) $x(t, t_0, \varphi)$ y la del sistema perturbado $y(t, t_0, \psi)$ tienen las mismas funciones iniciales. Supongamos que las soluciones están definidas para $t \in [t_0, t_0 + T]$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $m < \delta$, entonces la siguiente desigualdad se satisface:

$$\|x(t, t_0, \varphi) - y(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon \;\; t \in [t_0, t_0 + T].$$

Esto significa que las soluciones dependen continuamente del lado derecho del sistema (1.19).

El Corolario 1.1 sobre la dependencia continua de funciones iniciales muestra que el problema de valor inicial es un problema bien planteado y esto tiene sentido en las aplicaciones prácticas.

De hecho, en la práctica, existen situaciones en las que las funciones iniciales son aproximadas por valores numéricos. La continuidad con respecto a las funciones iniciales expresa precisamente el hecho de que estos errores de aproximación implican que las soluciones correspondientes se aproximan a la solución nominal.

Cabe destacar que esta propiedad se establece en un intervalo finito $[t_0, t_0 + T]$ de variación de t, es decir, δ depende del tamaño de este intervalo y disminuye cuando el tamaño del intervalo aumenta, incluso cuando $T \longrightarrow +\infty$ entonces $\delta \longrightarrow 0^+$. Es de interés el concepto de la dependencia continua de las funciones iniciales en intervalos infinitos. Esto puede lograrse si δ *no depende del tamaño del intervalo* considerado. Llegamos así a la noción de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

1.3.3. Conceptos de estabilidad

Como mencionamos anteriormente, en la monografía [12] los conceptos de estabilidad son presentados considerando el espacio de funciones PC^1. Aquí enunciaremos los conceptos considerando el espacio de funciones iniciales PC.

Suponemos que el sistema (1.19) satisface las condiciones del Teorema 1.2 y que admite solución trivial, es decir, $f(t, 0_h) = 0$, $\forall t \geq 0$.

Definición 1.2 [12]

La solución trivial del sistema (1.19) se dice ser estable si para cualquier $\varepsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que para cualquier función inicial $\varphi \in PC$ con $\| \varphi \|_h < \delta(\varepsilon, t_0)$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$\| x(t, t_0, \varphi) \| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si $\delta(\varepsilon, t_0)$ se puede escoger independientemente de t_0 entonces la solución trivial de (1.19) se dice ser estable uniformemente.

Definición 1.3 [12]

La solución trivial de (1.19) se dice ser estable asintóticamente si para cualquier $\varepsilon > 0$ y $t_0 \geq 0$ existe $\Delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que para cualquier función inicial $\varphi \in PC$ con $\| \varphi \|_h < \Delta(\varepsilon, t_0)$ las siguientes condiciones se satisfacen:

1. $\| x(t, t_0, \varphi) \| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$
2. $x(t, t_0, \varphi) \to 0$ cuando $t - t_0 \to \infty$.

Si $\Delta(\varepsilon, t_0)$ se puede escoger independiente de t_0 y existe $H_1 > 0$ tal que para cualquier $\varphi \in PC$ con $\| \varphi \|_h < H_1$ se satisface que $x(t, t_0, \varphi) \to 0$ (uniformemente respecto a t_0) cuando $t - t_0 \to \infty$ entonces la solución trivial del sistema (1.19) se dice ser estable asintóticamente y uniformemente estable.

Definición 1.4 [12]

La solución del sistema (1.19) se dice ser exponencialmente estable si existen $\Delta_0 > 0$, $\sigma > 0$ y $\gamma \geq 1$ tales que para cualquier $t_0 \geq 0$ y $\varphi \in PC$ con $\| \varphi \|_h < \Delta_0$ se satisface la siguiente desigualdad

$$\| x(t, t_0, \varphi) \| \leq \gamma e^{-\sigma(t - t_0)} \| \varphi \|_h, \quad t \geq t_0.$$

Definición 1.5 [12]

La matriz D se dice ser Schur estable si todos sus valores propios yacen en el círculo unitario abierto del plano complejo.

Condición necesaria: El sistema (1.19) no puede ser estable si la matriz D admite un valor propio

con magnitud mayor 1. De lo contrario para cualquier $\delta > 0$ existe una función inicial $\varphi \in PC$ con discontinuidad de tipo salto en $\theta_1 \in [-h, 0]$ tal que la solución $x(t, t_0, \varphi)$ tiene una secuencia de saltos y el tamaño de los saltos tiende a infinito.
En este trabajo de tesis suponemos que la matriz D es Schur estable.

1.3.4. Teoremas de Lyapunov-Krasovskii

Usaremos el siguiente concepto de funcional positiva definida para el sistema (1.19).

Definición 1.6 [12]

La funcional $v(t, \varphi)$ se dice ser positiva definida si existe $H > 0$ tal que se satisfacen las siguientes condiciones:

1) La funcional está definida para $t \geq 0$ y $\varphi \in PC$ con $\| \varphi \|_h \leq H$.

2) $v(t, 0_h) = 0$, $t \geq 0$.

3) Existe una función positiva definida $v_1(x)$ tal que $v_1(\varphi(0) - D\varphi(-h)) \leq v(t, \varphi)$, $t \geq 0$, $\varphi \in PC$, con $\| \varphi \|_h \leq H$.

4) Para cualquier $t_0 \geq 0$ la funcional es continua con respecto a φ en el punto 0_h, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la desigualdad $\| \varphi \|_h < \delta$ implica que

$$| v(t_0, \varphi) - v(t_0, 0_h) | = v(t_0, \varphi) < \varepsilon.$$

Ahora se presentan algunos resultados básicos del enfoque Lyapunov-Krasovskii.

Teorema 1.5 [12]

La solución trivial del sistema (1.19) es estable si y sólo si existe una funcional positiva definida $v(t, \varphi)$ tal que, a lo largo de las soluciones del sistema (1.19), $v(t, x_t)$ no crece como función de t.

Teorema 1.6 [12]

La solución trivial del sistema (1.19) es estable asintóticamente si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:

1. Existe una funcional positiva definida $v(t, \varphi)$ definida para $t \geq 0$ y $\varphi \in PC$ con

$\|\varphi\|_h \leq H$ tal que a lo largo de las soluciones del sistema $v(t,x_t)$ no crece como función de t.

2. Para cualquier $t_0 \geq 0$ existe $\mu(t_0)$ positivo tal que si $\varphi \in PC$ y $\|\varphi\|_h \leq \mu(t_0)$, entonces $v(t,x_t(t_0,\varphi))$ decrece monótonamente a cero cuando $t - t_0 \to \infty$.

Teorema 1.7 [12]

La solución trivial del sistema (1.19) es estable asintóticamente si existe una funcional positiva definida $v(t,\varphi)$ y una función positiva definida $w(x)$ tal que a lo largo de las soluciones del sistema (1.19) la funcional $v(t,\varphi)$ es diferenciable y su derivada satisface la desigualdad

$$\frac{dv(t,x_t)}{dt} \leq -w(x(t) - Dx(t-h)), \quad t \geq t_0.$$

Teorema 1.8 [12]

La solución trivial del sistema (1.19) es estable exponencialmente si existe una funcional positiva definida $v(t,\varphi)$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

1. Existen constantes positivas α_1, α_2 para las cuales las desigualdades

$$\alpha_1 \|\varphi(0) - D\varphi(-h)\|^2 \leq v(t,\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2$$

se satisfacen para $t \geq 0$ y $\varphi \in PC$ con $\|\varphi\| < H$.

2. La funcional $v(t,\varphi)$ es diferenciable a lo largo de las soluciones del sistema y existe una constante positiva σ_1 tal que

$$\frac{dv(t,x_t)}{dt} + 2\sigma_1 v(t,x_t) \leq 0.$$

Para ilustrar la aplicación del Teorema 1.7 considere la ecuación escalar en la forma de Hale

$$\frac{d}{dt}[x(t) - cx(t-h)] = -ax(t) \tag{1.21}$$

donde a, c son constantes con $a > 0$, $|c| < 1$. Considere la siguiente funcional candidata:

$$v(\varphi) = (\varphi(0) - c\varphi(-h))^2 + ac^2 \int_{-h}^{0} \varphi^2(\theta)d\theta. \tag{1.22}$$

Observe que la funcional (1.22) satisface $v(0_h) = 0$. Además la funcional satisface las siguientes desigualdades:

$$\alpha_1(\varphi(0) - c\varphi(-h))^2 \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 |\varphi|_h,$$

donde $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = (1+ \mid c \mid)^2 + ac^2h$. Por lo tanto la funcional es positiva definida. Observe también que

$$\dot{v}(x_t(\varphi)) = -a(x(t,\varphi) - cx(t-h,\varphi))^2 - a(1-c^2)x^2(t,\varphi) \leq -a(x(t,\varphi) - cx(t-h,\varphi))^2.$$

Por lo tanto la funcional (1.22) satisface las condiciones del Teorema 1.7 y así la solución trivial de la ecuación (1.21) es asintóticamente estable.

Nuestro trabajo se basa precisamente en el enfoque de Lyapunov-Krasovskii para sistemas lineales de tipo neutro en la forma de Hale considerando funciones iniciales en el espacio PC. En el siguiente Capítulo formularemos el problema a abordar.

1.4. Estructura de la tesis

La tesis está organizada de la manera siguiente: En el Capítulo 2 se plantea el problema de investigación. En el Capítulo 3 presentamos algunos resultados preliminares. Se revisan conceptos básicos sobre las soluciones y la matriz fundamental. También se proporciona nuevas fórmulas de Cauchy para las soluciones y el operador en diferencia, y los conceptos básicos sobre la estabilidad exponencial. El Capítulo 4 está dedicado a exhibir los resultados principales de la tesis. Se proporciona un esquema general para la construcción de la funcional de Lyapunov-Krasovskii y se estudian las propiedades de la nueva definición de las matrices de Lyapunov para sistemas de tipo neutro en la forma de Hale. Además, se muestra una nueva definición de la matriz de Lyapunov que no requiere la estabilidad exponencial del sistema de tipo neutro. En el mismo capítulo se demuestra un resultado converso que proporciona un procedimiento constructivo para calcular las funcionales de Lyapunov para un determinado sistema con retardo de tipo neutro exponencialmente estable. La aplicación de las funcionales para obtener estimados exponenciales de las soluciones también son presentados en este mismo capítulo. Al final del mismo capítulo con un ejemplo numérico se ilustran los resultados obtenidos. En el capítulo 5 las conclusiones y el trabajo futuro son presentados.

Capítulo 2

Formulación del problema

Considere el siguiente sistema lineal de tipo neutro en la forma de Hale:

$$\frac{d}{dt}[x(t)-Dx(t-h)] = A_0x(t)+A_1x(t-h), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$
$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h,0],$$

donde $A_0, A_1, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $h > 0$.

A continuación, se enuncia una versión simplificada del Teorema 8.1 en [6] de Lyapunov-Krasovskii para el sistema (2.1)

Teorema 2.1 [6]

Suponga que la matriz D es Schur estable. El sistema (2.1) es exponencialmente estable si existe una funcional $v : PC \to \mathbb{R}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $\alpha_1 \|\varphi(0)-D\varphi(-h)\|^2 \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2$, para algunas constantes $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$,
2. $\frac{d}{dt}v(x_t(\varphi)) \leq -\beta \|x(t,\varphi)-Dx(t-h,\varphi)\|^2, \quad \forall t \geq 0$, para alguna constante $\beta > 0$.

En el Teorema 8.1 presentado en [6] se puede encontrar una observación cuya versión simplificada del Teorema 2.1, es la siguiente: *La misma conclusión del Teorema 2.1 se mantiene si la cota superior de* $\frac{dv(x_t(\varphi))}{dt}$ *está dada por* $-\beta \parallel x(t,\varphi) \parallel^2$.

La aplicación del Teorema 2.1 no es una tarea trivial. *Uno de los principales problemas es la ausencia de un procedimiento para construir funcionales de Lyapunov para un sistema de tipo*

neutro dado. Siguiendo las ideas de [6], la mayoría de los trabajos existente se basan en proponer algunas funcionales de Lyapunov particulares para obtener condiciones suficientes de estabilidad, véase el ejemplo en la página 15 y 16. Sin embargo, no hay garantía que las funcionales propuestas puedan servir para el análisis de estabilidad de un sistema de tipo neutro dado. Como es bien sabido de la teoría de Lyapunov, los teoremas conversos que dan condiciones necesarias para la estabilidad pueden proporcionar procedimientos constructivos de funciones de Lyapunov o funcionales para sistemas lineales. Este enfoque ha sido desarrollado para sistemas lineales de tipo retardado por varios autores [8, 9, 24] y tratado a fondo en la reciente monografía de Kharitonov [12] y para sistemas lineales integrales con retardo en [17].
Hasta donde sabemos, la primera contribución en esta dirección para sistemas lineales con retardo de tipo neutro fue presentada en [3], donde la construcción de funcionales de Lyapunov con una derivada prescrita da lugar a un resultado converso para la estabilidad asintótica. Es sorprendente que la próxima contribución en la misma dirección aparezca más de treinta años después en [22]. Siguiendo el trabajo en [22], se presentan varios resultados en [10, 11, 23], que se aclaran y completan en la monografía de Kharitonov [12].

Motivado por el Teorema 2.1 y la observación en el Teorema 8.1 presentado en [6], en la monografía de Kharitonov [12] se presenta una construcción de funcionales cuadráticas para el sistema (2.1). Su enfoque se basa en las ideas principales del método directo Lyapunov, que se puede formular de la siguiente manera. Primero, dado que el sistema (2.1) es lineal e invariante en el tiempo, y tomando en cuenta la observación del Teorema 2.1 sobre la cota para la derivada de la funcional, de manera natural se selecciona una derivada de la funcional con respecto al tiempo igual a una forma cuadrática. Luego se calcula la funcional cuya derivada con respecto al tiempo a lo largo de las soluciones del sistema (2.1) coincide con la forma cuadrática. Una suposición técnica necesaria al principio es que el sistema (2.1) es exponencialmente estable. A continuación, se presenta el problema abordado en [12].

Problema 1. Sea el sistema (2.1) exponencialmente estable. Dado una forma cuadrática $w(x) = x^T W x$, encontrar una funcional $v_0(\varphi)$, definida en PC^1, tal que a lo largo de las soluciones del sistema (2.1) la siguiente igualdad se satisface:

$$\frac{d}{dt} v_0(x_t(\varphi)) = -x^T(t,\varphi) W x(t,\varphi), \quad t \geq 0. \tag{2.2}$$

En el **problema 1** no se conoce la forma de la funcional $v_0(x_t(\varphi))$. Entonces surge la pregunta:

¿Es posible encontrar la estructura de la funcional $v_0(x_t(\varphi))$ que satisface (2.2)?
Integrando la ecuación (2.2) de 0 a $T>0$, se obtiene

$$v_0(x_T(\varphi)) - v_0(\varphi) = -\int_0^T x^T(t,\varphi)Wx(t,\varphi)dt. \tag{2.3}$$

Como el sistema (2.1) es exponencialmente estable entonces $x_T(\varphi) \to 0_h$ cuando $T \to \infty$.

Si $v_0(\varphi)$ es positiva definida, entonces es continua en 0_h lo que implica que

$$v_0(x_T(\varphi)) \to v_0(0_h) \text{ cuando } T \to \infty.$$

y $v_0(0_h) = 0$. Calculando el límite cuando $T \to \infty$ en (2.3) se obtiene

$$v_0(\varphi) = \int_0^\infty x^T(t,\varphi)Wx(t,\varphi)dt, \quad \varphi \in PC^1. \tag{2.4}$$

Por la estabilidad exponencial la integral impropia anterior es convergente.

En Bellman y Cooke [1] se presenta una fórmula de Cauchy para las soluciones de (2.1). Explícitamente, dada una función inicial $\varphi \in PC^1$, la solución $x(t,\varphi)$ del sistema (2.1) admite la siguiente expresión:

$$x(t,\varphi) = [K(t) - K(t-h)D]\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(t-h-\theta)[D\varphi'(\theta) + A_1\varphi(\theta)]d\theta, \quad t \geq 0. \tag{2.5}$$

donde $K(t)$ es la única función matricial que satisface

$$\frac{d}{dt}[K(t) - K(t-h)D] = K(t)A_0 + K(t-h)A_1, \quad t \geq 0,$$

con condiciones iniciales: $K(t) = 0_{n\times n}$ para toda $t<0$, y $K(0) = I$.

Sustituyendo la fórmula de Cauchy (2.5) en la integral impropia (2.4), se obtiene una expresión explícita de la funcional $v_0(\varphi)$:

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) = {} & \varphi^T(0)[U(0) - D^TU(h) - U(-h)D + D^TU(0)D]\varphi(0) \\ & + 2\varphi^T(0)\int_{-h}^0 [U(-h-\theta) - D^TU(-\theta)][D\varphi'(\theta) + A_1\varphi(\theta)]d\theta \\ & + \int_{-h}^0 [D\varphi'(\theta_1) + A_1\varphi(\theta_1)]^T \left(\int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2)[D\varphi'(\theta_2) + A_1\varphi(\theta_2)]d\theta_2 \right) d\theta_1, \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde la función matricial

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t)WK(t+\tau)dt,$$

es conocida como *matriz de Lyapunov* y satisface la ecuación dinámica

$$\frac{d}{d\tau}[U(\tau)-U(\tau-h)D]=U(\tau)A_0+U(\tau-h)A_1 \quad \tau>0,$$

la condición de simetría,

$$U(-\tau)=U^T(\tau) \quad \tau\geq 0,$$

y la condición algebraica

$$\begin{aligned}-W=&[U(0)A_0+U(-h)A_1-A_0^TU(-h)D-A_1^TU(0)D]\\&+[U(0)A_0+U(-h)A_1-A_0^TU(-h)D-A_1^TU(0)D]^T.\end{aligned}$$

Debido a que la fórmula de Cauchy (2.5) depende de la derivada de la función inicial, como consecuencia los términos de la funcional de Lyapunov (2.6) dependen de la derivada de la función inicial. Suponiendo $\varphi\in C^1$, mediante integración por partes, la funcional (2.6) se puede transformar en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}v_0(\varphi) \;=\; & [\varphi(0)-D\varphi(-h)]^TU(0)[\varphi(0)-D\varphi(-h)]\\
&+2[\varphi(0)-D\varphi(-h)]^T\int_{-h}^{0}\left[\frac{\partial U(-\theta-h)}{\partial\theta}D+U(-\theta-h)A_1\right]\varphi(\theta)d\theta\\
&+\int_{-h}^{0}\varphi^T(\theta_1)A_1^T\left[\int_{-h}^{0}U(\theta_1-\theta_2)A_1\varphi(\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1\\
&-\int_{-h}^{0}\varphi^T(\theta_1)\int_{-h}^{0}\left[D^T\frac{\partial U(\theta_1-\theta_2)}{\partial\theta_2}A_1-A_1^T\frac{\partial U(\theta_1-\theta_2)}{\partial\theta_2}D\right]\varphi(\theta_2)d\theta_2d\theta_1\\
&-\int_{-h}^{0}\varphi^T(\theta_1)D^T\left[\int_{\substack{-h\\ \theta_2\neq\theta_1}}^{0}\frac{\partial^2U(\theta_1-\theta_1)}{\partial\theta_1^2}D\varphi(\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1,\\
&-\int_{-h}^{0}\varphi^T(\theta)D^TPD\varphi(\theta)d\theta.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Observe ahora que los términos de la funcional (2.7) no dependen de la derivada de la función inicial sino de la derivada de la matriz de Lyapunov. Esta transformación no elimina la condición de diferenciabilidad de las funciones iniciales ya que por construcción la funcional (2.6) únicamente es válida para $\varphi\in C^1$. Esta transformación es conocida como *nueva forma de la funcional* (2.6).

A partir de esta nueva forma de la funcional (2.6) se muestra que la funcional (2.7) satisface las cotas cuadráticas del Teorema 2.1.

De la revisión anterior de la construcción de funcionales desarrolladas por Kharitonov en [12] podemos concluir lo siguiente:

1.- Aunque el sistema neutro considerado en [12] es de la forma de Hale, se asume diferenciabilidad de las funciones iniciales, la cual no es requerida para esta clase de sistemas neutros.

2.- Las funcionales construidas dependen de la derivada de la solución, la cual en principio puede no estar definida en los sistemas neutros en la forma de Hale.

3.- Para satisfacer las cotas cuadráticas del Teorema 2.1, se presenta una nueva forma de la funcional que no involucra la derivada de la solución pero, sin embargo, esta nueva forma no remueve la suposición de diferenciabilidad de las funciones iniciales.

Lo anterior motiva el presente trabajo de investigación de tesis doctoral, donde nos planteamos lo siguiente:

1) Construir funcionales de Lyapunov para el sistema neutro en la forma de Hale (2.1), sin asumir diferenciabilidad de las funciones iniciales, como se requiere para esta clase de sistemas.

2) Satisfacer las condiciones originales del Teorema 2.1, sobre la derivada de la funcional. Esto es, satisfacer la segunda condición del Teorema 2.1

$$\frac{d}{dt}v(x_t(\varphi)) \leq -\beta \left\|x(t,\varphi)-Dx(t-h,\varphi)\right\|^2, \quad \forall t \geq 0,$$

y no la condición

$$\frac{d}{dt}v(x_t(\varphi)) \leq -\beta \left\|x(t,\varphi)\right\|^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Con base en la segunda condición del Teorema 2.1, es natural seleccionar una forma cuadrática que involucre el operador en diferencia como derivada prescrita para la funcional deseada.
De manera más precisa, nos planteamos resolver el siguiente problema:

Problema 2: Sea el sistema (2.1), con condiciones iniciales en el espacio PC, exponencialmente estable. Dada una forma cuadrática

$$w(\varphi) = (\varphi(0) - D\varphi(-h))^T W(\varphi(0) - D\varphi(-h)),$$

con W simétrica y positiva definida encontrar una funcional $v : PC \to \mathbb{R}$ tal que a lo largo de las soluciones de (2.1) satisface la siguiente igualdad:

$$\frac{dv_0(x_t(\varphi))}{dt} = -w(x_t(\varphi)), \;\; t \geq 0. \tag{2.8}$$

Hasta donde sabemos el **Problema 2** es un problema abierto y en este trabajo de investigación se presenta una solución.

En nuestra solución al problema, seguimos las ideas principales introducidas por Kharitonov [12], pero desde un nuevo punto de vista el cual se basa en obtener una nueva fórmula de Cauchy para el operador en diferencia y entonces realizar la construcción de funcionales satisfaciendo (2.8) utilizando esta nueva fórmula de Cauchy para el operador en diferencia.

Capítulo 3

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos resultados preliminares para la obtención de los resultados principales. Primeramente, se introduce el concepto de solución para sistemas lineales de tipo neutro en la forma de Hale. Posteriormente se define el concepto de matriz fundamental y se proporcionan la fórmula de Cauchy para las soluciones, así como una formula tipo Cauchy para el operador en diferencia. Finalmente se introduce el concepto de estabilidad exponencial en el espacio PC y su caracterización en término de la matriz fundamental.

3.1. Soluciones

Considere el sistema de tipo neutro en la forma de Hale

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t-h)] = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$
$$x(t) = \varphi(t) \;\; t \in [-h, 0],$$

donde A_0, A_1 y D son matrices de orden $n \times n$ con entradas reales, $h > 0$ es el retardo, y $\varphi \in PC$.

Como se mencionó en el capítulo 1, sección 1.3, el sistema (3.1) tiene un problema de valor inicial bien planteado para cualquier función inicial $\varphi \in PC$, equipado con la norma de convergencia uniforme $\|\varphi\|_h$, ya que no se requiere que la solución $x(t,\varphi)$ sea diferenciable en t, pero sólo el operador en diferencia $x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi)$. En $t = 0$ se supone la derivada del lado derecho. Recordemos que φ se dice ser continua a pedazos en el intervalo $[-h, 0]$ si es continua excepto posiblemente para un conjunto finito de discontinuidades de tipo salto en las cuales el limite por la derecha existe.

Para $\varphi \in PC$, se tiene las siguientes propiedades de las soluciones de (3.1):

1. La diferencia $x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi)$ es continua y diferenciable para $t \geq 0$, excepto posiblemente en un número contable de puntos.

2. La solución $x(t,\varphi)$ no es diferenciable, o incluso continua para $t \geq 0$. De hecho, si φ tiene una discontinuidad en $\theta_1 \in [-h,0]$ entonces $x(t,\varphi)$ sufre una discontinuidad de tipo salto en los puntos $t_j = \theta_1 + jh$, $j \geq 0$, sujeta a la ecuación

$$\Delta x(t_{j+1}) = D\Delta x(t_j), \quad j \geq 0,$$

donde $\Delta x(t_j) = x(t_j+0) - x(t_j-0)$. Como consecuencia, la solución $x(t,\varphi)$ satisface el sistema (3.1) casi en todo instante de tiempo $t \in [0,\infty)$.

Ahora, es conveniente considerar la otra forma de sistemas lineales con retardo de tipo neutro

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) - D\dot{y}(t-h) &= A_0 y(t) + A_1 y(t-h), \quad t \geq 0, \\ y(t) &= \psi(t), \quad t \in [-h,0], \end{aligned} \tag{3.2}$$

Siguiendo [1], para (3.2) el problema de valor inicial requiere que la función inicial ψ y su derivada estén definidas. Si elegimos el espacio de las funciones iniciales PC^1, entonces para cualquier $\psi \in PC^1$, la solución correspondiente $y(t,\psi)$ de (3.2) es continuamente diferenciable para $t \geq 0$, excepto en un número contable de puntos, véase [1].

Sea $y(t,\psi)$ solución del sistema (3.2). Entonces, $y(t,\psi)$ satisface el sistema (3.2) excepto en un número contable de puntos, es decir,

$$\dot{y}(t,\psi) - D\dot{y}(t-h,\psi) = A_0 y(t,\psi) + A_1 y(t-h,\psi), \quad t \geq 0. \tag{3.3}$$

Observe que, por la linealidad de la derivada, el lado izquierdo de (3.3) satisface la igualdad siguiente:

$$\dot{y}(t,\psi) - D\dot{y}(t-h,\psi) = \frac{d}{dt}[y(t,\psi) - Dy(t-h,\psi)], \tag{3.4}$$

en casi todo instante de tiempo. Además, como $y(t,\psi)$ es diferenciable, excepto en un número contable de puntos, entonces la diferencia $y(t,\psi) - Dy(t-h,\psi)$ es continua y diferenciable excepto en un número contable de puntos. Así combinando (3.3) y (3.4), obtenemos

$$\frac{d}{dt}[y(t,\psi) - Dy(t-h,\psi)] = A_0 y(t,\psi) + A_1 y(t-h,\psi), \quad t \geq 0.$$

El análisis anterior muestra que la solución $y(t,\psi)$ de (3.2) es también una solución de (3.1) pero; sin embargo, el converso no es cierto en general. El siguiente Lema establece formalmente bajo que condiciones existe equivalencia de las soluciones de los sistemas (3.1) y (3.2).

Lema 3.1 Si $\varphi \in PC^1$, entonces la solución $x(t,\varphi)$ de (3.1) satisface (3.2).

Demostración. Sea $\varphi \in PC^1$ y $x(t,\varphi)$ la solución correspondiente de (3.1). Integrando (3.1) de $t_0 \geq 0$ a $t \geq t_0$ se tiene que

$$x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi) - [x(t_0,\varphi) - Dx(t_0-h,\varphi)] = \int_{t_0}^{t} [A_0 x(\xi,\varphi) + A_1 x(\xi-h,\varphi)] d\xi$$

o, equivalentemente,

$$x(t,\varphi) = Dx(t-h,\varphi) + [x(t_0,\varphi) - Dx(t_0-h,\varphi)] + \int_{t_0}^{t} [A_0 x(\xi,\varphi) + A_1 x(\xi-h,\varphi)] d\xi. \quad t \geq 0.$$

Para $t_0 = 0$ y $t \in (0,h)$, tenemos que

$$x(t_0,\varphi) - Dx(t_0-h,\varphi) = x(0,\varphi) - Dx(-h,\varphi) = \varphi(0) - D\varphi(-h)$$

y $x(t-h,\varphi) = \varphi(t-h)$. Como $\varphi \in PC^1$, entonces se sigue que $x(t,\varphi)$ es diferenciable para $t \in (0,h)$, excepto posiblemente en un número contable de puntos.
Para $t_0 = h$ y $t \in (h,2h)$, se tiene que

$$x(t_0,\varphi) - Dx(t_0-h,\varphi) = x(h,\varphi) - Dx(0,\varphi)$$

y $x(t-h,\varphi)$ es diferenciable. Luego entonces $x(t,\varphi)$ es diferenciable para $t \in (h,2h)$ excepto posiblemente en un número contable de puntos.
Continuando este proceso, podemos concluir que $x(t,\varphi)$ es diferenciable para $t \geq 0$, excepto posiblemente en un número contable de puntos.
Se sigue que

$$\frac{d}{dt}[x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi)] = \frac{dx(t,\varphi)}{dt} - D\frac{dx(t-h,\varphi)}{dt}$$

y por lo tanto la solución $x(t,\varphi)$ de (3.1) satisface la ecuación

$$\frac{dx(t,\varphi)}{dt} - D\frac{dx(t-h,\varphi)}{dt} = A_0 x(t,\varphi) + A_1 x(t-h,\varphi), \; t \geq 0.$$

lo que queríamos demostrar. □

El siguiente teorema nos proporciona un estimado exponencial para las soluciones del sistema (3.1). Este estimado es básico para la aplicación de la transformada de Laplace.

Teorema 3.1 [6]

Sea $x(t,\varphi)$ la solución de la ecuación (3.1). Entonces existen constantes positivas a y b, tales que

$$\| x(t,\varphi) \| \leq ae^{bt} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0.$$

La discusión relativa a la existencia de soluciones de tipo exponencial, para sistemas con retardo de tipo retardado, puede extenderse a sistemas de tipo neutro de la forma (3.1), véase [6]. De hecho, $x(t) = ce^{st}$, donde c es cualquier vector constante, es una solución del sistema (3.1), si y sólo si el número complejo s es un cero de la función

$$f(s) = det\left(sI - se^{-sh}D - A_0 - e^{-sh}A_1\right). \tag{3.5}$$

.

Definición 3.1 [6]

La función $f(s)$ dada por (3.5) es llamada la función característica asociada al sistema (3.1). La ecuación $f(s) = 0$ es llamada la ecuación característica asociada al sistema (3.1).

Definición 3.2 [6]

Un número complejo s_0 se dice ser un valor propio del sistema (3.1) si es una raíz de la función característica (3.5) del sistema. El conjunto

$$\Lambda = \{s | f(s) = 0\}$$

es conocido como el espectro del sistema.

3.2. Concepto y propiedades de la matriz fundamental

Definición 3.3

Sea $K(t)$ solución de la ecuación matricial

$$\frac{d}{dt}[K(t) - DK(t-h)] = A_0K(t) + A_1K(t-h), \quad t \geq 0, \tag{3.6}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. $K(t) = 0_{n\times n}$ para toda $t < 0$ y $K(0) = I$.

2. $K(t) - DK(t-h)$ es continua y diferenciable para $t \geq 0$.

La matriz $K(t)$ es conocida como *matriz fundamental* asociada al sistema (3.1), véase Bellman y Cooke [1]. Como las columnas de la matriz $K(t)$ son soluciones del sistema (3.1) con condiciones iniciales particulares que pertenecen al espacio PC^1, entonces del Lema 3.1, se sigue que la matriz fundamental $K(t)$ también satisface la ecuación

$$\dot{K}(t) - D\dot{K}(t-h) = A_0 K(t) + A_1 K(t-h), \quad t \geq 0.$$

La matriz fundamental tiene las siguientes propiedades:

1. La matriz $K(t)$ es de clase C^1 en $(jh, (j+1)h)$, $j = 0, 1, 2...$

2. La matriz $K(t)$ tiene discontinuidades de tipo salto en los puntos $t = jh$, $j = 0, 1, 2...$, satisfaciendo la siguiente ecuación:

$$\Delta K((j+1)h)) = D\Delta K(jh),$$

donde $K(jh) = K(jh+0) - K(jh-0)$.

Como consecuencia, la matriz $K(t)$ es continua a pedazos para $t \geq 0$ y de variación acotada en cada intervalo de tiempo de longitud h.

Lema 3.2 La matriz fundamental $K(t)$ también satisface las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}[K(t) - K(t-h)D] = K(t)A_0 + K(t-h)A_1, \quad t \geq 0, \tag{3.7}$$

y

$$\dot{K}(t) - \dot{K}(t-h)D = K(t)A_0 + K(t-h)A_1, \quad t \geq 0. \tag{3.8}$$

con las mismas condiciones iniciales de la ecuación (3.6). Esto no significa que la matriz $K(t)$ conmuta con los coeficientes matriciales A_k, $k = 0, 1$ y D.

Demostración. Observe que por el Lema 3.1 las ecuaciones (3.7) y (3.8) son equivalentes. Así, es suficiente mostrar que $K(t)$ satisfaciendo (3.6) también satisface (3.7).
Debido a que las soluciones de (3.1) satisfacen tener una cota superior de tipo exponencial, entonces la imagen de la transformada de Laplace de las soluciones $x(t,\varphi)$ de (3.1) y la matriz fundamental satisfaciendo (3.6) están bien definidas.
Definiendo

$$\hat{K}(s) \triangleq \int_0^\infty K(t)e^{-st}dt,$$

y tomando en cuenta que $K(t) - DK(t-h)$ es continua y diferenciable se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}[K(t) - DK(t-h)]e^{-st}dt = s[\hat{K}(s) - De^{-sh}\hat{K}(s)] - I.$$

Entonces, aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de (3.6) se obtiene que

$$s[\hat{K}(s) - De^{-sh}\hat{K}(s)] - I = A_0\hat{K}(s) + A_1e^{-hs}\hat{K}(s)$$

o, equivalentemente,

$$H(s)\hat{K}(s) = I. \tag{3.9}$$

donde

$$H(s) = [s(I - De^{-hs}) - A_0 - A_1e^{-hs}]. \tag{3.10}$$

Si s no pertenece al espectro del sistema entonces

$$\hat{K}(s) = H^{-1}(s).$$

Ahora, sea $\hat{K}_1(t)$ la solución de (3.7) con las mismas condiciones iniciales de (3.6). Utilizando argumentos similares, después de aplicar la transformada de Laplace en ambos lados de (3.7) llegamos a la ecuación

$$s[\hat{K}_1(s) - e^{-hs}\hat{K}_1(s)D] - I = \hat{K}_1(s)A_0 + e^{-hs}\hat{K}_1(s)A_1$$

o, equivalentemente

$$\hat{K}_1(s)H(s) = I.$$

De la ecuación anterior se sigue que

$$\hat{K}_1(s) = H^{-1}(s),$$

para s que no pertenecen al espectro del sistema (3.1).
La unicidad de la transformada de Laplace implica que $K_1(t) = K(t)$ lo que muestra el resultado.

□

3.3. Fórmula de Cauchy para las soluciones y el operador en diferencia

En esta sección, se presenta la fórmula de Cauchy para el sistema de tipo neutro en la forma de Hale (3.1). También se presenta una fórmula tipo Cauchy para el operador en diferencia.

Lema 3.3 Dada cualquier función inicial $\varphi \in PC$, la solución $x(t,\varphi)$ del sistema (3.1) puede ser escrita como

$$x(t,\varphi) = K(t)[\varphi(0) - D\varphi(-h)] - \int_{-h}^{0} d_{\xi} K(t-\xi)\varphi(\xi) - \int_{-h}^{0} K(t-\xi)A_0\varphi(\xi)d\xi, \;\; t \geq -h. \tag{3.11}$$

donde la primera integral en el lado derecho de (3.11) es de Riemann-Stieltjes.

Demostración. Basado en la existencia de cotas superiores exponenciales para las soluciones de (3.1), ver el Teorema 3.1, la imagen de la transformada de Laplace de las soluciones $x(t,\varphi)$ y la matriz fundamental $K(t)$ están bien definidas. Definiendo

$$\hat{x}(s) \triangleq \int_{-h}^{\infty} x(t,\varphi)e^{-st}dt,$$

tenemos las relaciones

$$\int_{0}^{\infty} x(t,\varphi)e^{-st}dt = \hat{x}(s) - \int_{-h}^{0} \varphi(t)e^{-st}dt, \quad \int_{0}^{\infty} x(t-h)e^{-st}dt = e^{-sh}\hat{x}(s). \tag{3.12}$$

Tomando en cuenta que $x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi)$ es continua y usando las expresiones (3.12) se tiene

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{d}{dt}(x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi))e^{-st}dt =& -(\varphi(0) - D\varphi(-h)) + s\left(\hat{x}(s) - \int_{-h}^{0}\varphi(t)e^{-st}dt\right) \\ & - sDe^{-sh}\hat{x}(s).\end{aligned}$$

Entonces, calculando la transformada de Laplace en ambos lados de (3.1) se obtiene

$$\hat{x}(s) = H^{-1}(s)[\varphi(0) - D\varphi(-h)] + sH^{-1}(s)\int_{-h}^{0}\varphi(t)e^{-st}dt - H^{-1}(s)A_0\int_{-h}^{0}\varphi(t)e^{-st}dt, \tag{3.13}$$

donde $H(s)$ es definido en (3.10). De la demostración del Lema 3.2, ecuación (3.9), se tiene que

$$\hat{K}(s) = H^{-1}(s).$$

Tomando en cuenta la siguiente igualdad

$$\int_{-h}^{\infty} \frac{dK(t)}{dt} e^{-st} dt = s \int_{-h}^{\infty} K(t) e^{-st} dt = s\hat{K}(s),$$

aplicando el teorema de convolución en (3.13) se obtiene la siguiente expresión:

$$x(t,\varphi) = K(t)[\varphi(0) - D\varphi(-h)] + \int_{-h}^{0} \frac{\partial K(t-\xi)}{\partial t} \varphi(\xi) d\xi - \int_{-h}^{0} k(t-\xi) A_0 \varphi(\xi) d\xi,$$

lo cual se satisface para toda $t \geq -h$, $t \neq jh$, $j = 0, 1, ...$, y en aquellos intervalos de tiempo donde $\frac{\partial K(t-\xi)}{\partial t}$ está bien definida.

Si hacemos uso de la integral de Riemman-Stieljes, la expresión anterior se puede reescribir como (3.11) y, así, el lema es mostrado. □

La expresión (3.11) es la fórmula de Cauchy para las soluciones del sistema (3.1) que se satisface para toda $t \geq -h$ con funciones iniciales en PC. Esta fórmula de Cauchy es diferente a la que se presenta en [6] que se satisface para toda $t \geq 0$ con funciones iniciales continuas. Por supuesto, también es diferente a la presentada en [12] la cual es válida para $t \geq 0$ con funciones iniciales en PC^1.

Con base en la nueva fórmula de Cauchy para las soluciones del sistema (3.1) obtenemos una fórmula tipo Cauchy para el operador en diferencia $x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi)$ en el siguiente resultado.

Lema 3.4 Dada cualquier función inicial $\varphi \in PC$, la solución $x(t,\varphi)$ del sistema (3.1) admite la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi) = {} & [K(t) - DK(t-h)][\varphi(0) - D\varphi(-h)] \\ & + \int_{-h}^{0} (A_0 K(t-\xi) + A_1 K(t-\xi-h)) \varphi(\xi) d\xi \\ & - \int_{-h}^{0} (K(t-\xi) - DK(t-\xi-h)) A_0 \varphi(\xi) d\xi, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Demostración. Debido a que la expresión (3.11) para $x(t,\varphi)$ se mantiene para $t \geq -h$, entonces $x(t-h,\varphi)$ admite la siguiente expresión para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} x(t-h,\varphi) = {} & K(t-h)[\varphi(0) - D\varphi(-h)] - \int_{-h}^{0} d_{\xi} K(t-h-\xi) \varphi(\xi) \\ & - \int_{-h}^{0} K(t-h-\xi) A_0 \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

y, por tanto, para $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi) = {} & [K(t) - DK(t-h)][\varphi(0) - D\varphi(-h)] \\
& - \int_{-h}^{0} [d_\xi K(t-\xi) - D d_\xi K(t-h-\xi)]\varphi(\xi) \\
& - \int_{-h}^{0} [K(t-\xi) - DK(t-h-\xi)] A_0 \varphi(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Observe que

$$-\int_{-h}^{0} [d_\xi K(t-\xi) - D d_\xi K(t-h-\xi)]\varphi(\xi) = -\int_{-h}^{0} d_\xi [K(t-\xi) - DK(t-h-\xi)]\varphi(\xi).$$

Como $K(t-\xi) - DK(t-h-\xi)$ es diferenciable para $t \geq 0$ casi en todo instante de tiempo, se sigue que

$$\begin{aligned}
d_\xi [K(t-\xi) - DK(t-h-\xi)] &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} [K(t-\xi) - DK(t-h-\xi)] \right) d\xi, \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial t} [K(t-\xi) - DK(t-h-\xi)] \right) d\xi, \\
&= -(A_0 K(t-\xi) + A_1 K(t-h-\xi)) d\xi.
\end{aligned}$$

Así,

$$-\int_{-h}^{0} [d_\xi K(t-\xi) - D d_\xi K(t-h-\xi)]\varphi(\xi) d\xi = \int_{-h}^{0} [A_0 K(t-\xi) + A_1 K(t-h-\xi)]\varphi(\xi) d\xi$$

y finalmente llegamos a la siguiente expresión para la diferencia $x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi)$

$$\begin{aligned}
x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi) = {} & [K(t) - DK(t-h)][\varphi(0) - D\varphi(-h)] \\
& + \int_{-h}^{0} (A_0 K(t-\xi) + A_1 K(t-\xi-h))\varphi(\xi) d\xi \\
& - \int_{-h}^{0} (K(t-\xi) - DK(t-\xi-h)) A_0 \varphi(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

la cual es válida para $t \geq 0$. $\square$

3.4. Concepto de estabilidad exponencial

Definición 3.4
El sistema (3.1) se dice ser exponencialmente estable si existen $\sigma > 0$ y $\gamma \geq 1$ tales que cada solución $x(t, \varphi)$ del sistema (3.1) satisface la siguiente desigualdad:

$$\|x(t,\varphi)\| \leq \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0.$$

Para el sistema (3.1) con función inicial en el espacio C es sabido que la estabilidad exponencial del operador en diferencia $x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi)$ es una condición necesaria para la estabilidad exponencial del sistema (3.1), véase [6]. En realidad, este es también el caso de las funciones iniciales en el espacio PC, como puede verse en las demostraciones de los teoremas de Lyapunov-Krasovskii en [12] bajo funciones iniciales continuamente diferenciables a pedazos, que siguen siendo válidas para las funciones iniciales continuas a pedazos, ya que la diferenciabilidad no está involucrada en la prueba. Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad exponencial del operador en diferencia $x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi)$, es que la matriz D sea Schur estable, es decir, el espectro de la matriz D se encuentra en el disco unitario abierto del plano complejo. De hecho, la estabilidad Schur de la matriz D es necesaria y suficiente para una estabilidad exponencial fuerte (estabilidad exponencial para todas las variaciones en el retardo) del operador en diferencia [6]. Además, como se discutió en [12], la estabilidad Schur de la matriz D asegura cotas de las posibles discontinuidades de salto de una solución bajo funciones iniciales continuas a pedazos. Por lo tanto, asumimos en el resto de esta tesis que la matriz D es Schur estable.

Lema 3.5 Sea el sistema (3.1) exponencialmente estable. Entonces existen $\mu \geq 1$ y $\sigma > 0$ tales que

$$\|x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi)\| \leq \mu e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0. \tag{3.15}$$

Demostración. De la definición de estabilidad exponencial del sistema (3.1) existen $\sigma > 0$ y $\gamma \geq 1$ tales que $\|x(t,\varphi)\| \leq \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h, t \geq 0$. Entonces, para $t - h \geq 0$ la desigualdad $\|x(t-h,\varphi)\| \leq \gamma e^{-\sigma(t-h)} \|\varphi\|_h$ se mantiene. Por otro lado, para $t - h < 0$ se tiene $\|x(t-h,\varphi)\| = \|\varphi(t-h)\| \leq \|\varphi\|_h$. Además como $\gamma \geq 1$ y $1 < e^{-\sigma(t-h)}$ se sigue que $\|\varphi\|_h \leq \gamma e^{-\sigma(t-h)} \|\varphi\|_h$. Así,

$$\|x(t-h,\varphi)\| \leq \gamma e^{-\sigma(t-h)} \|\varphi\|_h, \forall t \geq 0.$$

Tomando en cuenta esta desigualdad, se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\|x(t,\varphi)-Dx(t-h,\varphi)\| &\leq \|x(t,\varphi)\|+\|D\|\,\|x(t-h,\varphi)\|\\ &\leq \gamma e^{-\sigma t}\,\|\varphi\|_h+\|D\|\left(\gamma e^{-\sigma(t-h)}\,\|\varphi\|_h\right)\\ &\leq (1+\parallel D\parallel e^{\sigma h})\gamma e^{-\sigma t}\,\|\varphi\|_h,\end{aligned}$$

que es precisamente la desigualdad (3.15) con $\mu=(1+\parallel D\parallel e^{\sigma h})\gamma$, y la demostración del resultado. □

Lema 3.6 Sea el sistema (3.1) exponencialmente estable. Entonces existen $\gamma \geq 1$ y $\sigma > 0$ tales que la siguiente desigualdad se satisface:

$$\|K(t)\| \leq \gamma e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0.$$

Demostración. El resultado se obtiene directamente de la observación que las columnas de la matriz $K(t)$ son soluciones del sistema (3.1) con condiciones iniciales especiales. □

Lema 3.7 Sea el sistema (3.1) exponencialmente estable. Entonces, existen $\mu \geq 1$ y $\sigma > 0$ tales que la siguiente desigualdad se mantiene:

$$\|K(t)-DK(t-h)\| \leq \mu e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0.$$

Demostración. Como cada columna de $K(t)-DK(t-h)$ satisface el sistema (3.1). Por aplicación directa del Lema 3.5 se obtiene el resultado. □

Capítulo 4

Resultados principales

En este capítulo se exhiben los resultados principales obtenidos en el desarrollo de la tesis. El proceso de construcción de la funcional cuadrática de Lyapunov-Krasovskii con una derivada prescrita es explicado a detalle. Se muestra que la funcional depende de una función matricial conocida como matriz de Lyapunov. Este capítulo también está dedicado al análisis de las propiedades básicas de la nueva definición de las matrices de Lyapunov para sistemas de tipo neutro en la forma de Hale. Se proporcionan varias cotas superiores e inferiores cuadráticas de la funcional, esto permite demostrar un resultado converso que proporciona un procedimiento constructivo para calcular las funcionales de Lyapunov para un sistema con retardo de tipo neutro exponencialmente estable dado. Finalmente, se usan las funcionales para obtener estimados exponenciales y se ilustran los resultados con un ejemplo numérico.

4.1. Construcción de la funcional de Lyapunov-Krasovskii

En esta sección se dará un paso importante hacia la construcción de funcionales cuadráticas que satisfagan las condiciones del Teorema 2.1. Es decir, derivamos una fórmula explícita para una funcional que resuelve el **Problema 2**. Recordemos el problema matemático formulado en el capítulo 2.

Problema 2: Sea el sistema (3.1), con condiciones iniciales en el espacio PC, exponencialmente estable. Dada una forma cuadrática

$$w(\varphi) = (\varphi(0) - D\varphi(-h))^T W(\varphi(0) - D\varphi(-h)),$$

con W simétrica y positiva definida encontrar una funcional $v : PC \to \mathbb{R}$ tal que a lo largo de las soluciones de (3.1) satisface la siguiente igualdad:

$$\frac{dv_0(x_t(\varphi))}{dt} = -w(x_t(\varphi)), \ \ t \geq 0.$$

Para presentar una solución al **Problema 2** es necesario interpretar el sistema (3.1) en PC como un sistema en $PC_a = PC([-2h,0],\mathbb{R}^n)$. Por supuesto se debe considerar la restricción de las funciones iniciales $\psi \in PC([-2h,0],\mathbb{R})$ tal que $\psi(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h,0]$ y $\psi(\theta) = 0_n, \theta \in [-2h,-h)$. Por lo tanto, para una matriz W simétrica y positiva definida dada, definamos en PC_a la funcional siguiente:

$$w(\psi) = (\psi(0) - D\psi(-h))^T W (\psi(0) - D\psi(-h)).$$

Deseamos encontrar una funcional $v_0 : PC_a \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a lo largo de las soluciones de (3.1) satisfaga

$$\frac{dv_0(x_t(\psi))}{dt} = -w(x_t(\psi)), \quad t \geq 0. \tag{4.1}$$

Bajo el supuesto que el sistema (3.1) es exponencialmente estable. Integrando (4.1) de $t = 0$ a $t = T$, tenemos

$$v_0(x_T(\psi)) - v_0(\psi) = -\int_0^T w(x_t(\psi))dt. \tag{4.2}$$

Como el sistema (3.1) es exponencialmente estable, entonces $x_T(\psi) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Si v_0 es positiva definida, entonces es continua en 0_h, lo que implica que

$$v_0(x_T(\psi)) \to v_0(0_h) \text{ cuando } \ t \to \infty,$$

y $v_0(0_h) = 0$. Calculando el límite cuando $T \to \infty$ en (4.2), entonces se sigue que

$$v_0(\psi) = \int_0^\infty w(x_t(\psi))dt.$$

La expresión anterior puede ser reescrita como

$$v_0(\psi) = \int_{-h}^\infty w(x_t(\psi))dt - \int_{-h}^0 w(x_t(\psi))dt.$$

Como el operador en diferencia $x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi) = \psi(t)$ cuando $t \in [-h,0]$, entonces la funcional $v_0(\psi)$ tiene la forma siguiente:

$$v_0(\psi) = \bar{v}_0(\psi) - \int_{-h}^0 \psi^T(t) W \psi(t)dt, \tag{4.3}$$

donde

$$\bar{v}_0(\psi) = \int_{-h}^{\infty} w(x_t(\psi))dt,$$

equivalentemente

$$\bar{v}_0(\psi) = \int_{-h}^{\infty} [x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)]^T W[x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)]dt. \tag{4.4}$$

Por el Lema 3.5, el operador en diferencia $x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)$ tiene cota de tipo exponencial y por tanto la integral impropia del miembro derecho de (4.4) está bien definida.
Sustituyendo la expresión (3.14) bajo la integral (4.4), se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{v}_0(\psi) = \int_0^{\infty} \Bigg\{ \Bigg(&[K(t) - DK(t-h)][\psi(0) - D\psi(-h)] + \int_{-h}^{0} (A_0K(t-\xi_1) + A_1K(t-\xi_1-h))\psi(\xi_1)d\xi_1 \\ &- \int_{-h}^{0} (K(t-\xi_1) - DK(t-\xi_1-h))A_0\psi(\xi_1)d\xi_1 \Bigg)^T W \Bigg([K(t) - DK(t-h)][\psi(0) - D\psi(-h)] \\ &+ \int_{-h}^{0} (A_0K(t-\xi_2) + A_1K(t-\xi_2-h))\psi(\xi_2)d\xi_2 - \int_{-h}^{0} (K(t-\xi_2) - DK(t-\xi_2-h))A_0\psi(\xi_2)d\xi_2 \Bigg) \Bigg\} dt.\end{aligned}$$

La expresión anterior se puede escribir como

$$\bar{v}_0(\psi) = \sum_{j=1}^{6} \bar{v}_{0j}(\psi),$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{v}_{01}(\psi) \;&=\; (\psi(0) - D\psi(-h))^T \times \\ &\left(\int_{-h}^{\infty} (K(t) - DK(t-h))^T W (K(t) - DK(t-h))dt \right) \\ &\times (\psi(0) - D\psi(-h)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_{02}(\psi) \;&=\; -2(\psi(0) - D\psi(-h))^T \int_{-h}^{\infty} (K(t) - DK(t-h))^T W \times \\ &\times \left(\int_{-h}^{0} (K(t-\xi) - DK(t-\xi-h))A_0\psi(\xi)d\xi \right) dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_{03}(\psi) \;&=\; \int_{-h}^{\infty} \Bigg[\left(\int_{-h}^{0} [K(t-\xi_1) - DK(t-\xi_1-h)]A_0\psi(\xi_1)d\xi_1 \right)^T W \times \\ &\times \left(\int_{-h}^{0} [K(t-\xi_2) - DK(t-\xi_2-h)]A_0\psi(\xi_2)d\xi_2 \right) \Bigg] dt,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_{04}(\psi) &= 2(\psi(0)-D\psi(-h))^T \int_{-h}^{\infty} \Big[(K(t)-DK(t-h))^T W \times \\
&\quad \times \left(\int_{-h}^{0} [A_0 K(t-\xi)+A_1 K(t-\xi-h)]\, \psi(\xi) d\xi \right) \Big] dt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_{05}(\psi) &= -2\int_{-h}^{\infty} \left[\left(\int_{-h}^{0} [A_0(t-\xi_1)+A_1 K(t-\xi_1-h)]\, \psi(\xi_1) d\xi_1 \right)^T W \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(\int_{-h}^{0} [K(t-\xi_2)-DK(t-\xi_2-h)] A_0 \psi(\xi_2) d\xi_2 \right) \right] dt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_{06}(\psi) &= \int_{-h}^{\infty} \left[\left(\int_{-h}^{0} [A_0 K(t-\xi_1)+A_1 K(t-\xi_1-h)]\, \psi(\xi_1) d\xi_1 \right)^T W \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(\int_{-h}^{0} [A_0 K(t-\xi_2)+A_1 K(t-\xi_2-h)]\, \psi(\xi_2) d\xi_2 \right) \right] dt.
\end{aligned}
$$

Motivado de las expresiones para $\bar{v}_{0j}(\psi)$, $j=1,2,...,6$ surge de manera natural definir la siguiente matriz

$$
U(\tau) = \int_{0}^{\infty} (K(t)-DK(t-h))^T W (K(t+\tau)-DK(t+\tau-h)) dt, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{4.5}
$$

El Lema 3.7 nos proporciona un estimado exponencial del operador $K(t)-DK(t-h)$. Este estimado garantiza que la matriz $U(\tau)$ está bien definida para $\tau \in \mathbb{R}$.

Lema 4.1 Dado $\tau_0 \in \mathbb{R}$ la integral impropia (4.5) converge absolutamente y uniformemente para $\tau \in [\tau_0, \infty)$.

Demostración. Definamos $\bar{K}(t) = K(t)-DK(t-h)$. Dado $\tau \in \mathbb{R}$ se sigue del Lema 3.7

$$
\| \bar{K}^T(t) W \bar{K}(t+\tau) \| \leq \| \bar{K}(t) \| \| W \| \| \bar{K}(t+\tau) \| \leq \left(\mu e^{-\sigma t}\right) \| W \| \left(\mu e^{-\sigma(t+\tau)}\right) \leq \mu^2 \| W \| e^{-\sigma(2t+\tau)}.
$$

Entonces

$$
\int_{0}^{\infty} \| \bar{K}^T(t) W \bar{K}(t+\tau) \| dt \leq \mu^2 \| W \| e^{-\sigma\tau} \int_{0}^{\infty} e^{-2\sigma t} dt \leq \frac{\mu^2}{2\sigma} \| W \| e^{-\sigma\tau}
$$

Para $\tau \in [\tau_0, \infty)$ con un $\tau_0 \in \mathbb{R}$ dado, se tiene que

$$
\int_{0}^{\infty} \| \bar{K}^T(t) W \bar{K}(t+\tau) \| dt \leq \frac{\mu^2}{2\sigma} \| W \| e^{-\sigma\tau_0}.
$$

□

Mostraremos que la matriz $U(\tau)$ dada por (4.5) nos permite obtener una expresión más conveniente para la funcional $v_0(\psi)$

4.1.1. Funcional $\bar{v}_{01}(\psi)$

Considere el primer término de la funcional $\bar{v}_{01}(\psi)$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{01}(\psi) &= (\psi(0) - D\psi(-h))^T \times \\ &\quad \left(\int_{-h}^{\infty} (K(t) - DK(t-h))^T W (K(t) - DK(t-h)) dt \right) \\ &\quad \times (\psi(0) - D\psi(-h)). \end{aligned}$$

Observe la integral impropia

$$J_1 = \int_{-h}^{\infty} (K(t) - DK(t-h))^T W (K(t) - DK(t-h)) dt.$$

Como $K(t) = 0_{n\times n}$ para $t < 0$ entonces

$$J_1 = \int_{0}^{\infty} (K(t) - DK(t-h))^T W (K(t) - DK(t-h)) dt = U(0).$$

Por lo tanto, se obtiene

$$\bar{v}_{01}(\psi) = (\psi(0) - D\psi(-h))^T U(0)(\psi(0) - D\psi(-h)) \tag{4.6}$$

4.1.2. Funcional $\bar{v}_{02}(\psi)$

Considere ahora el segundo término $\bar{v}_{02}(\psi)$. Debido a la convergencia absoluta de la integral impropia (4.5), el orden de integración de la expresión para $\bar{v}_{02}(\psi)$ puede ser cambiado para obtener

$$\bar{v}_{02}(\psi) = -2(\psi(0) - D\psi(-h))^T \int_{-h}^{0} \left(\int_{-h}^{\infty} (K(t) - DK(t-h))^T W (K(t-\xi) - DK(t-\xi-h)) dt \right) A_0 \psi(\xi) d\xi.$$

Observe la integral impropia

$$J_2 = \int_{-h}^{\infty} (K(t) - DK(t-h))^T W (K(t-\xi) - DK(t-\xi-h)) dt.$$

Nuevamente, como $K(t) = 0_{n\times n}$ para $t < 0$ entonces

$$J_2 = \int_{0}^{\infty} (K(t) - DK(t-h))^T W (K(t-\xi) - DK(t-\xi-h)) dt = U(-\xi).$$

Por tanto, se obtiene

$$\bar{v}_{02}(\psi) = -2(\psi(0) - D\psi(-h))^T \int_{-h}^{0} U(-\xi) A_0 \psi(\xi) d\xi. \tag{4.7}$$

4.1.3. Funcional $\bar{v}_{03}(\psi)$

Similarmente, la convergencia absoluta de la integral impropia (4.5) nos permite cambiar el orden de integración de $\bar{v}_{03}(\psi)$ para obtener

$$\begin{aligned}
&\bar{v}_{03}(\psi) = \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \psi^T(\xi_1)A_0^T \times \\
&\times \left(\int_{-h}^{\infty}(K(t-\xi_1)-DK(t-\xi_1-h))^T W(K(t-\xi_2)-DK(t-\xi_2-h))dt\right)\times \\
&\times A_0\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1.
\end{aligned}$$

Observe la integral impropia interna

$$J_3 = \int_{-h}^{\infty}(K(t-\xi_1)-DK(t-\xi_1-h))^T W(K(t-\xi_2)-DK(t-\xi_2-h))dt.$$

Usando $\theta = t-\xi_1$, J_3 se reescribe como

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{-h-\xi_1}^{\infty}(K(\theta)-DK(\theta-h))^T W(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))d\theta \\
&= \int_{-h-\xi_1}^{0}(K(\theta)-DK(\theta-h))^T W(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))d\theta \\
&+ \int_{0}^{\infty}(K(\theta)-DK(\theta-h))^T W(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))d\theta.
\end{aligned}$$

Cuando $\xi_1 \in [-h,0]$ se tiene que $-h-\xi_1 \in [-h,0]$. Como $K(t) = 0_{n\times n}$ para $t<0$, el primer sumando del lado derecho de J_3 es igual cero, y por tanto, se obtiene

$$J_3 = \int_{0}^{\infty}(K(\theta)-DK(\theta-h))^T W(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))d\theta = U(\xi_1-\xi_2).$$

Por lo tanto

$$\bar{v}_{03}(\psi) = \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \psi^T(\xi_1)A_0^T U(\xi_1-\xi_2)A_0\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1. \quad (4.8)$$

4.1.4. Funcional $\bar{v}_{04}(\psi)$

Después de cambiar el orden de integración tenemos que $\bar{v}_{04}(\psi)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&\bar{v}_{04}(\psi) = 2(\psi(0)-D\psi(-h))^T \times \\
&\times \int_{-h}^{0}\left(\int_{-h}^{\infty}(K(t)-DK(t-h))^T W(A_0K(t-\xi)+A_1K(t-\xi-h))dt\right)\psi(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Observe la integral impropia interna

$$J_4 \;=\; \int_{-h}^{\infty}(K(t)-DK(t-h))^T W(A_0K(t-\xi)+A_1K(t-\xi-h))dt.$$

Como $K(t)=0_{n\times n}$ para $t<0$ entonces la integral J_4, se reduce a

$$J_4 \;=\; \int_{0}^{\infty}(K(t)-DK(t-h))^T W(A_0K(t-\xi)+A_1K(t-\xi-h))dt.$$

De la definición de $U(\tau)$ en (4.5) se tiene que

$$U(-\xi)=\int_{0}^{\infty}(K(t)-DK(t-h))^T W(K(t-\xi)-DK(t-\xi-h))dt,$$

y

$$\frac{dU(-\xi)}{d(-\xi)}=\int_{0}^{\infty}(K(t)-DK(t-h))^T W\frac{\partial(K(t-\xi)-DK(t-\xi-h))}{\partial(-\xi)}dt.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(K(t-\xi)-DK(t-\xi-h))}{\partial(-\xi)} &= \frac{d(K(t-\xi)-DK(t-\xi-h))}{d(t-\xi)}\\ &= A_0K(t-\xi)+A_1K(t-\xi-h).\end{aligned}$$

Entonces,

$$J_4=\frac{dU(-\xi)}{d(-\xi)},$$

lo que implica que

$$\bar{v}_{04}(\psi)=2(\psi(0)-D\psi(-h))^T\int_{-h}^{0}\frac{dU(-\xi)}{d(-\xi)}\psi(\xi)d\xi. \tag{4.9}$$

4.1.5. Funcional $\bar{v}_{05}(\psi)$

Al cambiar el orden de integración se tiene la siguiente expresión para $\bar{v}_{05}(\psi)$

$$\begin{aligned}&\bar{v}_{05}(\psi)=-2\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\times\\ &\times\left(\int_{-h}^{\infty}(A_0K(t-\xi_1)+A_1K(t-\xi_1-h))^T W(K(t-\xi_2)-DK(t-\xi_2-h))dt\right)A_0\psi(\xi_2)d\xi_2d\xi_1.\end{aligned}$$

Como antes, considere la integral impropia interna

$$J_5=\int_{-h}^{\infty}(A_0K(t-\xi_1)+A_1K(t-\xi_1-h))^T W(K(t-\xi_2)-DK(t-\xi_2-h))dt.$$

Sea $\theta = t - \xi_2$. Entonces J_5 se reescribe como

$$\begin{aligned}
J_5 &= \int_{-h-\xi_2}^{\infty} (A_0K(\theta+\xi_2-\xi_1)+A_1K(\theta+\xi_2-\xi_1-h))^T W(K(\theta)-DK(\theta-h))d\theta \\
&= \int_{-h-\xi_2}^{0} (A_0K(\theta+\xi_2-\xi_1)+A_1K(\theta+\xi_2-\xi_1-h))^T W(K(\theta)-DK(\theta-h))d\theta \\
&+ \int_{0}^{\infty} (A_0K(\theta+\xi_2-\xi_1)+A_1K(\theta+\xi_2-\xi_1-h))^T W(K(\theta)-DK(\theta-h))d\theta.
\end{aligned}$$

Cuando $\xi_2 \in [-h,0]$ se tiene $-h-\xi_2 \in [-h,0]$, entonces el hecho que $K(t) = 0_{n\times n}$ para $t < 0$ implica que el primer sumando del lado derecho de J_5 es igual cero y por tanto

$$J_5 = \int_{0}^{\infty} (A_0K(\theta+\xi_2-\xi_1)+A_1K(\theta+\xi_2-\xi_1-h))^T W(K(\theta)-DK(\theta-h))d\theta.$$

De la definición de la matriz $U(\tau)$ en (4.5) se tiene que

$$U(\xi_2-\xi_1) = \int_0^{\infty} (K(t)-DK(t-h))^T W(K(t+\xi_2-\xi_1)-DK(t+\xi_2-\xi_1-h))dt$$

y

$$\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)} = \int_0^{\infty} (K(t)-DK(t-h))^T W \frac{\partial(K(t+\xi_2-\xi_1)-DK(t+\xi_2-\xi_1-h))}{\partial(\xi_2-\xi_1)} dt.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(K(t+\xi_2-\xi_1)-DK(t+\xi_2-\xi_1-h))}{\partial(\xi_2-\xi_1)} &= \frac{d(K(t+\xi_2-\xi_1)-DK(t+\xi_2-\xi_1-h))}{d(t+\xi_2-\xi_1)} \\
&= A_0K(t+\xi_2-\xi_1)+A_1K(t+\xi_2-\xi_1-h).
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T = \int_0^{\infty} (A_0K(t+\xi_2-\xi_1)+A_1K(t+\xi_2-\xi_1-h))^T W(K(t)-DK(t-h))dt.$$

y, por tanto,

$$J_5 = \left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T,$$

lo que implica

$$\bar{v}_{05}(\psi) = -2\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \psi^T(\xi_1)\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1. \tag{4.10}$$

4.1.6. Funcional $\bar{v}_{06}(\psi)$

El cambio de orden de integración da lugar a la siguiente expresión para $\bar{v}_{06}(\psi)$

$$\bar{v}_{06} = \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \psi^T(\xi_1)\times$$
$$\times\left(\int_{-h}^{\infty}(A_0K(t-\xi_1)+A_1K(t-\xi_1-h))^T W(A_0K(t-\xi_2)+A_1K(t-\xi_2-h))dt\right)\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1$$

Observe la integral impropia interna

$$J_6 = \int_{-h}^{\infty}(A_0K(t-\xi_1)+A_1K(t-\xi_1-h))^T W(A_0K(t-\xi_2)+A_1K(t-\xi_2-h))dt.$$

usando el cambio de variable $\theta = t-\xi_1$, J_6 se reescribe como

$$J_6 = \int_{-h-\xi_1}^{\infty}(A_0K(\theta)+A_1K(\theta-h))^T W(A_0K(\theta+\xi_1-\xi_2)+A_1K(\theta+\xi_1-\xi_2-h))d\theta.$$

Como

$$\frac{d(K(\theta)-DK(\theta-h))}{d\theta} = A_0K(\theta)+A_1K(\theta-h)$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))}{\partial\theta} &= \frac{d(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))}{d(\theta+\xi_1-\xi_2)}\\ &= A_0K(\theta+\xi_1-\xi_2)+A_1K(\theta+\xi_1-\xi_2-h).\end{aligned}$$

Entonces, J_6 se reescribe como

$$J_6 = \int_{-h-\xi_1}^{\infty}\left(\frac{d(K(\theta)-DK(\theta-h))}{d\theta}\right)^T W\left(\frac{\partial(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))}{\partial\theta}\right)d\theta.$$

Como $K(\theta)-DK(\theta-h)$ y $K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h)$ son funciones continuas en la variable θ entonces podemos hacer una integración por partes para obtener

$$\begin{aligned}J_6 = &\left.(K(\theta)-DK(\theta-h))^T W\left(\frac{\partial(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))}{\partial\theta}\right)\right|_{-h-\xi_1}^{\infty}\\ &-\int_{-h-\xi_1}^{\infty}(K(\theta)-DK(\theta-h))^T W\left(\frac{\partial^2(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))}{\partial\theta^2}\right)d\theta.\end{aligned}$$

De la estabilidad exponencial del sistema (3.1) y el hecho que $-h-\xi_1\in[-h,0]$ y $K(t)=0_{n\times n}$ para $t<0$ se obtiene

$$J_6 = -\int_{0}^{\infty}(K(\theta)-DK(\theta-h))^T W\left(\frac{\partial^2(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))}{\partial\theta^2}\right)d\theta.$$

Como

$$\frac{\partial^2(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2(K(\theta+\xi_1-\xi_2)-DK(\theta+\xi_1-\xi_2-h))}{\partial(\xi_1-\xi_2)^2}$$

entonces la definición de la matriz $U(\tau)$ en (4.5) lleva a

$$J_6=-\frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2}$$

y por tanto

$$\bar{v}_{06}=-\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2}\psi(\xi_2)d\xi_2d\xi_1. \tag{4.11}$$

4.2. La funcional $v_0(\psi)$

Recolectando las expresiones (4.6)-(4.11) en (4.3) se llega a la siguiente expresión para la funcional $v_0(\psi)$:

$$\begin{aligned}
v_0(\psi) &= (\psi(0)-D\psi(-h))^TU(0)(\psi(0)-D\psi(-h))-\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi)W\psi(\xi)d\xi \\
&- 2(\psi(0)-D\psi(-h))^T\int_{-h}^{0}U(-\xi)A_0\psi(\xi)d\xi \\
&+ \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)A_0^TU(\xi_1-\xi_2)A_0\psi(\xi_2)d\xi_2d\xi_1 \\
&+ 2(\psi(0)-D\psi(-h))^T\int_{-h}^{0}\frac{dU(-\xi)}{d(-\xi)}\psi(\xi)d\xi \\
&- 2\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^TA_0\psi(\xi_2)d\xi_2d\xi_1 \\
&- \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2}\psi(\xi_2)d\xi_2\xi_1.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Observe que todos los términos del lado derecho de la funcional (4.12) dependen de la matriz función $U(\tau)$. Esta característica especial de la funcional $v_0(\psi)$ motiva a definir esta matriz $U(\tau)$ como matriz de Lyapunov para el sistema (3.1).

Definición 4.1

La matriz $U(\tau)$ dada por (4.5) es la matriz de Lyapunov del sistema (3.1) exponencialmente estable asociada a la matriz W.

Es interesante observar que cuando $D = 0_{n\times n}$, es decir, cuando el sistema de tipo neutro (3.1) se convierte en un sistema de tipo retardado

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \tag{4.13}$$

entonces la matriz de Lyapunov (4.5) se reduce a

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t+\tau) dt, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

que es precisamente la matriz de Lyapunov para sistemas de tipo retardado (4.13), véase [12]. Como se mencionó en el capítulo 2 la matriz de Lyapunov de los sistemas de tipo neutro estudiado en [12] tiene la expresión siguiente:

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t) W K(t+\tau) dt, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{4.14}$$

sin embargo en la expresión (4.14) no se ve directamente, cuando $D = 0_{n\times n}$, como se reduce a la matriz de Lyapunov de los sistemas de tipo retardado.

4.3. Matriz de Lyapunov

La matriz de Lyapunov $U(\tau)$ juega un papel importante en la construcción de la funcional $v_0(\psi)$. La expresión (4.5) define a la matriz $U(\tau)$ como una integral impropia que no es conveniente desde un punto de vista práctico. En esta sección, se obtienen algunas propiedades importantes de la matriz $U(\tau)$ que podrían motivar a una nueva definición y proporcionar una forma para calcularla.

4.4. Propiedades de la matriz de Lyapunov

Lema 4.2 Sea el sistema (3.1) exponencialmente estable. Entonces la matriz $U(\tau)$ es continua para $\tau \geq 0$.

Demostración. Definiendo $\bar{K}(t) = K(t) - DK(t-h)$ y tomando en cuenta que $\bar{K}(t)$ es continua para toda $t \geq 0$, entonces se sigue para cualquier $t_0 \geq 0$ y $\rho > 0$ existe $\delta = \delta(\rho, t_0) > 0$ tal que $\|\bar{K}(t) - \bar{K}(t_0)\| < \rho$ cuando $| t - t_0 | < \delta$. Ahora, para cualquier $\tau \geq \tau_0 \geq 0$, se tiene que

$$\|U(\tau) - U(\tau_0)\| \leq \int_0^\infty \left\|\bar{K}^T(t)\right\| \|W\| \|\bar{K}(t+\tau) - \bar{K}(t+\tau_0)\| dt.$$

Observe que si $\tau - \tau_0 = (t+\tau) - (t+\tau_0) < \delta$ entonces $\| \bar{K}(t+\tau) - \bar{K}(t+\tau_0) \| < \rho$. De esto y de la cota superior exponencial del operador $K(t) - DK(t-h)$ dada por el Lema 3.7 se obtiene

$$\|U(\tau) - U(\tau_0)\| \leq \rho \parallel W \parallel \mu \int_0^\infty e^{-\sigma t} dt.$$

Calculando la integral del lado derecho de la desigualdad anterior

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} dt = -\frac{1}{\sigma} e^{-\sigma t} \bigg|_0^\infty = \frac{1}{\sigma}.$$

De este modo se obtiene la desigualdad siguiente:

$$\parallel U(\tau) - U(\tau_0) \parallel \leq \frac{\rho \parallel W \parallel \mu}{\sigma}, \text{ para } \tau - \tau_0 < \delta.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\rho = \rho(\varepsilon) = \frac{\sigma\varepsilon}{\|W\|\mu}$. Entonces, para este $\rho > 0$ existe $\delta = \delta(\rho, t_0) > 0$ tal que $\tau - \tau_0 < \delta$ implica $\|U(\tau) - U(\tau_0)\| < \varepsilon$, lo que muestra la continuidad de $U(\tau)$ para $\tau \in [0, \infty)$. □

Lema 4.3 La matriz $U(\tau)$ dada por (4.5) satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{d\tau}[U(\tau) - U(\tau - h)D] = U(\tau)A_0 + U(\tau - h)A_1 \quad \tau > 0. \tag{4.15}$$

Demostración. Para $\tau > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} & U(\tau) - U(\tau - h)D \\ &= \int_0^\infty (K(t) - DK(t-h))^T W[K(t+\tau) - DK(t+\tau-h) - (K(t+\tau-h) - DK(t+\tau-2h)D)]dt \\ &= \int_0^\infty (K(t) - DK(t-h))^T W M(t+\tau) dt, \end{aligned}$$

donde

$$M(t+\tau) = (K(t+\tau) - K(t+\tau-h)D) - D(K(t+\tau-h) - K(t+\tau-2h)D).$$

Se sigue del Lema 3.7 que la integral impropia converge absolutamente y uniformemente con respecto a $\tau \geq 0$. Para $t+\tau \geq 0$ la función matricial $M(t+\tau)$ es diferenciable debido a que $K(t+\tau) - K(t+\tau-h)D$ y $D(K(t+\tau-h) - K(t+\tau-2h)D)$ son diferenciables para $t+\tau \geq 0$

y por tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(t+\tau)}{\partial \tau} &= \frac{d(K(t+\tau)-K(t+\tau-h)D)}{d(t+\tau)} - D\frac{d(K(t+\tau-h)-K(t+\tau-2h)D)}{d(t+\tau-h)} \\ &= [K(t+\tau)A_0 + K(t+\tau-h)A_1] - D[K(t+\tau-h)A_0 + K(t+\tau-2h)A_1] \\ &= [K(t+\tau)-DK(t+\tau-h)]A_0 + [K(t+\tau-h)-DK(t+\tau-2h)]A_1.\end{aligned}$$

Por argumentos similares la integral

$$\frac{d}{d\tau}[U(\tau)-U(\tau-h)D] = \int_0^\infty (K(t)-DK(t-h))^T W \frac{\partial M(t+\tau)}{\partial \tau} dt$$

converge absolutamente y uniformemente con respecto a $\tau \geq 0$ y por tanto concluimos que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}[U(\tau)-U(\tau-h)D] \\ &= \left(\int_0^\infty (K(t)-DK(t-h))^T W[K(t+\tau)-DK(t+\tau-h)]dt\right)A_0 \\ &\quad + \left(\int_0^\infty (K(t)-DK(t-h))^T W[K(t+\tau-h)-DK(t+\tau-2h)]dt\right)A_1\end{aligned}$$

de donde se obtiene la expresión (4.15). □

Lema 4.4 La matriz $U(\tau)$ satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} - \frac{dU(\tau-h)}{d\tau}D = U(\tau)A_0 + U(\tau-h)A_1 \quad \tau > 0. \tag{4.16}$$

Demostración. Primeramente, observe que

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} = \int_0^\infty (K(t)-DK(t-h))^T W\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(K(t+\tau)-DK(t+\tau-h))\right)dt,$$

y

$$\frac{dU(\tau-h)}{d\tau} = \int_0^\infty (K(t)-DK(t-h))^T W\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(K(t+\tau-h)-DK(t+\tau-2h))\right)dt.$$

Por el Lema 3.7 las integrales impropias convergen absolutamente y uniformemente con respecto a $\tau \geq 0$. Entonces,

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} - \frac{dU(\tau-h)}{d\tau}D = \int_0^\infty (K(t)-DK(t-h))^T N(t+\tau)dt,$$

donde

$$
\begin{aligned}
N(t+\tau) =& \left(\frac{\partial}{\partial \tau}(K(t+\tau)-DK(t+\tau-h))\right)-\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(K(t+\tau-h)-DK(t+\tau-2h))\right)D \\
=&\frac{\partial K(t+\tau)}{\partial \tau}-D\frac{\partial K(t+\tau-h)}{\partial \tau}-\frac{\partial K(t+\tau-h)}{\partial \tau}D+D\frac{\partial K(t+\tau-2h))}{\partial \tau}D \\
=&\left(\frac{\partial K(t+\tau)}{\partial \tau}-\frac{\partial K(t+\tau-h)}{\partial \tau}D\right)-D\left(\frac{\partial K(t+\tau-h)}{\partial \tau}-\frac{\partial K(t+\tau-2h))}{\partial \tau}D\right) \\
=&(K(t+\tau)A_0+K(t+\tau-h)A_1)-D(K(t+\tau-h)A_0+K(t+\tau-2h)A_1) \\
=& [K(t+\tau)-D(K(t+\tau-h)]A_0+[K(t+\tau-h)-DK(t+\tau-2h)]A_1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{dU(\tau)}{d\tau}-\frac{dU(\tau-h)}{d\tau}D =& \left(\int_0^{\infty}(K(t)-DK(t-h))^T W[K(t+\tau)-D(K(t+\tau-h)]dt\right)A_0 \\
&+\left(\int_0^{\infty}(K(t)-DK(t-h))^T W[K(t+\tau-h)-DK(t+\tau-2h)]dt\right)A_1 \\
=& U(\tau)A_0+U(\tau-h)A_1.
\end{aligned}
$$

$\square$

Lema 4.5 La matriz $U(\tau)$ satisface la propiedad simétrica

$$
U(-\tau)=U^T(\tau) \quad \tau\geq 0. \tag{4.17}
$$

Demostración. Para $\tau\geq 0$ se tiene que

$$
U(-\tau)=\int_0^{\infty}(K(t)-DK(t-h))^T W(K(t-\tau)-DK(t-\tau-h))dt.
$$

Sea $\xi=t-\tau$. Entonces,

$$
U(-\tau)=\int_{-\tau}^{\infty}(K(\xi+\tau)-DK(\xi+\tau-h))^T W(K(\xi)-DK(\xi-h))d\xi.
$$

como $K(t)=0_{n\times n}$ para $t<0$ entonces

$$
\begin{aligned}
U(-\tau)=&\int_0^{\infty}(K(\xi+\tau)-DK(\xi+\tau-h))^T W(K(\xi)-DK(\xi-h))d\xi \\
=&\left(\int_0^{\infty}(K(\xi)-DK(\xi-h))^T W(K(\xi+\tau)-DK(\xi+\tau-h))d\xi\right)^T \\
=&U^T(\tau).
\end{aligned}
$$

$\square$

Corolario 4.1 La matriz $U(0)$ es simétrica.

Observe que en $\tau = 0$ la propiedad (4.17) se reduce a $U(0) = U^T(0)$.

Corolario 4.2 La matriz $U(\tau)$ es continua para $\tau \leq 0$. La derivada

$$\frac{d}{d\tau}[U(\tau) - U(\tau - h)D] = \frac{dU(\tau)}{d\tau} - \frac{dU(\tau - h)}{d\tau}D \tag{4.18}$$

es continua para $\tau \geq 0$.

Observe que del Lema 4.2 y de la propiedad (4.17) se sigue que la matriz $U(\tau)$ es continua para $\tau \leq 0$. Observe también que el lado derecho de la propiedad dinámica es continua debido a que $U(\tau)$ es continua para $\tau \geq 0$ y como $U(\tau)$ también es continua para $\tau \leq 0$ entonces $U(\tau - h)$ es continua y por tanto igualdad (4.18) es continua.

Lema 4.6 La matriz $U(\tau)$ satisface la ecuación:

$$\frac{dU(\tau - h)}{d\tau} = D^T \frac{dU(\tau)}{d\tau} - A_0^T U(\tau - h) - A_1^T U(\tau), \quad \tau \in [0, h]. \tag{4.19}$$

Demostración. Del Lema 4.5 se tiene que $U(\tau - h) = (U(h - \tau))^T$. Entonces

$$\frac{dU(\tau - h)}{d\tau} = \left(\frac{dU(h - \tau)}{d\tau}\right)^T = -\left(\frac{dU(h - \tau)}{d(h - \tau)}\right)^T.$$

Ahora, del Lema 4.4 se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dU(h - \tau)}{d(h - \tau)} &= \frac{dU(-\tau)}{d(-\tau)}D + U(h - \tau)A_0 + U(-\tau)A_1 \\ &= -\left(\frac{dU(\tau)}{d(\tau)}\right)^T D + U(h - \tau)A_0 + U(-\tau)A_1 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{dU(\tau - h)}{d\tau} &= -\left(-\left(\frac{dU(\tau)}{d(\tau)}\right)^T D + U(h - \tau)A_0 + U(-\tau)A_1\right)^T \\ &= D^T \frac{dU(\tau)}{d(\tau)} - A_0^T U^T(h - \tau) - A_1^T U^T(-\tau). \end{aligned}$$

Usando el Lema 4.5 se obtiene la ecuación (4.19). $\square$

Es importante recordar que en las ecuaciones (4.15), (4.16), (4.19) en $\tau = 0$ es la derivada por la derecha. La primera derivada de la matriz $U(\tau)$ tiene una discontinuidad de tipo salto en $\tau = 0$, dicha discontinuidad es precisamente la propiedad algebraica. El siguiente resultado caracteriza la discontinuidad de tipo salto de la derivada de la matriz $U(\tau)$ en $\tau = 0$.

Lema 4.7 La primera derivada de la matriz $U(\tau)$ presenta una discontinuidad de tipo salto dada por

$$\Delta U'(0) = -W, \tag{4.20}$$

donde

$$\Delta U'(0) = U'(+0) - U'(-0) = \lim_{\tau \to +0} \frac{dU(\tau)}{d\tau} - \lim_{\tau \to -0} \frac{dU(\tau)}{d\tau}$$

Demostración. Para probar esta afirmación, considere la siguiente función:

$$R(t) = (K(t) - DK(t-h))^T W (K(t) - DK(t-h)).$$

La derivada de $R(t)$ es

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} = &\frac{(K(t) - DK(t-h))^T}{dt} W (K(t) - DK(t-h)) \\ &+ (K(t) - DK(t-h))^T W \frac{(K(t) - DK(t-h))}{dt}. \end{aligned}$$

Integrando esta igualdad de 0 a ∞, por un lado, la estabilidad exponencial implica que

$$\int_0^\infty \frac{dR(t)}{dt} = -(K(0) - DK(-h))^T W (K(0) - DK(-h)) = -W. \tag{4.21}$$

por otro lado, observe que

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{dU(\tau)}{d\tau} = \int_0^\infty (K(t) - DK(t-h))^T W \frac{(K(t) - DK(t-h))}{dt} dt$$

se mantiene, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dR(t)}{dt} &= \int_0^\infty \frac{(K(t) - DK(t-h))^T}{dt} W (K(t) - DK(t-h)) dt \\ &\quad + \int_0^\infty (K(t) - DK(t-h))^T W \frac{(K(t) - DK(t-h))}{dt} dt \\ &= \left(\lim_{\tau \to +0} \frac{dU(\tau)}{d\tau} \right)^T + \lim_{\tau \to +0} \frac{dU(\tau)}{d\tau}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

De (4.21), (4.22) y del hecho que

$$\left(\lim_{\tau\to+0}\frac{dU(\tau)}{d\tau}\right)^T = -\lim_{\tau\to-0}\frac{dU(\tau)}{d\tau}$$

se sigue que

$$-W = \lim_{\tau\to+0}\frac{dU(\tau)}{d\tau} - \lim_{\tau\to-0}\frac{dU(\tau)}{d\tau}$$

esto prueba la afirmación. □

4.5. Nueva definición de la matriz de Lyapunov

La definición de la matriz de Lyapunov por medio de la integral impropia (4.5) tiene limitaciones de ser válida sólo para sistemas de tipo neutro exponencialmente estables y no ser adecuada para el desarrollo de procedimientos computacionales prácticos. Por lo tanto, siguiendo las ideas en [12] resulta conveniente presentar una nueva definición para la matriz Lyapunov con el fin de superar las limitaciones mencionadas anteriormente. Para ello, primero abordamos la derivada de la funcional $v_0(\psi)$ dada por (4.12).

Considere el término siguiente:

$$J_1 = -\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2}\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1.$$

Observe que

$$\frac{\partial^2 U(\xi_1-\xi_2)}{\partial \xi_1^2} = \frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2}.$$

Entonces tomando en cuenta la discontinuidad de tipo salto de la primera derivada de $U(\tau)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{0}\frac{\partial^2 U(\xi_1-\xi_2)}{\partial \xi_1^2}\psi(\xi_2)d\xi_2 = &\int_{-h}^{\xi_1-0}\frac{\partial^2 U(\xi_1-\xi_2)}{\partial \xi_1^2}\psi(\xi_2)d\xi_2\\ &+\int_{\xi_1-0}^{\xi_1+0}\frac{\partial^2 U(\xi_1-\xi_2)}{\partial \xi_1^2}\psi(\xi_2)d\xi_2\\ &+\int_{\xi_1+0}^{0}\frac{\partial^2 U(\xi_1-\xi_2)}{\partial \xi_1^2}\psi(\xi_2)d\xi_2.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{\partial^2 U(\xi_1-\xi_2)}{\partial \xi_1^2} = \frac{\partial^2 U(\xi_1-\xi_2)}{\partial \xi_2^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)}\right)$$

Se sigue que

$$\int_{\xi_1-0}^{\xi_1+0}\frac{\partial^2 U(\xi_1-\xi_2)}{\partial\xi_1^2}\psi(\xi_2)d\xi_2=-\int_{\xi_1-0}^{\xi_1+0}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)}\right)\psi(\xi_2)d\xi_2$$
$$=-\int_{\xi_1-0}^{\xi_1+0}d_{\xi_2}\left(\frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)}\right)\psi(\xi_2)d\xi_2=-\left(\left.\frac{dU(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=-0}-\left.\frac{dU(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=+0}\right)\psi(\xi_1)$$
$$=-\left(U'(-0)-U'(+0)\right)\psi(\xi_1)=\Delta U'(0)\psi(\xi_1).$$

Con el análisis anterior, el término J_1 se puede reescribir como:

$$J_1=-\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{\xi_1-0}\psi^T(\xi_1)\frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2}\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1$$
$$-\int_{-h}^{0}\int_{\xi_1+0}^{0}\psi^T(\xi_1)\frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2}\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1-\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi)\Delta U'(0)\psi(\xi)d\xi.$$

Por lo tanto, la funcional $v_0(\psi)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned}
v_0(\psi)=&\left(\psi(0)-D\psi(-h)\right)^T U(0)\left(\psi(0)-D\psi(-h)\right)\\
&-2\left(\psi(0)-D\psi(-h)\right)^T\int_{-h}^{0}U(-\xi)A_0\psi(\xi)d\xi\\
&+\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)A_0^T U(\xi_1-\xi_2)A_0\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\\
&+2\left(\psi(0)-D\psi(-h)\right)^T\int_{-h}^{0}\frac{dU(-\xi)}{d(-\xi)}\psi(\xi)d\xi\\
&-2\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\\
&-\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{\xi_1-0}\psi^T(\xi_1)\frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2}\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\\
&-\int_{-h}^{0}\int_{\xi_1+0}^{0}\psi^T(\xi_1)\frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2}\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1.
\end{aligned}\tag{4.23}$$

Las propiedades (4.15), (4.17) y (4.20) son las únicas necesarias para verificar que la derivada de la funcional definida por (4.23) coincide con $-w(x_t(\psi))$ dada por (4.1) como se muestra a continuación.

Teorema 4.1

Para una matriz simétrica W, sea la matriz de Lyapunov definida por (4.5). Entonces, la derivada de la funcional $v_0(\psi)$ dada por (4.23), a lo largo de las soluciones del sistema (3.1), satisface la ecuación (4.1).

Demostración. Dada $\psi \in PC$, sea $x(t) = x(t,\psi)$ la solución de (3.1) entonces la funcional se puede escribir a lo largo de las soluciones de (3.1) como

$$\begin{aligned} v_0(x_t) &= \underbrace{(x(t)-Dx(t-h))^T U(0)(x(t)-Dx(t-h))}_{R_1(t)} \\ &- \underbrace{2(x(t)-Dx(t-h))^T \int_{-h}^{0} U(-\xi)A_0 x(t+\xi)d\xi}_{R_2(t)} \\ &+ \underbrace{\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} x^T(t+\xi_1)A_0^T U(\xi_1-\xi_2)A_0 x(t+\xi_2)d\xi_2 d\xi_1}_{R_3(t)} \\ &+ \underbrace{2(x(t)-Dx(t-h))^T \int_{-h}^{0} \frac{dU(-\xi)}{d(-\xi)} x(t+\xi)d\xi}_{R_4(t)} \\ &- \underbrace{2\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} x^T(t+\xi_1)\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0 x(t+\xi_2)d\xi_2 d\xi_1}_{R_5(t)} \\ &- \underbrace{\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{\xi_1-0} x^T(t+\xi_1)\frac{d^2(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} x(t+\xi_2)d\xi_2 \xi_1 .}_{R_6(t)} \\ &- \underbrace{\int_{-h}^{0}\int_{\xi_1+0}^{0} x^T(t+\xi_1)\frac{d^2(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} x(t+\xi_2)d\xi_2 \xi_1 .}_{R_7(t)} \end{aligned} \tag{4.24}$$

A continuación calcularemos las derivadas de cada uno de los términos $R_j(t),\ j = 1,...,7$ de la funcional (4.24)

La derivada del término $R_1(t)$ es

$$\begin{aligned} \frac{dR_1(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left((x(t)-Dx(t-h))^T U(0)(x(t)-Dx(t-h))\right) \\ &= \frac{d}{dt}(x(t)-Dx(t-h))^T U(0)(x(t)-Dx(t-h)) \\ &+ (x(t)-Dx(t-h))^T U(0)\frac{d}{dt}(x(t)-Dx(t-h)) \\ &= 2(x(t)-Dx(t-h))^T U(0)(A_0 x(t)+A_1 x(t-h)). \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable $\theta = t+\xi$, el término $R_2(t)$ se puede escribir como

$$R_2(t) = -2(x(t)-Dx(t-h))^T \int_{t-h}^{t} U(t-\theta)A_0x(\theta)d\theta,$$

Así, la derivada de $R_2(t)$ es

$$\begin{aligned}\frac{dR_2(t)}{dt} &= -2\frac{d}{dt}(x(t)-Dx(t-h))^T \int_{t-h}^{t} U(t-\theta)A_0x(\theta)d\theta \\ &\quad -2(x(t)-Dx(t-h))^T \frac{d}{dt}\left(\int_{t-h}^{t} U(t-\theta)A_0x(\theta)d\theta\right) \\ &= -2(A_0x(t)+A_1x(t-h))^T \int_{t-h}^{t} U(t-\theta)A_0x(\theta)d\theta \\ &\quad -2(x(t)-Dx(t-h))^T \left(U(0)A_0x(t)-U(h)A_0x(t-h)+\int_{t-h}^{t}\frac{\partial U(t-\theta)}{\partial t}A_0x(\theta)d\theta\right).\end{aligned}$$

Para el término $R_3(t)$, considere el cambio de variable de integración $\theta_1 = t+\xi_1$

$$R_3(t) = \int_{t-h}^{t}\int_{-h}^{0} x^T(\theta_1)A_0^TU(\theta_1-t-\xi_2)A_0x(t+\xi_2)d\xi_2d\theta_1.$$

Ahora usando nuevamente un cambio de variable de integración $\theta_2 = t+\xi_2$

$$R_3(t) = \int_{t-h}^{t}\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)A_0^TU(\theta_1-\theta_2)A_0x(\theta_2)d\theta_2d\theta_1,$$

La derivada de $R_3(t)$ es

$$\begin{aligned}\frac{dR_3(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\int_{t-h}^{t}\left(\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)A_0^TU(\theta_1-\theta_2)A_0x(\theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1\right) \\ &= \int_{t-h}^{t}\left(x^T(t)A_0^TU(t-\theta_2)A_0x(\theta_2)\right)d\theta_2 - \int_{t-h}^{t}\left(x^T(t-h)A_0^TU(t-h-\theta_2)A_0x(\theta_2)\right)d\theta_2 \\ &\quad + \int_{t-h}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)A_0^TU(\theta_1-\theta_2)A_0x(\theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1 \\ &= x^T(t)\int_{t-h}^{t} A_0^TU(t-\theta_2)A_0x(\theta_2)d\theta_2 - x^T(t-h)\int_{t-h}^{t} A_0^TU(t-h-\theta_2)A_0x(\theta_2)d\theta_2 \\ &\quad + \int_{t-h}^{t}\left(x^T(\theta_1)A_0^TU(\theta_1-t)A_0x(t) - x^T(\theta_1)A_0^TU(\theta_1-t+h)A_0x(t-h)\right. \\ &\quad \left. + \int_{t-h}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(x^T(\theta_1)A_0^TU(\theta_1-\theta_2)A_0x(\theta_2)d\theta_2\right)\right)d\theta_1 \\ &= x^T(t)\int_{t-h}^{t} A_0^TU(t-\theta_2)A_0x(\theta_2)d\theta_2 - x^T(t-h)\int_{t-h}^{t} A_0^TU(t-h-\theta_2)A_0x(\theta_2)d\theta_2 \\ &\quad + \left(\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)A_0^TU(\theta_1-t)A_0d\theta_1\right)x(t) - \left(\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)A_0^TU(\theta_1-t+h)A_0d\theta_1\right)x(t-h).\end{aligned}$$

Observe que

$$\left(\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)A_0^TU(\theta_1-t)A_0d\theta_1\right)x(t) = x^T(t)\int_{t-h}^{t} A_0^TU(t-\theta_1)A_0x(\theta_1)d\theta_1,$$

y

$$\left(\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)A_0^T U(\theta_1-t+h)A_0 d\theta_1\right)x(t-h) = x^T(t-h)\int_{t-h}^{t} A_0^T U(t-h-\theta_1)A_0 x(\theta_1)d\theta_1.$$

Así se obtiene

$$\frac{dR_3(t)}{dt} = 2x^T(t)\int_{t-h}^{t} A_0^T U(t-\theta)A_0 x(\theta)d\theta - 2x^T(t-h)\int_{t-h}^{t} A_0^T U(t-h-\theta)A_0 x(\theta)d\theta.$$

Similarmente a los términos anteriores el término $R_4(t)$, aplicando el cambio de variable de integración $\theta = t+\xi$, es reescrito como

$$R_4(t) = 2(x(t)-Dx(t-h))^T \int_{t-h}^{t} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta,$$

y su derivada es la siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{dR_4(t)}{dt} &= 2\frac{d}{dt}\left((x(t)-Dx(t-h))^T \int_{t-h}^{t} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta\right) \\
&= 2\frac{d}{dt}(x(t)-Dx(t-h))^T \int_{t-h}^{t} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta \\
&+ 2(x(t)-Dx(t-h))^T \frac{d}{dt}\left(\int_{t-h}^{t} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta\right).
\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t-h}^{t} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta\right) = \frac{d}{dt}\left(\int_{t-0-h}^{t-0} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta\right).$$

Si $\tau = t-\theta$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\int_{t-0-h}^{t-0} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta\right) = &\left.\frac{dU(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=+0} x(t) - \left.\frac{dU(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=h+0} x(t-h) \\
&+ \int_{t-0-h}^{t-0} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}\right) x(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Definiendo $\left.\frac{dU(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=+0} \triangleq U'(+0)$ y $\left.\frac{dU(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=h+0} \triangleq U'(h+0)$ y tomando en cuenta que $x(t)$ es solución del sistema (3.1) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dR_4(t)}{dt} &= 2(A_0x(t)+A_1x(t-h))^T \int_{t-h}^{t} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta \\
&+ 2[x(t)-Dx(t-h)]^T \Bigg(U'(+0)x(t) - U'(h+0)x(t-h) \\
&+ \int_{t-h}^{t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}\right) x(\theta)d\theta\Bigg).
\end{aligned}$$

Para el término $R_5(t)$. Considere el cambio de variable $\theta_1 = t + \xi_1$

$$R_5(t) = -2\int_{t-h}^{t}\int_{-h}^{0} x^T(\theta_1)\left(\frac{dU(\xi_2 + t - \theta_1)}{d(\xi_2 + t - \theta_1)}\right)^T A_0 x(t+\xi_2)d\xi_2 d\theta_1.$$

Ahora haciendo uso de un segundo cambio de variable $\theta_2 = t + \xi_2$, entonces

$$R_5(t) = -2\int_{t-h}^{t}\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)\left(\frac{dU(\theta_2 - \theta_1)}{d(\theta_2 - \theta_1)}\right)^T A_0 x(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1$$

y su derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{dR_5(t)}{dt} &= -2\frac{d}{dt}\left(\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)\left(\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta_2 - \theta_1)}{d(\theta_2 - \theta_1)}\right)^T A_0 x(\theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1\right)\\
&= -2\left(x^T(t)\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta_2 - t)}{d(\theta_2 - t)}\right)^T A_0 x(\theta_2)d\theta_2\right.\\
&\left. - x^T(t-h)\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta_2 - t + h)}{d(\theta_2 - t + h)}\right)^T A_0 x(\theta_2)d\theta_2\right)\\
&- 2\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta_2 - \theta_1)}{d(\theta_2 - \theta_1)}\right)^T A_0 x(\theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1\\
&= -2\left(x^T(t)\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta_2 - t)}{d(\theta_2 - t)}\right)^T A_0 x(\theta_2)d\theta_2\right.\\
&\left. - x^T(t-h)\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta_2 - t + h)}{d(\theta_2 - t + h)}\right)^T A_0 x(\theta_2)d\theta_2\right)\\
&- 2\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)\left(\left(\frac{dU(t - \theta_1)}{d(t - \theta_1)}\right)^T A_0 x(t) - \left(\frac{dU(t - h - \theta_1)}{d(t - h - \theta_1)}\right)^T A_0 x(t-h)\right)d\theta_1\\
&- 2\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)\left(\int_{t-h}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dU(\theta_2 - \theta_1)}{d(\theta_2 - \theta_1)}\right)^T A_0 x(\theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1
\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{dR_5(t)}{dt} &= -2x^T(t)\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta_2 - t)}{d(\theta_2 - t)}\right)^T A_0 x(\theta_2)d\theta_2\\
&+ 2x^T(t-h)\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta_2 - t + h)}{d(\theta_2 - t + h)}\right)^T A_0 x(\theta_2)d\theta_2\\
&- 2\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)\left(\frac{dU(t - \theta_1)}{d(t - \theta_1)}\right)^T A_0 x(t)d\theta_1\\
&+ 2\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)\left(\frac{dU(t - h - \theta_1)}{d(t - h - \theta_1)}\right)^T A_0 x(t-h)d\theta_1
\end{aligned}$$

La derivada del término $R_6(t)$, haciendo los cambios de variable de integración $\theta_1 = t + \xi_1$ y $\theta_2 = t + \xi_2$, es

$$\begin{aligned}
\frac{dR_6(t)}{dt} &= -\frac{d}{dt}\left(\int_{t-h}^{t}\int_{t-h}^{\theta_1-0} x^T(\theta_1)\frac{d^2U(\theta_1-\theta_2)}{d(\theta_1-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1\right) \\
&= -\int_{t-h}^{t-0} x^T(t)\frac{d^2U(t-\theta_2)}{d(t-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2 + \int_{t-h}^{t-h-0} x^T(t-h)\frac{d^2U(t-h-\theta_2)}{d(t-h-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2 \\
&\quad -\int_{t-h}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t-h}^{\theta_1-0} x^T(\theta_1)\frac{d^2U(\theta_1-\theta_2)}{d(\theta_1-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t-h}^{\theta_1-0} x^T(\theta_1)\frac{d^2U(\theta_1-\theta_2)}{d(\theta_1-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2\right) = -x^T(\theta_1)\frac{d^2U(\theta_1-t+h)}{d(\theta_1-t+h)^2}x(t-h),$$

por tanto

$$\frac{dR_6(t)}{dt} = -\int_{t-h}^{t} x^T(t)\frac{d^2U(t-\theta_2)}{d(t-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2 + \int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)\frac{d^2U(\theta_1-t+h)}{d(\theta_1-t+h)^2}x(t-h)d\theta_1.$$

Similarmente al análisis anterior la derivada del término $R_7(t)$, haciendo los cambios de variable de integración $\theta_1 = t + \xi_1$ y $\theta_2 = t + \xi_2$, es

$$\begin{aligned}
\frac{dR_7(t)}{dt} &= -\frac{d}{dt}\left(\int_{t-h}^{t}\int_{\theta_1+0}^{t} x^T(\theta_1)\frac{d^2U(\theta_1-\theta_2)}{d(\theta_1-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1\right) \\
&= -\int_{t+0}^{t} x^T(t)\frac{d^2U(t-\theta_2)}{d(t-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2 + \int_{t-h+0}^{t} x^T(t-h)\frac{d^2U(t-h-\theta_2)}{d(t-h-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2 \\
&\quad -\int_{t-h}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\theta_1+0}^{t} x^T(\theta_1)\frac{d^2U(\theta_1-\theta_2)}{d(\theta_1-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1
\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\theta_1+0}^{t} x^T(\theta_1)\frac{d^2U(\theta_1-\theta_2)}{d(\theta_1-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2\right) = x^T(\theta_1)\frac{d^2U(\theta_1-t)}{d(\theta_1-t)^2}x(t).$$

Luego entonces

$$\frac{dR_7(t)}{dt} = \int_{t-h}^{t} x^T(t-h)\frac{d^2U(t-h-\theta_2)}{d(t-h-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2 - \int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1)\frac{d^2U(\theta_1-t)}{d(\theta_1-t)^2}x(t)d\theta_1$$

Recolectando las derivadas de los términos $R_j(t)$, $j = 0, ..., 7$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{dv_0(x_t)}{dt} &= 2(x(t) - Dx(t-h))^T U(0)(A_0x(t) + A_1x(t-h)) \\
&- 2(A_0x(t) + A_1x(t-h))^T \int_{t-h}^{t} U(t-\theta)A_0x(\theta)d\theta \\
&- 2(x(t) - Dx(t-h))^T \left(U(0)A_0x(t) - U(h)A_0x(t-h) + \int_{t-h}^{t} \frac{\partial U(t-\theta)}{\partial t} A_0x(\theta)d\theta \right) \\
&+ 2x^T(t) \int_{t-h}^{t} A_0^T U(t-\theta)A_0x(\theta)d\theta - 2x^T(t-h) \int_{t-h}^{t} A_0^T U(t-h-\theta)A_0x(\theta)d\theta \\
&+ 2(A_0x(t) + A_1x(t-h))^T \int_{t-h}^{t} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta \\
&+ 2(x(t) - Dx(t-h))^T \left(U'(+0)x(t) - U'(h+0)x(t-h) + \int_{t-h}^{t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} \right) x(\theta)d\theta \right) \\
&- 2x^T(t) \int_{t-h}^{t} \left(\frac{dU(\theta_2 - t)}{d(\theta_2 - t)} \right)^T A_0x(\theta_2)d\theta_2 + 2x^T(t-h) \int_{t-h}^{t} \left(\frac{dU(\theta_2 - t + h)}{d(\theta_2 - t + h)} \right)^T A_0x(\theta_2)d\theta_2 \\
&- 2\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1) \left(\frac{dU(t-\theta_1)}{d(t-\theta_1)} \right)^T A_0x(t)d\theta_1 + 2\int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1) \left(\frac{dU(t-h-\theta_1)}{d(t-h-\theta_1)} \right)^T A_0x(t-h)d\theta_1 \\
&- \int_{t-h}^{t} x^T(t) \frac{d^2U(t-\theta_2)}{d(t-\theta_2)^2} x(\theta_2)d\theta_2 + \int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1) \frac{d^2U(\theta_1 - t + h)}{d(\theta_1 - t + h)^2} x(t-h)d\theta_1 \\
&+ \int_{t-h}^{t} x^T(t-h) \frac{d^2U(t-h-\theta_2)}{d(t-h-\theta_2)^2} x(\theta_2)d\theta_2 - \int_{t-h}^{t} x^T(\theta_1) \frac{d^2U(\theta_1 - t)}{d(\theta_1 - t)^2} x(t)d\theta_1.
\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{dv_0(x_t)}{dt} &= 2(x(t) - Dx(t-h))^T U(0)(A_0x(t) + A_1x(t-h)) \\
&- 2(x(t) - Dx(t-h))^T U(0)A_0x(t) + 2(x(t) - Dx(t-h))^T U(h)A_0x(t-h) \\
&+ 2(x(t) - Dx(t-h))^T U'(+0)x(t) - 2(x(t) - Dx(t-h))^T U'(h+0)x(t-h) \\
&\underbrace{-2x^T(t)A_0^T \int_{t-h}^{t} U(t-\theta)A_0x(\theta)d\theta}_{a} \underbrace{- 2x^T(t-h)A_1^T \int_{t-h}^{t} U(t-\theta)A_0x(\theta)d\theta}_{a_1} \\
&\underbrace{-2x^T(t) \int_{t-h}^{t} \frac{\partial U(t-\theta)}{\partial t} A_0x(\theta)d\theta}_{b} \underbrace{+ 2x^T(t-h)D^T \int_{t-h}^{t} \frac{\partial U(t-\theta)}{\partial t} A_0x(\theta)d\theta}_{a_1} \\
&\underbrace{+2x^T(t) \int_{t-h}^{t} A_0^T U(t-\theta)A_0x(\theta)d\theta}_{a} \underbrace{- 2x^T(t-h) \int_{t-h}^{t} A_0^T U(t-h-\theta)A_0x(\theta)d\theta}_{a_1} \\
&\underbrace{+2x^T(t)A_0^T \int_{t-h}^{t} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta}_{c} \underbrace{+ 2x^T(t-h)A_1^T \int_{t-h}^{t} \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} x(\theta)d\theta}_{b_1}
\end{aligned}$$

$$\underbrace{+2x^T(t)\int_{t-h}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}\right)x(\theta)d\theta}_{d} \underbrace{-2x^T(t-h)D^T\int_{t-h}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}\right)x(\theta)d\theta}_{b_1}$$

$$\underbrace{-2x^T(t)\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta_2-t)}{d(\theta_2-t)}\right)^T A_0x(\theta_2)d\theta_2}_{b} \underbrace{+2x^T(t-h)\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta_2-t+h)}{d(\theta_2-t+h)}\right)^T A_0x(\theta_2)d\theta_2}_{a_1}$$

$$\underbrace{-2\int_{t-h}^{t}x^T(\theta_1)\left(\frac{dU(t-\theta_1)}{d(t-\theta_1)}\right)^T A_0x(t)d\theta_1}_{c} \underbrace{+2\int_{t-h}^{t}x^T(\theta_1)\left(\frac{dU(t-h-\theta_1)}{d(t-h-\theta_1)}\right)^T A_0x(t-h)d\theta_1}_{b_1}$$

$$\underbrace{-2\int_{t-h}^{t}x^T(t)\frac{d^2U(t-\theta_2)}{d(t-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2}_{d} \underbrace{+2\int_{t-h}^{t}x^T(t-h)\frac{d^2U(t-h-\theta_2)}{d(t-h-\theta_2)^2}x(\theta_2)d\theta_2}_{b_1}.$$

Observe que los términos (a) son iguales y de signos contrarios en consecuencia la suma es cero.

Observe lo siguiente

$$\frac{\partial U(t-\theta)}{\partial t} = \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} = -\left(\frac{dU(\theta-t)}{d(\theta-t)}\right)^T.$$

Así

$$\begin{aligned} -2x^T(t)\int_{t-h}^{t}\frac{\partial U(t-\theta)}{\partial t}A_0x(\theta)d\theta &= -2x^T(t)\int_{t-h}^{t}\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}A_0x(\theta)d\theta \\ &= 2x^T(t)\int_{t-h}^{t}\left(\frac{dU(\theta-t)}{d(\theta-t)}\right)^T A_0x(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Usando la igualdad anterior, se sigue que la suma de los términos (b) es igual cero.

Como el término

$$2x^T(t)A_0^T\int_{t-h}^{t}\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}x(\theta)d\theta = 2\int_{t-h}^{t}x^T(\theta)\left(\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}\right)^T A_0x(t)d\theta$$

entonces la suma de los términos (c) es igual cero.

Ahora observe que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}\right) = \frac{d}{d(t-\theta)}\left(\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}\right) = \frac{d^2U(t-\theta)}{d(t-\theta)^2}.$$

Usando la igualdad anterior

$$2x^T(t)\int_{t-h}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}\right)x(\theta)d\theta = 2x^T(t)\int_{t-h}^{t}\frac{d^2U(t-\theta)}{d(t-\theta)^2}x(\theta)d\theta$$

lo que implica que la suma de los términos (d) también es cero.

Agrupando los términos (a_1), tomando en cuenta que $\frac{\partial U(t-\theta)}{\partial t} = \frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}$ y usando la propiedad de simetría, el integrando es

$$-A_1^T U(t-\theta)A_0 + D^T\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)}A_0 - A_0^T U(t-\theta-h)A_0 - \frac{dU(t-\theta-h)}{d(t-\theta)}A_0.$$

Ahora usando la siguiente propiedad (4.19) de la matriz de Lyapunov, el integrando es igual cero y por tanto los términos agrupados (a_1) es cero.

Observe que al agrupar los términos (b_1) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
&-2x^T(t-h)\int_{t-h}^{t}\frac{d}{d(t-\theta)}\left(A_1^T U(t-\theta) - D^T\frac{dU(t-\theta)}{d(t-\theta)} + \frac{dU(t-\theta-h)}{d(t-\theta)}\right)d\theta\\
&+2\int_{t-h}^{t}x^T(\theta_1)\left(\frac{dU(t-h-\theta_1)}{d(t-h-\theta_1)}\right)^T A_0x(t-h)d\theta_1,
\end{aligned}$$

y usando la propiedad (4.19) se tiene que

$$\begin{aligned}
&-2x^T(t-h)A_0^T\int_{t-h}^{t}\frac{dU(t-h-\theta_1)}{d(t-h-\theta_1)}x(\theta_1)d\theta_1\\
&+2\int_{t-h}^{t}x^T(\theta_1)\left(\frac{dU(t-h-\theta_1)}{d(t-h-\theta_1)}\right)^T A_0x(t-h)d\theta_1 = 0,
\end{aligned}$$

con el análisis anterior la funcional $v_0(x_t)$ se reduce a

$$\begin{aligned}
\frac{dv_0(t)}{dt} &= 2(x(t)-Dx(t-h))^T U(0)(A_0x(t)+A_1x(t-h))\\
&-2(x(t)-Dx(t-h))^T U(0)A_0x(t) + 2(x(t)-Dx(t-h))^T U(h)A_0x(t-h)\\
&+2(x(t)-Dx(t-h))^T U'(+0)x(t) - 2(x(t)-Dx(t-h))^T U'(h+0)x(t-h)
\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{dv_0(t)}{dt} &= 2(x(t)-Dx(t-h))^T U(0)A_0x(t) + 2(x(t)-Dx(t-h))^T U(0)A_1x(t-h)\\
&-2(x(t)-Dx(t-h))^T U(0)A_0x(t) + 2(x(t)-Dx(t-h))^T U(h)A_0x(t-h)\\
&+2(x(t)-Dx(t-h))^T U'(+0)x(t) - 2(x(t)-Dx(t-h))^T U'(h+0)x(t-h).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Reduciendo términos semejantes en (4.25), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dv_0(t)}{dt} &= 2(x(t)-Dx(t-h))^T U'(+0)x(t)\\ &\quad + 2(x(t)-Dx(t-h))^T[U(0)A_1+U(h)A_0-U'(h+0)]x(t-h),\end{aligned}$$

usando la propiedad dinámica

$$\begin{aligned}U'(h+0) &= \lim_{\tau\longrightarrow h+0}\frac{dU(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau\longrightarrow h+0}\left(\frac{U(\tau-h)}{d\tau}D+U(\tau)A_0+U(\tau-h)A_1\right)\\ &= U'(+0)D+U(h)A_0+U(0)A_1.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\frac{dv_0(t)}{dt} &= 2(x(t)-Dx(t-h))^T U'(+0)x(t) + 2(x(t)-Dx(t-h))^T[-U(+0)D]x(t-h)\\ &= 2(x(t)-Dx(t-h))^T U'(+0)(x(t)-Dx(t-h))\\ &= (x(t)-Dx(t-h))^T U'(+0)(x(t)-Dx(t-h))\\ &+ (x(t)-Dx(t-h))^T U'(+0)(x(t)-Dx(t-h)).\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}&((x(t)-Dx(t-h))^T U'(+0)(x(t)-Dx(t-h)))^T\\ &= (x(t)-Dx(t-h))^T (U'(+0))^T (x(t)-Dx(t-h))\\ &= (x(t)-Dx(t-h))^T (-U'(-0))(x(t)-Dx(t-h)),\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\frac{dv_0(t)}{dt} &= (x(t)-Dx(t-h))^T[U'(+0)-U'(-0)](x(t)-Dx(t-h))\\ &= (x(t)-Dx(t-h))^T \Delta U(0)(x(t)-Dx(t-h)).\end{aligned}$$

Por la propiedad algebraica $\Delta U(0) = -W$

$$\frac{dv_0(t)}{dt} = -(x(t)-Dx(t-h))^T W(x(t)-Dx(t-h)),$$

lo que concluye la demostración. □

El siguiente resultado muestra una propiedad de la matriz $U(\tau)$ que servirá para motivar una nueva definición de la matriz de Lyapunov.

Lema 4.8 La matriz $U(\tau)$ satisface la siguiente ecuación algebraica:

$$\begin{aligned} & \Delta U^{'}(0) - D^T \Delta U^{'}(0) D \\ = & \left[U(0)A_0 + U(-h)A_1 - A_0^T U(-h) D - A_1^T U(0) D\right] \\ & + \left[U(0)A_0 + U(-h)A_1 - A_0^T U(-h) D - A_1^T U(0) D\right]^T . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Demostración. Sustituyendo $\frac{dU(\tau-h)}{d\tau}$ en la ecuación (4.16), por la expresión (4.19) se obtiene

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} - D^T \frac{dU(\tau)}{d\tau} D = U(\tau)A_0 + U(\tau-h)A_1 - A_0^T U(\tau-h) D - A_1^T U(\tau) D.$$

De esta ecuación se sigue que

$$U^{'}(+0) - D^T U^{'}(+0) D = U(0)A_0 + U(-h)A_1 - A_0^T U(-h) D - A_1^T U(0) D. \tag{4.27}$$

Como $\frac{dU(\tau)}{d\tau} = -\left(\frac{dU(\tau)}{d(-\tau)}\right)^T$, entonces $U^{'}(+0) = -\left(U^{'}(-0)\right)^T$ y

$$U^{'}(+0) - D^T U^{'}(+0) D = -\left(U^{'}(-0) - D^T U^{'}(-0) D\right)^T . \tag{4.28}$$

Por lo tanto, de (4.27) y (4.28) la siguiente ecuación se mantiene:

$$U^{'}(-0) - D^T U^{'}(-0) D = -\left[U(0)A_0 + U(-h)A_1 - A_0^T U(-h) D - A_1^T U(0) D\right]^T . \tag{4.29}$$

De (4.27) y (4.29) se llega a la ecuación (4.26) y esto prueba la afirmación. □

Por lo tanto, por un lado, el Teorema 4.1 muestra que las propiedades (4.15), (4.17) y (4.20) de la matriz de Lyapunov son requeridas para la construcción de la funcional $v_0(\psi)$ satisfaciendo la ecuación (4.1). Por otro lado, observamos que de la propiedad algebraica (4.20)

$$\Delta U^{'}(0) - D^T \Delta U^{'}(0) D = D^T W D - W,$$

muestra que la bien conocida ecuación de Lyapunov discreta es naturalmente involucrada en la matriz de Lyapunov $U(\tau)$. Estas observaciones sirven para motivar la siguiente nueva definición de matrices de Lyapunov.

Definición 4.2
Dada una matriz simétrica y positiva definida Q, sea W la única matriz positiva definida,

solución de la ecuación de Lyapunov Discreta

$$D^T W D - W = -Q. \tag{4.30}$$

Una matriz de Lyapunov del sistema (3.1) asociada a W es una solución de (4.15) satisfaciendo las ecuaciones (4.17) y

$$\begin{aligned} -Q \;=\; & \left[U(0)A_0 + U(-h)A_1 - A_0^T U(-h)D - A_1^T U(0)D\right] \\ & + \left[U(0)A_0 + U(-h)A_1 - A_0^T U(-h)D - A_1^T U(0)D\right]^T. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Basado en esta definición cuando decimos una matriz de Lyapunov asociada a W, entenderemos que W es una solución de la ecuación (4.30).

4.6. Cálculo de la matriz de Lyapunov

La nueva definición permite calcular las matrices de Lyapunov buscando soluciones de (4.15) satisfaciendo las ecuaciones (4.17) y (4.31). Las ecuaciones (4.15) y (4.17) respectivamente son las propiedades dinámica y de simetría de las matrices Lyapunov presentadas en [12]. Por otro lado, la ecuación (4.31) se convierte en la ecuación algebraica presentada en [12] cambiando la matriz Q por W. Como consecuencia, el procedimiento para calcular las matrices de Lyapunov presentadas en [12] puede ser usado para calcular nuestra nueva definición de matrices de Lyapunov. De hecho, definiendo las matrices auxiliares:

$$Y(\tau) = U(\tau) \quad \text{and} \quad Z(\tau) = U(\tau - h), \quad \tau \in [0, h], \tag{4.32}$$

el siguiente resultado se mantiene, véase el Lema 6.7 en [12].

Lema 4.9 Sea $U(\tau)$ matriz de Lyapunov del sistema (3.1) asociada a W. Entonces, las matrices auxiliares (4.32) satisfacen el siguiente sistema matricial libre de retardos:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}\left[Y(\tau) - Z(\tau)D\right] = Y(\tau)A_0 + Z(\tau)A_1, \\ \frac{d}{d\tau}\left[-D^T Y(\tau) + Z(\tau)\right] = -A_1^T Y(\tau) - A_0^T Z(\tau), \end{cases} \tag{4.33}$$

y las condiciones

$$\begin{cases} Y(0) = Z(h) \\ -Q = Y(0)A_0 + Z(0)A_1 + A_0^T Z(h) + A_1^T Y(h) \\ -D^T\left[Y(h)A_0 + Z(h)A_1\right] - \left[A_0^T Z(0) + A_1^T Y(0)\right] D. \end{cases} \tag{4.34}$$

El siguiente Teorema plantea el problema de existencia y unicidad para el problema de valor en la frontera (4.33) y (4.34), véase [12].

Teorema 4.2
Dada una matriz simétrica Q, si un par $(Y(\tau), Z(\tau))$ satisface (4.33) y (4.34), entonces

$$U(\tau) = \frac{1}{2}[Y(\tau) + Z^T(h-\tau)], \quad \tau \in [0,h],$$

es una matriz de Lyapunov asociada a W si la extendemos a $[-h,0)$ estableciendo $U(-\tau) = U^T(\tau)$ para $\tau \in (0,h]$.

A continuación se presentan resultados, que resuelven el problema de la existencia y unicidad del problema con valor en la frontera (4.33)-(4.34), cuyas pruebas se omiten ya que se siguen de las pruebas expuestas en [12] con el apropiado cambio de la matriz W en aquellos resultados por Q.

Definición 4.3
Se dice que el sistema (3.1) satisface la condición de Lyapunov si existe un $\varepsilon > 0$ tal que la suma de cualesquiera dos valores propios, s_1, s_2 del sistema tiene modulo mayor que ε

$$|s_1 + s_2| > \varepsilon.$$

Lema 4.10 El sistema (3.1) satisface la condición de Lyapunov si y sólo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. El sistema (3.1) no tiene un valor propio s_0 tal que $-s_0$ es también un valor propio del sistema.

2. La matriz D no tiene un valor propio λ_0 tal que λ_0^{-1} es también un valor propio de la matriz.

Observación 2. Suponga que el sistema (3.1) satisface la condición de Lyapunov. Entonces el sistema libre de retardos (4.33) es regular y puede escribirse como:

$$\begin{cases} \frac{dY(\tau)}{d\tau} - \frac{dZ(\tau)}{d\tau}D = Y(\tau)A_0 + Z(\tau)A_1 \\ -D^T\frac{dY(\tau)}{d\tau} + \frac{dZ(\tau)}{d\tau} = -A_1^T Y(\tau) - A_0^T Z(\tau). \end{cases}$$

Observación 3. Suponga que el sistema (3.1) satisface la condición de Lyapunov. Entonces la segunda condición de valor en la frontera (4.34) puede presentarse en la forma

$$[Y'(0) - Z'(h)] - D^T[Y'(0) - Z'(h)]D = -Q$$

donde

$$Y'(0) = \left.\frac{Y(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=+0} \quad \text{y} \quad Z'(h) = \left.\frac{Z(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=h-0}$$

Lema 4.11 Suponga que el sistema (3.1) satisface la condición de Lyapunov. Si el sistema (4.33) admite una solución $(Y(\tau), Z(\tau))$ que satisface la condición (4.34) con $Q = 0_{n\times n}$, entonces

$$Y(\tau) = Z(h+\tau), \quad \tau \in \mathbb{R} \tag{4.35}$$

Corolario 4.3 Suponga que el sistema (3.1) satisface la condición de Lyapunov. Entonces la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ asociada a W satisface la ecuación matricial de segundo orden sin retardo

$$\begin{aligned} \frac{d^2X(\tau)}{d\tau^2} - D^T\frac{d^2X(\tau)}{d\tau^2}D = \frac{dX(\tau)}{d\tau}A_0 - A_0^T\frac{dX(\tau)}{d\tau} + D^T\frac{dX(\tau)}{d\tau}A_1 \\ -A_1^T\frac{dX(\tau)}{d\tau}D + A_0^T X(\tau)A_0 \\ -A_1^T X(\tau)A_1, \quad \tau \in [0,h], \end{aligned} \tag{4.36}$$

y las condiciones de valor en la frontera

$$X'(0) - [X'(h)]^T D = X(0)A_0 + X^T(h)A_1$$

y

$$-Q = [X'(0) + (X'(0))^T] - D^T[X'(0) + (X'(0))^T]D$$

Teorema 4.3

El sistema (3.1) admite una única matriz de Lyapunov asociada a una matriz simétrica W si y sólo si el sistema satisface la condición de Lyapunov.

Corolario 4.4 Suponga que el sistema (3.1) satisface la condición de Lyapunov. Si $(Y(\tau), Z(\tau))$ es la única solución del problema del valor en la frontera (4.33)-(4.34) con una matriz simétrica Q, entonces la matriz de Lyapunov asociada a W es tal que

$$U(\tau) = Y(\tau), \quad \tau \in [0, h].$$

En el Teorema 4.3 se muestra que la condición de Lyapunov garantiza que el problema de valor en la frontera admite única solución.

Procedimiento de cálculo Observe que del Teorema 4.3, si el sistema satisface la condición de Lyapunov entonces el problema del valor en la frontera admite única solución.

Ahora, cuando el sistema es exponencialmente estable entonces la condición de Lyapunov se cumple. Por lo tanto, para sistemas exponencialmente estables se concluye que el problema de valor en la frontera tiene una única solución. El Corolario 4.4 establece que si el problema de valor en la frontera tiene única solución entonces $U(\tau) = Y(\tau)$.

Basados en lo anterior, el procedimiento de cálculo de la matriz de Lyapunov es el mismo que el propuesto por Kharitonov [12]. Esto es, vectorizamos las matrices del sistema (4.33) para obtener

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix}$$

donde

$$L = \begin{pmatrix} I_n \otimes I_n & -I_n \otimes D \\ -D^T \otimes I_n & I_n \otimes I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_n \otimes A_0 & I_n \otimes A_1 \\ -A_1^T \otimes I_n & -A_0^T \otimes I_n \end{pmatrix},$$

y el problema con valor en la frontera toma la siguiente forma:

$$M \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} y(h) \\ z(h) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix},$$

donde $q = Vec(Q)$ y

$$M = \begin{pmatrix} I_n \otimes I_n & 0_{n^2} \otimes 0_{n^2} \\ I_n \otimes A_0 - A_1^T \otimes D + & I_n \otimes A_1 - A_0^T \otimes D \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0_{n^2} \otimes 0_{n^2} & -I_n \otimes I_n \\ -A_1^T \otimes I_n - D^T \otimes A_0 & A_0^T \otimes I_n - D^T \otimes A_1 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo el procedimiento presentado en [12] obtenemos

$$\begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = e^{L\tau} \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = -(M + Ne^{Lh})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Entonces $U(\tau) = Y(\tau)$ para $\tau \in [0,h]$.

4.7. Teorema Converso

En esta sección, presentamos un enunciado converso del Teorema 2.1. Para ello es necesario mostrar que la funcional construida dada por (4.23) admite cota cuadrática inferior de la forma:

$$\alpha_1 \parallel \psi(0) - D\psi(-h) \parallel^2 \leq v_0(\psi),\ \psi \in PC_a,$$

para alguna constante $\alpha_1 > 0$. Similar a los casos de sistema con retardos de tipo retardado y neutro resulta que la funcional $v_0(\psi)$ construida para satisfacer la segunda condición del Teorema 2.1 no puede satisfacer tal cota cuadrática inferior y uno necesita modificar la funcional $v_0(\psi)$.

Lema 4.12 Sea $v_0(\psi)$ la funcional definida por (4.23) con $U(\tau)$ la matriz de Lyapunov asociada a W. Para matrices simétricas y positivas definidas W_0, W_1 y W_2 tales que $W = W_0 + W_1 + hW_2$ la funcional

$$v(\psi) = v_0(\psi) + \int_{-h}^{0} (\psi(\theta) - D\psi(\theta - h))^T [W_1 + (\theta + h)W_2] (\psi(\theta) - D\psi(\theta - h)) d\theta, \tag{4.37}$$

satisface

$$\frac{d}{dt} v(x_t(\psi)) = -w(x_t(\psi)), \quad t \geq 0,$$

donde

$$\begin{aligned} w(\psi) \;\; = \;\; & (\psi(0) - D\psi(-h))^T W_0 (\psi(0) - D\psi(-h)) \\ & (\psi(-h) - D\psi(-2h))^T W_1 (\psi(-h) - D\psi(-2h)) \\ & + \int_{-h}^{0} (\psi(\theta) - D\psi(\theta - h))^T W_2 (\psi(\theta) - D\psi(\theta - h)) d\theta. \end{aligned}$$

Demostración. Por un lado, de la construcción de $v_0(\psi)$ se tiene que

$$\frac{d}{dt}v_0(x_t(\psi)) = -\left(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\right)^T W\left(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\right)$$
$$= -\left(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\right)^T (W_0 + W_1 + hW_2)\left(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\right), \quad (4.38)$$

se satisface a lo largo de las soluciones del sistema (3.1).

Por otro lado, el segundo término del lado derecho de (4.37) a lo largo de la solución del sistema (3.1), es

$$R(t) = \int_{-h}^{0}\left(x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)\right)^T [W_1 + (\theta+h)W_2]\left(x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)\right)d\theta$$
$$= \int_{t-h}^{t}\left(x(\xi,\psi) - Dx(\xi-h,\psi)\right)^T [W_1 + ((\xi-t)+h)W_2]\left(x(\xi,\psi) - Dx(\xi-h,\psi)\right)d\xi.$$

La derivada de $R(t)$ a lo largo de las soluciones del sistema (3.1), es

$$\begin{aligned}\frac{dR(t)}{dt} &= \left(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\right)^T (W_1 + hW_2)\left(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\right)\\ &- \left(x(t-h,\psi) - Dx(t-2h,\psi)\right)^T W_1\left(x(t-h,\psi) - Dx(t-2h,\psi)\right)\\ &- \int_{-h}^{0}\left(x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)\right)^T W_2\left(x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)\right)d\theta.\end{aligned} \quad (4.39)$$

De (4.38) y (4.39) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dv(x_t(\psi))}{dt} &= -\left(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\right)^T W_0\left(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\right)\\ &- \left(x(t-h,\psi) - Dx(t-2h,\psi)\right)^T W_1\left(x(t-h,\psi) - Dx(t-2h,\psi)\right)\\ &- \int_{-h}^{0}\left(x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)\right)^T W_2\left(x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)\right)d\theta,\end{aligned}$$

y por tanto $\frac{dv(x_t(\psi))}{dt} = -w(x_t(\psi))$. □

Lema 4.13 Sea el sistema (3.1) exponencialmente estable. Existe una constante positiva α_1 tal que la funcional $v(\psi)$ dada por (4.37) satisface la desigualdad

$$\alpha_1 \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 \leq v(\psi), \quad \psi \in PC_a. \quad (4.40)$$

Demostración. Definamos la funcional

$$\tilde{v}(\psi) = v(\psi) - \alpha\|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2, \quad \psi \in PC_a,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v(\psi)$ es la funcional (4.37).

A lo largo de las soluciones del sistema (3.1)

$$\tilde{v}(x_t(\psi)) = v(x_t(\psi)) - \alpha \left\| x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi) \right\|^2, \quad \psi \in PC_a.$$

Tenemos que

$$\frac{d}{dt}\tilde{v}(x_t(\psi)) = -\tilde{w}(x_t(\psi)),$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{w}(x_t(\psi)) &= \bar{w}(x_t(\psi)) + 2\alpha\left(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\right)\left(A_0x(t,\psi) + A_1x(t-h,\psi)\right) \\ &\quad + \int_{-h}^{0}\left(x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)\right)^T W_2\left(x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)\right)d\theta,\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\bar{w}(x_t(\psi)) &= (x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi))^T W_0 (x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)) \\ &\quad + (x(t-h,\psi) - Dx(t-2h,\psi))^T W_1 (x(t-h,\psi) - Dx(t-2h,\psi)).\end{aligned}$$

Como W_0 y W_1 son positivas definidas entonces $\bar{w}(x_t(\psi)) = 0$ si y sólo si $x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi) = 0_n$. Si $x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi) = 0_n$ entonces $x(t,\psi)$ es una solución de (3.1) si y sólo si

$$(A_0D + A_1)\,x(t-h,\psi) = 0_n \tag{4.41}$$

se satisface para toda $t \geq 0$. Si $A_0D + A_1$ es no singular entonces la ecuación (4.41) implica que $x(t,\psi) = 0$, $t \geq -h$. Por otro lado, si $A_0D + A_1$ es singular entonces la ecuación (4.41) implica que $x(t,\psi) = c$, $t \geq -h$, para un vector constante c distinto de cero. Debido a que la única solución constante del sistema (3.1) es la solución trivial entonces $c = 0_n$. En cualquier caso, la solución trivial es la única posible solución de (3.1) tal que $x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi) = 0$. Por tanto, para cualquier solución no trivial del sistema (3.1) se tiene que $\bar{w}(x_t(\psi)) > 0$ o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\bar{w}(x_t(\psi)) &= \begin{pmatrix} x^T(t,\psi) & x^T(t-h,\psi) & x^T(t-2h,\psi) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} W_0 & -W_0D & 0_{n\times n} \\ -D^TW_0 & D^TW_0D + W_1 & -W_1D \\ 0_{n\times n} & -D^TW_1 & D^TW_1D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t,\psi) \\ x(t-h,\psi) \\ x(t-2h,\psi) \end{pmatrix} > 0.\end{aligned}$$

De este hecho y tomando en cuenta que $\tilde{w}(x_t(\psi))$ puede escribirse como

$$\tilde{w}(x_t(\psi)) = \begin{pmatrix} x^T(t,\psi) & x^T(t-h,\psi) & x^T(t-2h,\psi) \end{pmatrix} L(\alpha) \begin{pmatrix} x(t,\psi) \\ x(t-h,\psi) \\ x(t-2h,\psi) \end{pmatrix}$$
$$+ \int_{-h}^{0} (x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi))^T W_2 (x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi))\, d\theta.$$

donde

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} W_0 & -W_0 D & 0_{n\times n} \\ -D^T W_0 & D^T W_0 D + W_1 & -W_1 D \\ 0_{n\times n} & -D^T W_1 & D^T W_1 D \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} A_0 + A_0^T & A_1 - A_0^T D & 0_{n\times n} \\ A_1^T - D^T A_0 & -D^T A_1 - A_1^T D & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix},$$

entonces existe $\alpha = \alpha_1 > 0$ tal que $L(\alpha_1)$ es positiva definida. Si adicionalmente, tomamos en cuenta que $W_2 > 0$ entonces

$$\int_{-h}^{0} (x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi))^T W_2 (x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi))\, d\theta \geq 0.$$

Así para este $\alpha = \alpha_1 > 0$, $\tilde{w}(x_t(\psi)) \geq 0$ se satisface lo largo de cualquier solución no trivial del sistema (3.1). La estabilidad exponencial implica que $\tilde{v}(\psi)$ se puede escribir como

$$\tilde{v}(\psi) = \int_{0}^{\infty} \tilde{w}(x_t(\psi))dt \geq 0.$$

De la definición de $\tilde{v}(\psi)$

$$\tilde{v}(\psi) = v(\psi) - \alpha \left\| \psi(0) - D\psi(-h) \right\|^2 \geq 0$$

lo cual implica la cota inferior de tipo cuadrática (4.40). $\square$

Lema 4.14 Sea el sistema (3.1) exponencialmente estable. Existe una constante positiva α_2 tal que la funcional $v(\psi)$ dada por (4.37) satisface la desigualdad

$$v(\psi) \leq \alpha_2 \left\| \psi \right\|_{2h}^2, \quad \psi \in PC_a. \tag{4.42}$$

Demostración. La estabilidad exponencial de (3.1) implica la condición de Lyapunov para (3.1) y, por lo tanto, la existencia de la solución única del problema del valor en la frontera (4.33)-(4.34) que da lugar a la matriz de Lyapunov única asociada a W. Definamos $u_0 = \|U(0)\|$,

$u_1 = \sup_{\theta\in(0,h)} \left\| U(\theta)A_0 - \frac{dU(\theta)}{d\theta} \right\|$ y $u_2 = \sup_{\theta\in(0,h)} \left\| A_0^T U(\theta)A_0 + \frac{dU(\theta)}{d\theta}A_0 - A_0^T \frac{dU(\theta)}{d\theta} - \frac{d^2U(\theta)}{d\theta^2} \right\|$.

Considere el primer término de la funcional (4.37)

$$R_1 = (\psi(0) - D\psi(-h))^T U(0)(\psi(0) - D\psi(-h)) \le \|U(0)\| \, \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 .$$

Observe que

$$\begin{aligned}\|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 &\le (\|\psi(0)\| + \|D\| \, \|\psi(-h)\|)^2 \\ &\le \|\psi(0)\|^2 + 2\,\|\psi(0)\| \, \|D\| \, \|\psi(-h)\| + \|D\|^2 \, \|\psi(-h)\|^2 .\end{aligned}$$

Considere

$$\| \psi \|_{2h} = \sup_{\theta\in[-2h,0]} \| \psi(\theta) \| \ge \| \psi(\theta) \| \text{ para } \theta \in [-2h,0], \tag{4.43}$$

en particular $\| \psi \|_{2h} \ge \| \psi(0) \|$ y $\| \psi \|_{2h} \ge \| \psi(-h) \|$.
Se sigue que

$$\begin{aligned}&\|\psi(0)\|^2 + 2\,\|\psi(0)\| \, \|D\| \, \|\psi(-h)\| + \|D\|^2 \, \|\psi(-h)\|^2 \\ &\le \|\psi\|_{2h}^2 + 2\,\|D\| \, \|\psi\|_{2h}^2 + \|D\|^2 \, \|\psi\|_{2h}^2 \\ &= (1 + 2\,\|D\| + \|D\|^2) \, \|\psi\|_{2h}^2 \\ &= (1 + \|D\|)^2 \, \|\psi\|_{2h}^2 .\end{aligned}$$

Así,

$$\|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 \le (1 + \|D\|)^2 \, \|\psi\|_{2h}^2 .$$

Tomando en cuenta la definición de $u_0 = \| U(0) \|$ y usando la expresión anterior obtenemos

$$R_1 \le u_0 (1 + \|D\|)^2 \, \|\psi\|_{2h}^2 .$$

Considere el siguiente término de $v(\psi)$

$$R_2 = -2(\psi(0) - D\psi(-h))^T \int_{-h}^{0} \left(U(-\xi)A_0 - \frac{dU(-\xi)}{d(-\xi)} \right) \psi(\xi) d\xi .$$

Se tiene que

$$R_2 \le 2\,\|\psi(0) - D\psi(-h)\| \int_{-h}^{0} \left\| \left(U(-\xi)A_0 - \frac{dU(-\xi)}{d(-\xi)} \right) \right\| \|\psi(\xi)\| \, d\xi .$$

De la definición $u_1 = \sup_{\theta\in(0,h)} \|U(\theta)A_0 - \frac{dU(\theta)}{d\theta}\|$, se tiene que $\left\|\left(U(-\xi)A_0 - \frac{dU(-\xi)}{d(-\xi)}\right)\right\| \leq u_1$ para $\xi \in [-h,0]$ y por tanto

$$R_2 \leq 2\|\psi(0) - D\psi(-h)\| u_1 \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\| d\xi.$$

Como

$$\|\psi(0) - D\psi(-h)\| \leq \|\psi(0)\| + \|D\| \|\psi(-h)\|,$$

y tomando en cuenta la desigualdad (4.43), se obtiene la siguiente expresión:

$$R_2 \leq 2(1+\|D\|)hu_1 \|\psi\|_{2h}^2.$$

Ahora considere el siguiente término de la funcional $v(\psi)$

$$\begin{aligned} R_3 = &\int_{-h}^{0} \psi^T(\xi_1) \left(\int_{-h}^{0} \left[A_0^T U(\xi_1 - \xi_2)A_0 - 2\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0 \right] \psi(\xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1 \\ &- \int_{-h}^{0} \psi^T(\xi_1) \left(\int_{-h}^{\xi_1-0} \frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} \psi(\xi_2) d\xi_2 + \int_{\xi_1+0}^{0} \frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} \psi(\xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1. \end{aligned}$$

Observe que el segundo término de R_3 se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^{0} \psi^T(\xi_1) \left(\int_{-h}^{\xi_1-0} \frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} \psi(\xi_2) d\xi_2 + \int_{\xi_1+0}^{0} \frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} \psi(\xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1 \\ &= \int_{-h}^{0} \int_{\substack{-h \\ \xi_2\neq\xi_1}}^{0} \psi^T(\xi_1) \frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} \psi(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned}$$

Por otro lado el primer término de R_3 se puede expresar como

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^{0} \left[A_0^T U(\xi_1 - \xi_2)A_0 - 2\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0 \right] \psi(\xi_2) d\xi_2 \\ &= \int_{\substack{-h \\ \xi_2\neq\xi_1}}^{0} \left[A_0^T U(\xi_1 - \xi_2)A_0 - 2\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0 \right] \psi(\xi_2) d\xi_2. \end{aligned}$$

Así, el término R_3 se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} R_3 = &\int_{-h}^{0} \psi^T(\xi_1) \left(\int_{\substack{-h \\ \xi_2\neq\xi_1}}^{0} \left[A_0^T U(\xi_1 - \xi_2)A_0 - 2\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0 \right] \psi(\xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1 \\ &- \int_{-h}^{0} \int_{\substack{-h \\ \xi_2\neq\xi_1}}^{0} \psi^T(\xi_1) \frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} \psi(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned}$$

Antes de calcular la cota de R_3, observe lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&-2\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\\
&=-\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\\
&-\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_2)A_0^T\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)\psi(\xi_1)d\xi_2 d\xi_1,
\end{aligned}$$

como los límites de integración son independientes, el orden de integración puede cambiar

$$\begin{aligned}
&-\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_2)A_0^T\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)\psi(\xi_1)d\xi_2 d\xi_1\\
&=-\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_2)A_0^T\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)\psi(\xi_1)d\xi_1 d\xi_2\\
&=-\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)A_0^T\left(\frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)}\right)\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
&-2\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\\
&=-\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\int_{-h}^{0}\left[\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0+A_0^T\left(\frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)}\right)\right]\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1,
\end{aligned}$$

como $\frac{dU(\theta)}{d\theta}=-\left(\frac{dU(-\theta)}{d(-\theta)}\right)^T$, entonces

$$\begin{aligned}
&-\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\int_{-h}^{0}\left[\left(\frac{dU(\xi_2-\xi_1)}{d(\xi_2-\xi_1)}\right)^T A_0+A_0^T\left(\frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)}\right)\right]\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\\
&=-\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)\int_{-h}^{0}\left[-\left(\frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)}\right)A_0+A_0^T\left(\frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)}\right)\right]\psi(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1,
\end{aligned}$$

por lo tanto R_3 se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
R_3=\int_{-h}^{0}\psi^T(\xi_1)&\left(\int_{\substack{-h\\ \xi_2\neq\xi_1}}^{0}\left[A_0^T U(\xi_1-\xi_2)A_0-A_0^T\frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)}\right.\right.\\
&\left.\left.+\ \frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)}A_0-\frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2}\right]\psi(\xi_2)d\xi_2\right)d\xi_1.
\end{aligned}$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
R_3 \leq \int_{-h}^{0} \|\psi^T(\xi_1)\| \int_{\substack{-h \\ \xi_2 \neq \xi_1}}^{0} \bigg\| \bigg[& A_0^T U(\xi_1-\xi_2) A_0 - A_0^T \frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)} \\
&+ \frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)} A_0 - \frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} \bigg] \bigg\| \|\psi(\xi_2)\| \, d\xi_2 d\xi_1.
\end{aligned}
$$

Observe el integrando de la integral interna

$$
\sup_{\substack{\xi_1 \in (-h,0) \\ \xi_2 \in (-h,0) \\ \xi_2 \neq \xi_1}} \left\| A_0^T U(\xi_1-\xi_2) A_0 - A_0^T \frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)} + \frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)} A_0 - \frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} \right\|.
$$

Considere el cambio de variable $\theta = \xi_1 - \xi_2$ entonces la expresión anterior se reescribe como

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\theta \in (-h,h) \\ \theta \neq 0}} \left\| A_0^T U(\theta) A_0 - A_0^T \frac{dU(\theta)}{d\theta} + \frac{dU(\theta)}{d\theta} A_0 - \frac{d^2U(\theta)}{d\theta^2} \right\| \\
&= \text{máx} \left\{ \sup_{\theta \in (-h,0)} \left\| A_0^T U(\theta) A_0 - A_0^T \frac{dU(\theta)}{d\theta} + \frac{dU(\theta)}{d\theta} A_0 - \frac{d^2U(\theta)}{d\theta^2} \right\|, \right. \\
&\qquad \left. \sup_{\theta \in (0,h)} \left\| A_0^T U(\theta) A_0 - A_0^T \frac{dU(\theta)}{d\theta} + \frac{dU(\theta)}{d\theta} A_0 - \frac{d^2U(\theta)}{d\theta^2} \right\| \right\}.
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\theta \in (-h,0)} \left\| A_0^T U(\theta) A_0 - A_0^T \frac{dU(\theta)}{d\theta} + \frac{dU(\theta)}{d\theta} A_0 - \frac{d^2U(\theta)}{d\theta^2} \right\| \\
&= \sup_{\theta_1 \in (0,h)} \left\| A_0^T U(\theta_1) A_0 + \frac{dU(\theta_1)}{d(\theta_1)} A_0 - A_0^T \frac{dU(\theta_1)}{d(\theta_1)} - \frac{d^2U(\theta_1)}{d\theta_1^2} \right\|.
\end{aligned}
$$

Tomando en cuenta la definición de u_2, entonces

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\xi_1 \in (-h,0) \\ \xi_2 \in (-h,0) \\ \xi_2 \neq \xi_1}} \left\| A_0^T U(\xi_1-\xi_2) A_0 - A_0^T \frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)} + \frac{dU(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)} A_0 - \frac{d^2U(\xi_1-\xi_2)}{d(\xi_1-\xi_2)^2} \right\| \\
&= \sup_{\theta_1 \in (0,h)} \left\| A_0^T U(\theta_1) A_0 + \frac{dU(\theta_1)}{d(\theta_1)} A_0 - A_0^T \frac{dU(\theta_1)}{d(\theta_1)} - \frac{d^2U(\theta_1)}{d\theta_1^2} \right\| = u_2.
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
R_3 &\le \int_{-h}^{0} \left\| \psi^T(\xi_1) \right\| u_2 \int_{-h}^{0} \| \psi(\xi_2) \| \, d\xi_2 d\xi_1 \\
&= u_2 \left(\int_{-h}^{0} \left\| \psi^T(\xi_1) \right\| d\xi_1 \right) \left(\int_{-h}^{0} \| \psi(\xi_2) \| \, d\xi_2 \right) \\
&\le u_2 \left(\| \psi \|_{2h} \cdot h \right) \left(\| \psi \|_{2h} \cdot h \right)
\end{aligned}
$$

Se sigue que

$$
R_3 \le u_2 h^2 \| \psi \|_{2h}^2 .
$$

Finalmente considere el término

$$
\begin{aligned}
R_4 = &\int_{-h}^{0} \left(\psi(\theta) - D\psi(\theta - h) \right)^T \left[W_1 + (\theta + h) W_2 \right] \left(\psi(\theta) - D\psi(\theta - h) \right) d\theta, \\
\le & \, h^2 \| W_1 + h W_2 \| \left(1 + \| D \| \right)^2 \| \psi \|_{2h}^2 .
\end{aligned}
$$

Como resultado, se obtiene la cota de tipo cuadrática (4.42), donde

$$
\alpha_2 = u_0 (1 + \|D\|)^2 + 2(1 + \|D\|) h u_1 + u_2 h^2 + h \| W_1 + h W_2 \| \left(1 + \|D\| \right)^2 .
$$

□

El siguiente resultado establece el converso del Teorema de Lyapunov-Krasovskii para el sistema (3.1).

Teorema 4.4

Sea el sistema (3.1) exponencialmente estable. Entonces la funcional (4.37) satisface las condiciones del Teorema 2.1.

Demostración. El Teorema 2.1 puede ser reescrito para interpretar el sistema (3.1) sobre el espacio PC_a bajo la consideración de la función inicial $\psi \in PC_a$ tal que $\psi(\theta) = \psi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$ y $\psi(\theta) = 0_n$, $\theta \in [-2h, -h)$. Entonces la primera condición del Teorema 2.1 se sigue de los Lemas 4.13 y 4.14. Ahora mostraremos la segunda condición del Teorema 2.1. La funcional $w(\psi)$ a lo largo de las soluciones es

$$
\begin{aligned}
w(x_t(\psi)) = & \left(x(t, \psi) - Dx(t - h, \psi) \right)^T W_0 \left(x(t, \psi) - Dx(t - h, \psi) \right) \\
& + \left(x(t - h, \psi) - Dx(t - 2h, \psi) \right)^T W_1 \left(x(t - h, \psi) - Dx(t - 2h, \psi) \right) \\
& + \int_{-h}^{0} \left(x(t + \theta, \psi) - Dx(t + \theta - h, \psi) \right)^T W_2 \left(x(t + \theta, \psi) - Dx(t + \theta - h, \psi) \right) d\theta .
\end{aligned}
$$

Como las matrices $W_j > 0$ para $j = 0, 1, 2$ se sigue que

$$w(x_t(\psi)) \geq (x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi))^T W_0 (x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)),$$

Usando la desigualdad Rayleigh-Ritz se tiene que

$$w(x_t(\psi)) \geq \lambda_{\text{mín}}(W_0) \|x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\|^2,$$

se sigue que

$$\frac{dv_0(x_t(\psi))}{dt} = -w(x_t(\psi)) \leq \quad -\beta \|x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\|^2,$$

con $\beta = \lambda_{\text{mín}}(W_0)$, y por tanto se satisface la segunda condición del Teorema 2.1, esto concluye la prueba. □

Cabe mencionar que un resultado converso para la estabilidad exponencial global de sistemas no lineales en la forma de Hale con funciones iniciales continuas ha sido probado en el Teorema 2.3 de [19]. El Teorema 4.4 se puede considerar como una versión del Teorema 2.3 en [19] para el sistema lineal (3.1) con funciones iniciales continuas a pedazos. Por otro lado, mientras que el Teorema 2.3 en [19] es de tipo existencia, en lo que respecta a los sistemas no lineales generales, el Teorema 4.4 es constructivo que proporciona una expresión explícita para las funcionales, en lo que respecta a los sistemas lineales. Es importante señalar que para lograr el resultado converso en el Teorema 4.4, se requiere la interpretación del sistema (3.1) como un sistema que evoluciona en un intervalo de retardo doble, y esto no se puede ver directamente en el Teorema 2.3 de [19] para el marco no lineal más general.

4.8. Estimados exponenciales

Para obtener estimados exponenciales para las soluciones del sistema de tipo neutro (3.1) se necesitará de una cota superior para la funcional (4.37) diferente a la cota proporcionada en el Lema 4.14.

Lema 4.15 Sea el sistema (3.1) exponencialmente estable y $v(\psi)$ es la funcional definida en (4.37). Entonces, existen $\delta_j > 0$, $j = 1,2,3$, tales que

$$\begin{aligned} v(\psi) \quad \leq \quad & \delta_1 \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 + \delta_2 \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\|^2 d\xi \\ & + \delta_3 \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi) - D\psi(\xi - h)\|^2 d\xi, \quad \psi \in PC_a \end{aligned} \tag{4.44}$$

Demostración. Para esta prueba usaremos la misma notación de u_0, u_1 y u_2 como en la prueba del Lema 4.14.

Considere el término

$$\begin{aligned} R_1 &= (\psi(0) - D\psi(-h))^T U(0) (\psi(0) - D\psi(-h)) \\ &\leq u_0 \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2. \end{aligned}$$

Ahora considere el segundo término

$$\begin{aligned} R_2 &= -2(\psi(0) - D\psi(-h))^T \int_{-h}^{0} \left(U(-\xi)A_0 - \frac{dU(-\xi)}{d(-\xi)} \right) \psi(\xi) d\xi \\ &\leq 2u_1 \|\psi(0) - D\psi(-h)\| \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\| d\xi, \end{aligned}$$

o, equivalentemente

$$R_2 \leq u_1 \int_{-h}^{0} 2 \|\psi(0) - D\psi(-h)\| \, \|\psi(\xi)\| d\xi,$$

tomando en cuenta que, para $\xi \in [-h, 0]$

$$2 \|\psi(0) - D\psi(-h)\| \, \|\psi(\xi)\| \leq \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 + \|\psi(\xi)\|^2,$$

observe que

$$\begin{aligned} R_2 &\leq u_1 \int_{-h}^{0} \left(\|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 + \|\psi(\xi)\|^2 \right) d\xi \\ &\leq u_1 \left(\int_{-h}^{0} \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 d\xi + \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\|^2 d\xi \right) \\ &\leq u_1 \left(\left(h \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 \right) + \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\|^2 d\xi \right), \end{aligned}$$

finalmente

$$R_2 \leq u_1 \left(h \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 + \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\|^2 d\xi \right).$$

Para el tercer término de la funcional, se tiene

$$\begin{aligned}
R_3 = & \int_{-h}^{0} \psi^T(\xi_1) \left(\int_{\substack{-h \\ \xi_2 \neq \xi_1}}^{0} \left[A_0^T U(\xi_1 - \xi_2) A_0 - A_0^T \frac{dU(\xi_1 - \xi_2)}{d(\xi_1 - \xi_2)} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{dU(\xi_1 - \xi_2)}{d(\xi_1 - \xi_2)} A_0 - \frac{d^2 U(\xi_1 - \xi_2)}{d(\xi_1 - \xi_2)^2} \right] \psi(\xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1, \\
& \leq u_2 h \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\| d\xi.
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
R_4 &= \int_{-h}^{0} (\psi(\xi) - D\psi(\xi - h))^T \left[W_1 + (\xi + h) W_2 \right] (\psi(\xi) - D\psi(\xi - h)) d\xi \\
&\leq \|W_1 + hW_2\| \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi) - D\psi(\xi - h)\|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Recolectando todas las cotas estimadas, se tiene que

$$\begin{aligned}
v(\psi) \leq u_0 \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 + u_1 \left(h \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 + \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\|^2 d\xi \right) \\
+ u_2 h \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\| d\xi + \|W_1 + hW_2\| \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi) - D\psi(\xi - h)\|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
v(\psi) \quad \leq \quad & \delta_1 \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 + \delta_2 \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\|^2 d\xi \\
& + \delta_3 \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi) - D\psi(\xi - h)\|^2 d\xi, \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

donde

$$\delta_1 = u_0 + hu_1, \delta_2 = u_1 + u_2 h, \delta_3 = \|W_1 + hW_2\|,$$

□

Lema 4.16 Sea el sistema (3.1) exponencialmente estable. Existe $\sigma_1 > 0$ tal que la funcional (4.37) satisface la desigualdad

$$\frac{d}{dt}v(x_t(\psi)) + 2\sigma_1 v(x_t(\psi)) \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Demostración. Del Lema 4.15 se sigue que existen $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ y $\delta_3 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} v(\psi) \leq\ & \delta_1 \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 + \delta_2 \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi)\|^2 d\xi \\ & + \delta_3 \int_{-h}^{0} \|\psi(\xi) - D\psi(\xi - h)\|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Para $\sigma_1 > 0$ se sigue que

$$\begin{aligned} 2\sigma_1 v(x_t(\psi)) \leq\ & 2\sigma_1\delta_1 \|x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\|^2 + 2\sigma_1\delta_2 \int_{-h}^{0} \|x(t+\theta,\psi)\|^2 d\theta \\ & + 2\sigma_1\delta_3 \int_{-h}^{0} \|x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)\|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Por otro lado, del Lema 4.12 se sigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(x_t(\psi)) =& -(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi))^T W_0 (x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)) \\ & - (x(t-h,\psi) - Dx(t-2h,\psi))^T W_1 (x(t-h,\psi) - Dx(t-2h,\psi)) \\ & - \int_{-h}^{0} (x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi))^T W_2 (x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)) d\theta. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(x_t(\psi)) + 2\sigma_1 v(x_t(\psi)) =& -(x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi))^T W_0 (x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)) \\ & - (x(t-h,\psi) - Dx(t-2h,\psi))^T W_1 (x(t-h,\psi) - Dx(t-2h,\psi)) \\ & - \int_{-h}^{0} (x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi))^T W_2 (x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)) d\theta \\ & + 2\sigma_1\delta_1 \|x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\|^2 + 2\sigma_1\delta_2 \int_{-h}^{0} \|x(t+\theta,\psi)\|^2 d\theta \\ & + 2\sigma_1\delta_3 \int_{-h}^{0} \|x(t+\theta,\psi) - Dx(t+\theta-h,\psi)\|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Observe que

$$2\sigma_1\delta_1 \|x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)\|^2 = (x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi))^T 2\sigma_1\delta I (x(t,\psi) - Dx(t-h,\psi)),$$

y

$$-\left(x(t-h,\psi)-Dx\left(t-2h,\psi\right)\right)^T W_1\left(x(t-h,\psi)-Dx\left(t-2h,\psi\right)\right)\leq 0,$$

entonces,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}v(x_t\left(\psi\right))+2\sigma_1 v(x_t\left(\psi\right))\\
&\leq -\left(x(t,\psi)-Dx\left(t-h,\psi\right)\right)^T\left(W_0-2\sigma_1\delta_1 I\right)\left(x(t,\psi)-Dx\left(t-h,\psi\right)\right)\\
&-\int_{-h}^{0}\left(x(t+\theta,\psi)-Dx\left(t+\theta-h,\psi\right)\right)^T W_2\left(x(t+\theta,\psi)-Dx\left(t+\theta-h,\psi\right)\right)d\theta\\
&+2\sigma_1\delta_2\int_{-h}^{0}\|x(t+\theta,\psi)\|^2 d\theta+2\sigma_1\delta_3\int_{-h}^{0}\|x(t+\theta,\psi)-Dx(t+\theta-h,\psi)\|^2 d\theta.
\end{aligned}$$

También observe que

$$\begin{aligned}
&\int_{-h}^{0}\left(x(t+\theta,\psi)-Dx\left(t+\theta-h,\psi\right)\right)^T W_2\left(x(t+\theta,\psi)-Dx\left(t+\theta-h,\psi\right)\right)d\theta\\
&=\int_{-h}^{0}\begin{pmatrix} x^T\left(t+\theta,\psi\right) & x^T\left(t+\theta-h,\psi\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_2 & -W_2 D\\ -D^T W_2 & D^T W_2 D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\left(t+\theta,\psi\right)\\ x\left(t+\theta-h,\psi\right)\end{pmatrix}d\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\sigma_1\delta_2\int_{-h}^{0}\|x(t+\theta,\psi)\|^2=2\sigma_1\delta_2\int_{-h}^{0}x^T\left(t+\theta,\psi\right)x(t+\theta,\psi)d\theta\\
&=\int_{-h}^{0}\begin{pmatrix} x^T\left(t+\theta,\psi\right) & x^T\left(t+\theta-h,\psi\right)\end{pmatrix}2\sigma_1\delta_2\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\left(t+\theta,\psi\right)\\ x\left(t+\theta-h,\psi\right)\end{pmatrix}d\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\sigma_1\delta_3\int_{-h}^{0}\|x(t+\theta,\psi)-Dx(t+\theta-h,\psi)\|^2 d\theta\\
&=2\sigma_1\delta_3\int_{-h}^{0}\left[x(t+\theta,\psi)-x(t+\theta-h)\right]^T\left[x(t+\theta,\psi)-x(t+\theta-h)\right]d\theta\\
&=\int_{-h}^{0}\begin{pmatrix} x^T\left(t+\theta,\psi\right) & x^T\left(t+\theta-h,\psi\right)\end{pmatrix}2\sigma_1\delta_3\begin{pmatrix} I & -D\\ -D^T & D^T D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\left(t+\theta,\psi\right)\\ x\left(t+\theta-h,\psi\right)\end{pmatrix}d\theta.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}v(x_t\left(\psi\right))+2\sigma_1 v(x_t\left(\psi\right))\\
&\leq -\left(x(t,\psi)-Dx\left(t-h,\psi\right)\right)^T\left(W_0-2\sigma_1\delta_1 I\right)\left(x(t,\psi)-Dx\left(t-h,\psi\right)\right)\\
&-\int_{-h}^{0}\begin{pmatrix} x^T(t+\theta,\psi) & x^T\left(t+\theta-h,\psi\right)\end{pmatrix}M\left(\sigma\right)\begin{pmatrix} x(t+\theta,\psi)\\ x\left(t+\theta-h,\psi\right)\end{pmatrix}d\theta,
\end{aligned}$$

donde
$$M(\sigma)=\begin{pmatrix} W_2-2\sigma_1(\delta_2+\delta_3)I & -(-W_2-2\sigma_1\delta_3 I)D \\ -D^T(W_2-2\sigma_1\delta_3 I) & D^T(W_2-2\sigma_1\delta_3 I)D \end{pmatrix}.$$
Claramente, existe $\sigma_1>0$ tal que
$$W_0-2\sigma_1\delta_1 I>0 \text{ y } W_2-2\sigma_1(\delta_2+\delta_3)I>0,$$
y, por tanto,
$$\frac{d}{dt}v(x_t(\psi))+2\sigma_1 v(x_t(\psi))\leq 0,\quad t\geq 0.$$
□

Teorema 4.5

Sea el sistema (3.1) exponencialmente estable. Entonces, las soluciones del sistema (3.1) satisfacen la siguiente desigualdad.
$$\|x(t,\varphi)\|\leq \gamma e^{-\sigma t}\|\varphi\|_h,\quad t\geq 0,$$
donde
$$\sigma=\text{mín}\{\sigma_1,\sigma_2\}-\varepsilon, \text{ and } \gamma=d\left(1+\mu+\frac{\mu}{h\varepsilon e}\right),$$
con $\varepsilon>0$ tal que $\sigma>0$. Aquí, $\mu=\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$, con $\alpha_1,\alpha_2>0$ calculados en los Lemas 4.13 y 4.14. La constante σ_1 es calculado del Lema 4.16 y la constante $\sigma_2=-\frac{1}{h}\ln(\rho)$, donde $\rho\in(0,1)$ y $d\geq 1$ son tales que $\|D^j\|\leq d\rho^j$, $j\geq 0$.

Demostración. Del Lema 4.16 se tiene que
$$\frac{d}{dt}v(x_t(\psi))+2\sigma_1 v(x_t(\psi))\leq 0,\quad t\geq 0.$$
Integrando esta desigualdad de 0 a t tenemos que
$$v(x_t(\psi))\leq v(\psi)e^{-2\sigma_1 t},\quad t\geq 0. \tag{4.47}$$
Del lema 4.13 existe $\alpha_1>0$ tal que
$$\alpha_1\|\psi(0)-D\psi(-h)\|^2\leq v(\psi),\quad \psi\in PC_a,$$
y del Lema 4.14 existe $\alpha_2>0$ tal que
$$v(\psi)\leq \alpha_2\|\psi\|_{2h}^2,\quad \psi\in PC_a.$$

Utilizando las desigualdades anteriores en la desigualdad (4.47) se obtiene

$$\alpha_1 \|\psi(0) - D\psi(-h)\|^2 \leq \alpha_2 \|\psi\|_{2h}^2 e^{-2\sigma_1 t}, \quad t \geq 0.$$

Tomando en cuenta que para la función inicial ψ se mantiene la igualdad $\|\psi\|_{2h} = \|\varphi\|_h$, obtenemos la desigualdad

$$\|x(t,\varphi) - Dx(t-h,\varphi)\| \leq \mu \|\varphi\|_h e^{-\sigma_1 t}, \quad t \geq 0,$$

donde $\mu = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$. Entonces, una aplicación directa del Lema 6.16 en [12] da lugar al resultado. □

Para ilustrar los resultados obtenidos consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Considere el siguiente sistema de tipo neutro exponencialmente estable:

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t-5)] = A_0 x(t) + A_1 x(t-5), \tag{4.48}$$

donde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema (4.48) es la forma correspondiente de Hale del sistema del ejemplo presentado en [10].

De acuerdo con el procedimiento de cálculo de las matrices de Lyapunov en la sección 4.6, seleccione $Q = \begin{pmatrix} 2.88 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. La solución única de la ecuación discreta de Lyapunov (4.30) es $W = 3I$.

Las componentes de la matriz de Lyapunov $U(\tau)$, su primera y segunda derivada se representan en las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 respectivamente. A partir de estos valores calculados se puede calcular u_j, $j = 1,2,3$ definidos en la prueba del Lema 4.14, para obtener $u_0 = 26.8586$, $u_1 = 9.2188$ y $u_2 = 3.15$.

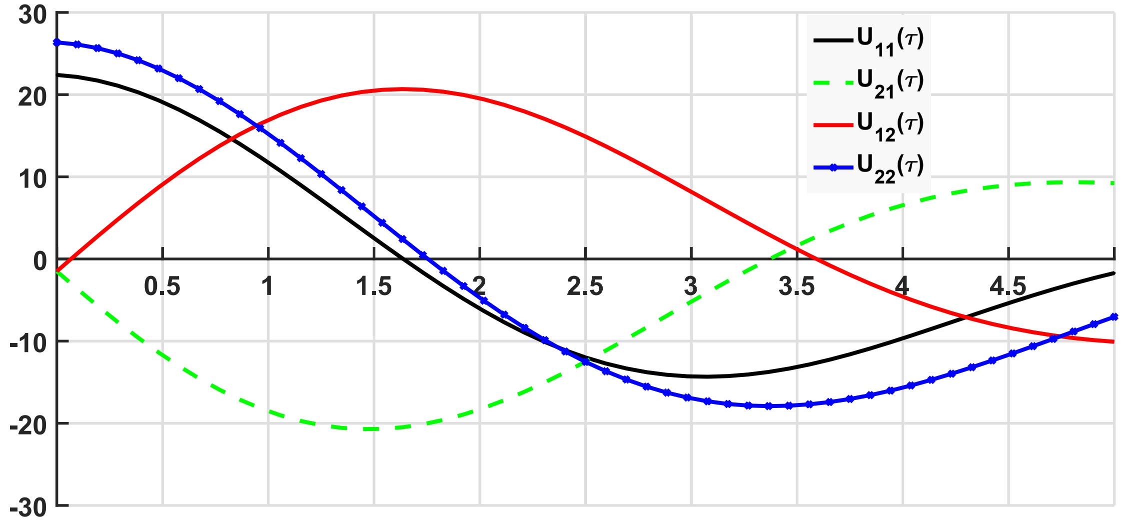

Figura 4.1: Componentes de la matriz de Lyapunov $U(\tau)$

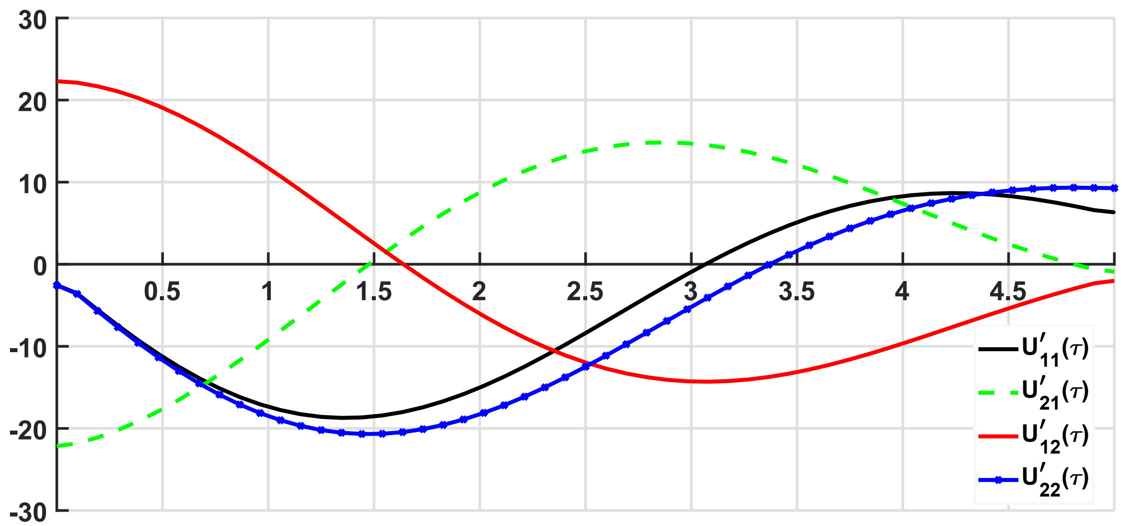

Figura 4.2: Componentes de $U'(\tau)$

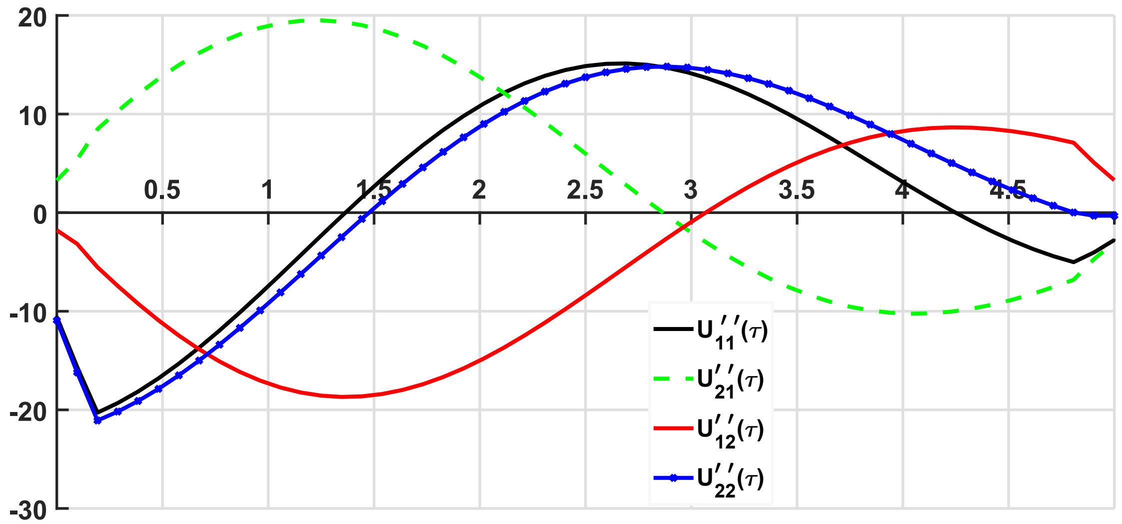

Figura 4.3: Componentes de $U''(\tau)$

Ahora, basado en el Lema 4.12, se seleccionan las matrices $W_0 = W_1 = I$ y $W_2 = 0.2I$ que satisfacen la ecuación $W = W_0 + W_1 + hW_2 = 3I$. Luego, por cálculos directos de los Lemas 4.13 y 4.14 se obtiene $\alpha_1 = 2.7735$ y $\alpha_2 = 242.4517$, respectivamente. Los valores $\delta_1 = 72.9529$, $\delta_2 = 24.9687$ y $\delta_3 = 2$ se obtienen aplicando el Lema 4.15, mientras que del Lema 4.16 se obtiene el valor $\sigma_1 = 0.0037$. Para la matriz Schur estable D la desigualdad $\| D^j \| \leq d\rho^j$, $j \geq 0$, se mantiene con $d = 1$ y $\rho = 0.2019$ entonces se obtiene $\sigma_1 = 0.32$. Del Teorema 4.5 se obtienen los valores $\sigma = 0.003$ y $\gamma = 993.0837$ eligiendo $\varepsilon = 0.0007$. Por lo tanto, se obtiene el siguiente estimado exponencial para la solución del sistema (4.48)

$$\| x(t,\varphi) \| \leq 993.0837 \| \varphi \|_5 e^{-0.003t}, \ \ t \geq 0. \tag{4.49}$$

que se satisface para cualquier función inicial $\varphi \in PC$.
El estimado exponencial obtenido en [10] es el siguiente:

$$\| x(t,\varphi) \| \leq 1600 \| \varphi \|_5 e^{-0.003t}, \ \ t \geq 0. \tag{4.50}$$

Comparando los resultados (4.49) y (4.50) es claro que (4.49) es mejor que (4.50). Adicionalmente, el resultado (4.49) se satisface para $\varphi \in PC$, mientras que el resultado (4.50) obtenido en [10] se satisface para $\varphi \in PC^1$.

Claramente el resultado exponencial proporcionado por el Teorema 4.5 depende de la elección de las matrices las matrices W_0, W_1, y W_2. Estas matrices pueden servir para mejorar la cota exponencial. Para ilustrar lo anterior considere el mismo sistema del ejemplo 1, pero ahora con $W_0 = 1.06I$,

$W_1 = 0.008I$ y $W_2 = 0.3864$ que satisfacen la ecuación $W = W_0 + W_1 + hW_2 = 3I$. Observe que los valores del cálculo de la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ se mantienen como el ejemplo 1. Para los parámetros restantes se obtienen los valores siguientes: por cálculos directos de los Lemas 4.13 y 4.14 se obtiene $\alpha_1 = 0.2554$ y $\alpha_2 = 242.0197$, respectivamente. Del Lema 4.15, $\delta_1 = 72.9529$, $\delta_2 = 24.9687$ y $\delta_3 = 1.94$, mientras que del Lema 4.16 se obtiene el valor $\sigma_1 = 0.0072$. Del Teorema 4.5 se obtienen los valores $\sigma = 0.004$ y $\gamma = 739.5623$ eligiendo $\varepsilon = 0.0032$. De este modo con los parámetros considerados anteriormente, para la solución del sistema (4.48), se obtiene el estimado exponencial siguiente:

$$\| x(t,\varphi) \| \leq 739.5623 \| \varphi \|_5 \, e^{-0.004t}, \;\; t \geq 0.$$

que se satisface para cualquier función inicial $\varphi \in PC$.

El problema de optimización de la cota exponencial mediante de la selección de las matrices W_0, W_1, W_2 es un problema interesante a ser abordado en trabajos futuros.

Capítulo 5

Conclusión y trabajo a futuro

En esta sección se presentan las principales conclusiones de este trabajo de investigación.

1. La no equivalencia entre las formas de los sistemas neutros implicó mostrar un resultado que establece formalmente bajo que condiciones existe equivalencia de las soluciones de los sistemas de tipo neutro y los sistemas neutros en la forma de Hale.

2. Se presenta un procedimiento para la construcción de funcionales de Lyapunov-Krasovskii para sistemas lineales con retardo de tipo neutro en la forma de Hale. Esta construcción es hecha para funciones continuas a pedazos en contraparte con resultados existentes desarrollados para funciones continuamente diferenciables a pedazos.

3. Se muestra que la funcional depende de una función matricial llevando a una nueva definición de matrices de Lyapunov para sistemas de tipo neutro.

4. Se analizan las propiedades básicas de la matriz de Lyapunov.

5. Se muestra como la funcional puede ser aplicado para obtener estimados exponenciales de las soluciones.

Trabajo a futuro

1. Obtener un resultado, de unicidad de la matriz de Lyapunov, similar al Teorema 6.4 en [12], es decir, garantizar que si el sistema lineal con retardo de tipo neutro (3.1) es exponencialmente estable, entonces la matriz de Lyapunov definida por la integral impropia es única solución de la propiedad dinámica, satisfaciendo las propiedades de simetría y algebraica.

2. Usar la funcional de Lyapunov-Krasovskii (4.37) para construir estimados de la región de atracción para una clase de sistemas no lineales con retardo de tipo neutro.

Capítulo 6

Publicaciones

- Canul-Pech, A., & Melchor-Aguilar, D. (2021). Lyapunov functionals for linear neutral delay systems in the Hale's form. International Journal of Control, (just-accepted), 1.

Congresos

Abraham Canul Pech, Daniel Melchor-Aguilar "Estimado de la región de atracción para un modelo de infección viral con transmisión mitótica y tasa de cura con retardo" Congreso Nacional de Control Automático 2018. Asociación de México de Control Automático San Luis Potosí, México. Octubre 2018

Bibliografía

[1] Bellman R. and Cooke K. L., (1963) Differential and difference equations. Academic Press

[2] Bocharov, G., & Hadeler, K. P. (2000). Structured population models, conservation laws, and delay equations. Journal of Differential Equations, 168(1), 212-237.

[3] Castelan, W. D. B., & Infante, E. F. (1979). A Liapunov functional for a matrix neutral difference-differential equation with one delay. Journal of mathematical Analysis and Applications, 71(1), 105-130.

[4] El'sgol'ts, L. E., & Norkin, S. B. (1973). Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. Academic Press

[5] Gu, K. (2012). A review of some subtleties of practical relevance for time-delay systems of neutral type. International Scholarly Research Notices, 2012.

[6] Hale J. K. & Verduyn-Lunel S. M. (1993) Introduction to Functional Differential Equations. Springer.

[7] Hale, J. K. (1969) Ordinary Differential Equations. Wiley.

[8] Infante, E.F., & Catelan, W.B. (1978). A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation. Journal of Differential Equations, 29(3), 439-451.

[9] Kharitonov, V. L., & Zhabko, A. P. (2003). Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. Automatica, 39(1), 15-20.

[10] Kharitonov V.(2005) Kharitonov, V. L. (2005). Lyapunov functionals and Lyapunov matrices for neutral type time delay systems: a single delay case. International Journal of Control, 78(11), 783-800.

[11] Kharitonov, V. L. (2008). Lyapunov matrices for a class of neutral type time delay systems. International Journal of Control, 81(6), 883-893.

[12] Kharitonov, V. (2012). Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Birkhäuser.

[13] Kharitonov, V. L. (2015). Predictor based stabilization of neutral type systems with input delay, Automatica, 52, 125-134.

[14] Kolmanovskii, V. and Myshkis, A. (1999). Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Springer Science & Business Media

[15] Kolmanovskii, V., B. and Nosov, V., R. (1986). Stability of Functional Differential Equations. Elsevier.

[16] Kuang, Yang. (1993). Delay Differential Equation with Application in Population Dynamics. Academic Press.

[17] Melchor-Aguilar, D., Kharitonov, V., & Lozano, R. (2010). Stability conditions for integral delay systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 20(1), 1-15.

[18] Niculescu, S.I. (2001). Delay Effects on Stability. A robust Control Approach, Lectures Notes in Control and Information Sciences, Springer.

[19] Pepe, P., & Karafyllis, I. (2013). Converse Lyapunov-Krasovskii theorems for systems described by neutral functional differential equations in Hale's form. International Journal of Control, 86(2), 232-243.

[20] Pepe, P., Karafyllis, I., & Jiang, Z. P.(2017). Lyapunov-Krasovskii characterization of the input-to-state stability for neutral systems in Hale's form. Systems & Control Letters, 102, 48-56.

[21] Rasvan, V. (2009). Three lectures on neutral functional differential equations. Journal of Control Engineering and Applied Informatics, 11(1), 49-55.

[22] Rodriguez, S. A., Kharitonov, V., Dion, J. M., & Dugard, L. (2004). Robust stability of neutral systems: a Lyapunov–Krasovskii constructive approach.International Journal of Robust and Nonlinear Control, 14(16), 1345-1358.

[23] Velazquez-Velazquez, J. E, & Kharitonov, V. L. (2009). Lyapunov-Krasovskii functionals for scalar neutral type time delay systems. Systems & Control Letters, 58(1), 17-25.

[24] Wenzhang, H. (1989). Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 142(1), 83-94.