



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN NANOCIENCIAS Y MATERIALES

**Difracción Óptica, Integrales de Fresnel
y algunas Aplicaciones**

Tesis que presenta

Elizabeth Flores Garduño

Para obtener el grado de

Doctor en Nanociencias y Materiales

Director de la Tesis:

Dr. Haret Codratian Rosu Barbus

San Luis Potosí, S.L.P., Agosto de 2022



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Difracción Óptica, Integrales de Fresnel y algunas Aplicaciones** presentada para obtener el Grado de Doctor en Nanociencias y Materiales fue elaborada por **Elizabeth Flores Garduño** y aprobada el **13 de Julio de 2022** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Nanociencias y Materiales del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus
Director de tesis

Dr. Armando Encinas Oropesa
Asesor de la tesis

Dr. José Salomé Murguía Ibarra

Asesor de la tesis

Dr. Vicente Rodríguez González

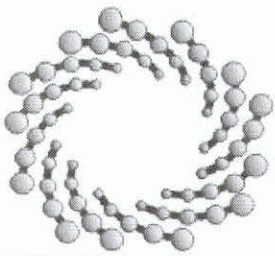
Asesor de la tesis



Créditos Institucionales

Esta tesis fué elaborada en la División de Nanociencias y Materiales del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección del Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (No. de registro: 335207) y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.



IPICYT

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Acta de Examen de Grado

La Secretaría Académica del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., certifica que en el Acta 028 del Libro Primero de Actas de Exámenes de Grado del Programa de Doctorado en Nanociencias y Materiales está asentado lo siguiente:

En la ciudad de San Luis Potosí a los 15 días del mes de agosto del año 2022, se reunió a las 16:30 horas en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., el Jurado integrado por:

Dr. Armando Encinas Oropesa	Presidente	IPICYT
Dr. Vicente Rodríguez González	Secretario	IPICYT
Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus	Sinodal	IPICYT
Dr. José Salomé Murguía Ibarra	Sinodal externo	UASLP

a fin de efectuar el examen, que para obtener el Grado de:

DOCTORA EN NANOCIENCIAS Y MATERIALES

sustentó la C.

Elizabeth Flores Garduño

sobre la Tesis intitulada:

Difracción Óptica, Integrales de Fresnel y algunas Aplicaciones

que se desarrolló bajo la dirección de

Dr. Haret-Codratian Rosu Barbus

El Jurado, después de deliberar, determinó

APROBARLA

Dándose por terminado el acto a las 19:00 horas, procediendo a la firma del Acta los integrantes del Jurado. Dando fe la Secretaría Académica del Instituto.

A petición de la interesada y para los fines que a la misma convengan, se extiende el presente documento en la ciudad de San Luis Potosí, S.L.P., México, a los 15 días del mes de agosto de 2022.

Mtra. Ivonne Lizette Cuevas Vélez
Jefa del Departamento del Posgrado

Dra. Lina Raquel Riego Ruiz
Secretaría Académica



IPICYT
SECRETARÍA ACADÉMICA
INSTITUTO POTOSINO DE
INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
Y TECNOLÓGICA, A.C.

Dedicatoria

Tú ayuda ha sido fundamental, has estado conmigo incluso en los momentos más turbulentos. Este proyecto no fué fácil pero estuviste motivándome y ayudandome hasta donde tus alcances lo permitían.

Te lo agradezco muchísimo

Agradecimientos

En la vida siempre buscamos agradecimientos,
de personas que normalmente nos han ayudado,
mucho más de lo que nosotros podamos haber imaginado,
cegados por creer que debemos admirarnos.

Es un error común el negar el reconocimiento,
a personas que valen mucho más que nosotros por dentro,
y es que no cuesta nada darles nuestro agradecimiento,
a alguien que tanto nos ha dado sin lamento.

Índice general

1. Descripción de la Teoría de Difracción Escalar	1
1.1. Principio de Huygens	2
1.2. Principio de Huygens-Fresnel	4
1.3. Teoría de la difracción escalar	6
1.4. Fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff (FK)	8
1.5. Difracción de Fraunhofer y Fresnel	10
1.6. Simplificación de la integral FK para el régimen de difracción paraxial.	15
2. Patrones de difracción en el régimen de Fraunhofer	18
2.1. Única Rendija	19
2.2. Abertura Rectangular y Cuadrada	21
2.3. Doble Rendija	25
2.4. Múltiples Rendijas	28
2.5. Abertura Circular	30
2.6. Fila de Múltiples Aberturas Circulares	32
3. Estudio de aberturas difractivas mediante el número de Fresnel	34
3.1. Desarrollo Matemático	37
3.1.1. Difracción de campo cercano para una abertura rectangular	37
3.1.2. Difracción de campo cercano para una abertura circular	41
3.1.3. Difracción de campo cercano para abertura triángular	45
3.2. Resultados y Análisis	48

4. Difracción óptica en el régimen de campo cercano en una rejilla estructurada	50
4.1. Fractal	51
4.2. Rejilla de Cantor	51
4.3. Irradiancia	52
4.4. Resultados y discusión de la distribución de intensidades en difracción de campo cercano mediante el número de Fresnel	55
4.5. Aplicación Análisis colorimétrico para diferentes rejillas rectangulares mediante la teoría de difracción escalar	57
4.5.1. Configuración del sistema	62
4.6. Descripción de una rendija plana y una rendija de Cantor	64
5. Movimiento bidimensional con las integrales de Fresnel como componentes de la velocidad	67
5.1. Antecedentes	67
5.2. Movimiento planar	71
5.2.1. Ecuaciones de movimiento para una esfera sólida y una esfera hueca.	76
5.3. Dinámica Rotacional usando la ecuación de Riccati	80
5.4. Jerk: algunas aplicaciones	84
5.5. Factorización de la ecuación de Fresnel y una aproximación Supersimétrica	86
6. Conclusiones	91
6.1. Conclusiones	91
6.2. Perspectivas	93
A. Artículos de Investigación producidos durante el doctorado	1
A.1. 1er. Artículo	1
A.2. 2do. Artículo	1
A.3. 3er. Artículo	1

Índice de figuras

1.1.	A la izquierda, rostro de Grimaldi en una estampilla de correo de la época. A la derecha, publicación de Grimaldi en <i>Physico-Mathesis de lumine, coloribus, et iride, aliisque annexis</i> .	2
1.2.	Construcción geométrica del principio de Huygens. A la izquierda: Representación de la difracción de una onda plana al pasar a través de una abertura. A la derecha: Representación de las ondas secundarias cuya envolvente funciona como fuente generadora.	3
1.3.	Derivación geométrica de la integral de Huygens-Fresnel.	4
1.4.	Geometría de la superficie de integración del teorema integral de Kirchhoff.	7
1.5.	Geometría para la formulación del teorema integral de Fresnel-Kirchhoff.	8
1.6.	Geometría para la formulación del teorema integral de Fresnel-Kirchhoff.	10
1.7.	Patrón de difracción de una única rendija para la región de Fresnel y de Fraunhofer, con diferentes valores del número de Fresnel.	11
1.8.	Geometría para obtener la curvatura del frente de onda para describir cuantitativamente los regímenes de difracción.	11
2.1.	Diseño experimental para observar la difracción de Fraunhofer.	19
2.2.	Geometría de una rendija única a la izquierda. Acercamiento para observar la diferencia de camino óptico en una única rendija a la derecha.	20
2.3.	Gráfico de la intensidad óptica de una sola rendija en la región de difracción de Fraunhofer.	21
2.4.	Geometría para la difracción de campo lejano de una abertura rectangular	21
2.5.	Representación de la intensidad óptica para una abertura cuadrada.	23
2.6.	Representación de la intensidad óptica para una abertura rectangular.	24
2.7.	Geometría para la difracción de campo lejano de una doble rendija	25

2.8. Intensidades ópticas para una doble abertura en el régimen de campo lejano, con diferentes valores de b y h	27
2.9. Geometría para la difracción de campo lejano de múltiples rendijas	28
2.10. Intensidades ópticas con múltiples aberturas para $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$. Con el tamaño de las rendijas de $b = 0,5$ y distancia de separación $h = 1,0$	30
2.11. Geometría para la difracción de campo lejano de una abertura circular.	31
2.12. Geometría para la difracción de una fila de aberturas circulares.	32
3.1. Representación gráfica de las variables involucradas en el plano de la abertura rectangular presentes en la intensidad óptica.	37
3.2. Resultados para la abertura rectangular y sus casos particulares de abertura cuadrada, única rendija y borde recto para el caso en que $N_F = 0,1$	39
3.3. Resultados para la abertura rectangular y sus casos particulares de abertura cuadrada, única rendija y borde recto para el caso en que $N_F = 1$	40
3.4. Resultados para la abertura rectangular y sus casos particulares de abertura cuadrada, única rendija y borde recto para el caso en que $N_F = 10$	41
3.5. Representación gráfica de las variables involucradas en el plano de la abertura circular presentes en la intensidad óptica.	42
3.6. Resultados para la abertura circular para el número de Fresnel $N_F = 0,1, 1, 10, 10$ y única rendija	44
3.7. Representación gráfica de las variables involucradas en el plano de la abertura triangular presentes en la intensidad óptica.	45
3.8. Patrón de difracción para una abertura triangular y sus correspondientes gráficas de contorno para cada uno de los casos para $N_F = 0,1, 1, 10$	47
4.1. Estructura Fractal y rejilla de difracción de Cantor de 3 niveles, donde S es el nivel de Cantor.	52
4.2. Planos de observación y de la rendija en una rejilla de Cantor.	53
4.3. Gráficos de irradiancia para una abertura rectangular en difracción de campo cercano (a) $N_F = 1$, (b) $N_F = 10$	55

4.4. Gráficos de irradiancia para una doble abertura rectangular en difracción de campo cercano (a) $N_F = 1$, (b) $N_F = 10$	56
4.5. Gráficos de irradiancia para una rejilla de Cantor con una secuencia de 5 niveles es decir $N = 1, 2, 3, 4, 5$ para $N_F = 1$	57
4.6. Gráficos de irradiancia para una rejilla de Cantor con una secuencia de 5 niveles es decir $N = 1, 2, 3, 4, 5$ para $N_F = 10$	58
4.7. Diseño estructural de generación de color por reflexión [1]	59
4.8. Descripción gráfica de Radiancia e Irradiancia	59
4.9. Diagrama cromático	62
4.10. Diagrama Cromático	62
4.11. Análisis cromático de una rendija plana	64
4.12. Rendija de Cantor Nivel 1	65
4.13. Rendija de Cantor Nivel 2	66
5.1. Representación del movimiento rotacional de un objeto rígido sobre una superficie bidimensional sin fricción.	68
5.2. A la izquierda se representa el gráfico de la posición cartesiana del centro de masa del objeto rígido. Mientras que a la derecha se muestra la velocidad cartesiana del centro de masa del objeto rígido, mostrado por Ferris-Prabhu a partir de la generalización matemática realizada.	72
5.3. Diagrama del planteamiento del problema del movimiento rotacional de un cuerpo rígido a un tiempo $t = 0$ y a un tiempo $t < t'$	73
5.4. Componentes cartesianos de la velocidad para $K = 1, 2, 3$ (rojo, verde, azul, respectivamente), y la fuerza y masa tomadas como 1. También se muestra la gráfica de Argand en la esquina izquierda y la velocidad en la esquina derecha $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$	74

5.5. Desplazamientos cartesianos $w_1 \equiv x(t)$ (arriba a la izquierda) y $w_2 \equiv y(t)$ para una partícula rígida restringida a un plano bajo la acción de un fuerza constante que actúa como se describe en el texto para $K = 1, 2, 3$. La posición en la superficie es $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$, concierne con respecto al origen en el tiempo t (centro izquierda). Las fluctuaciones en la dirección de la velocidad (flechas negras) en el curso del movimiento para los mismos valores de K (centro derecha e inferior). Tanto la fuerza como la masa se toman como unidad.	76
5.6. Diagrama del planteamiento del problema para la esfera sólida y para la esfera hueca.	77
5.7. Espiral a dos diferentes períodos donde los puntos representan el recorrido de longitud de arco que se recorre a una posición angular $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$	79
5.8. Representación gráfica de las posiciones cartesianas para la esfera sólida y para la esfera hueca.	80
5.9. Distorsión de Darbux para varias fases	88
5.10. Espiral de Cornu para la ecuación de Riccati correspondiente a las parejas supersimétricas: ecuación (5.53) gráfica central y ecuación (5.57) para los demas casos de las gráficas	89
5.11. Pareja Supersimétric de espirales de Cornu	90

Índice de tablas

5.1. Tabla de valores de las coordenadas cartesianas de las velocidades, su longitud de arco y la velocidad total para cada posición angular $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ y 2π para una esfera sólida y una esfera hueca.	78
--	----

Resumen

El presente documento expone el desarrollo matemático a partir de una ecuación analítica en el campo de la óptica con la cual es posible realizar el estudio del fenómeno de difracción para los dos regímenes de difracción existentes, los cuales son la difracción de campo cercano o régimen de Fresnel y la difracción de campo lejano o régimen de Fraunhofer. Dicho tratado se ejecuta dentro de la aproximación paraxial mediante la teoría de la difracción escalar. A diferencia de lo que se estudia en la literatura habitual concerniente a este campo de la física, el análisis que se presenta se realiza mediante la implementación de un parámetro conocido como Número de Fresnel, el cual a parte de favorecer al estudio del fenómeno de la difracción sin implicar el tipo de régimen en cuestión, también combina los parámetros esenciales que se establecen en cualquier situación donde se presenta el fenómeno de difracción.

Como presentación preliminar, se expone el desarrollo de los acontecimientos históricos que dieron lugar al descubrimiento del fenómeno de difracción, así como se desarrollaron los principios físicos tanto teóricos como experimentales para el estudio y comprensión del fenómeno de difracción. De tal forma que se desarrolla una deducción y simplificación matemática a partir de ciertas consideraciones geométricas realizadas a partir de un diseño experimental básico para el estudio del fenómeno de difracción. Concluyendo con la obtención de la conocida fórmula de Fresnel-Kirchhoff. Además se detallan los diferentes parámetros concernientes al mismo estudio tanto teórico como experimental de la difracción.

Una parte importante en el estudio de la difracción bajo el tratamiento con el número de Fresnel es el uso de la geometría de los dispositivos analizados, de esta manera se evidencia la importancia de la geometría en el uso de las rejillas de difracción para la creación de los patrones de difracción, esto dentro del rango de la difracción en el régimen de Fraunhofer. Inicialmente utilizamos dos geometrías básicas para su comprobación, siendo una de estas geometrías la rejilla rectangular, con sus diferentes estribaciones como lo son: la única rendija, la doble rendija, la múltiple rendija, la rejilla cuadrada. Y la segunda geometría

implementada es la rejilla circular, con sus estribaciones como la única rendija circular, la doble rendija circular y la múltiples rendijas circulares, obteniendo un análisis similar al obtenido en esta rama de la física, pero bajo un desarrollo novedoso.

Se muestra que el desarrollo y la simplificación de la ecuación de Fresnel-Kirchhoff en la teoría de la difracción escalar bajo la aproximación paraxial, se puede generalizar implementando el Número de Fresnel como parámetro principal de la ecuación. Aunado a ello, se obtiene como resultado las integrales de Fresnel en términos del mismo parámetro del Número de Fresnel. Con todo ello es posible dar una nueva interpretación al fenómeno de difracción, tanto para el régimen cercano como lejano, solo ocupando el parámetro mencionado. Donde se generaliza el tratamiento para rejillas rectangulares, circulares (a través de las funciones de Lommel descritas mediante este parámetro) y rejillas triangulares, siendo estas últimas muy poco estudiadas.

Como reflejo del estudio y tratamiento realizado se emplea la ecuación de Fresnel-Kirchhoff parametrizada mediante el Número de Fresnel con el objetivo de detallar el estudio completo del régimen de difracción en el régimen de campo cercano donde este tipo de análisis se extiende a rejillas de tipo fractal, en específico a estructuras de Cantor que nos presentan aplicaciones muy interesantes en el área de la colorimetría, particularmente en la generación del color por medio de estructuras geométricas difractivas (Color estructural). En este documento se presenta el análisis de la radiancia y la irradiancia de una rejilla de Cantor de diferentes niveles, y con los resultados se calculan las coordenadas cromáticas con la finalidad de conocer que sistema de color y/o colores se obtienen mediante la geometría del sistema.

De igual forma, la ecuación de Fresnel utilizada, no sólo se puede ocupar para hacer una descripción de sistemas ópticos, sino también, para hacer descripciones de movimiento, comúnmente utilizadas en movimiento rotacional, donde en este documento describimos una generalización de movimiento de objetos, bajo el tratamiento de la matemática usada en las integrales de Fresnel, de tal manera, que la interpretación de las integrales de Fresnel me-

diante la espiral de Cornu, que se obtiene de las mismas nos dan un cambio en los momentos de inercia de los objetos analizados en este tratamiento, además que se puede obtener un tratamiento que se puede aplicar a otra rama de la física, especialmente de partículas denominada supersimetría, pero bajo un tratamiento de factorización.

Abstract

This document exposes the mathematical development from an analytical equation in the field of optics with which is possible to carry out the study of the diffraction phenomenon for the two existing diffraction regimes, which are the near field diffraction or Fresnel regime and the far field diffraction or Fraunhofer regime.

This treatise is executed within the paraxial approximation by means of the scalar diffraction theory. Unlike what is studied in the usual literature concerning this field of physics, the analysis presented is carried out by implementing a parameter known as Number of Fresnel, which apart from favoring the study of the diffraction phenomenon without implying the type of regime in question, also combines the essential parameters that are established in any situation where the phenomenon of diffraction occurs.

As a preliminar presentation, the development of the historical events that gave rise to the discovery of the diffraction phenomenon is exposed, as well as the development of the physical principles, both theoretical and experiments for the study and understanding of the diffraction phenomenon. In such a way that a mathematical deduction and simplification is developed from certain geometric considerations made from a basic experimental design for the study of the diffraction phenomenon. Concluding with obtaining the well-known Fresnel-Kirchhoff formula. In addition, the different parameters concerning the same study, both theoretical and experimental, of diffraction are detailed.

An important part in the study of the diffraction under the treatment with the Fresnel number is the use of the geometry of the analyzed devices, in this way the importance of the geometry is evidenced in the use of diffraction gratings for the creation of diffraction patterns, this within the range of diffraction in the Fraunhofer regime. Initially we used two basic geometries for its verification, one of these geometries being the rectangular grid, with its different foothills such as: the single slit, the double slit, the multiple slit and the square

grid. And the second implemented geometry is the circular grid, with its foothills as the single circular slit, the double circular slit and the multiple circular slits, obtaining an analysis similar to that obtained in this branch of Physics, but under a novel development.

It is shown that the development and simplification of the Fresnel-Kirchhoff equation in scalar diffraction theory under the paraxial approximation can be generalized by implementing the Fresnel Number as the main parameter of the equation. In addition to this, the Fresnel integrals are obtained as an argument in terms of the same parameter of the Fresnel Number. With all this it is possible to give a new interpretation to the diffraction phenomenon, both for the near and far regime optical diffraction, only using the mentioned parameter. Where the treatment is generalized for rectangular, circular grids (through the Lommel functions described by this parameter) and triangular grids, the latter being very little studied.

As a reflection of the study and treatment carried out, the Fresnel-Kirchhoff equation parameterized by the Fresnel Number is used with the aim of detailing the complete study of the diffraction regime in the near field regime where this type of analysis extends to fractal-type grids, specifically to Cantor structures that present us with very interesting applications in the area of colorimetry, particularly in the generation of color by means of diffractive geometric structures (structural color). In this document the analysis of the radiance and the irradiance of a Cantor grid of different levels is presented, and with the results the chromatic coordinates are calculated in order to know which color system and/or colors are obtained by means of the geometry of the system.

In the same way, the Fresnel equation used, not only can be used to make a description of optical systems, but also, to make descriptions of movement, commonly used in rotational movement, where in this document we describe a generalization of movement of objects, under the treatment of the mathematics used in the Fresnel integrals, in such a way that the interpretation of the Fresnel integrals by means of the Cornu's spiral, which is obtained from them, gives us a change in the moments of inertia of the objects analyzed in this treatment, in addition to obtaining a treatment that can be applied to another branch of physics, especially

of particles called supersymmetry, but under a factorization treatment.

Capítulo 1

Descripción de la Teoría de Difracción

Escalar

Si un objeto opaco se coloca entre una fuente de luz y una pantalla, en esta se observa que la sombra que se proyecta del objeto esta lejos de ser nítida. Esta observación contradice el hecho de que la luz viaja en línea recta, tal como lo predice la óptica geométrica. Un análisis más detallado cerca de los bordes revela que existe una formación de franjas donde hay zonas de luz y zonas de sombra que siguen la geometría del objeto [2].

Este fenómeno le fué atribuido al carácter ondulatorio de la luz y fué observado por primera vez en 1648 por el físico y matemático italiano Francesco María Grimaldi (1618-1663), otorgandole el nombre de **diffractio**, que proviene del latín “dif-frangere (romperse en otras direcciones)” [3]. En 1665, Grimaldi publicó sus observaciones en **Physico-Mathesis de lumine, coloribus, et iride, aliisque annexis**(que significa matemáticas físicas sobre la luz, los colores y el arcoíris, y otros anexos) [4].

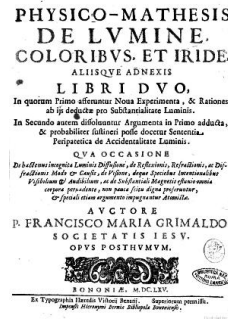


Figura 1.1: A la izquierda, rostro de Grimaldi en una estampilla de correo de la época. A la derecha, publicación de Grimaldi en Physico-Mathesis de lumine, cloribus, et iride, aliisque annexis.

1.1. Principio de Huygens

Christian Huygens (1629-1695), fue un científico holandés entusiasta por la teoría ondulatoria de la luz que fue propuesta por primera vez por Robert Hooke (1635-1703) [5]. Para explicar el fenómeno de difracción, Huygens propuso una construcción geométrica la cual es conocida como el **Principio de Huygens (HP)** en la cuál se considera que:

Cada punto de un frente de onda actúa como una onda esférica secundaria que se esparce en todas direcciones, y la envolvente de todas estas ondas secundarias es un nuevo frente de onda. [6]

Esta consideración implica que todos los puntos del frente de onda se pueden entender como fuentes puntuales que crean un frente de onda secundario. En otras palabras el frente de onda original puede ser ignorado y el frente de onda secundario por si mismo puede ser considerado como una nueva fuente de frentes de ondas para todos los frentes de onda subsecuentes. [5]

El enunciado de este principio de Huygens no tiene una expresión matemática. Y no sería hasta el año 1818, que Augustin Jean Fresnel planteara una representación matemática a este principio [7]. No obstante, fue a través de la formulación matemática de los campos escalares realizada por Gustav Kirchhoff en 1882 y la formulación matemática de los campos vectoriales realizada por Stratton y Chu en 1939, donde la expresión matemática para el principio de Huygens fue puesta en una base matemática sólida, donde Kirchhoff logró

mostrar que las amplitudes y fases atribuidos a las fuentes secundarias de Huygens-Fresnel eran una consecuencia lógica de la naturaleza ondulatoria de la luz [5, 7].

Para verificar como el principio de Huygens explica el fenómeno de difracción, considere un medio homogéneo donde se propaga un frente de onda esférico que se aproxima a un obstáculo desde la izquierda a un tiempo t , y este obstáculo contiene una abertura que es menor a la longitud de onda de la misma onda. Después de pasar por la abertura en un tiempo $t + \Delta t$ el frente de onda habrá dado lugar a pequeños frentes de onda esféricos, la suma de las ondas secundarias producen un nuevo frente de onda, en el instante $t + \Delta t$, que coincide con la envolvente de todos los pequeños frentes de onda y por tanto, será una superficie esférica concéntrica con el frente de onda primario. [6–8]

Sin embargo, esta teoría tiene el defecto de **no** poder explicar por qué las ondas secundarias se propagan en la dirección de la onda primaria y no hacia atrás [6,9]. Esta dificultad fue resuelta por Fresnel al demostrar matemáticamente que las ondas en retroceso tienen energía nula y, por tanto, así se explica que las ondas primarias no se propaguen hacia atrás.

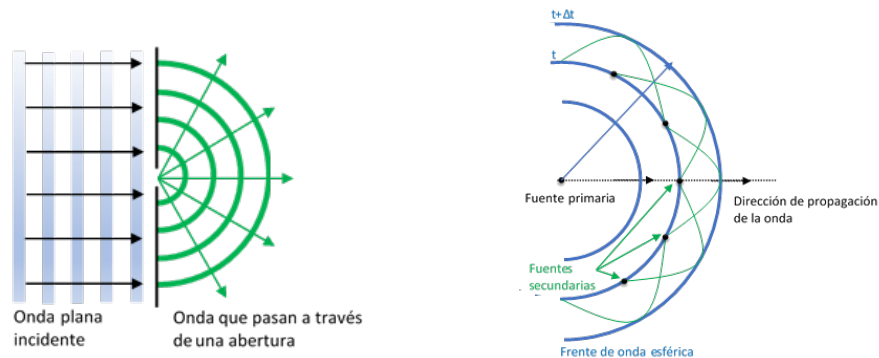


Figura 1.2: Construcción geométrica del principio de Huygens. A la izquierda: Representación de la difracción de una onda plana al pasar a través de una abertura. A la derecha: Representación de las ondas secundarias cuya envolvente funciona como fuente generadora.

1.2. Principio de Huygens-Fresnel

El físico e ingeniero francés Augustin Fresnel (1788-1827), se dió cuenta de que podía extender el postulado de Huygens considerando que las ondas secundarias interfieren mutuamente entre sí. Esta combinación entre la construcción de Huygens con el principio de interferencia se le conoce como el **Principio de Huygens-Fresnel** [8].

Considere una fuente puntual P_0 , la cual genera una perturbación que consideraremos una onda esférica monocromática de radio r_0 , con número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, donde λ es la longitud de onda. La perturbación de esta fuente puntual esta descrita por una variable compleja U_0 que es una **amplitud compleja** de la onda, conocida como **perturbación óptica** [10]. Entonces la perturbación de la onda primaria en un punto cualquiera Q del frente de onda es

$$U(r_0) \propto \frac{U_0 e^{ikr_0}}{r_0} . \quad (1.1)$$

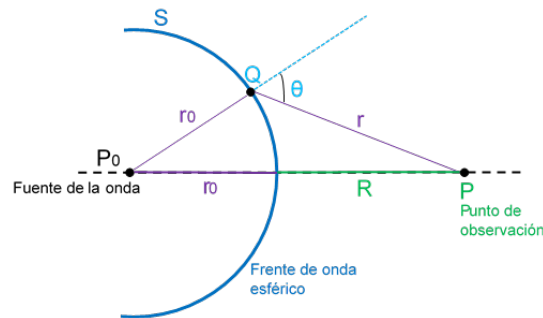


Figura 1.3: Derivación geométrica de la integral de Huygens-Fresnel.

Usando la **teoría de Huygens** y el **principio de superposición** de ondas, la perturbación óptica en un punto de observación P , se obtiene de la suma de las contribuciones de cada uno de los puntos de la onda esférica de radio r_0 . Así Fresnel encontró que cada una de las contribuciones individuales de las ondas secundarias de la onda esférica se tienen que multiplicar por una constante $-\frac{i}{\lambda}$, y por un factor de inclinación $\kappa(\theta)$, mejor conocido como **Factor de Oblicuidad** que fue principalmente introducido por Kirchhoff. Esta consideración implica que las ondas secundarias oscilan a un cuarto de ciclo fuera de fase con respecto a la onda primaria. Así mismo se considera que $\kappa(\theta)$ tiene un valor máximo cuando $\theta = 0$, y $\kappa = 0$ cuando $\theta = \pi/2$, donde θ es el ángulo entre la normal del frente de onda de la onda primaria y la normal del frente de onda de la onda secundaria. Así la perturbación óptica en un punto P [8, 10], debida a la contribución de las ondas secundarias está dada por

$$U_P = -\frac{i}{\lambda} U(r_0) \int_S \frac{e^{ikr}}{r} \kappa(\theta) dS, \quad (1.2)$$

donde S es la superficie de la esfera y r es la distancia entre Q y P . Después de varias consideraciones realizadas por Fresnel, la deducción del factor de oblicuidad emerge de manera automática en la formulación para la difracción de Fresnel-Kirchhoff, tal como se expondrá en la sección subsecuente. Así la expresión para $\kappa(\theta)$, queda dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta), \quad (1.3)$$

en donde κ efectivamente tiene un máximo en $\theta = 0$, como lo predice el principio de Huygens-Fresnel. Sin embargo, κ no es igual a cero en $\frac{\pi}{2}$, pero alcanza el cero cuando $\theta = \pi$.

En las secciones subsecuentes se presenta como se obtiene la expresión matemática de la ecuación (1.3), mediante la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff y el significado físico del factor de oblicuidad dentro del estudio del fenómeno de la difracción.

1.3. Teoría de la difracción escalar

A partir de la ecuación de Helmholtz [9]

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + k^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.4)$$

donde φ representa una perturbación óptica considerada como variable compleja dependiente de la posición \mathbf{r} . Y como es bien sabido la ecuación de Helmholtz es una ecuación de onda que nos permite caracterizar el movimiento de una perturbación óptica en un medio homogéneo (para k constante).

Para resolver la ecuación (1.4), se utiliza el segundo teorema de Green [11], considerando que $u = u(\mathbf{r})$ y $v = v(\mathbf{r})$ son dos funciones escalares dependientes de la posición \mathbf{r} , entonces

$$\int \int_S (v \nabla u - u \nabla v) \cdot dS = \int \int \int_V (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dV \quad (1.5)$$

donde ∇u y ∇v representa el gradiente de la función u y v respectivamente, dS es la diferencial de área y dV es una diferencial de volumen.

Recordando que u y v , son soluciones de la ecuación de Helmholtz [9], entonces satisfacen la condición

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + k^2 u &= 0, \\ \nabla^2 v + k^2 v &= 0, \end{aligned}$$

entonces inmediatamente se sigue que:

$$\int \int_S (v \nabla u - u \nabla v) \cdot dS = 0. \quad (1.6)$$

Si $u = u(\mathbf{r})$, una perturbación óptica escalar no específica [9], y si consideramos $v = v_0 \frac{e^{i(kr + \omega t)}}{r}$ una función de onda esférica, donde r es el radio de la onda esférica, tal como se muestra en la Figura 1.4. Entonces existe una singularidad en el punto P cuando $r = 0$, de tal

modo que se delimita esta singularidad mediante una esfera de radio ρ menor a la de la esfera r , esto es $\rho < r$. Con el fin de evitar esta singularidad, así la ecuación (1.3), se reescribe como

$$\iint \left(\frac{e^{ikr}}{r} \nabla u - u \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS - \iint \left(\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \right)_{r=\rho} \rho^2 d\Omega = 0 \quad (1.7)$$

donde $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido de la esfera centrada en P y $\rho^2 d\Omega$ es el correspondiente elemento de área.

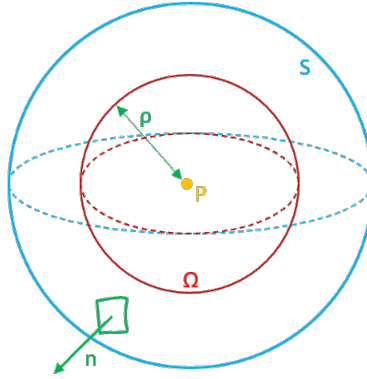


Figura 1.4: Geometría de la superficie de integración del teorema integral de Kirchhoff.

Notemos que de la ecuación (1.7), cuando $\rho \rightarrow 0$ y factorizando el término $v_0 e^{i\omega t}$, entonces la segunda integral se aproxima al valor de u en el punto P , al que se le nombra U_P . Obteniendo así

$$\iint \left(\frac{e^{ikr}}{r} \nabla u - u \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS - 4\pi U_P = 0 \quad (1.8)$$

es decir,

$$U_P = -\frac{1}{4\pi} \iint \left(u \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla u \right) dS. \quad (1.9)$$

Esta ecuación se conoce como **Teorema Integral de Kirchhoff** [6] o **Teorema de Helmholtz-Kirchhoff** a la difracción. Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), fué un físico alemán que contribuyó al entendimiento de los fundamentos en el estudio de la difracción en óptica resolviendo cautelosamente la ecuación de onda para proporcionar una base sólida al principio

de Huygens [12], obteniendo así la ecuación (1.9) la cual es la base de cualquier calculo de difracción escalar. A partir de esta ecuación es posible modelar el fenómeno de propagación de la luz en una amplia gama de configuraciones, ya sea de manera analítica o usando métodos numéricos. En resumen el origen de las teorías de difracción escalar parten del **Teorema de Green**, en el cual se expresa una perturbación óptica U en algún punto de observación P en términos de sus valores en la superficie del frente de onda [13].

1.4. Fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff (FK)

Considerando \vec{r}' el vector que va de la fuente S a un punto P_1 de la abertura a , \vec{r} el vector que va del punto P_1 de la abertura a un punto de observación P y \hat{n} un vector unitario normal a la abertura a [14]. Tal como se muestra en la Figura (1.5).

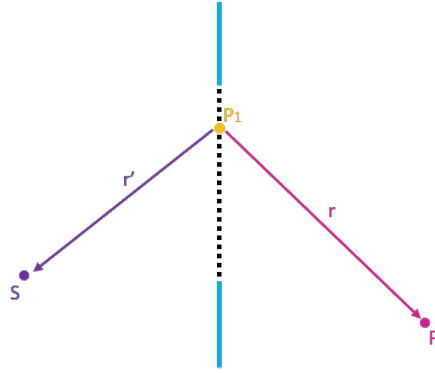


Figura 1.5: Geometría para la formulación del teorema integral de Fresnel-Kirchhoff.

Sustituyendo una perturbación óptica esférica $u = u_0 \frac{e^{i(kr' - \omega t)}}{r'}$ en el teorema integral de Kirchhoff [2], la ecuación (1.9) cambia a

$$U_P = -\frac{u_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) dS. \quad (1.10)$$

Por definición de gradiente de una función, se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \frac{e^{ikr}}{r} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \\ &= \cos(\hat{n}, \vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

y

$$\begin{aligned}\nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} &= \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ikr'}}{r'} \hat{r}' \\ &= \cos(\hat{n}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ikr'}}{r'} ,\end{aligned}\tag{1.12}$$

donde \hat{r} y \hat{r}' son vectores unitarios, (\hat{n}, \vec{r}) , es el ángulo entre los vectores \hat{n} y \vec{r} , y (\hat{n}, \vec{r}') es el ángulo entre los vectores \hat{n} y \vec{r}' , así

$$\nabla \frac{e^{ikr}}{r} = \left[\frac{ike^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right] \cos(\hat{n}, \vec{r}) ,\tag{1.13}$$

$$\nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} = \left[\frac{ike^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'^2} \right] \cos(\hat{n}, \vec{r}') ,\tag{1.14}$$

estas dos últimas expresiones se sustituyen en la ecuación (1.10), donde se obtiene que la perturbación óptica en el punto P , está dada por

$$U_P = -\frac{ike^{-i\omega t}}{4\pi} \iint_{abertura} u_0 \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \kappa(\theta) dS .\tag{1.15}$$

Donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda, λ es la longitud de la onda, u_0 es la perturbación óptica de la fuente, ω es la frecuencia de la onda. El factor $\kappa(\theta) = \cos(\hat{n}, \vec{r}) - \cos(\hat{n}, \vec{r}')$ es el **factor de oblicuidad**, que como se ha visto se ha obtenido de manera natural mediante esta formulación FK. Recordemos que la superficie de integración se toma de la superficie de un frente de onda esférico que pasa a través de una abertura, en este caso \vec{r}' es constante y entonces el ángulo $\cos(\hat{n}, \vec{r}') = -1$, entonces el factor de oblicuidad cambia a $\kappa(\theta) = \cos(n, r) + 1$. [2, 14]

La ecuación (1.15), es conocida como la **Fórmula Integral de Fresnel-Kirchhoff (FK)** siendo esta ecuación el cimiento en el desarrollo de los resultados que se presentan en capítulos subsecuentes. Cabe recalcar que la teoría de la difracción escalar es lo suficientemente rigurosa para explicar la mayoría de los fenómenos relacionados a ella, prescindiendo del carácter vectorial de los campos electromagnéticos de la luz. La clave de que la teoría escalar funcione se debe a que se considera que las dimensiones de las aberturas son de mayor

magnitud que la longitud de onda de la luz, y bajo esta condición los efectos de polarización del campo electromagnético se vuelven una información de la cual es posible excluir y, por tanto, se puede prescindir del formalismo vectorial. [15]

1.5. Difracción de Fraunhofer y Fresnel

Imaginemos un obstáculo con una abertura a iluminada por una fuente de onda en el punto P_0 , y un plano de observación P que es una pantalla paralela a a . Se proyecta sobre la pantalla una imagen de la abertura, al que llamaremos **patrón de difracción**.

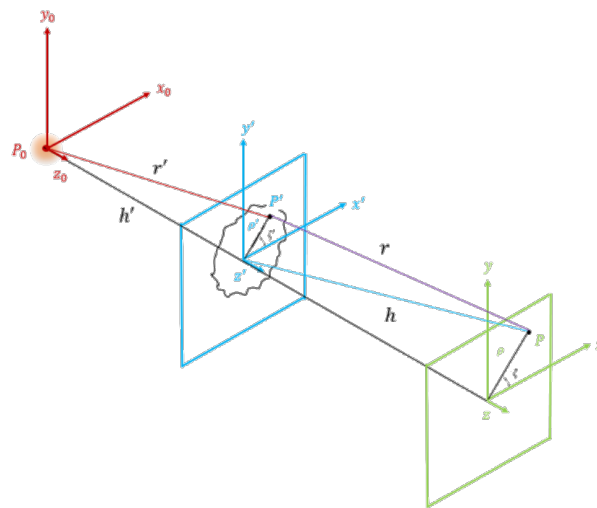


Figura 1.6: Geometría para la formulación del teorema integral de Fresnel-Kirchhoff.

De manera **cuantitativa** diremos que se observa una **Difracción de Fraunhofer** o de **Campo Lejano** cuando las ondas incidentes y difractadas se consideran planas, es decir, tanto la fuente P_0 como el punto de observación P están lo suficientemente alejadas de la abertura a [2, 9]. De manera análoga se considera **Difracción de Fresnel** o **Campo Cercano**, cuando es significativa la curvatura de las ondas incidentes y difractadas, esto es, el punto de observación P está lo suficientemente cerca de la abertura a [2, 9].

En la Figura (1.7), se muestra de manera **cuantitativa** la diferencia entre las regiones de difracción de campo cercano y de campo lejano mediante las representaciones gráficas de

la intensidad óptica para diferentes valores del **Número de Fresnel**, el cual es un parámetro adimensional en los que se encuentran relacionados las variables experimentales z que es la distancia entre la abertura o rendija y el plano de observación, λ que es la longitud de onda de la fuente luminosa y a que representa el área de la abertura.

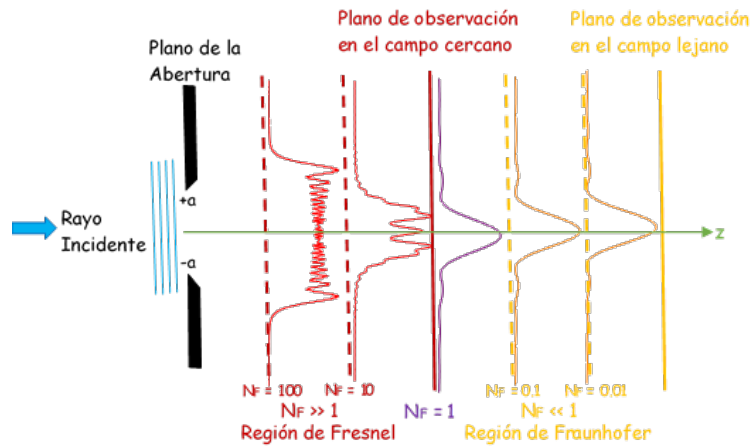


Figura 1.7: Patrón de difracción de una única rendija para la región de Fresnel y de Fraunhofer, con diferentes valores del número de Fresnel.

Para identificar de manera **cuantitativa** entre las dos regiones de difracción, se hace uso de los siguientes conceptos:

- **Curvatura del frente de onda:**

Considere el esquema de la Figura (1.8)

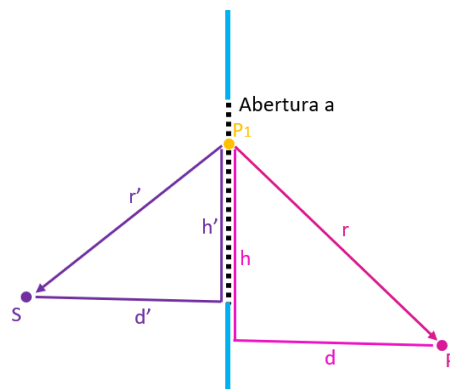


Figura 1.8: Geometría para obtener la curvatura del frente de onda para describir cuantitativamente los regímenes de difracción.

Siendo S una fuente luminosa, d' es la distancia de la fuente a la abertura perpendicular a la misma, h' es la altura entre el eje perpendicular d' y un punto cualquiera de la abertura, P es el punto de observación, d es la distancia perpendicular entre la abertura y el punto de observación, h es la altura entre el eje perpendicular d y un punto cualquiera de la abertura, y finalmente a es el tamaño de la abertura. A partir de la Figura (1.8), se ve que la variación Δ de la cantidad $r + r'$ de un borde de la abertura al otro esta dado por

$$\Delta = \sqrt{d'^2 + (h'^2 + a^2)} - \sqrt{d'^2 + h'^2} + \sqrt{d^2 + (h^2 + a^2)} - \sqrt{d^2 + h^2}, \quad (1.16)$$

usando la primera aproximación de la expansión binomial de la raíz cuadrada

$$\left((1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{x}{2} \right),$$

la ecuación (1.16) se cambia a la forma

$$d' \left(1 + \frac{(h' + a)^2}{2d'^2} \right) + d \left(1 + \frac{(h + a)^2}{2d^2} \right) - d' \left(1 + \frac{h'^2}{2d'^2} \right) - d \left(1 + \frac{h^2}{2d^2} \right), \quad (1.17)$$

desarrollando, simplificando y factorizando los términos de la ecuación (1.17) se obtiene

$$a \left(\frac{h'}{d'} + \frac{h}{d} \right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) + \dots, \quad (1.18)$$

donde el término cuadrático mide la **curvatura del frente de onda**, éste término debe ser menor con respecto a la longitud de onda para que se considere difracción en el régimen de Fraunhofer [2], es decir

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) a^2 \ll \lambda, \quad (1.19)$$

por el contrario si la desigualdad se invierte se dice que se considera la difracción en el régimen de Fresnel [2], esto es

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} \right) a^2 \gg \lambda . \quad (1.20)$$

Si se tiene una longitud de onda cualquiera λ y si suponemos que d' y d son lo suficientemente grandes, es decir $d' \rightarrow \infty$ y $d \rightarrow \infty$, esto implica que $\frac{1}{d'} \rightarrow 0$ y $\frac{1}{d} \rightarrow 0$, entonces no importa el tamaño de la abertura a , la cantidad $\left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}\right) a^2 \rightarrow 0$, y esto será siempre mucho menor que la longitud de onda λ por muy pequeña que ésta sea, satisfaciéndose así la difracción de campo lejano o de Fraunhofer.

Por el contrario si suponemos que d' y d son lo suficientemente pequeñas, esto es $d' \rightarrow 0$ y $d \rightarrow 0$, entonces $\frac{1}{d'} \rightarrow \infty$ y $\frac{1}{d} \rightarrow \infty$, de igual manera no importa el tamaño de la rendija la cantidad $\left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}\right) a^2 \rightarrow \infty$ y esto será mucho mayor que la longitud de onda λ por muy grande que ésta sea, satisfaciéndose así la difracción de campo cercano o de Fresnel.

- **Número de Fresnel:**

El **número de Fresnel** N_F , es un número adimensional, que depende del diámetro de la abertura o rendija por la que atraviesa, el radio de curvatura de la fase del frente de onda, y de la distancia entre la abertura o rendija y el punto de observación [16]. Si un haz es perfectamente colimado, tendrá un número de Fresnel dado por la expresión [16]

$$N_F = \frac{2}{\lambda} \left[\sqrt{d^2 + a^2} - d \right] = \frac{2d}{\lambda} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{d^2}} - 1 \right] \quad (1.21)$$

usando la primera aproximación de la expansión binomial de la raíz cuadrada, el número de Fresnel se simplifica por

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda d} \quad (1.22)$$

donde a es el tamaño radial de la abertura por la que atraviesa el haz, d es la distancia de la abertura al punto de observación y λ es la longitud de onda incidente. Notese que el número de Fresnel es inversamente proporcional a la distancia d , esto es, cuando d es grande, es decir el punto de observación está lo suficientemente alejado de la abertura, el número de Fresnel N_F será pequeño, y viceversa, cuando d es pequeña, es decir cuando la distancia entre la abertura y el punto de observación esten cerca, el número de Fresnel N_F será grande.

Por ejemplo, si se tiene una abertura de 1 mm y se hace incidir un haz de He-Ne de longitud de onda de $632,8\text{ nm}$, y si $d = 0,01\text{ m}$ entonces $N_F = 158$, esto quiere decir que nos encontramos en un régimen de difracción de campo cercano. Ahora si $d = 1\text{ m}$ entonces $N_F = 1,58$, lo que nos indica que entramos en una fase entre el régimen de difracción de campo cercano y campo lejano. Y si $d = 10\text{ m}$ entonces $N_F = 0,158$, implica que estamos totalmente en un régimen de difracción de campo lejano.

En esencia si el número de Fresnel es mucho menor que 1 ($N_F \ll 1$) se considera que el régimen de difracción es de campo lejano, pero si el número de Fresnel es mayor o cerca de 1 ($N_F \gtrsim 1$) se considera que régimen de difracción es de campo cercano [16]. Esto es

$$N_F \begin{cases} \ll 1, & \text{entonces se considera campo lejano o régimen de Fraunhofer} \\ \gtrsim 1, & \text{entonces se considera campo cercano o régimen de Fresnel} \end{cases}$$

Como dato curioso cabe mencionar que es posible encontrar el número de Fresnel a partir de la ecuación de curvatura del frente de onda, realizando las siguientes consideraciones:

- Si $d = d'$ entonces para el régimen de difracción de campo lejano se tiene que $\frac{a^2}{\lambda d} \ll 1$, es decir $N_F \ll 1$. De manera análoga para el régimen de difracción de campo cercano $\frac{a^2}{\lambda d} \gg 1$, esto es $N_F \gg 1$. Cumpliendose la condición de número de Fresnel descrita anteriormente.

- Ahora si se considera que $d' \rightarrow \infty$, se tiene que $\frac{a^2}{\lambda d} \ll 2$ y $\frac{a^2}{\lambda d} \gg 2$ para el caso de difracción de campo lejano y campo cercano respectivamente. Ahora si renombramos $N_F = \frac{a^2}{2\lambda d}$, obtenemos que se cumple la condición del número de Fresnel descrita anteriormente.
- Ahora si $d \neq d'$, para difracción de campo lejano tendríamos que

$$N_{F_q} = \frac{a^2}{\lambda d'} \ll \frac{2}{1 + \frac{d'}{d}} = \frac{2}{1 + q}$$

Analogamente, para difracción de campo cercano

$$N_{F_q} = \frac{a^2}{\lambda d'} \gg \frac{2}{1 + \frac{d'}{d}} = \frac{2}{1 + q}$$

definiendo $q = 1 + \frac{d'}{d}$, como un parámetro que depende de la distancia que existe entre la fuente y la abertura (d') y la abertura y el punto de observación (P).

1.6. Simplificación de la integral FK para el régimen de difracción paraxial.

Hemos visto que en la teoría de difracción escalar existen dos regímenes paraxiales, el campo cercano y el campo lejano, donde las teorías de Fresnel y Fraunhofer son válidas respectivamente [2, 17–19]. Como ya se ha visto la formulación matemática de ambos regímenes se hace a través de la ecuación de Helmholtz, cuya solución se puede expresar en la forma de la integral de Fresnel-Kirchhoff (FK),

$$U_P(x, y, z) = -\frac{ike^{-i\omega t}}{4\pi} \kappa(\theta) \iint_{abertura} U_0(x', y', 0) \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} dS, \quad (1.23)$$

donde $U_P(x, y, z)$ es la perturbación óptica en el punto de observación P , $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda, λ es la longitud de onda, ω es la frecuencia de la onda, t es el tiempo, $\kappa(\theta)$ es el factor de oblicuidad, $U_0(x', y', 0)$ es la perturbación óptica inicial debido a la fuente, r' es la

distancia que existe de la fuente a la abertura y r es la distancia que hay de la abertura al punto de observación.

Es posible simplificar la ecuación (1.23), haciendo las siguientes consideraciones para el régimen paraxial:

1. Por simplicidad se considera una iluminación uniforme para las aberturas, lo que implica que $U_0(x', y', 0) = 1$.
2. Por otro lado, veamos que $r' = \sqrt{\rho'^2 + h'^2}$, donde $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, entonces

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + h'^2}, \\ &= h' \sqrt{1 + \frac{x'^2 + y'^2}{h'^2}}, \end{aligned}$$

notemos que $h' \gg x'^2 + y'^2$, con lo que $\frac{x'^2 + y'^2}{h'^2} \rightarrow 0$, lo que implica que $r' \approx h'$. Esto quiere decir, que el factor $\frac{e^{ikr'}}{r'} \approx \frac{e^{ikh'}}{h'}$ es practicamente un valor constante y por ende puede salir fuera de la integral.

3. Por último, utilizando la primera aproximación en la expansión binomial de la raíz cuadrada en el factor r [17].

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}, \\ &= \sqrt{z^2 \left(1 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{z^2} \right)}, \\ &\approx z \left(1 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z^2} \right), \end{aligned}$$

entonces el factor $\frac{e^{ikr}}{r}$ se puede reescribir

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{r} &\approx \frac{e^{ik \left[z \left(1 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z^2} \right) \right]}}{z \left(1 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} \right)}, \\ &\approx \frac{e^{ik \left[z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} \right]}}{\left[z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} \right]}, \end{aligned}$$

como se considera una aproximación paraxial se tiene $z^3 \approx \frac{4}{\pi\lambda}[(x-x')^2 + (y-y')^2]$ [18], lo que implica que la variación del factor $\frac{e^{ikr}}{r}$ sobre la abertura proviene principalmente de la parte exponencial e^{ikr} , con lo que el factor $\frac{1}{r}$ puede llevarse fuera de la integral.

Aplicando las consideraciones anteriores a la ecuación (1.23), la ecuación integral de Fresnel-Kirchhoff para cualquier geometría en la abertura queda expresada como

$$U_P(x, y, z) = -i \frac{C_U}{2\lambda} \iint_{abertura} e^{ikr} dS, \quad (1.24)$$

usando $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, y $C_U = \frac{U_0 e^{-i\omega t} e^{ikr'}}{rr'}$ $\kappa(\theta)$, un término constante.

Aquí cabe señalar que en la aproximación binomial del término $r \approx z + \frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx'+yy'}{z} + \frac{x'^2+y'^2}{2z}$, la región de difracción que incluye los tres primeros términos $z + \frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx'+yy'}{z}$, corresponde a la región de difracción de campo lejano o de Fraunhofer. Mientras que la región que incluye los primeros 4 términos $z + \frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx'+yy'}{z} + \frac{x'^2+y'^2}{2z}$, corresponde a la región de difracción de campo cercano o difracción de Fresnel. [17]

Capítulo 2

Patrones de difracción en el régimen de Fraunhofer

En este capítulo se calcula la perturbación óptica para algunas aberturas con geometrías básicas como lo son la única rendija, la abertura rectangular y su caso particular la abertura cuadrada, la doble rendija y finalmente para el caso de las múltiples rendijas, usando el formalismo de la teoría de la difracción escalar.

Resulta evidente que el patrón de difracción será diferente dependiendo de la distancia a la que se encuentre la pantalla de observación de la abertura, en este sentido la difracción de Fraunhofer es la que se observa a una cierta distancia en la que la onda se puede considerar plana en algún punto de observación con respecto a la abertura difractante.

Joseph Von Fraunhofer (1787-1826) fue un astrónomo, óptico y físico alemán reconocido por sus estudios en espectroscopía, realizando avances en el estudio de la difracción de la luz. Al ser hijo de un vidriero trabajó e inventó diversos instrumentos de medición óptica, de entre ellos las redes de difracción, con el fin de detectar las líneas oscuras del espectro solar.

2.1. Única Rendija

Un arreglo experimental usual para observar la difracción de Fraunhofer consiste en que una fuente de luz monocromática S que ilumina una abertura a . Se coloca un lente colimador entre la fuente y la abertura, y a su vez una lente convergente entre la abertura y la pantalla de observación, tal como se muestra en la Figura (2.1). Este arreglo de lentes eliminará de forma efectiva que los frentes de onda sean divergentes

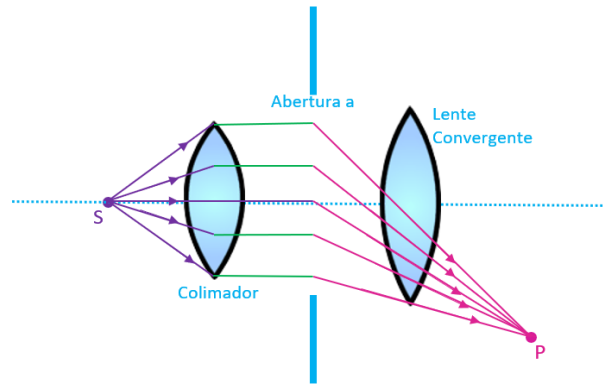


Figura 2.1: Diseño experimental para observar la difracción de Fraunhofer.

Considere una rendija de largo b y ancho L , con la condición $L \ll b$, tal como se muestra en la Figura (2.2). Donde el elemento de área $dS = Ldy'$, y además $r = r_0 + y' \sin \theta$, donde r_0 es el valor de r cuando $y' = 0$, y θ es el ángulo de la diferencia de camino óptico entre r_0 y r , tal como se muestra en la Figura (2.2). Así la ecuación (1.24) [2] cambia:

$$U_P = -i \frac{LC}{2\lambda} e^{ikr_0} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky' \sin \theta} dy' , \quad (2.1)$$

Resolviendo la integral por medio de cambio de variable $u =iky' \sin \theta$, y reorganizando los términos se obtiene

$$\begin{aligned} U_P &= -i \frac{LC}{2\lambda} e^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left(e^{iky' \sin \theta} \Big|_{-b/2}^{b/2} \right) , \\ &= -i \frac{LC}{2\lambda} e^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left(e^{i\frac{1}{2}kb \sin \theta} - e^{-i\frac{1}{2}kb \sin \theta} \right) . \end{aligned} \quad (2.2)$$

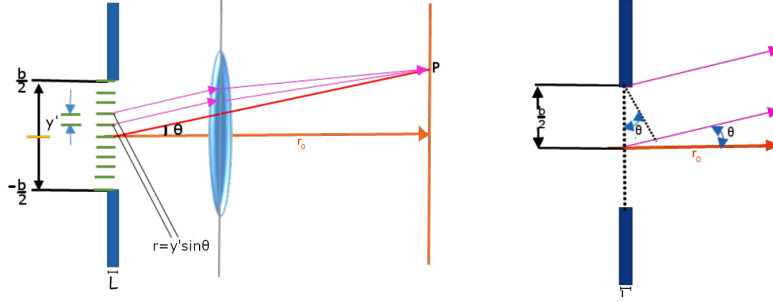


Figura 2.2: Geometría de una rendija única a la izquierda. Acercamiento para observar la diferencia de camino óptico en una única rendija a la derecha.

Usando la identidad de Euler $e^{i\frac{1}{2}kb\sin\theta} = \cos\left(\frac{1}{2}kb\sin\theta\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}kb\sin\theta\right)$, entonces la ecuación (2.2) se simplifica como

$$U_P(\theta) = -i\frac{LbC_U}{2\lambda} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right), \quad (2.3)$$

redefiniendo $C_U = Ce^{ikr_0}$ y recordando que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda y θ es el ángulo de difracción. De aquí se sigue que la intensidad óptica en el plano de observación dada por $I_P(\theta) = |U_P(\theta)|^2$ se expresa como:

$$I_P(\theta) = \left(\frac{LbC_U}{2\lambda}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right). \quad (2.4)$$

Notemos que si $\theta = 0$ entonces $I_P(\theta = 0) = I_0 = \left(\frac{LbC_U}{2\lambda}\right)^2$. Para normalizar la gráfica de la intensidad óptica entonces se debe cumplir que $\left(\frac{LbC_U}{2\lambda}\right)^2 = 1$, esto es que $C_U = \frac{2\lambda}{bL}$. Debido a que la función seno es periódica, encontramos los valores **mínimos** de la intensidad óptica suceden cuando $\sin\theta = \frac{n\lambda}{b}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$, mientras que los valores **máximos** los encontramos cuando $\sin\theta = \frac{(2n+1)\lambda}{b}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$. Estos máximos y mínimos se muestran en la Figura (2.3).

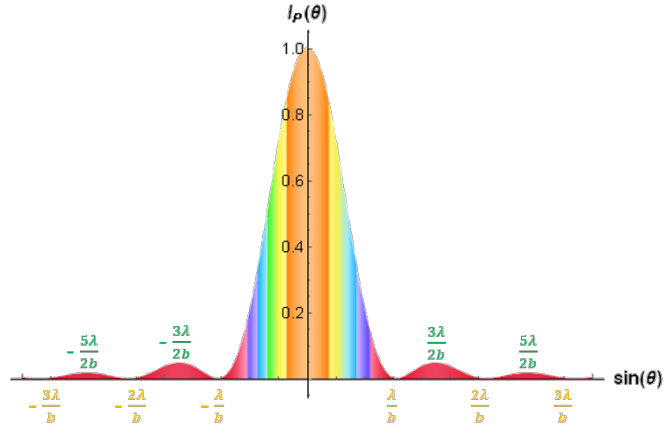


Figura 2.3: Gráfico de la intensidad óptica de una sola rendija en la región de difracción de Fraunhofer.

2.2. Abertura Rectangular y Cuadrada

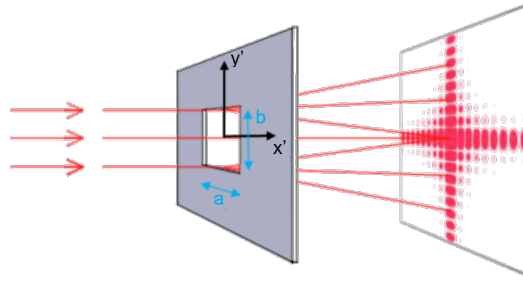


Figura 2.4: Geometría para la difracción de campo lejano de una abertura rectangular

Consideremos nuestro diseño geométrico una abertura rectangular de base a y altura b . Procederemos a realizar el modelo matemático análogamente que para el caso de la única rendija, donde consideramos el cambio de variable $r = r_0 + x' \sin \phi$ y $s = s_0 + y' \sin \theta$ y $dS = dx' dy'$ el elemento de área [20], entonces la ecuación (1.24) cambia a

$$\begin{aligned}
 U_P(\phi, \theta) &= -i \frac{kC}{4\pi} e^{ikr_0} e^{iks_0} \int_{-a/2}^{+a/2} e^{ikx' \sin \theta} dx' \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky' \sin \theta} dy' , \\
 &= -i \frac{kC}{4\pi} e^{ikr_0} e^{iks_0} \left(\frac{1}{ik \sin \phi} \right) \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left(e^{ikx' \sin \phi} \Big|_{-a/2}^{+a/2} \right) \left(e^{iky' \sin \theta} \Big|_{-b/2}^{+b/2} \right) . \\
 &= -i \frac{abC_U}{\lambda} \text{sinc} \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \phi \right) \text{sinc} \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right) , \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

donde $C_U = C e^{ikr_0} e^{iks_0}$ es un término constante. Hay que señalar que los ángulos ϕ y θ que

definen la dirección del haz difractado para el eje x' e y' respectivamente. Definiendo la intensidad óptica para una abertura rectangular en el régimen de Fraunhofer como

$$I_P(\phi, \theta) = \left(\frac{abC_U}{\lambda} \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \phi \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right). \quad (2.6)$$

Notemos que el valor máximo de $I_P = I_0$ es cuando $\phi = \theta = 0$, esto es $I_0(\phi = 0, \theta = 0) = \left(\frac{abC_U}{\lambda} \right)^2$. Si se normaliza la ecuación (2.6), entonces se debe cumplir la condición que $C_U = \frac{\lambda}{ab}$. Los valores **mínimos** para la intensidad óptica se obtienen cuando $I_P(\phi, \theta) = 0$, esto es, $\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \phi \right) = 0$ lo que implica que $\sin \phi = \frac{n\lambda}{a}$ en el eje “x” y $\sin \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right) = 0$, lo que implica $\sin \theta = \frac{m\lambda}{b}$, en el eje “y”, con $n = 0, 1, 2, \dots$ y $m = 0, 1, 2, \dots$, respectivamente. Mientras que los valores **máximos** para la intensidad óptica se obtienen cuando $\sin \phi = \frac{(2n+1)\lambda}{2a}$ y $\sin \theta = \frac{(2m+1)\lambda}{2b}$, para el eje “x” e “y” respectivamente.

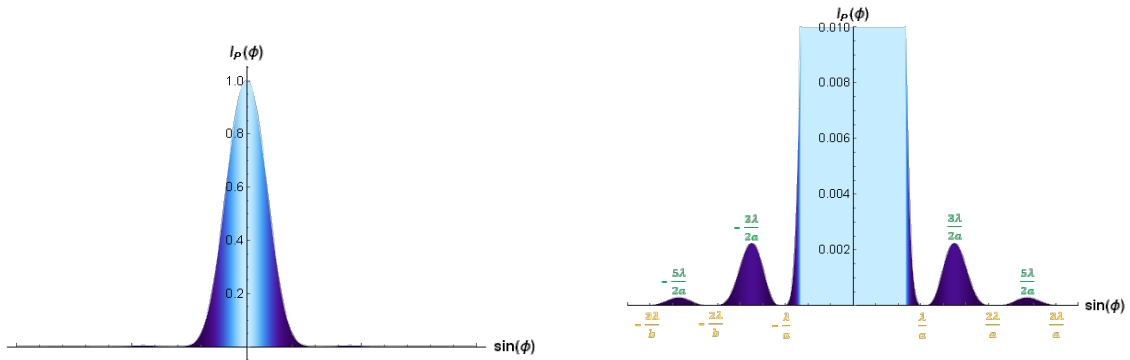
Por simpleza se presentan los valores mínimos y máximos de la intensidad óptica de la abertura rectangular en la gráfica de contorno de la Figura (2.4)(c). Mientras que en la Figura (2.5)(a) y (b), solamente se muestra la intensidad óptica de la abertura rectangular y una ampliación a las oscilaciones secundarias de dicha gráfica. Que como se observa el máximo del pico principal se ha normalizado a 1 pero el máximo del segundo pico se encuentra a 0,015 u.a.

Si consideramos $a = b$, por ende se tiene que $\phi = \theta$, entonces la intensidad óptica para una abertura cuadrada cambia a

$$I_P(\phi) = \left(\frac{2a^2C_U}{\lambda} \right)^2 \text{sinc}^4 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \phi \right), \quad (2.7)$$

La intensidad obtenida por la ecuación (2.7) muestra el perfil de irradiancia que describe los valores **mínimos** y **máximos** de una abertura única cuadrada representada en la Figura (2.5) donde la intensidad óptica esta elevada a la cuarta potencia generando un máximo central (2.5(a)) que es mucho mayor que las perturbaciones secundarias (2.5(b)) las cuales son simétricas en los extremos, a diferencia de la abertura rectangular indicada por la ecuación

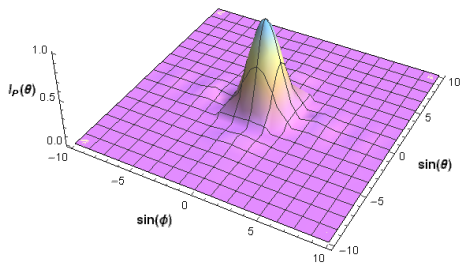
(2.6) donde la intensidad óptica esta elevada al cuadrado para cada lado de la abertura, representada en la Figura (2.6), donde se observa el perfil de irradiancia similar al de la rejilla cuadrada con un máximo central y pequeñas perturbaciones laterales(2.6(a)), la diferencia es que estas perturbaciones laterales muestran un ensanchamiento del tamaño lateral de la rejilla para cada lado (2.6(c)), siendo simétricas en los extremos.



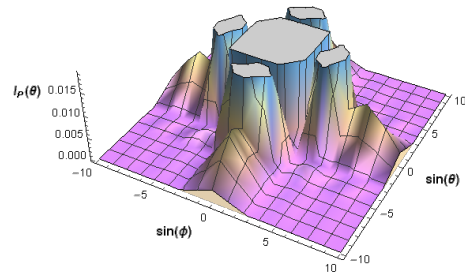
(a) Intensidad óptica de una abertura cuadrada

(b) Ampliación de las perturbaciones secundarias en una abertura cuadrada

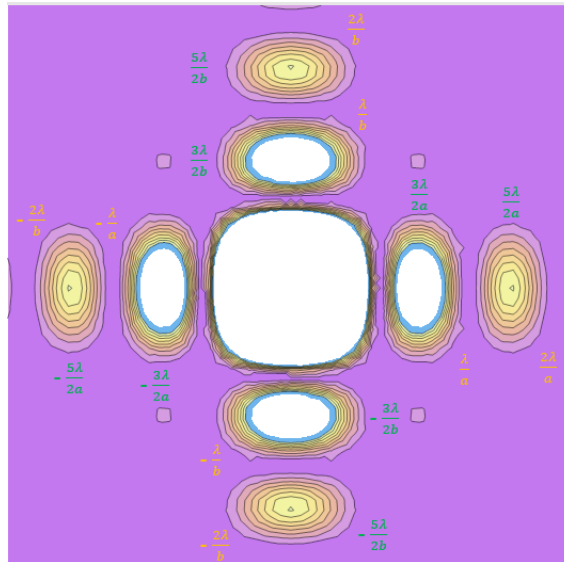
Figura 2.5: Representación de la intensidad óptica para una abertura cuadrada.



(a) Intensidad óptica de una abertura rectangular



(b) Ampliación de las perturbaciones secundarias en la intensidad óptica para una abertura rectangular



(c) Gráfica de contorno de una abertura rectangular

Figura 2.6: Representación de la intensidad óptica para una abertura rectangular.

2.3. Doble Rendija

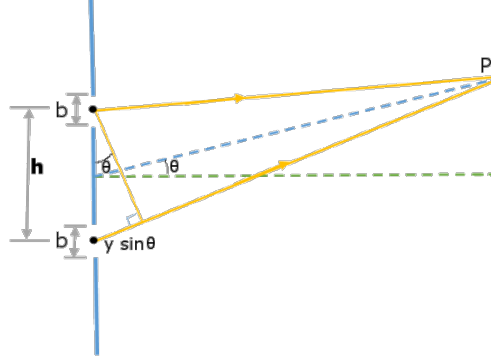


Figura 2.7: Geometría para la difracción de campo lejano de una doble rendija

Considere una abertura de difracción que consista en dos rendijas paralelas, cada una de ancho b y a una distancia de separación h . Abordando el tratamiento matemático de manera análoga como en el caso de la única rendija, partiremos del hecho de que $r = r_0 + y' \sin \theta$, la diferencia de camino óptico y $dS = L dy'$, el elemento de área. Usando la fórmula integral FK para la difracción de Fraunhofer (1.24) [2], y resolviendo las integrales por medio de un cambio de variable y utilizando la identidad de Euler se tiene

$$\begin{aligned}
 U_P &= -i \frac{kC}{4\pi} \int_{abertura} e^{ik(r_0 + y' \sin \theta)} L dy' , \\
 &= -i \frac{kLC}{4\pi} e^{ikr_0} \left[\int_0^b e^{iky' \sin \theta} dy' \int_h^{h+b} e^{iky' \sin \theta} dy' \right] , \\
 &= -i \frac{kLC}{4\pi} e^{ikr_0} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left(e^{ikb \sin \theta} - 1 \right) \left(e^{ikh \sin \theta} + 1 \right) , \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo $e^{ikb \sin \theta} = e^{ik \frac{b}{2} \sin \theta} e^{ik \frac{b}{2} \sin \theta}$ y $e^{ikh \sin \theta} = e^{ik \frac{h}{2} \sin \theta} e^{ik \frac{h}{2} \sin \theta}$ en la ecuación (2.8), usando las definiciones de $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ y $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, y considerando $C_U = C e^{ikr_0}$, como parámetro constante. Entonces la ecuación (2.8) se simplifica de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
U_P(\theta) &= -i \frac{kLC}{4\pi} e^{ikr_0} \left(\frac{1}{iky' \sin \theta} \right) \left[\frac{e^{ik\frac{b}{2} \sin \theta}}{e^{-ik\frac{b}{2} \sin \theta}} - 1 \right] \left[1 + \frac{e^{ik\frac{h}{2} \sin \theta}}{e^{-ik\frac{h}{2} \sin \theta}} \right], \\
&= -i \frac{kLC}{4\pi} e^{ikr_0} \left(\frac{1}{iky' \sin \theta} \right) \left[\frac{e^{ik\frac{b}{2} \sin \theta} - e^{-ik\frac{b}{2} \sin \theta}}{e^{-ik\frac{b}{2} \sin \theta}} \right] \left[\frac{e^{ik\frac{h}{2} \sin \theta} + e^{-ik\frac{h}{2} \sin \theta}}{e^{-ik\frac{h}{2} \sin \theta}} \right], \\
&= -i \frac{bLC_U}{\lambda} e^{i\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta} e^{i\frac{\pi h}{2} \sin \theta} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right) \cos \left(\frac{\pi h}{\lambda} \sin \theta \right), \quad (2.9)
\end{aligned}$$

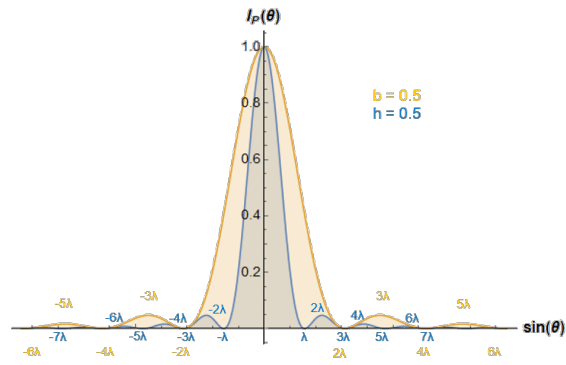
Si calculamos la intensidad óptica $I_P(\theta) = |U_P(\theta)|^2$, para una doble abertura se obtiene

$$I_P(\theta) = \left(\frac{bLC_U}{\lambda} \right)^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right) \cos^2 \left(\frac{\pi h}{\lambda} \sin \theta \right), \quad (2.10)$$

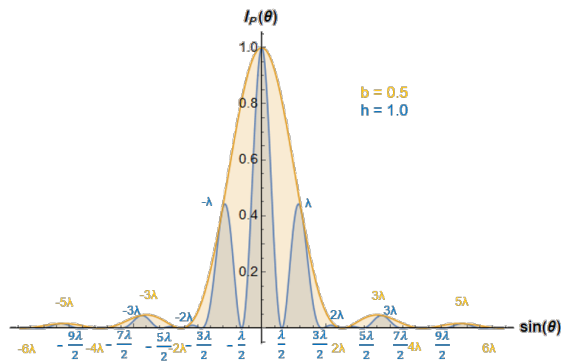
Aquí el valor máximo $I_P = I_0$ se obtiene cuando $\theta = 0$, esto es, $I_0 = \left(\frac{bLC_U}{\lambda} \right)^2$, si se normaliza la expresión debe cumplir la condición de que $\frac{bLC_U}{\lambda} = 1$, por lo que, $C_U = \frac{\lambda}{bL}$. Los valores **mínimos** para la intensidad óptica por parte de la envolvente que se encuentra en función del $\operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right)$ se obtienen cuando $I_P(\theta) = 0$, esto es, cuando $\sin(\theta) = \frac{n\lambda}{b}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$. Así mismo los valores **máximos** para la envolvente del sinc^2 suceden cuando $\sin(\theta) = \frac{(2n+1)\lambda}{2b}$.

Por otro lado, los valores **mínimos** por parte de la expresión $\cos^2 \left(\frac{\pi h}{\lambda} \sin \theta \right)$ en la intensidad óptica se obtienen con la condición $\sin(\theta) = \frac{(2m+1)\lambda}{h}$ con $m = 0, 1, 2, \dots$. Mientras que los valores **máximos** se encuentran con la condición $\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{h}$.

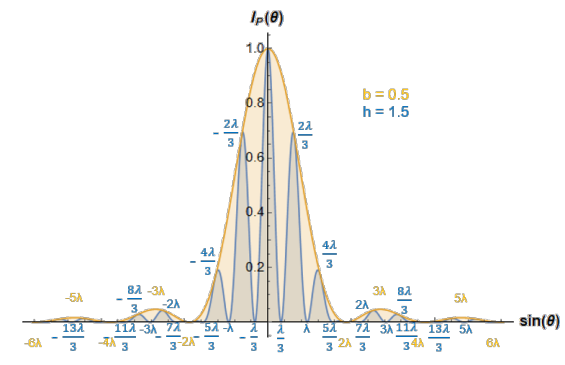
En la Figura (2.8)(a),(b) y (c), se muestran como varía las oscilaciones debido a la función \cos^2 dentro de la función sinc^2 , para diferentes valores de b y h que corresponden al tamaño de la rendija y a la distancia de separación respectivamente. Notemos que mientras mayor sea el valor de h , mayor será el número de oscilaciones dentro de la envolvente.



(a) $b = 0,5$ y $h = 0,5$



(b) $b = 0,5$ y $h = 1$



(c) $b = 0,5$ y $h = 1,5$

Figura 2.8: Intensidades ópticas para una doble abertura en el régimen de campo lejano, con diferentes valores de b y h .

2.4. Múltiples Rendijas

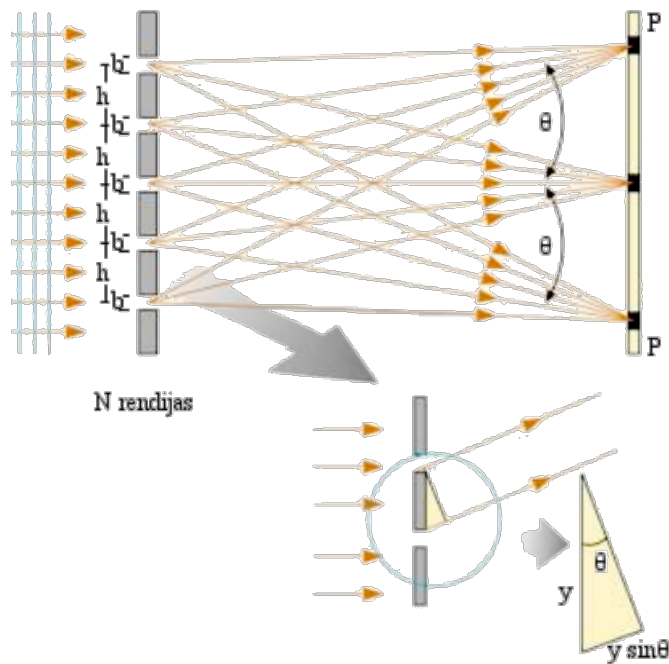


Figura 2.9: Geometría para la difracción de campo lejano de múltiples rendijas

El estudio anterior se puede extender a un número de rendijas N , que sean idénticas y paralelas entre sí. Considere b el ancho de las rendijas a una separación h . Procederemos de manera similar que en el caso de la doble abertura, entonces el cálculo de la perturbación óptica a partir de la integral FK se reescribe como

$$\begin{aligned}
U_P(\theta) &= -i \frac{kLC}{4\pi} e^{ikr_0} \frac{1}{ik \sin \theta} \left[\int_0^b e^{iky \sin \theta} + \int_h^{h+b} e^{iky \sin \theta} \right. \\
&\quad \left. + \int_{2h}^{2h+b} e^{iky \sin \theta} + \dots + \int_{(N-1)h}^{(N-1)h+b} e^{iky \sin \theta} \right], \\
&= -i \frac{kLC}{4\pi} e^{ikr_0} \frac{1}{ik \sin \theta} \left[e^{ikb \sin \theta} - 1 \right] \left[1 + e^{ikh \sin \theta} + e^{ik2h \sin \theta} + \dots + e^{ik(N-1)h \sin \theta} \right], \\
&= -i \frac{kLC}{4\pi} e^{ikr_0} \frac{1}{ik \sin \theta} \left[e^{ikb \sin \theta} - 1 \right] \left[\frac{1 - e^{ikN h \sin \theta}}{1 - e^{ikh \sin \theta}} \right], \\
&= -i \frac{kLC}{4\pi} e^{ikr_0} \frac{1}{ik \sin \theta} \left[\frac{e^{ik \frac{b}{2} \sin \theta}}{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \theta}} - 1 \right] \left[\frac{1 - \frac{e^{ikN \frac{h}{2} \sin \theta}}{e^{-ikN \frac{h}{2} \sin \theta}}}{1 - \frac{e^{ikh \frac{h}{2} \sin \theta}}{e^{-ikh \frac{h}{2} \sin \theta}}} \right], \\
&= -i \frac{kLC}{4\pi} e^{ikr_0} e^{i \frac{1}{2} kb \sin \theta} e^{i(N-1)h} \frac{\sin \left(\frac{1}{2} kb \sin \theta \right)}{\frac{1}{2} kb \sin \theta} \frac{\sin \left(N \frac{1}{2} kh \sin \theta \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} kh \sin \theta \right)}, \\
&= -i \frac{kLC_U}{4\pi} e^{i \frac{1}{2} kb \sin \theta} e^{i(N-1)h} \operatorname{sinc} \left(\frac{1}{2} kb \sin \theta \right) \frac{\sin \left(N \frac{1}{2} kh \sin \theta \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} kh \sin \theta \right)}, \\
&= -i \frac{kLC_U}{4\pi} e^{i \frac{1}{2} kb \sin \theta} e^{i(N-1)h} \operatorname{sinc} \left(\frac{1}{2} kb \sin \theta \right) \frac{\sin \left(N \frac{1}{2} kh \sin \theta \right)}{\frac{1}{2} kh \sin \theta}
\end{aligned}$$

donde $C_U = C e^{ikr_0}$ es un término constante. De aquí es posible calcular la intensidad óptica para una rejilla de múltiples rendijas, expresada como

$$I_P(\theta) = \left(\frac{kLC_U}{4\pi} \right)^2 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{1}{2} kb \sin \theta \right) \frac{\sin^2 \left(N \frac{1}{2} kh \sin \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} kh \sin \theta \right)}. \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) se puede observar representada en perfiles de intensidad óptica en la Figura (2.10), donde se muestran valores de los máximos y mínimos para múltiples aberturas (colores azules internos en los gráficas), comparados con la única abertura (color amarillo), donde se puede observar que conforme se incrementa el número de la rejilla, el ancho de los perfiles máximos se va disminuyendo.

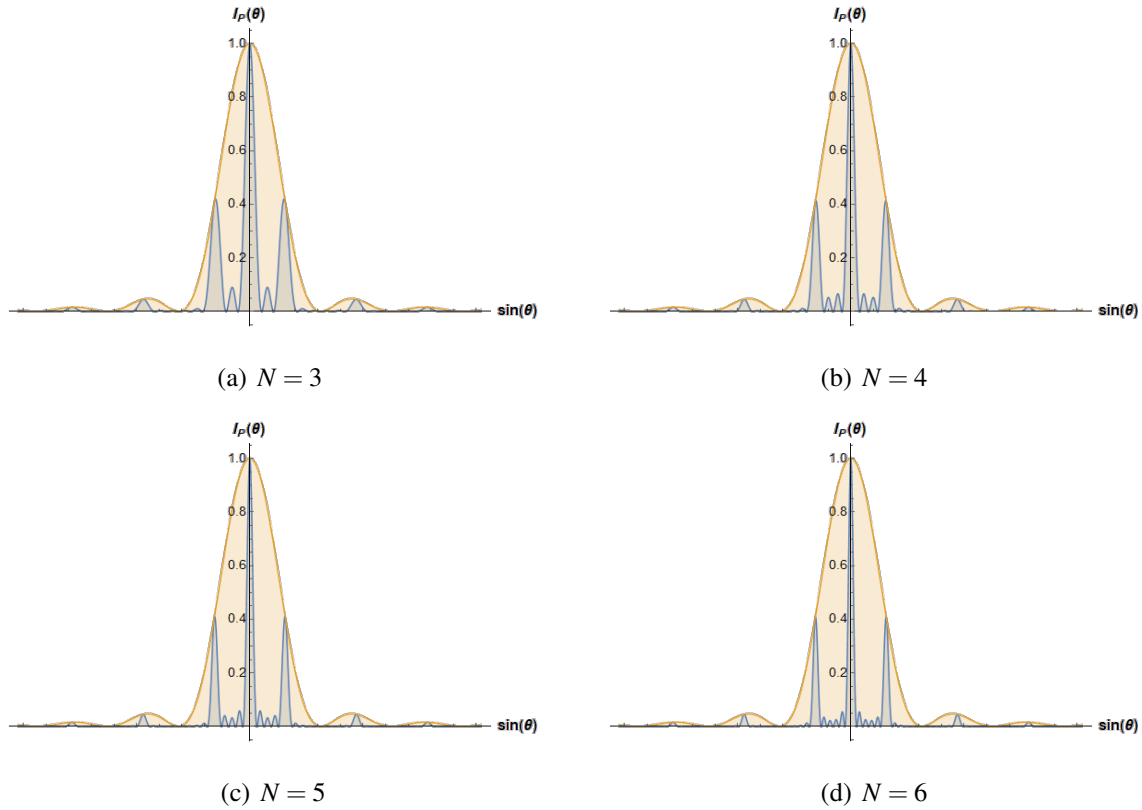


Figura 2.10: Intensidades ópticas con múltiples aberturas para $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, y $N = 6$. Con el tamaño de las rendijas de $b = 0,5$ y distancia de separación $h = 1,0$.

2.5. Abertura Circular

Recordemos del capítulo anterior que la expresión para una perturbación óptica en un punto cualquiera P en la pantalla de observación que surge de una abertura arbitraria en el caso de campo lejano es:

$$U_P(x, y, z) = -\frac{i}{2\lambda} \frac{U_0 e^{-i\omega t} e^{ikr}}{rr'} \kappa(\theta) \iint_{abertura} e^{ik \left[z + \frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx'+yy'}{z} \right]} dS,$$

$$U_P(x, y, z) = -\frac{i}{2\lambda} \frac{U_0 e^{-i\omega t} e^{ikr}}{rr'} \kappa(\theta) e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{abertura} e^{-\frac{ik}{z}(xx'+yy')} dS,$$

En el caso de una abertura circular, la geometría sugiere el siguiente cambio de coordenadas tanto en el plano de la abertura como en el plano de observación:

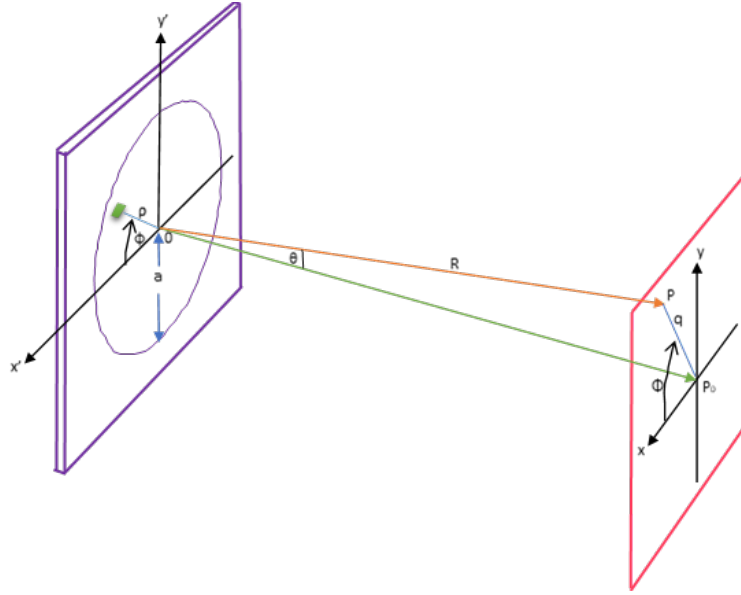


Figura 2.11: Geometría para la difracción de campo lejano de una abertura circular.

$$\begin{aligned} x' &= \rho \cos \phi & x &= q \cos \Phi, \\ y' &= \rho \sin \phi & y &= q \sin \Phi \end{aligned}$$

Así la ecuación a resolver para una abertura circular es:

$$U_P(\rho, \phi) = -\frac{iC_U}{2\lambda} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-\frac{i2\pi q\rho}{\lambda z} \cos(\phi-\Phi)} \rho d\rho d\phi. \quad (2.12)$$

De aquí se obtiene que $\int_0^{2\pi} e^{-\frac{i2\pi q\rho}{\lambda z} \cos(\phi-\Phi)} d\phi = 2\pi J_0\left(\frac{2\pi q\rho}{z\lambda}\right)$; con $\frac{q\rho}{z\lambda} \in \mathbb{R}$. Donde J_0 es la función de Bessel de orden cero.

Así la ecuación para la perturbación óptica para una abertura circular es:

$$U_P(z, q) = -\frac{iazC_U}{2q} J_1\left(\frac{2a\pi q}{z\lambda}\right). \quad (2.13)$$

Por ende, recordemos que la intensidad óptica esta dada como $I_P(z, q) = |U_P(z, q)|^2$, entonces

$$I_P(z, q) = - \left(\frac{iazC_U}{2q} \right)^2 \left(J_1 \left(\frac{2a\pi q}{z\lambda} \right) \right)^2 . \quad (2.14)$$

2.6. Fila de Múltiples Aberturas Circulares

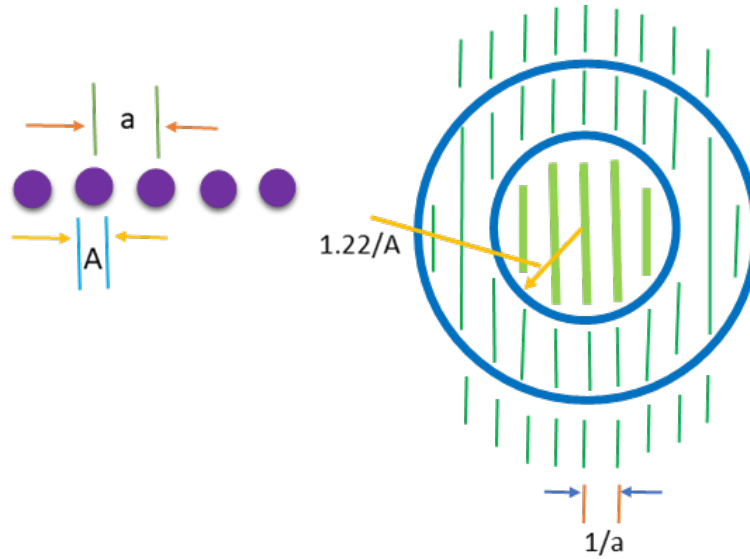


Figura 2.12: Geometría para la difracción de una fila de aberturas circulares.

Para este análisis emplearemos un método diferente para describir una perturbación óptica de una fila de múltiples aberturas circulares. Se utilizará la función delta y una convolución.

Consideraremos el caso de una línea o fila de aberturas circulares igualmente espaciadas, entonces la función de transmisión se escribe como:

$$f(x, y) = \sum_n \delta(x - na, y) *_{x,y} O(x, y) ,$$

donde $\delta(x - na, y)$ representa la función delta en $x = na, y = 0$; y $O(x, y)$ es la función de transmisión para una abertura circular, definida como:

$$N_F = \begin{cases} 1, & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} < a/2 \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

La transformada de Fourier de este conjunto de funciones delta con respecto a x es:

$$\sum_h \delta(u - h/a),$$

y la transformada de Fourier con respecto a y es la unidad. Por ello, la transformada de Fourier en x e y , es un conjunto de líneas rectas paralelas al eje u y v , e igualmente espaciadas en intervalos de a^{-1} en la dirección u . Esta distribución podrá ser modulada al multiplicarse por la transformada de Fourier $O(x, y)$, siendo esta:

$$\left(\frac{A}{2U}\right) J_1(\pi AU),$$

donde A es el diámetro de las aberturas y $U = (\sqrt{u^2 + v^2})$.

Esto nos proporciona un conjunto de líneas que varían con la intensidad como sugiere el patrón de difracción correspondiente, donde el ancho de la línea o fila ha sido utilizado como la intensidad relativa.

Este tipo de análisis tiene aplicación en radioastronomía, en donde es usado para detectar ondas de radio estrellas distantes, el dispositivo consiste en un interferómetro de radio en el cual las líneas de interferencia se encuentran igualmente espaciadas en una antena parabólica y cada una de estas líneas suma una amplitud incidente sobre la abertura circular de la antena. De aquí podemos ver mediante el teorema de recíprocidad que la amplitud resultante obtenida sumando las amplitudes de todas las antenas coherentemente son exactamente las mismas como la amplitud que se observaría de las estrellas remotas distantes, si las aberturas de las antenas se iluminan a partir de una onda incidente. Así como la onda de radio de las estrellas se mueve a través del cielo, la amplitud medida por el interferómetro corresponde a una línea recta a través del patrón de difracción resultante.

Capítulo 3

Estudio de aberturas difractivas mediante el número de Fresnel

El número de Fresnel se usa explícitamente en las variables independientes (las coordenadas) de la perturbación óptica (amplitud de la luz difractada) en su expresión matemática en forma de la integral de Fresnel-Kirchhoff y en la intensidad de la misma para definir y visualizar los patrones de difracción tanto en el régimen de campo cercano en los casos de las geometrías estandar rectangulares, circulares y triangulares de aberturas difractivas.

En el formalismo matemático de la difracción escalar (óptica y también acústica) en aberturas para la cual un esquema típico de experimento se presenta en la Fig. 1 existen dos regiones paraxiales, el campo cercano y el campo lejano con respecto a la abertura difractiva, donde las teorías de Fresnel y Fraunhofer son válidas, respectivamente [2, 17–19]. En la mayoría de los libros de texto en óptica, la identificación de las zonas de validez de los dos regimenes está relacionada con el número de términos en la expansión binomial de una raíz cuadrada, ver por ejemplo [17]. Solamente en el libro de Goodman [18] se puede encontrar una discusión de la difracción en abertura cuadrada en función del número de Fresnel, definido como

$$N_F = \frac{A}{\lambda z}.$$

En este contexto, el parámetro N_F relaciona la longitud de onda λ de la fuente luminosa, la distancia z entre el plano de observación y la abertura y el área de la abertura A . Estos con-

ceptos se conocen de antemano de manera empírica, y con ellos es posible definir los límites de difracción entre las dos regiones paraxiales de Fresnel (campo cercano) y Fraunhofer (campo lejano) [21–24], mediante el criterio:

$$\begin{aligned} N_F \ll 1 & \quad \text{Fraunhofer (campo lejano)} , \\ N_F \geq 1 & \quad \text{Fresnel (campo cercano)} . \end{aligned}$$

La formulación matemática tanto en el régimen de campo cercano como en el de campo lejano se hace a través de la ecuación de Helmholtz, cuya solución se puede expresar en la forma de la integral de Fresnel-Kirchhoff (FK) [2]

$$U_P(x, y, z) = -\frac{ike^{-i\omega t}}{4\pi} \int_{\text{abertura}} \kappa(\theta) U_0(x', y', 0) \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} dS , \quad (3.1)$$

con la siguiente terminología:

$U_P(x, y, z)$ es la perturbación óptica en el punto de observación P ,

k es el número de onda,

ω es la frecuencia de la onda,

t es el tiempo,

$\kappa(\theta)$ es el factor de oblicuidad; a continuación se considera incidencia normal del haz de la fuente en la abertura $\kappa(\theta) = 1$,

$U_0(x', y', 0)$ es la perturbación óptica inicial de la fuente,

r' es la distancia de la fuente a la abertura,

r es la distancia de la abertura al punto de observación P .

Es posible simplificar la integral (3.1), haciendo las siguientes consideraciones:

- Por simpleza se considera una iluminación uniforme para la abertura, lo que implica que $U_0(x', y', 0) = 1$.

- Por otro lado, veamos que $r' = \sqrt{\rho'^2 + h'^2}$, donde $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, entonces

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + h'^2} = h' \sqrt{1 + \frac{x'^2 + y'^2}{h'^2}} ,$$

notemos que $h' \gg \sqrt{x'^2 + y'^2}$, con lo que $\frac{x'^2 + y'^2}{h'^2} \rightarrow 0$, lo que implica que $r' \approx h'$. Esto quiere decir, que el factor $\frac{e^{ikr'}}{r'} \approx \frac{e^{ikh'}}{h'}$ es prácticamente constante y por ende puede salir fuera de la integral.

• Por último, utilizando la aproximación de primer orden en la expansión binomial de la raíz cuadrada en el factor r [17]:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} \\ &\approx z \left(1 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z^2} \right), \end{aligned}$$

entonces el factor $\frac{e^{ikr}}{r}$ se puede reescribir

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{r} &\approx \frac{e^{ik \left[z \left(1 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z^2} \right) \right]}}{z \left(1 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z^2} \right)} \\ &\approx \frac{e^{ikz} e^{\frac{i\pi}{\lambda z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]}}{z \left(1 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z^2} \right)}, \end{aligned}$$

como se considera una aproximación paraxial se tiene $z^3 \approx \frac{4}{\pi\lambda} [(x-x')^2 + (y-y')^2]$ [18], lo que implica que la variación del factor $\frac{e^{ikr}}{r}$ sobre la abertura proviene principalmente de la parte exponencial e^{ikr} , con lo que el factor $\frac{1}{r}$ puede llevarse fuera de la integral.

Recordando que $k = \frac{2\pi}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda}$, y aplicando las consideraciones en la ecuación (3.1), la integral FK para cualquier geometría en la abertura queda expresada como

$$U_P(x, y, z) = -i \frac{C_U}{2\lambda z} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} z} \iint_{\text{abertura}} e^{\frac{i\pi}{\lambda z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dS, \quad (3.2)$$

donde $C_U = \frac{e^{-i\omega t} e^{ikr'}}{rr'}$ es un término constante.

En las secciones subsecuentes, dentro del formalismo de teoría de difracción escalar, se incorpora el *número de Fresnel* N_F como parámetro dentro del argumento en las soluciones tanto de la perturbación como de la intensidad óptica, en el análisis de las aberturas difractivas rectangulares, triangulares y circulares mediante el uso de la ecuación (3.2) extendiendo los resultados de Goodman [18] para la abertura cuadrada incluida como un caso particular.

La fórmula (3.2) para la perturbación óptica proveniente de una abertura con geometría arbitraria se va a usar en las secciones subsecuentes en los casos de las aberturas circular, rectangular y triangular usando como parámetro el número de Fresnel .

3.1. Desarrollo Matemático

3.1.1. Difracción de campo cercano para una abertura rectangular

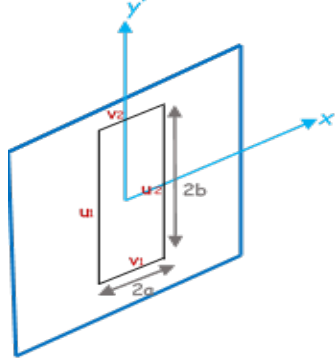


Figura 3.1: Representación gráfica de las variables involucradas en el plano de la abertura rectangular presentes en la intensidad óptica.

A partir de la expresión (3.2) y considerando una abertura rectangular cuyo ancho y alto son $2a$ y $2b$ respectivamente, se introduce el siguiente cambio de variable

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (x - x') , v = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y - y') ,$$

así la integral FK se reescribe como

$$U_P(u, v) = -i \frac{C_U}{4} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} z} \int_{u_1}^{u_2} e^{i \frac{\pi}{2} u^2} du \int_{v_1}^{v_2} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} dv . \quad (3.3)$$

Las integrales en la ecuación (3.3) se evalúan en términos de las integrales de Fresnel que se definen como

$$\begin{aligned} \int_0^s e^{i \frac{\pi q^2}{2}} dq &= \int_0^s \cos\left(\frac{\pi q^2}{2}\right) dq + i \int_0^s \sin\left(\frac{\pi q^2}{2}\right) dq \\ &= C_F(s) + i S_F(s) , \end{aligned}$$

por tanto, la perturbación óptica queda expresada como

$$U_P(u, v) = -i \frac{C_U}{4} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} z} \{ [\Delta C_F(u)] + i [\Delta S_F(u)] \} \times \{ [\Delta C_F(v)] + i [\Delta S_F(v)] \} , \quad (3.4)$$

donde $\Delta C_F(u) = C_F(u_2) - C_F(u_1)$ y $\Delta S_F(u) = S_F(u_2) - S_F(u_1)$ y similar para la variable v .

En este punto, definimos el número de Fresnel como $N_F = \frac{ab}{\lambda z}$, así los límites de integración para (3.4) quedan expresados de la siguiente manera:

$$u_1 = \sqrt{2N_F} \left(X + \sqrt{\frac{a}{b}} \right) \quad u_2 = \sqrt{2N_F} \left(X - \sqrt{\frac{a}{b}} \right), \quad (3.5)$$

$$v_1 = \sqrt{2N_F} \left(Y + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \quad v_2 = \sqrt{2N_F} \left(Y - \sqrt{\frac{b}{a}} \right), \quad (3.6)$$

considerando $X = \frac{x}{\sqrt{ab}}$ e $Y = \frac{y}{\sqrt{ab}}$ como variables de distancia normalizadas.

Por tanto, la intensidad $I_P^{\text{rect}}(u, v)$ de la luz difractada para una abertura rectangular en términos de N_F , queda descrita como

$$I_P^{\text{rect}}(u, v) = \frac{C_U^2}{16} \left\{ [\Delta C_F(u)]^2 + [\Delta S_F(u)]^2 \right\} \times \left\{ [\Delta C_F(v)]^2 + [\Delta S_F(v)]^2 \right\}. \quad (3.7)$$

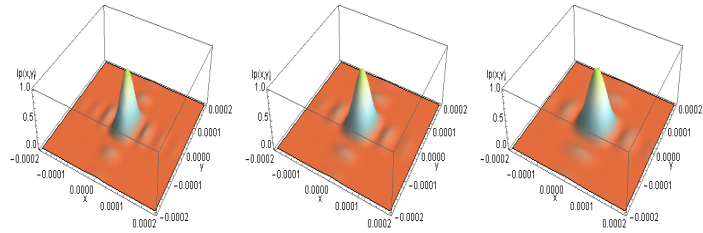
Así mismo a partir de la ecuación (3.7), si consideramos $v_1 = -\infty$ y $v_2 = +\infty$, se define la intensidad óptica para una única rejilla como

$$I_P(u) = \frac{C_U^2}{8} \left\{ [\Delta C_F(u)]^2 + [\Delta S_F(u)]^2 \right\}. \quad (3.8)$$

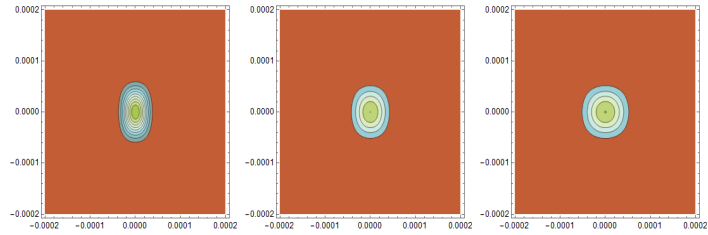
Si además se considera $u_1 = -\infty$, se define la intensidad óptica para un borde recto, descrito por

$$I_P(u) = \frac{C_U^2}{8} \left\{ \left[C_F(u_2) + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[S_F(u_2) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\}. \quad (3.9)$$

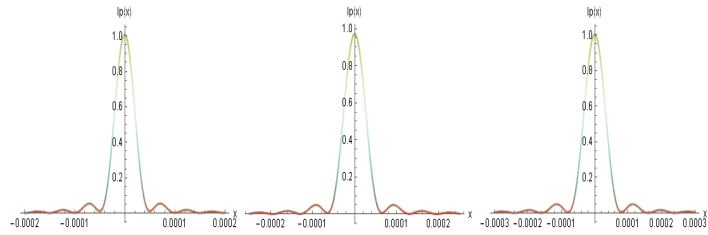
Notemos que todas estas expresiones referentes a la abertura rectangular y a sus casos particulares no son diferentes de las formulas estandar encontradas en los libros de texto que no consideran explícitamente el parámetro N_F . La ventaja de usarlo es de evidenciar los dos regimenes de difracción paraxial.



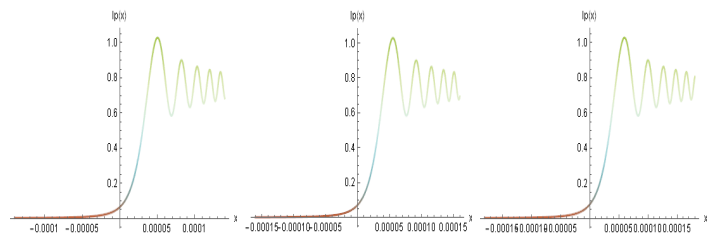
(a) $I_P(x,y)$ de la abertura rectangular de $16 \times 10 \mu m$ (b) $I_P(x,y)$ de la abertura rectangular de $16 \times 13 \mu m$ (c) $I_P(x,y)$ de la abertura cuadrada de $16 \times 16 \mu m$



(d) Gráfica de contorno de la abertura rectangular $16 \times 10 \mu m$ (e) Gráfica de contorno de la abertura rectangular $16 \times 13 \mu m$ (f) Gráfica de contorno de la abertura cuadrada $16 \times 16 \mu m$

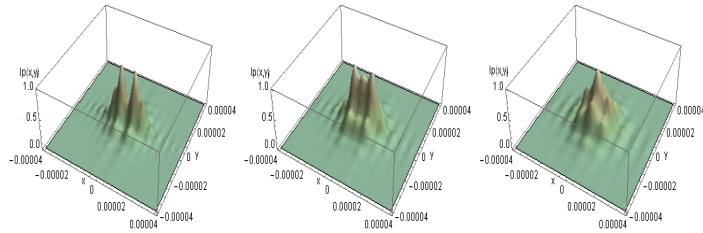


(g) $I_P(x)$ de la única rendija, referente al caso (a) (h) $I_P(x)$ de la única rendija, referente al caso (b) (i) $I_P(x)$ de la única rendija, referente al caso (c)

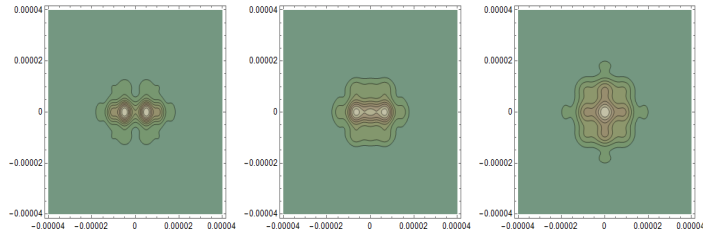


(j) $I_P(x)$ del borde recto referente al caso (a) (k) $I_P(x)$ del borde recto referente al caso (b) (l) $I_P(x)$ del borde recto referente al caso (c)

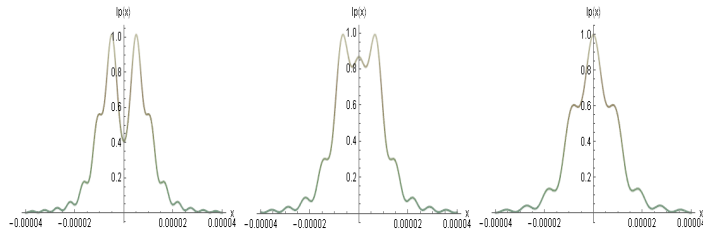
Figura 3.2: Resultados para la abertura rectangular y sus casos particulares de abertura cuadrada, única rendija y borde recto para el caso en que $N_F = 0,1$



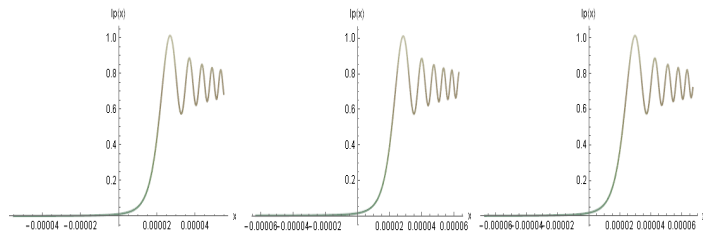
(a) $I_P(x,y)$ de la abertura rectan- (b) $I_P(x,y)$ de la abertura rectan- (c) $I_P(x,y)$ de la abertura cuadra-
gular de $16 \times 10 \mu m$ gular de $16 \times 13 \mu m$ da de $16 \times 16 \mu m$



(d) Gráfica de contorno de la (e) Gráfica de contorno de la (f) Gráfica de contorno de la
abertura rectangular $16 \times 10 \mu m$ abertura rectangular $16 \times 13 \mu m$ abertura cuadrada $16 \times 16 \mu m$

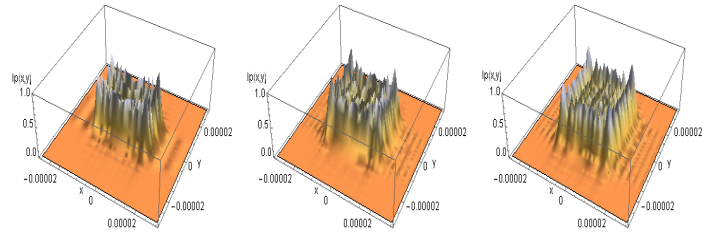


(g) $I_P(x)$ de la única rendija, re- (h) $I_P(x)$ de la única rendija, re- (i) $I_P(x)$ de la única rendija, refe-
ferente al caso (a) ferente al caso (b) rente al caso (c)

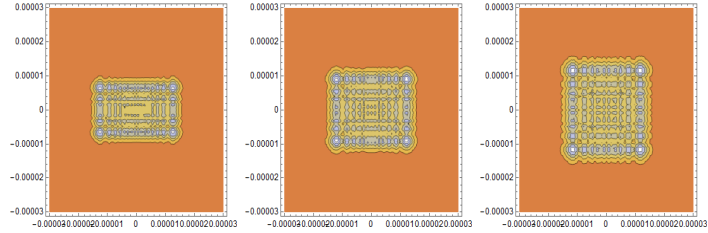


(j) $I_P(x)$ del borde recto referente (k) $I_P(x)$ del borde recto referen- (l) $I_P(x)$ del borde recto referente
al caso (a) te al caso (b) al caso (c)

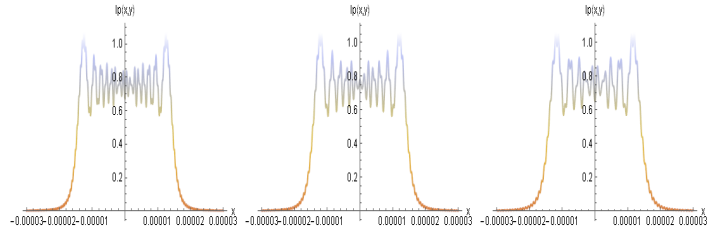
Figura 3.3: Resultados para la abertura rectangular y sus casos particulares de abertura cua-
drada, única rendija y borde recto para el caso en que $N_F = 1$



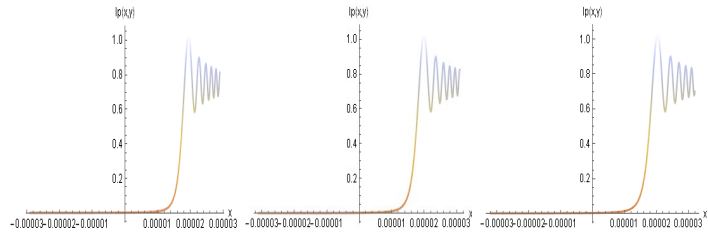
(a) $I_P(x,y)$ de la abertura rectangular de $16 \times 10 \mu m$ (b) $I_P(x,y)$ de la abertura rectangular de $16 \times 13 \mu m$ (c) $I_P(x,y)$ de la abertura cuadrada de $16 \times 16 \mu m$



(d) Gráfica de contorno de la abertura rectangular $16 \times 10 \mu m$ (e) Gráfica de contorno de la abertura rectangular $16 \times 13 \mu m$ (f) Gráfica de contorno de la abertura cuadrada $16 \times 16 \mu m$



(g) $I_P(x)$ de la única rendija, referente al caso (a) (h) $I_P(x)$ de la única rendija, referente al caso (b) (i) $I_P(x)$ de la única rendija, referente al caso (c)



(j) $I_P(x)$ del borde recto referente al caso (a) (k) $I_P(x)$ del borde recto referente al caso (b) (l) $I_P(x)$ del borde recto referente al caso (c)

Figura 3.4: Resultados para la abertura rectangular y sus casos particulares de abertura cuadrada, única rendija y borde recto para el caso en que $N_F = 10$

3.1.2. Difracción de campo cercano para una abertura circular

Realizando un cambio de coordenadas de cartesianas a cilíndricas [25] tal que $2a$ sea el diámetro de la abertura circular en la ecuación (3.2)

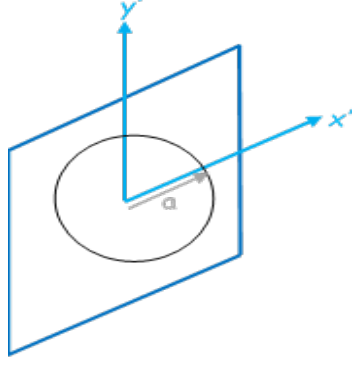


Figura 3.5: Representación gráfica de las variables involucradas en el plano de la abertura circular presentes en la intensidad óptica.

$$\begin{aligned}
 x' &= a\rho' \cos \zeta' & x &= a\rho \cos \zeta , \\
 y' &= a\rho' \sin \zeta' & y &= a\rho \sin \zeta , \\
 z' &= z ,
 \end{aligned}$$

entonces el término cuadrático en el exponente de la integral (3.2) queda expresado en términos de las nuevas variables como:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = a^2\rho^2 + a^2\rho'^2 - 2a^2\rho\rho' \cos \Theta , \quad (3.10)$$

donde $\Theta = \zeta - \zeta'$, que es la diferencia entre los ángulos en el plano de observación y en el plano de la abertura. Sustituyendo la expresión (3.10) en (3.2), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 U_P^{\text{circ}}(\rho, \Theta) &= -i \frac{C_U}{2\lambda z} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} z} e^{i \frac{\pi}{\lambda z} a^2 \rho^2} \times \\
 &\int_0^a \int_0^{2\pi} e^{i \frac{\pi}{\lambda z} a^2 \rho'^2} e^{-i \frac{\pi}{\lambda z} 2a^2 \rho \rho' \cos \Theta} d\Theta \rho' d\rho' .
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

En este caso, a diferencia de lo que se usa en la literatura [26], definimos $N_F = \frac{4\pi a^2}{\lambda z}$ como el número de Fresnel para una configuración simétrica de la fuente y del plano de observación con respecto al plano de la abertura. De tal manera, las variables adimensionales

u y v de Lommel [27,28] se pueden escribir

$$u = \frac{2ka^2}{z} = \frac{4\pi a^2}{\lambda z} = N_F, \quad (3.12)$$

$$v = \frac{ka^2 \rho}{z a} = u \frac{\rho}{\varphi} = N_F \frac{\rho}{\varphi}, \quad (3.13)$$

donde $\varphi = 2a$ es el diámetro de la abertura.

Así la perturbación óptica queda expresada como

$$U_P^{\text{circ}}(u, v) = -i \frac{C_U}{2\lambda z} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{N_F \rho^2}{2}} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{i\frac{u\rho'^2}{2}} e^{-iv\rho' \cos\Theta} d\Theta \rho' d\rho'. \quad (3.14)$$

En esta forma, se puede hacer una conexión con las funciones de Bessel usando la relación integral básica $\int_0^{2\pi} e^{-iv\rho' \cos\Theta} d\Theta = 2\pi J_0(v\rho')$ con la condición $v\rho' \in \mathbb{R}$, siendo J_0 la función de Bessel de primera especie de orden cero. Además la perturbación óptica en la ecuación (3.14) se puede escribir en términos de las funciones de Lommel $L(u, v)$ y $M(u, v)$ [25, 29], definidas como

$$L(u, v) = 2 \int_0^a \rho' J_0(v\rho') \cos\left(\frac{u}{2}\rho'^2\right) d\rho', \quad (3.15)$$

$$M(u, v) = 2 \int_0^a \rho' J_0(v\rho') \sin\left(\frac{u}{2}\rho'^2\right) d\rho', \quad (3.16)$$

donde

$$L(u, v) = \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}} U_1(u, v) + \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}} U_2(u, v), \quad (3.17)$$

$$M(u, v) = \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}} U_1(u, v) - \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}} U_2(u, v), \quad (3.18)$$

donde U_1 y U_2 tienen el siguiente desarrollo en series alternantes de potencias negativas de ρ

$$U_1(N_F, \rho) \approx \frac{J_1(N_F \rho / \varphi)}{\rho} - \frac{J_3(N_F \rho / \varphi)}{\rho^3} + \frac{J_5(N_F \rho / \varphi)}{\rho^5} - \dots,$$

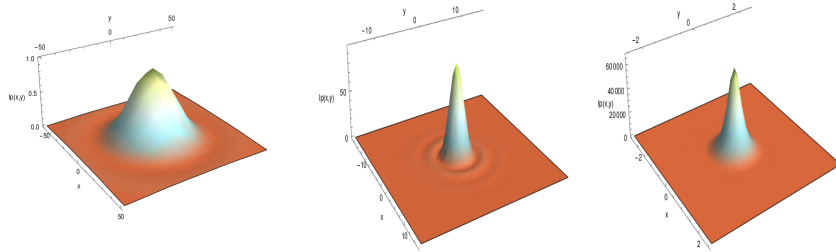
$$U_2(N_F, \rho) \approx \frac{J_2(N_F \rho / \varphi)}{\rho^2} - \frac{J_4(N_F \rho / \varphi)}{\rho^4} + \frac{J_6(N_F \rho / \varphi)}{\rho^6} - \dots.$$

Por tanto, la perturbación y la intensidad óptica para una abertura circular quedan descritas en términos de las funciones de Lommel como

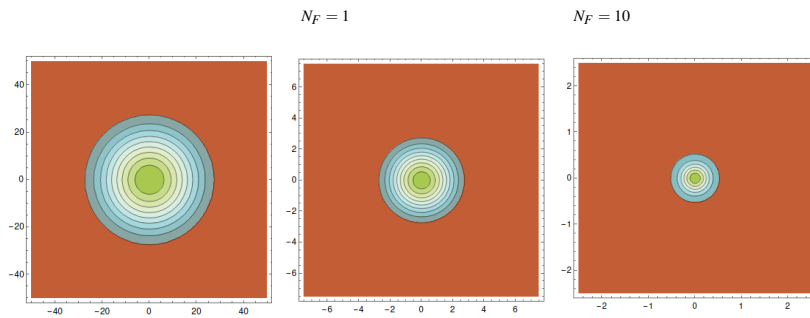
$$U_P(N_F, \rho) = \frac{C_U N_F}{8a^2 i} e^{i\frac{8\pi^2 a^2}{\lambda^2 N_F}} e^{i\frac{N_F \rho^2}{4}} [L(N_F, \rho) + iM(N_F, \rho)], \quad (3.19)$$

$$I_P(N_F, \rho) = \left(\frac{C_U N_F}{8a^2} \right)^2 [L^2(N_F, \rho) + M^2(N_F, \rho)]. \quad (3.20)$$

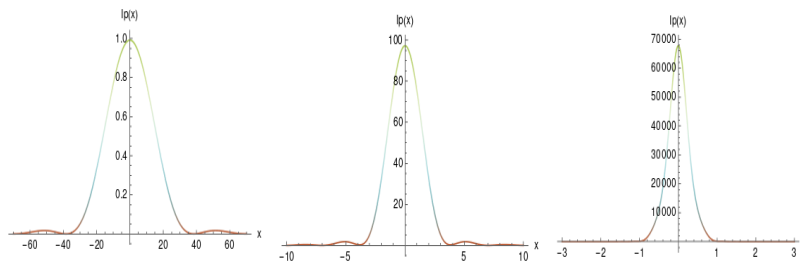
El caso general de una configuración experimental asimétrica no es mucho más complicado, solamente en la definición de N_F se debe usar la media armónica de las distancias fuente - abertura y abertura - plano de observación en lugar de z , pero en este artículo presentamos resultados solamente para el caso más sencillo simétrico.



(a) $I_p(x,y)$ de la abertura circular $N_F = 0,1$ (b) $I_p(x,y)$ de la abertura circular (c) $I_p(x,y)$ de la abertura circular



(d) Gráfica de contorno de la abertura (e) Gráfica de contorno de la abertura (f) Gráfica de contorno de la abertura circular $N_F = 0,1$ circular $N_F = 1,0$ circular $N_F = 10$



(g) $I_p(x)$ de la única rendija de la abertura circular $N_F = 0,1$ (h) $I_p(x)$ de la única rendija de la abertura circular $N_F = 1,0$ (i) $I_p(x)$ de la única rendija de la abertura circular $N_F = 10$

Figura 3.6: Resultados para la abertura circular para el número de Fresnel $N_F = 0,1, 1,0, 10$ y única rendija

3.1.3. Difracción de campo cercano para abertura triangular

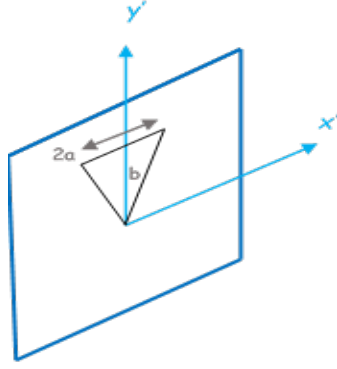


Figura 3.7: Representación gráfica de las variables involucradas en el plano de la abertura triangular presentes en la intensidad óptica.

Aplicando los límites de integración para una abertura triangular cuya base es $2a$ y alto b [30], en la fórmula integral de Fresnel-Kirchhoff, y haciendo el cambio de variable $u = (x - x')\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}$ y $v = (y - y')\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}$. Entonces la ecuación (3.2) se reescribe como

$$\begin{aligned}
 U_P(x, y, z) &= -i \frac{C_U}{2\lambda z} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} z} \left\{ 2 \int_0^a e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x-x')} dx' \right\} \times \left\{ - \int_0^{x \tan \alpha} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(y-y')^2} dy' \right\}, \\
 &= i \frac{C_U}{2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} z} \left\{ \int_{u_1}^{u_2} e^{i\frac{\pi}{2} u^2} du \right\} \times \left\{ \int_{v_1}^{v_2} e^{i\frac{\pi}{2} v^2} dv \right\}, \\
 &= i \frac{C_U}{2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} z} \{ [C_F(u_2) - C_F(u_1)] + i[S_F(u_2) - S_F(u_1)] \} \\
 &\quad \times \{ [C_F(v_2) - C_F(v_1)] + i[S_F(v_2) - S_F(v_1)] \}. \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

En este punto se define el número de Fresnel como $N_F = \left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \right) \left(\frac{1}{\lambda z} \right) = \frac{ab}{\lambda z}$, entonces los límites de integración quedan definidos como

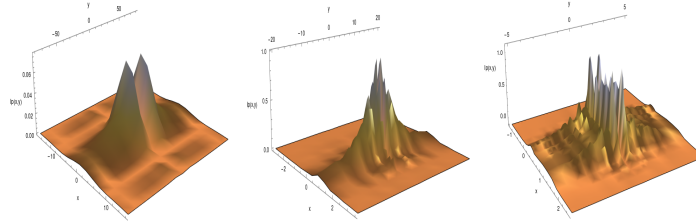
$$u_1 = \sqrt{2N_F} X \quad v_1 = \sqrt{2N_F} Y, \tag{3.22}$$

$$u_2 = \sqrt{2N_F} \left(X - \sqrt{\frac{a}{b}} \right) \quad v_2 = \sqrt{2N_F} X (1 - \tan \alpha), \tag{3.23}$$

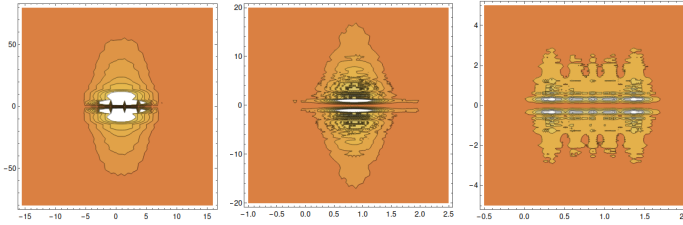
con $X = \frac{x}{\sqrt{ab}}$ y $Y = \frac{y}{\sqrt{ab}}$, variables de distancia normalizada.

Por tanto, la intensidad óptica para una abertura triangular queda definida como

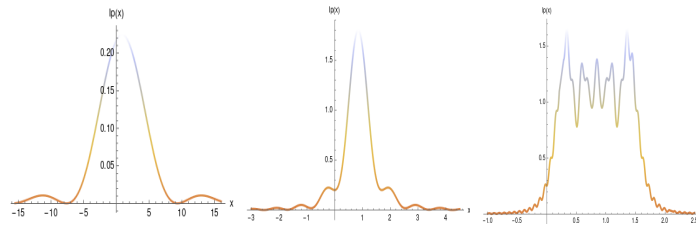
$$\begin{aligned} I_P(u, v) &= \left(\frac{C_U}{2}\right)^2 \{[C_F(u_2) - C_F(u_1)]^2 + [S_F(u_2) - S_F(u_1)]^2\} \\ &\quad \times \{[C_F(v_2) - C_F(v_1)]^2 + [S_F(v_2) - S_F(v_1)]^2\} . \end{aligned} \quad (3.24)$$



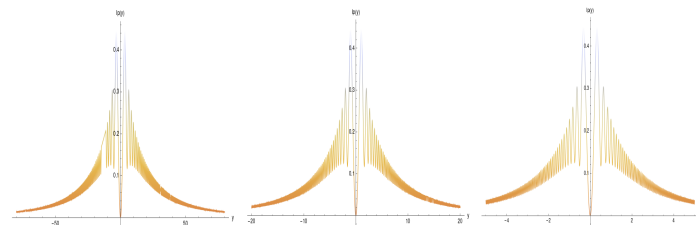
(a) $I_P(u,v)$ para una abertura triangular con $N_F = 0,1$ (b) $I_P(u,v)$ para una abertura triangular con $N_F = 1$ (c) $I_P(u,v)$ para una abertura triangular con $N_F = 10$



(d) Gráfica de contorno para una abertura triangular con $N_F = 0,1$ (e) Gráfica de contorno para una abertura triangular con $N_F = 1$ (f) Gráfica de contorno para una abertura triangular con $N_F = 10$



(g) $I_P(x)$ de la única rendija de la abertura triangular $N_F = 0,1$ (h) $I_P(x)$ de la única rendija de la abertura triangular $N_F = 1,0$ (i) $I_P(x)$ de la única rendija de la abertura triangular $N_F = 10$



(j) $I_P(y)$ de la única rendija de la abertura triangular $N_F = 0,1$ (k) $I_P(y)$ de la única rendija de la abertura triangular $N_F = 1,0$ (l) $I_P(y)$ de la única rendija de la abertura triangular $N_F = 10$

Figura 3.8: Patrón de difracción para una abertura triangular y sus correspondientes gráficas de contorno para cada uno de los casos para $N_F = 0,1, 1, 10$.

3.2. Resultados y Análisis

Las ecuaciones paramétricas de las intensidades ópticas para los casos de la abertura rectangular y la abertura circular desarrolladas en la sección anterior se pueden aplicar para cualquier tamaño en la abertura. Con el propósito de visualizar los patrones de difracción en una aplicación en el desarrollo de las aberturas difractivas, utilizaremos los datos para las aberturas mostrados en los artículos [31, 32], en los que presentan el uso de aberturas rectangulares y circulares para la detección de imágenes de células biológicas transparentes.

En las Fig. 3.2, 3.3, 3.4 en los incisos (c) y (f) de cada caso, se presentan los patrones de difracción para el caso de una abertura cuadrada y sus respectivas gráficas de contorno para cada caso en el que $N_F = 0,1, 1, 10$. Se observa que el patrón de difracción para $N_F = 0,1$ es una función sinc^2 , tal como se espera para el régimen de difracción de campo lejano. Por otro lado, vemos que se generan deformaciones en forma de picos en el patrón de difracción, siendo cada vez más destacados para $N_F = 10$.

Mientras que en las Fig. 3.2, 3.3, 3.4, en los incisos (a), (b), (d) y (e), se muestran las intensidades ópticas para una abertura rectangular, con sus respectivas gráficas de contorno para cada caso en el que $N_F = 0,1, 1, 10$. Análogamente al caso de la abertura cuadrada, se observa que el patrón de difracción para $N_F = 0,1$ es una función sinc^2 , tal como se espera para el régimen de difracción de campo lejano. También se observa que se generan deformaciones en forma de picos, siendo cada vez más destacados para $N_F = 10$. En este caso de la abertura rectangular se considera un tamaño de $a = 1,2 \mu\text{m}$ y $b = 0,8 \mu\text{m}$ [31, 32]. Notemos también en el caso $N_F = 1$ una clara diferencia entre el patrón de difracción de la abertura rectangular que presenta dos picos centrales y el patrón de difracción de la abertura cuadrada que presenta uno solo debido al traslape de los dos picos centrales ya que la abertura tiene todos los lados iguales.

En las Fig. 3.2, 3.3, 3.4, en los casos (g), (h), (i), se presentan los patrones de difracción para una única rejilla en los que se considera de tamaño $a = 1,2 \mu\text{m}$ y $b = 1000 \mu\text{m}$. Y en los

casos (j), (k), (l), se presenta el patrón de difracción de un borde recto. En ambas situaciones se analizan los casos para los que $N_F = 0,1, 1, 10$. Donde se observa una serie de oscilaciones a partir del pico principal, siendo estos picos cada vez más destacados entre mayor sea el número de Fresnel.

En la Fig. 3.6, se muestran los patrones de difracción para el caso de la abertura circular con radio $a = 0,6 \mu\text{m}$ [31, 32], analizando los mismos casos para el número de Fresnel $N_F = 0,1, 1, 10$. Notemos que para $N_F = 0,1$, se observa el patrón de difracción de la función Bessel J_1^2 , propia de la difracción de campo lejano. Mientras que para $N_F = 1$ y $N_F = 10$, se observa que la generación de oscilaciones en el patrón de difracción crece conforme crece el número de Fresnel.

Dentro del esquema de abertura triangular Fig. 3.8, existen pocas referencias que hablan sobre el tratamiento de esta rendija, por lo que es de interés hacer un análisis bajo el esquema de número de Fresnel, donde se obtiene que el patrón de difracción en el eje x se desplaza y en el eje y presenta un mínimo en cero, esto es debido a que la intensidad obtenida bajo este tratamiento, presenta un valor de $(1 - \tan \alpha)$ en este mismo eje, también podemos notar que el patrón es similar al obtenido para una regilla rectangular, con la diferencia de un incremento de intensidad dividido en dos máximos en el centro del sistema y además que se hace más pequeño el haz conforme aumenta el número de Fresnel.

Capítulo 4

Difracción óptica en el régimen de campo cercano en una rejilla estructurada

La implementación de la difracción de campo cercano es de gran utilidad en como parte del análisis y descripción de los fenómenos ópticos que ocurren cuando la luz atraviesa espacios que son comparables con algunas longitudes de onda, propias de la luz.

El estudiar la difracción de Fresnel para una rejilla bidimensional rectangular puede ayudar en el análisis de cálculos de irradiancia para rejillas unidimensional con estructuras definidas como son rejillas de Cantor, rejillas fractales o placas zonales.

Uno de los modelos propuestos para el desarrollo matemático de análisis de rejillas estructuradas es el método del cálculo iterativo de las integrales de Fresnel que es descrito por K.M. Abedim, et. al. [33], es posible calcular la irradiancia mediante la suma de las contribuciones de todas las perturbaciones de varias aberturas rectangulares, extendiendo el resultado a rejillas de construcción fractal como es el conjunto de Cantor.

De igual manera este método de resolución permite usar en la solución el número de Fresnel como parámetro en el cálculo de la irradiancia.

4.1. Fractal

El término fractal fue acuñado por Mandelbrot en 1975 de la palabra latina fractus cuyo significado es fracturado o quebrado. En términos más simples, los fractales se refieren a los modelos espaciales muy irregulares o fragmentados que no pueden ser descritos en términos de la geometría euclidiana.

Algunos describen un fractal como un objeto geométrico en que se repite el mismo patrón a diferentes escalas y con diferente orientación.

El carácter fractal de una imagen puede ser cuantificado por un parámetro llamado la *dimensión fractal* D , este parámetro cuantifica la relación entre la escala fractal usada y los modelos observados en diferentes aumentos, es decir, de su complejidad.

Este concepto forma parte de los resultados obtenidos entre 1875 y 1925 por brillantes matemáticos como son Besicovitch, Bolzano, Cantor, Hausdorff, Minkowski, Peano, von Kock, Weierstrass, que contaron con las contribuciones posteriores de Pontriaguin y Schnirelman (1932), Kolmogorov y Tijomirov (1959-1961) y de Vilenkin, Lorenz y Lévy en los años 60 y 70. En la geometría euclidiana, la dimensión es un concepto familiar descrito por valores enteros de 0, 1, 2 y 3 para puntos, líneas, superficies y sólidos, respectivamente.

En este capítulo se describe la geometría fractal como un estudio de la difracción óptica, bajo el desarrollo de campo cercano usando el número de Fresnel como parámetro principal.

4.2. Rejilla de Cantor

Algunas de las propiedades del campo de difracción de Fresnel, se pueden producir por rejillas de Cantor, donde se evalúa la integral de Fresnel y se encuentra la distribución de intensidad sobre el eje óptico obtenida por la simetría de la periodicidad de las rendijas fractales [34].

Se puede asumir que los intervalos de las rendijas son de una unidad $[0, 1]$ y de largo como la estructura de Cantor sea generada con un iniciador.

Se debe de dividir la unidad en cortes de 3 $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$ de la misma longitud y posteriormente se deja abierta la parte de enmedio como se muestra la figura (4.1), y se van generando niveles con el mismo procedimiento

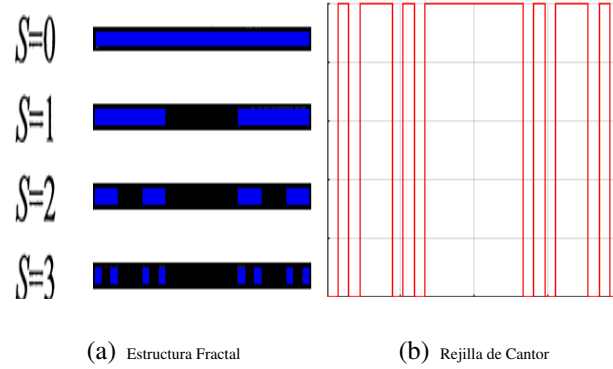


Figura 4.1: Estructura Fractal y rejilla de difracción de Cantor de 3 niveles, donde S es el nivel de Cantor.

Los niveles de las barras de Cantor servirán como guía para construir las rejillas de difracción.

4.3. Irradiancia

Si consideramos una abertura rectangular, se obtiene que la irradiancia [18] en el plano de observación esta dada por:

$$I_P(u, v) = -\frac{I_0}{4} \left([C_F(u_2) - C_F(u_1)]^2 + [S_F(u_2) - S_F(u_1)]^2 \right) \times \left([C_F(v_2) - C_F(v_1)]^2 + [S_F(v_2) - S_F(v_1)]^2 \right), \quad (4.1)$$

donde C_F y S_F son las integrales de Fresnel. Y además los límites de integración u_1 , u_2 , v_1 y v_2 están dados por:

$$u_1 = -\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}N_F^{1/2} + \Xi\right), \quad u_2 = +\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}N_F^{1/2} - \Xi\right), \quad (4.2)$$

$$v_1 = -\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}N_F^{1/2} + H\right), \quad v_2 = +\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}N_F^{1/2} - H\right). \quad (4.3)$$

En este punto se propone una generalización del número de Fresnel de un modo no descrito en la literatura como $N_F = \frac{ab}{\lambda L}$ para el caso de la rejilla rectangular, y además se denota $\Xi = \frac{\xi}{\lambda L}$ y $H = \frac{\eta}{\lambda L}$ como variables de distancia normalizadas [18]. Con λ la longitud de onda, $\frac{1}{L} = \left(\frac{1}{h'} + \frac{1}{h}\right)$, a y b son el ancho y el alto de la abertura respectivamente, χ y η son las coordenadas del punto P en el plano de observación.

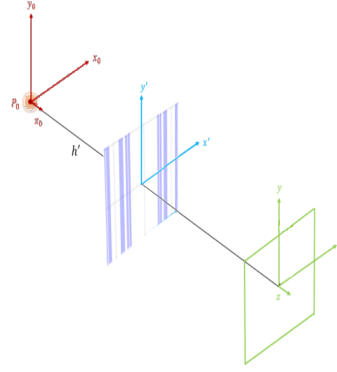


Figura 4.2: Planos de observación y de la rendija en una rejilla de Cantor.

Para verificar que las ecuaciones anteriores (4.1,4.2,4.3) sean correctas se simplifica y se compara los resultados con los casos ya conocidos en la literatura como para una rejilla cuadrada considerando $a = b$ [18], para una rejilla simple donde se considera $u_1 \rightarrow -\infty$ y $u_2 \rightarrow +\infty$ [9] y finalmente para un borde recto donde se considera $v_2 \rightarrow +\infty$ [9].

Y aún más se generaliza para el caso de dos rejillas rectangulares [33], donde la irradiancia esta dada por:

$$I_P(u, v) = -\frac{I_0}{4} \left([C_F(u_2) + C_F(u_3) - C_F(u_1) - C_F(u_4)]^2 + [S_F(u_2) + C_F(u_3) - S_F(u_1) - C_F(u_4)]^2 \right) \times \left([C_F(v_2) - C_F(v_1)]^2 + [S_F(v_2) - S_F(v_1)]^2 \right), \quad (4.4)$$

y cuyos limites de integración son:

$$u1 = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{a}{6b}} N_F^{1/2} - \Xi \right) \quad u3 = -\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{a}{6b}} N_F^{1/2} + \Xi \right), \quad (4.5)$$

$$u2 = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{3a}{2b}} N_F^{1/2} - \Xi \right) \quad u4 = -\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{3a}{2b}} N_F^{1/2} + \Xi \right), \quad (4.6)$$

$$v1 = -\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{3b}{2a}} N_F^{1/2} + H \right) \quad v2 = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{3b}{2a}} N_F^{1/2} - H \right). \quad (4.7)$$

Siguiendo la idea de [33] sumando las contribuciones de las perturbaciones para varias aberturas rectangulares, se extiende el estudio a rejillas de difracción con estructura fractal como lo es el conjunto de Cantor. Cuya perturbación óptica obedece a la ecuación [34]:

$$U_P(u, v) = C_U \iint_{abertura} U_0(L_N, x_N) e^{ik(r+r')} dS, \quad (4.8)$$

donde C_U es una constante y $U_0(L_N, x_N)$ es la perturbación debido a la rejilla que para este caso esta asociada a la función de Cantor:

$$L_N = \delta 3^{-N} \quad x_N = \sum_{i=1}^N \left(\frac{aS_i}{3^i} \right), \quad (4.9)$$

donde: N es el nivel máximo del conjunto de Cantor, S_i es el nivel de Cantor, L_N es la longitud de los segmentos de las barras de Cantor en el nivel N , x_N representa las coordenadas de los centros de los segmentos y δ es el tamaño de la rejilla de Cantor.

4.4. Resultados y discusión de la distribución de intensidades en difracción de campo cercano mediante el número de Fresnel

Se hace un análisis de patrones de difracción para una abertura rectangular, una doble abertura rectangular y una abertura de Cantor, donde se modifica el número de Fresnel.

Mostrando a continuación los patrones de irradiancia para una abertura rectangular con diferentes valores para el número de Fresnel.

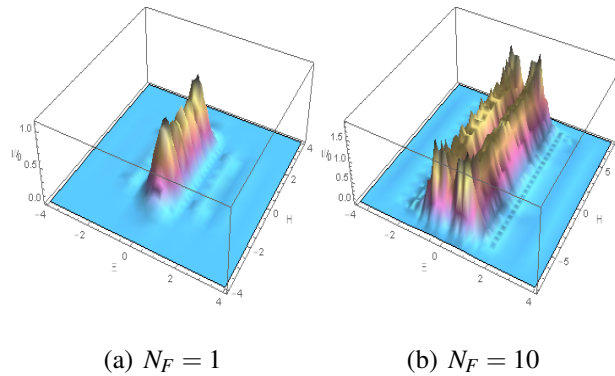


Figura 4.3: Gráficos de irradiancia para una abertura rectangular en difracción de campo cercano (a) $N_F = 1$, (b) $N_F = 10$.

Como es bien sabido, el patrón de difracción se ensancha y muestra un incremento de picos de intensidad conforme se aumenta el número de Fresnel para una única rendija, de manera que, al incrementar el número de rendijas el patrón de difracción tiene un comportamiento muy peculiar que para valores cercanos al campo cercano es decir $N_F = 1$ se comporta como única rendija, pero con la característica de que parte del pico central pierde intensidad, pero generando dos picos de intensidad media, que a simple vista tienen una estructura parecida al pico de intensidad inicial, véase en el caso (a) de la Figura(4.4).

De igual manera se observa en la figura(4.4(b)) que entre mayor sea el valor del número de Fresnel la irradiancia del pico principal va desapareciendo y formando dos picos princi-

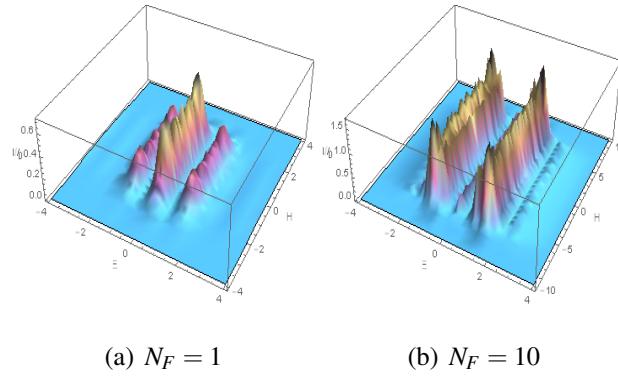


Figura 4.4: Gráficos de irradiancia para una doble abertura rectangular en difracción de campo cercano (a) $N_F = 1$, (b) $N_F = 10$.

pales presentando una saturación de intensidad en ambos, por lo que se puede concluir que la forma y distribución de los patrones de intensidad dependa del valor de N_F .

Finalmente en las Figuras (4.5) y (4.6) se muestran la irradiancias de una rejilla de Cantor para los niveles de N de 1 hasta 5 con un número de Fresnel $N_F = 1$ y $N_F = 10$. En los que se observa una simetría fractal que depende del nivel de la función de Cantor, teniendo un comportamiento similar a la rejilla rectangular. Además de observarse que entre mayor sea el nivel de Cantor mayor serán las oscilaciones secundarias de la irradiancia.

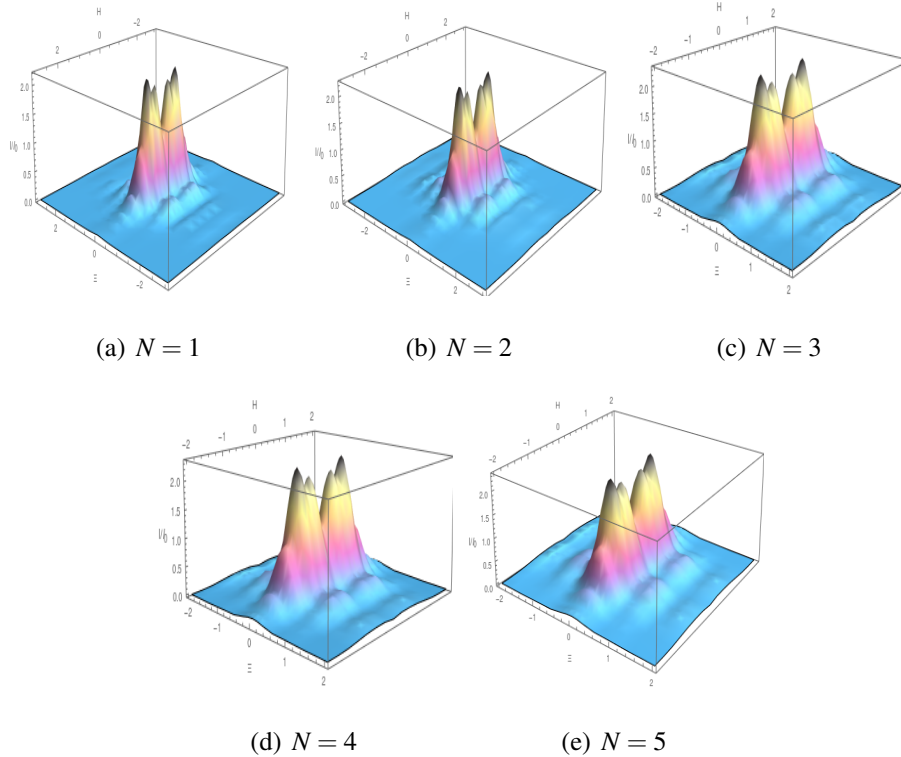


Figura 4.5: Gráficos de irradiancia para una rejilla de Cantor con una secuencia de 5 niveles es decir $N = 1, 2, 3, 4, 5$ para $N_F = 1$.

4.5. Aplicación Análisis colorimétrico para diferentes rejillas rectangulares mediante la teoría de difracción espectral

El proceso de coloración de una sustancia se debe a que una parte del espectro visible se absorbe debido a las interacciones entre los fotones luminosos y los electrones del material, los cuales son capaces de absorber energía y excitarse a diferentes longitudes de onda.

Este mecanismo de coloración es con el que se generan los pigmentos. Para obtener un pigmento específico se estudia cuáles compuestos químicos reaccionan juntos y reproducen el color. Los nombres técnicos de estas sustancias químicas son cromóforos y auxócromos.

Un ejemplo, es el pigmento de la clorofila que se encuentra en las plantas. [35]

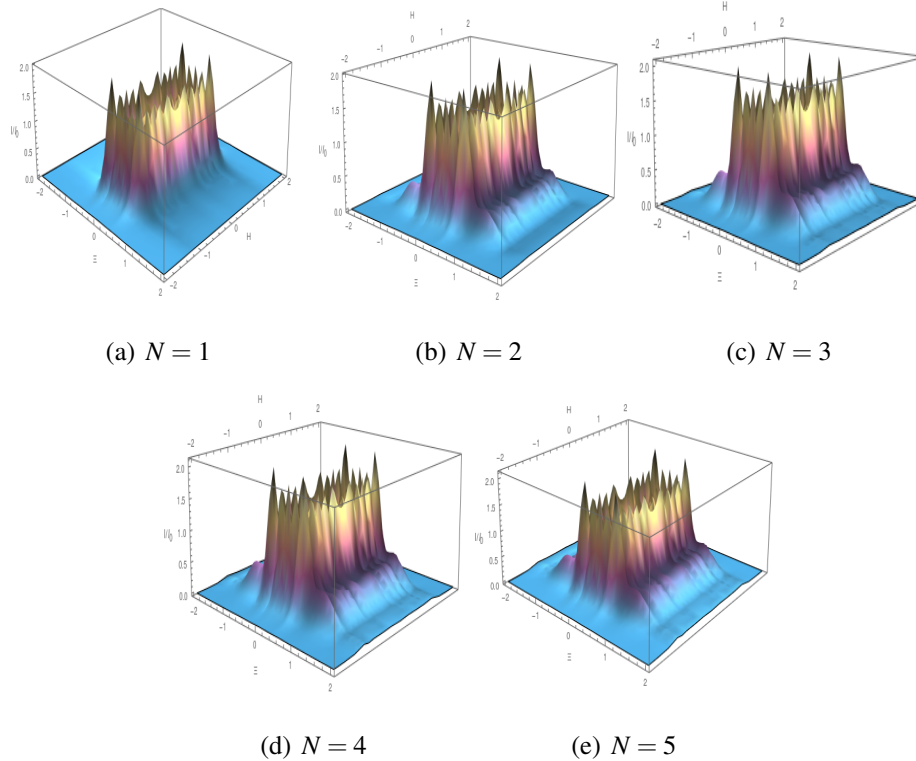


Figura 4.6: Gráficos de irradiancia para una rejilla de Cantor con una secuencia de 5 niveles es decir $N = 1, 2, 3, 4, 5$ para $N_F = 10$.

Otro mecanismo de generación de color puede ser generado debido a procesos ópticos como reflexión, dispersión y difracción de la luz [9] al interactuar con la estructura y/o geometría del objeto. Este tipo de mecanismo de coloración se le conoce como color estructural. [36]

Existen una gran variedad de ejemplos biológicos de colores estructurales: Como las brillantes alas azules de las mariposas Morpho, los colores iridiscentes de algunos escarabajos y flores, el azul metálico de la fruta pollia, entre otros. [37]

Los procesos ópticos usuales para la generación de colores estructurales son: interferencia en películas delgadas, así mismo interferencia en películas multicapa, dispersión de Rayleigh y difracción por medio de rejillas [1, 38, 39]. Siendo este último proceso el que se va a enfocar nuestro objeto de estudio.

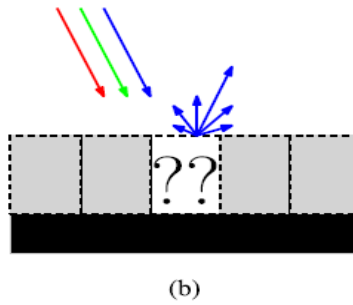


Figura 4.7: Diseño estructural de generación de color por reflexión [1]

Para este caso existen dos conceptos primordiales que hay que calcular: La irradiancia y la radiancia.

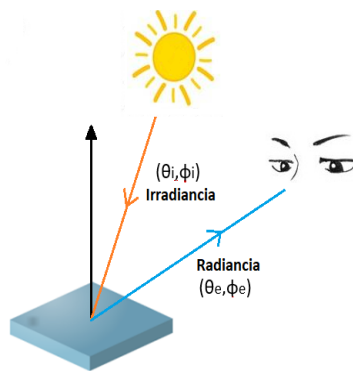


Figura 4.8: Descripción gráfica de Radiancia e Irradiancia

La irradiancia E es la densidad de flujo por unidad de área que es incidente en un punto específico en una superficie específica [40], expresada en Wm^{-2} . Si se considera que un flujo $d\Phi$ relativamente al elemento de superficie dA , la correspondiente irradiancia es:

$$E = \frac{\partial\Phi}{\partial A} \quad (4.10)$$

La radiancia L es el flujo por unidad que va emergiendo a partir de un punto específico de una superficie específica en lugar de ser incidente. En otras palabras, es el flujo radiante por unidad de ángulo sólido en una dirección dada por unidad de área proyectada en esa dirección [40].

$$L(\theta, \phi) = \frac{d^2 \Phi(\theta, \phi)}{d\omega dA \cos \theta} \quad (4.11)$$

Estos conceptos se obtienen naturalmente a partir de la teoría de difracción escalar. Esta teoría describe una relación entre la irradiancia de campo lejano E y la distribución de amplitud complejo U que emerge de la superficie de la abertura [36].

$$E(x', y') = \frac{1}{\lambda^2 z^2} \left\| F \{U(x, y)\} \left(\frac{x'}{\lambda z}, \frac{y'}{\lambda z} \right) \right\|^2, \quad (4.12)$$

donde λ es la longitud de onda y x, y, z, x', y' son las componentes cartesianas del plano de la rendija y el plano de observación respectivamente. F representa la transformada de Fourier, definida como:

$$F \{U(x, y)\} (\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-2\pi i(x\xi + y\eta)} dx dy, \quad (4.13)$$

donde U describe la modulación de fase compleja de una onda plana incidente.

Como se sabe, estos atributos dependen en gran medida de la geometría de la rejilla difractiva. Para nuestro caso modelaremos una rejilla rectangular, por lo que la radiancia obtenida queda expresada de la siguiente manera [36]:

$$L(\alpha) = \left\| e^{-\frac{\pi i d \alpha}{\lambda}} \text{sinc} \left(\frac{d \alpha}{\lambda} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{4\pi i h_n}{\lambda}} \left(\frac{2\pi i d \alpha}{\lambda} \right)^n \right) \right\|^2 \quad (4.14)$$

con los parámetros

- d , es el espaciamiento entre las diferentes alturas
- $\alpha = \cos \theta \cos \phi$, corresponde a uno de los cosenos directores
- λ es la longitud de onda
- h_n es el perfil o función correspondiente a cada altura
- N , es el número de pasos necesarios para abarcar el tamaño de la rejilla

donde los diferentes productos de esta expresión tienen una interpretación física.

- La expresión responsable por la forma es: $C(\alpha) = e^{-\pi id\alpha} \text{sinc} \left(\frac{d\alpha}{\lambda} \right)$. (Rectangular)
- $H_n = e^{-4\pi ih_n/\lambda}$ describe el cambio de fase debido a las alturas de la estructura.
- $T_n(\alpha) = (e^{2\pi id\alpha}/\alpha)^2$ modula el cambio de fase con un factor correspondiente a la translación de la estructura.

A partir del cálculo de la radiancia es posible generar el espacio de color tricromático XYZ mediante:

$$X = \int_{\lambda} L(\lambda) \bar{x}_{31}(\lambda) d\lambda \quad (4.15)$$

$$Y = \int_{\lambda} L(\lambda) \bar{y}_{31}(\lambda) d\lambda \quad (4.16)$$

$$Z = \int_{\lambda} L(\lambda) \bar{z}_{31}(\lambda) d\lambda \quad (4.17)$$

donde \bar{x}_{31} , \bar{y}_{31} y \bar{z}_{31} [41] son las funciones de igualación de color necesarias para calcular los valores triestímulo XYZ, que se encuentran expresadas en términos de la función de Heaviside:

$$\bar{x}_{31}(\lambda) = \sum_{i=0}^2 \alpha_{x_i} \exp \left(-\frac{1}{2} [(\lambda - \beta_{x_i}) S(\lambda - \beta_{x_i}, \gamma_{x_i}, \delta_{x_i})]^2 \right) \quad (4.18)$$

$$\bar{y}_{31}(\lambda) = \sum_{i=0}^1 \alpha_{y_i} \exp \left(-\frac{1}{2} [(\lambda - \beta_{y_i}) S(\lambda - \beta_{y_i}, \gamma_{y_i}, \delta_{y_i})]^2 \right) \quad (4.19)$$

$$\bar{z}_{31}(\lambda) = \sum_{i=0}^1 \alpha_{z_i} \exp \left(-\frac{1}{2} [(\lambda - \beta_{z_i}) S(\lambda - \beta_{z_i}, \gamma_{z_i}, \delta_{z_i})]^2 \right) \quad (4.20)$$

con $S(x, y, z) = y(1 - H(x)) + zH(x)$, donde H es la función de Heaviside.

Y finalmente a partir de aquí podemos calcular las coordenadas cromáticas (x,y)

$$x = \frac{X}{X+Y+Z} \quad (4.21)$$

$$y = \frac{Y}{X+Y+Z} \quad (4.22)$$

$$1 = x + y + z \quad (4.23)$$

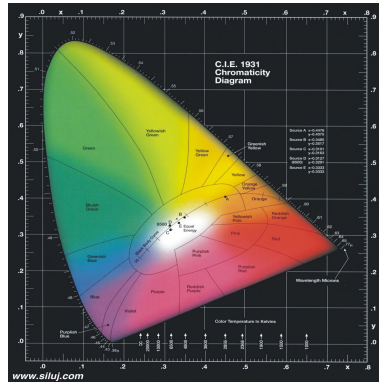
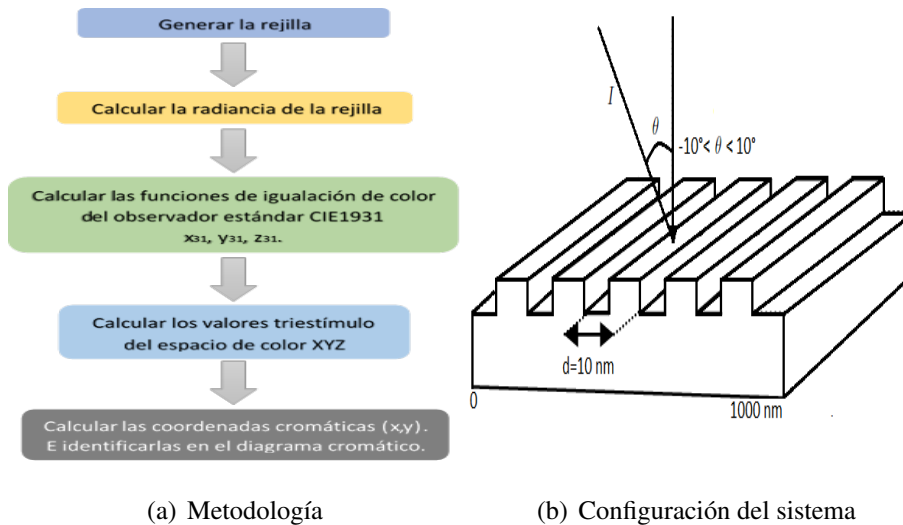


Figura 4.9: Diagrama cromático

4.5.1. Configuración del sistema



(a) Metodología

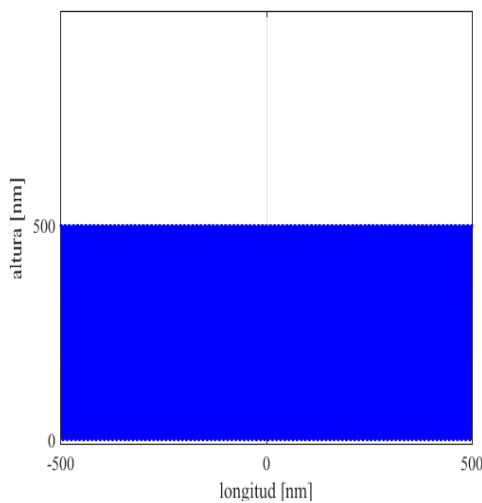
(b) Configuración del sistema

Figura 4.10: Diagrama Cromático

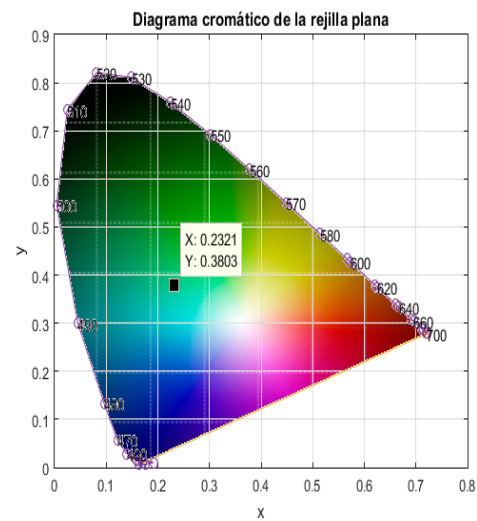
Para describir los procesos de análisis y desarrollo seguiremos el diagrama de flujo de la figura (4.10(a)). Y cuya configuración del sistema esta representado por la figura (4.10(b)).

4.6. Descripción de una rendija plana y una rendija de Cantor

Primeramente se analiza una rejilla plana, donde se observa que el color generado se encuentra en las coordenadas cromáticas (0,23,0,38), que representa un color situado entre el cian y el verde.. Lo cual nos indica que la rejilla no es totalmente plana, ya que de ser así las coordenadas debieron de corresponder al blanco localizada en (0,3,0,3).



(a) Rejilla plana



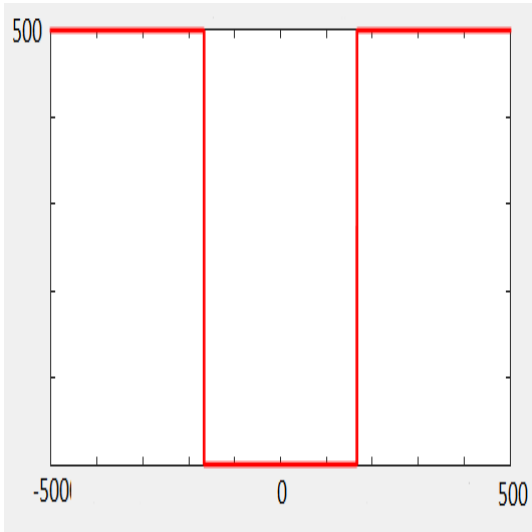
(b) Diagrama cromático de una rejilla plana

Figura 4.11: Análisis cromático de una rendija plana

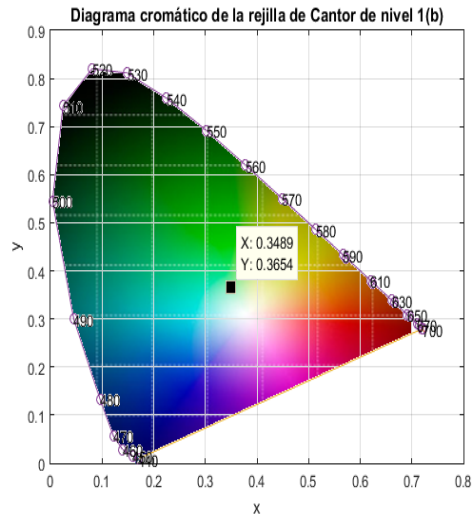
Por otro lado, se generó una rejilla da Cantor de nivel 1, de dos maneras diferentes (Figura 4.12). En los que en ambos casos se observa que se genera el mismo color ubicado en las coordenadas (0,3489,0,3654). Lo que nos hace suponer que esto se debe a que el espaciamiento que existe entre los perfiles de altura es muy grande.

Y por último, se analiza una rejilla de Cantor de nivel 2, como se muestra en (Figura 4.13). En el que se observan sus coordenadas cromáticas en (0,4,0,4).

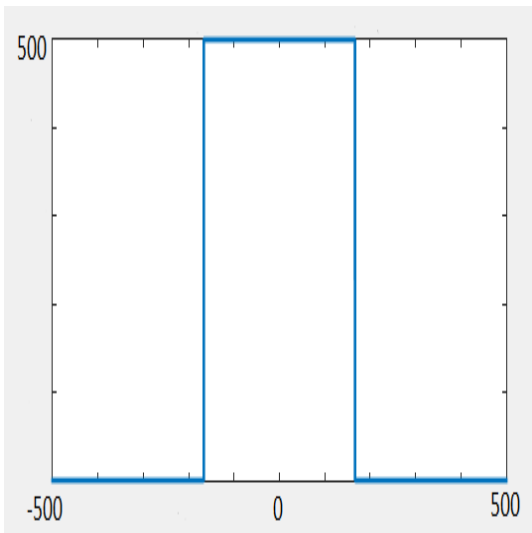
De manera general una de las ventajas de utilizar la teoría de difracción escalar para



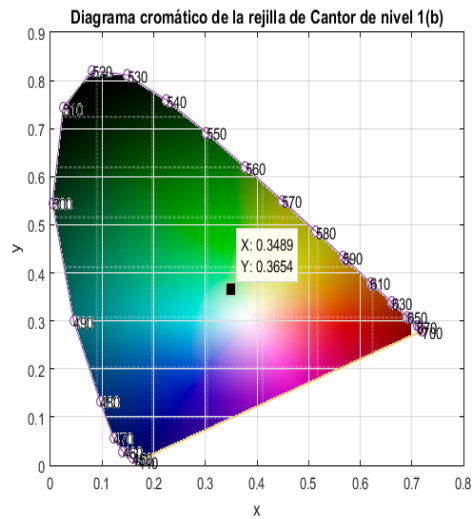
(a) Rejilla de Cantor de nivel 1(a)



(b)



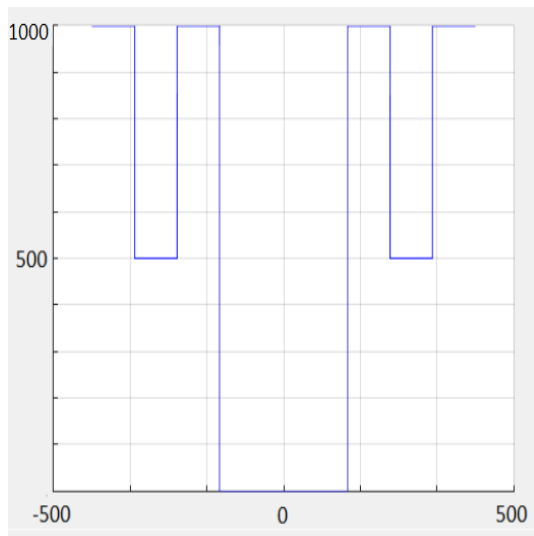
(c) Rejilla de Cantor de nivel 1(b)



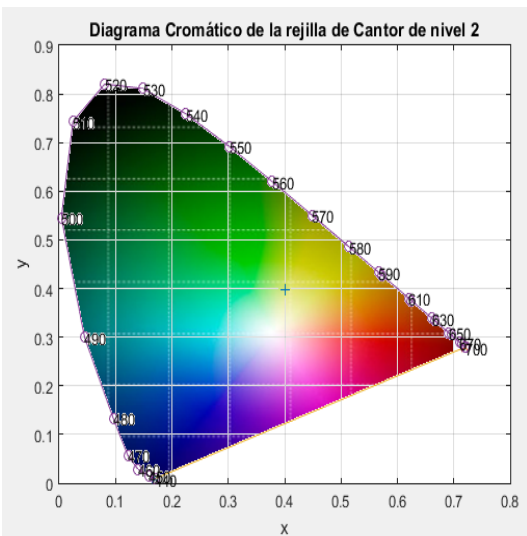
(d)

Figura 4.12: Rendija de Cantor Nivel 1

el cálculo de coordenadas colorimétricas, es que existe mayor facilidad en la realización del cómputo. Más sin embargo una de las desventajas es que no se considera las propiedades del material. Y como conclusión de este apartado se puede verificar que dependiendo del perfil de las alturas y la geometría de la rendija rectangular, se aprecia la generación de diferentes colores, como era previsto.



(a) Rejilla de Cantor de nivel 2



(b)

Figura 4.13: Rendija de Cantor Nivel 2

Capítulo 5

Movimiento bidimensional con las integrales de Fresnel como componentes de la velocidad

Existen diversas situaciones fuera del contexto de la óptica ondulatoria donde es posible encontrar las integrales de Fresnel, como lo son en los bigotes de las ratas o al pelar la cascara de una naranja. [42,43] Pero hace 50 años se dió a conocer una peculiar aplicación de las integrales de Fresnel por el autor Albert V. Ferris-Prabhu [44], en el que discute el movimiento en dos dimensiones de un cuerpo rígido mediante la mecánica rotacional Newtoniana en el que se involucran las integrales de Fresnel dentro de las ecuaciones de velocidad y posición del objeto.

En este capítulo se hace un análisis de ciertos detalles que se quedan ambiguos en la explicación dada por Prabhu y se ofrece una generalización matemática al cálculo de las ecuaciones de movimiento de la velocidad y la posición con respecto al centro de masa del objeto rígido.

5.1. Antecedentes

Considere un objeto rígido y compacto de masa M con un momento de inercia I . El objeto se encuentra sobre una superficie sin fricción y esta superficie se encuentra definida por el sistema de coordenadas cartesianas x e y , donde el origen del sistema coordenado cartesiano coincide con el centro de masa del objeto. Se aplica una fuerza constante F sobre el objeto,

de forma paralela en dirección al eje x . A lo largo del trayecto del movimiento, la línea de aplicación de esta fuerza se mantiene constante a una distancia d , para cualquier posición instantánea angular θ . Cabe mencionar que Ferris-Prabhu considera como condición inicial que el objeto comienza a partir del reposo, pero con el fin de presentar una generalización al desarrollo matemático de las ecuaciones vamos a considerar que el objeto **NO** parte del reposo, es decir que su posición angular **NO** será cero y su velocidad angular **NO** será cero. A partir de estas consideraciones se calcula la cinemática del centro de masa del objeto bajo estas condiciones.

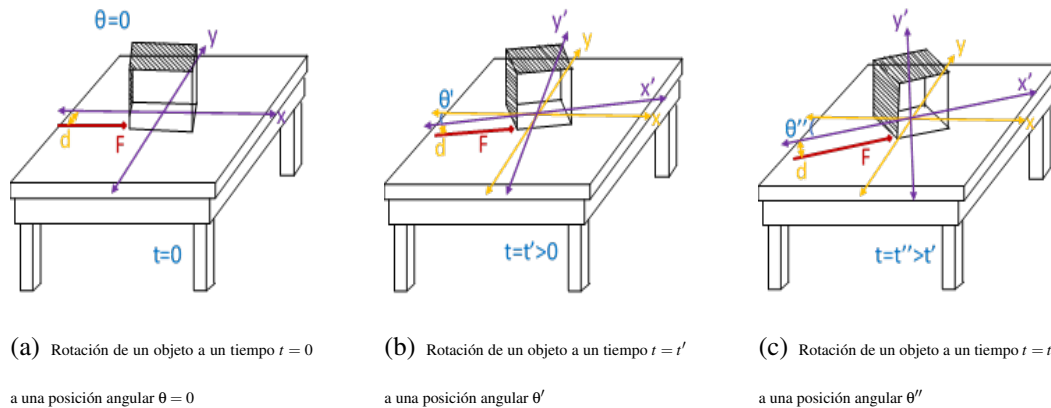


Figura 5.1: Representación del movimiento rotacional de un objeto rígido sobre una superficie bidimensional sin fricción.

Utilizando la ecuación de la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional, el torque del objeto que se ejemplifica en la Figura (5.1), se describe como

$$\tau = I\ddot{\theta} = Fd, \quad (5.1)$$

donde $\ddot{\theta}$ es la segunda derivada temporal de la posición angular del objeto. Consideremos $\kappa = \frac{Fd}{I}$ un término constante, así el ángulo polar es $\theta(t) = \frac{\kappa}{2}t^2 + C_1t + C_2$, donde C_2 representa la posición angular inicial θ_0 y C_1 representa la velocidad angular inicial ω_0 del sistema. A partir de esta ecuación cuadrática se pueden escribir las componentes cartesianas de la aceleración mediante la segunda ley de Newton

$$\ddot{x}(t) = \frac{F}{M} \cos\left(\frac{\kappa}{2}t^2 + C_1t + C_2\right), \quad (5.2)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{F}{M} \sin\left(\frac{\kappa}{2}t^2 + C_1t + C_2\right), \quad (5.3)$$

integrando se encuentran las componentes cartesianas de la velocidad

$$\dot{x}(t) = \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \left[\cos\left(C_2 - \frac{C_1^2}{2\kappa}\right) C_F\left(\frac{C_1 + \kappa t}{\sqrt{\kappa\pi}}\right) - \sin\left(C_2 - \frac{C_1^2}{2\kappa}\right) S_F\left(\frac{C_1 + \kappa t}{\sqrt{\kappa\pi}}\right) \right], \quad (5.4)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \left[\cos\left(C_2 - \frac{C_1^2}{2\kappa}\right) S_F\left(\frac{C_1 + \kappa t}{\sqrt{\kappa\pi}}\right) + \sin\left(C_2 - \frac{C_1^2}{2\kappa}\right) C_F\left(\frac{C_1 + \kappa t}{\sqrt{\kappa\pi}}\right) \right], \quad (5.5)$$

integrando nuevamente, se encuentran las componentes cartesianas para la posición

$$x(t) = \frac{F}{M} \frac{1}{\kappa^{3/2}} \left[\sqrt{\pi}(C_1 + \kappa t) \cos\left(C_2 - \frac{C_1^2}{2\kappa}\right) C_F\left(\frac{C_1 + \kappa t}{\sqrt{\kappa\pi}}\right) - \sqrt{\pi}(C_1 + \kappa t) \sin\left(C_2 - \frac{C_1^2}{2\kappa}\right) S_F\left(\frac{C_1 + \kappa t}{\sqrt{\kappa\pi}}\right) - \sqrt{\kappa} \sin\left(\frac{\kappa}{2}t^2 + C_1t + C_2\right) \right], \quad (5.6)$$

$$y(t) = \frac{F}{M} \frac{1}{\kappa^{3/2}} \left[\sqrt{\pi}(C_1 + \kappa t) \cos\left(C_2 - \frac{C_1^2}{2\kappa}\right) S_F\left(\frac{C_1 + \kappa t}{\sqrt{\kappa\pi}}\right) + \sqrt{\pi}(C_1 + \kappa t) \sin\left(C_2 - \frac{C_1^2}{2\kappa}\right) C_F\left(\frac{C_1 + \kappa t}{\sqrt{\kappa\pi}}\right) + \sqrt{\kappa} \cos\left(\frac{\kappa}{2}t^2 + C_1t + C_2\right) \right]. \quad (5.7)$$

Notemos que las ecuaciones (5.6) y (5.7) se pueden reescribir como

$$\kappa x(t) = (C_1 + \kappa t) \dot{x}(t) - \dot{y}(t), \quad (5.8)$$

$$\kappa y(t) = (C_1 + \kappa t) \dot{y}(t) + \dot{x}(t), \quad (5.9)$$

Para desacoplar el sistema de ecuaciones, derivamos (5.8)

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{C_1 + \kappa t} \ddot{y}(t),$$

se sustituye en ecuación (5.9), con lo que se llega a

$$\ddot{y}(t) + (C_1 + \kappa t)^2 \dot{y}(t) - \kappa(C_1 + \kappa t)y(t) = 0, \quad (5.10)$$

para resolver (5.10), se hace el siguiente cambio de variable

$$y(t) = (C_1 + \kappa t)C_3\chi(t) , \quad (5.11)$$

$$\dot{y}(t) = (C_1 + \kappa t)C_3\dot{\chi}(t) + C_3\kappa\chi(t) ,$$

$$\ddot{y}(t) = (C_1 + \kappa t)C_3\ddot{\chi}(t) + 2C_3\kappa\dot{\chi}(t) ,$$

$$\dddot{y}(t) = (C_1 + \kappa t)C_3\dddot{\chi}(t) + 3C_3\kappa\ddot{\chi}(t) ,$$

sustituyendo en ecuación (5.10) se obtiene

$$(C_1 + \kappa t)\dddot{\chi}(t) + 3\kappa\ddot{\chi}(t) + (C_1 + \kappa t)^3\dot{\chi}(t) = 0 , \quad (5.12)$$

haciendo otro cambio de variable

$$\dot{\chi}(t) = v(t) , \quad (5.13)$$

$$\ddot{\chi}(t) = \dot{v}(t) ,$$

$$\dddot{\chi}(t) = \ddot{v}(t) ,$$

obteniendo así

$$(C_1 + \kappa t)\ddot{v}(t) + 3\kappa\dot{v}(t) + (C_1 + \kappa t)^3v(t) = 0 . \quad (5.14)$$

Para resolver (5.14) consideremos

$$v(t) = \frac{1}{(C_1 + \kappa t)^{3/2}}\omega(t) , \quad (5.15)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{(C_1 + \kappa t)^{3/2}}\dot{\omega}(t) - \frac{3\kappa}{2(C_1 + \kappa t)^{5/2}}\omega(t) ,$$

$$\ddot{v}(t) = \frac{1}{(C_1 + \kappa t)^{3/2}}\ddot{\omega}(t) - \frac{3\kappa}{(C_1 + \kappa t)^{5/2}}\dot{\omega}(t) + \frac{15\kappa^2}{4(C_1 + \kappa t)^{7/2}}\omega(t) ,$$

obteniendo así

$$\ddot{\omega}(t) + \frac{(4C_1^4 - 3\kappa^2 + 16C_1^3\kappa t + 24C_1^2\kappa^2 t^2 + 16C_1\kappa^3 t^3 + 4\kappa^4 t^4)}{4(C_1 + \kappa t)^2} \omega(t) = 0 , \quad (5.16)$$

cuya solución es

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{C_1 + \kappa t}} \left[C_4 e^{-i(C_1 + \frac{\kappa}{2}t)} - \frac{iC_5}{2} e^{i(C_1 + \frac{\kappa}{2}t)} \right]. \quad (5.17)$$

A partir de aquí regresamos el cambio de variable (5.15), donde

$$v(t) = \frac{1}{(C_1 + \kappa t)^2} \left[C_4 e^{-i(C_1 + \frac{\kappa}{2}t)} - \frac{iC_5}{2} e^{i(C_1 + \frac{\kappa}{2}t)} \right], \quad (5.18)$$

que a su vez se regresa al integrar (5.13), obteniendo

$$\begin{aligned} \chi(t) = & i \frac{1}{2\kappa^2(C_1 + \kappa t)} e^{i(C_1 + \frac{\kappa}{2}t)} \left[2iC_4\kappa e^{-i(C_1 + \frac{\kappa}{2}t)} + C_5\kappa \right] \\ & - i \frac{1}{2\kappa^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{C_1^2}{2\kappa}} \left[2C_4 \operatorname{erfi} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{(C_1 + \kappa t)}{(2\kappa)^{1/2}} \right) + C_5 e^{-i\frac{C_1^2}{\kappa}} \operatorname{erfi} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{C_1 + \kappa t}{(2\kappa)^{1/2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

y finalmente usando la ecuación (5.11), se obtiene la solución general de la ecuación diferencial de tercer orden (5.10), con la que se obtiene la posición cartesiana generalizada del centro de masa del objeto rígido

$$\begin{aligned} y_g(t) = & i \frac{C_3}{4\kappa^2} (C_1 + \kappa t) \left\{ -\frac{2}{(C_1 + \kappa t)} e^{i(C_1 + \frac{\kappa}{2}t)} \left[2iC_4 e^{-i(2C_1 + \kappa t)} + C_5\kappa \right] \right. \\ & \left. + \sqrt{2\pi\kappa} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{C_1^2}{2\kappa}} \left[2C_4 \operatorname{erfi} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{(C_1 + \kappa t)}{\sqrt{2\kappa}} \right) + C_5 e^{-i\frac{C_1^2}{\kappa}} \operatorname{erfi} \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{(C_1 + \kappa t)}{\sqrt{2\kappa}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Notemos que si se deriva la ecuación (5.20), es posible encontrar la velocidad cartesiana generalizada del centro de masa del objeto rígido. El movimiento cinemático rotacional de este objeto rígido se visualiza en la grafica (5.2), donde se muestra que se recuperan el mismo movimiento mostrado por Ferris [44].

5.2. Movimiento planar

En el desarrollo matemático de la difracción óptica mediante rejillas y aberturas aparecen como elementos fundamentales las integrales de Fresnel, muchas veces en la forma

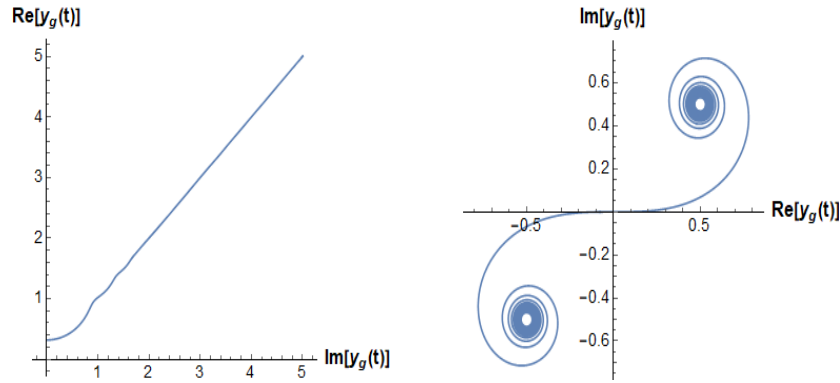


Figura 5.2: A la izquierda se representa el gráfico de la posición cartesiana del centro de masa del objeto rígido. Mientras que a la derecha se muestra la velocidad cartesiana del centro de masa del objeto rígido, mostrado por Ferris-Prabhu a partir de la generalización matemática realizada.

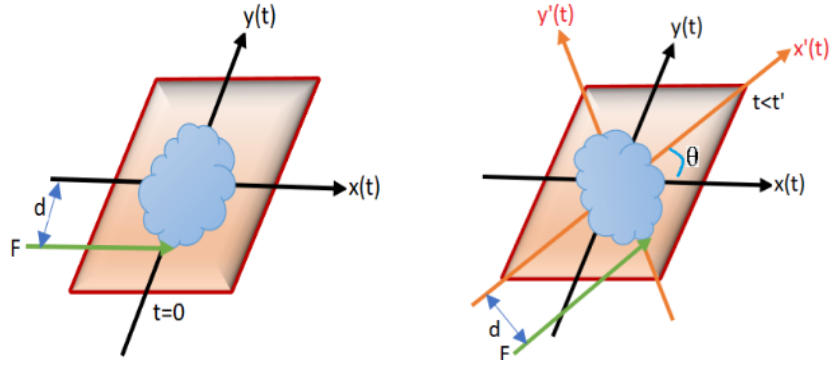
gráfica de Argand que genera la espiral de Cornu.

A pesar de que estas integrales tienen una fuerte conexión con el campo de la óptica ondulatoria, aquí mostramos una aplicación que fue señalada por Ferris-Prabhu en 1970 [44] para el caso del movimiento rotacional de un cuerpo rígido en mecánica clásica.

Sea un objeto rígido de masa M (con $M \neq 0$) y momento de inercia I ($I \neq 0$) sobre una superficie sin fricción que se encuentra inicialmente en reposo, esto es $\theta(t=0) = 0$ y $\dot{\theta}(t=0) = 0$. Donde $\theta = \theta(t)$ es la posición angular de cualquier punto del objeto con respecto a su centro de masa. Cabe señalar que se prefiere que tanto las coordenadas del centro de masa como el eje de rotación del objeto coincidan en el origen del marco de referencia del plano cartesiano.

Y sea $F \neq 0$ una fuerza de magnitud constante que actúa a una distancia d ($d \neq 0$) a partir del centro de masa, tal como se muestra en la Figura 5.3. De tal manera que el movimiento del objeto será rotacional.

Para calcular la trayectoria de este objeto, usaremos la ecuación fundamental del movimiento rotacional ecuación(5.1). Donde usaremos $K = \frac{Fd}{I}$ como una constante para simplificar los cálculos intermedios de este problema dinámico. Entonces la ecuación (5.1) se



(a) Diagrama del cuerpo rígido a un tiempo inicial $t = 0$

(b) Diagrama del cuerpo rígido rotado a un ángulo θ a un tiempo $t < t'$

Figura 5.3: Diagrama del planteamiento del problema del movimiento rotacional de un cuerpo rígido a un tiempo $t = 0$ y a un tiempo $t < t'$.

convierte en una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden $\ddot{\theta}(t) = K$, con solución

$$\theta(t) = \frac{K}{2}t^2, \quad (5.21)$$

donde ya se han consideraron las condiciones iniciales.

Para encontrar las ecuaciones cartesianas de movimiento usaremos la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \frac{F}{M} \cos\left(\frac{K}{2}t^2\right), \\ \ddot{y}(t) &= \frac{F}{M} \sin\left(\frac{K}{2}t^2\right), \end{aligned}$$

integrando estas ecuaciones se obtiene las componentes cartesianas de la velocidad, las cuales quedan en términos de las integrales de Fresnel

$$\dot{x}(t) = \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{K}} C\left(\sqrt{\frac{K}{\pi}}t\right), \quad (5.22)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{K}} S\left(\sqrt{\frac{K}{\pi}}t\right), \quad (5.23)$$

Dado que ambas velocidades son cero en $t = 0$, se confirma que el centro de masa experimenta un movimiento plano como un instante en el centro de rotación. Estos componentes se trazan en la Fig.(5.4) para tres valores de K , junto con su renombrado diagrama de Argand (la parte positiva de la espiral clotoide/Cornu Euler [45,46]) y la velocidad $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

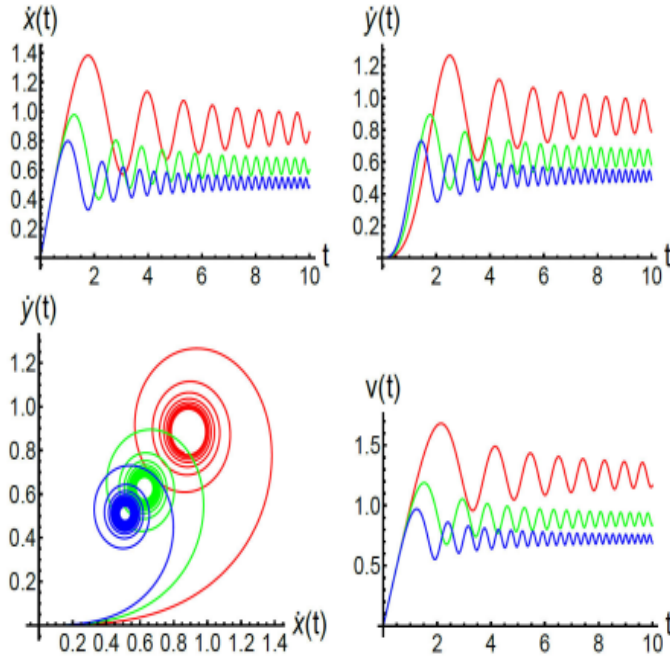


Figura 5.4: Componentes cartesianos de la velocidad para $K = 1, 2, 3$ (rojo, verde, azul, respectivamente), y la fuerza y masa tomadas como 1. También se muestra la gráfica de Argand en la esquina izquierda y la velocidad en la esquina derecha $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

Integrando de nuevo con constantes de integración cero, las componentes cartesianas para la posición son

$$x(t) = \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{K}} \left[tC \left(\sqrt{\frac{K}{\pi}} t \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi K}} \sin \left(\frac{K}{2} t^2 \right) \right], \quad (5.24)$$

$$y(t) = \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{K}} \left[tS \left(\sqrt{\frac{K}{\pi}} t \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi K}} \cos \left(\frac{K}{2} t^2 \right) \right]. \quad (5.25)$$

Dado que F/M es un factor de escala general, procedemos aquí suponiendo $F/M = 1$, lo que no cambia el comportamiento analítico de las soluciones. Graficando el desplazamiento

ecuaciones (5.36, 5.25) en la Fig. (5.5) junto con el desplazamiento radial $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Las gráficas muestran un comportamiento lineal que se establece en instantes de tiempo ya moderados con algunos superponen ondas que son más pequeñas y casi desaparecen aumentando K . Esto es fácil de entender usando el gran crecimiento asintótico del argumento de las integrales de Fresnel que escribimos en la forma

$$C(t) \approx \frac{1}{2} \text{sng}(t) + \frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) \approx \frac{1}{2} \left(1 + t \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right), \quad (5.26)$$

$$S(t) \approx \frac{1}{2} \text{sng}(t) + \frac{1}{\pi t} \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) \approx \frac{1}{2} \left(1 + t \text{sinc}^*\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right). \quad (5.27)$$

para $t \gg 1$ y donde la notación

$$\text{sinc}^*\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)}{\frac{\pi}{2} t^2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} t^2 - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} t^2}$$

se introduce para enfatizar las conocidas ondas de tipo sinc en la región plana de las integrales de Fresnel considerada como funciones de conmutación. El aumento lineal en la amplitud de las ondas en las grandes integrales asintóticas de Fresnel (5.26 y 5.27) es compensado con incrementos de amortiguación natural de las oscilaciones sinc. En el caso de los desplazamientos cartesianos (5.36) y (5.25), nótese que los últimos términos oscilatorios están acotados por su amplitud, $1/K$, por lo que su efecto en las gráficas no se puede percibir. En otras palabras, las gráficas de desplazamiento están dominadas por las funciones pares tC y tS , que asintóticamente en el primer cuadrante están dados por

$$tC(t) \approx \frac{1}{2} t \left(1 + t \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right), \quad (5.28)$$

$$tS(t) \approx \frac{1}{2} t \left(1 + t \text{sinc}^*\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right). \quad (5.29)$$

a la que se debe aplicar el efecto decreciente del factor $\sqrt{\pi/K}$ debe ser agregado. Usando (5.28) y (5.29) en (5.36) y (5.25) para $F/M = 1$, uno puede ver que los gráficos de los desplazamientos son esencialmente las líneas rectas $\sqrt{\pi/K}t/2$ con la superposición de $1 + t \text{sinc}$ y $1 + t \text{sinc}^*$ donde las modulaciones se amortiguan rápidamente.

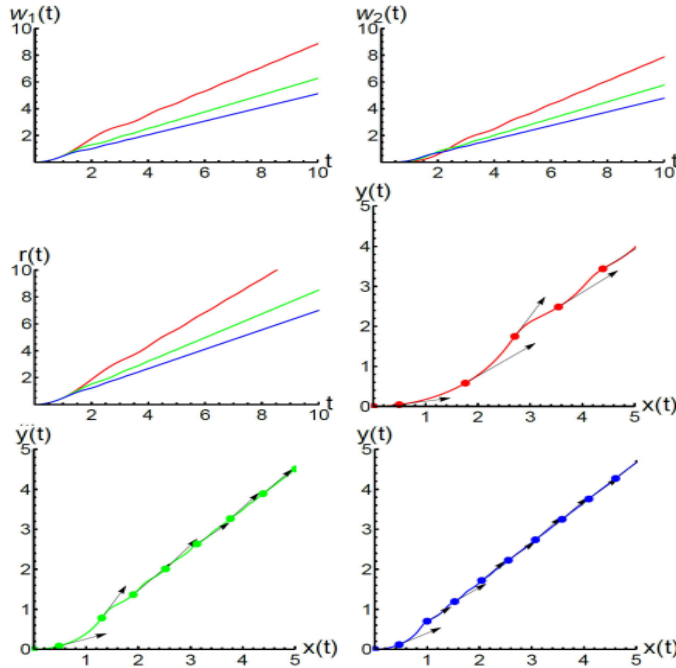


Figura 5.5: Desplazamientos cartesianos $w_1 \equiv x(t)$ (arriba a la izquierda) y $w_2 \equiv y(t)$ para una partícula rígida restringida a un plano bajo la acción de un fuerza constante que actúa como se describe en el texto para $K = 1, 2, 3$. La posición en la superficie es $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$, concierne con respecto al origen en el tiempo t (centro izquierda). Las fluctuaciones en la dirección de la velocidad (flechas negras) en el curso del movimiento para los mismos valores de K (centro derecha e inferior). Tanto la fuerza como la masa se toman como unidad.

5.2.1. Ecuaciones de movimiento para una esfera sólida y una esfera hueca.

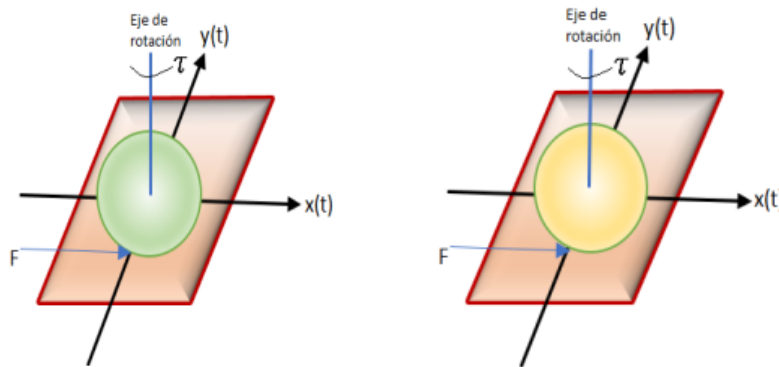
Analizaremos dos casos para el objeto rígido, uno para una esfera sólida con momento de inercia $I = \frac{2}{5}MR^2$ y el otro caso para una esfera hueca con momento de inercia $I = \frac{2}{3}MR^2$, recordando que M es la masa del objeto y R es el radio de la esfera. Para ambos casos consideraremos una masa unitaria $M = 1$ y radio unitario $R = 1$ y además supondremos un torque $\tau = 1$ y la distancia de aplicación de la fuerza en $d = 1$.

También se calculó la velocidad total para las posiciones angulares $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ y 2π mediante

$$\begin{aligned}
 v = v(\theta) &= \sqrt{\left(\frac{dx(\theta)}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy(\theta)}{d\theta}\right)^2}, \\
 &= \frac{\sqrt{\pi I \tau}}{Md} \left[C^2 \left(\sqrt{\frac{2\theta}{\pi}} \right) + S^2 \left(\sqrt{\frac{2\theta}{\pi}} \right) \right],
 \end{aligned}$$

así mismo se calcula la longitud de arco s perteneciente a cada posición angular, mediante la ecuación

$$\begin{aligned}
 s &= \int_a^b \sqrt{\left| \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \right|^2 + \left| \frac{dg(\zeta)}{d\zeta} \right|^2} d\zeta, \\
 &= \int_0^b \sqrt{\left| \frac{\sqrt{\pi I \tau}}{Md} \cos \left(\sqrt{\frac{2\theta}{\pi}} \right) \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{\pi I \tau}}{Md} \sin \left(\sqrt{\frac{2\theta}{\pi}} \right) \right|^2} d\theta, \\
 &= \frac{\sqrt{\pi I \tau}}{Md} \int_0^b d\theta, \\
 &= \frac{\sqrt{\pi I \tau}}{Md} \theta_b,
 \end{aligned}$$



(a) Esfera sólida con momento de inercia $I = \frac{2}{5}MR^2$

(b) Esfera hueca con momento de inercia $I = \frac{2}{3}MR^2$

Figura 5.6: Diagrama del planteamiento del problema para la esfera sólida y para la esfera hueca.

	θ	rad	$\frac{dx(\theta)}{d\theta}$	$\frac{dy(\theta)}{d\theta}$	s	$v(\theta)$	$\frac{dx(\theta)}{d\theta}$	$\frac{dy(\theta)}{d\theta}$	s	$v(\theta)$
θ_0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
θ_1	30	$\frac{\pi}{6}$	0,62	0,11	0,58	0,63	0,81	0,14	0,75	0,82
θ_2	45	$\frac{\pi}{4}$	0,74	0,19	0,88	0,77	0,96	0,25	1,13	0,99
θ_3	60	$\frac{\pi}{3}$	0,81	0,29	1,17	0,87	1,05	0,38	1,51	1,12
θ_4	90	$\frac{\pi}{2}$	0,87	0,49	1,76	1,00	1,12	0,63	2,27	1,29
θ_5	180	π	0,59	0,80	3,52	0,99	0,76	1,03	4,54	1,28
θ_6	360	2π	0,54	0,38	7,04	0,66	0,70	0,49	9,09	0,86

Tabla 5.1: Tabla de valores de las coordenadas cartesianas de las velocidades, su longitud de arco y la velocidad total para cada posición angular $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ y 2π para una esfera sólida y una esfera hueca.

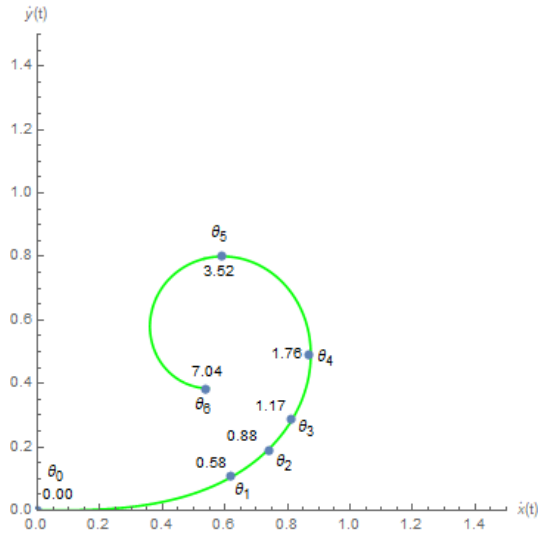
En el Cuadro 5.1 para cada una de las posiciones angulares $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ y 2π se presentan sus correspondientes coordenadas cartesianas de las velocidades y su velocidad total, así como el cálculo de la longitud de arco tanto para la esfera sólida como para la esfera hueca.

Mientras que en la Figura (5.7) se presenta la representación gráfica o el plano Argand de la trayectoria de las velocidades cartesianas para una vuelta o período de 2π y para dos vueltas o un período de 4π en el caso de las dos esferas sólida y hueca.

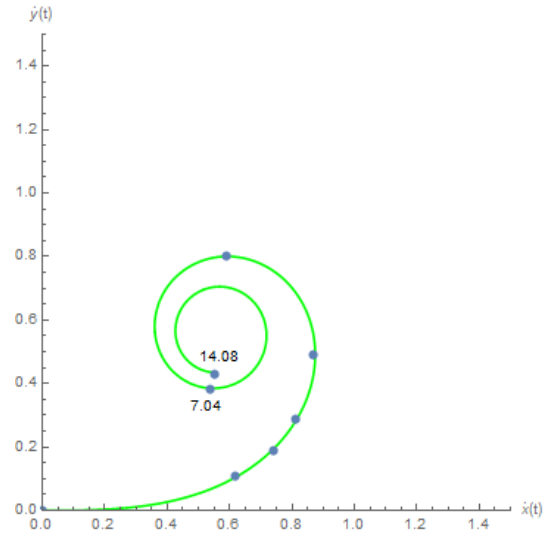
Por otro lado en la Figura (5.8) se muestra la trayectoria del centro de masa ($y(\theta)$ vs $x(\theta)$) para una familia de soluciones para diferentes valores de A y B en un rango de $[-10, 10]$ en ambos casos de la esfera sólida y hueca.

Comparación entre esferas

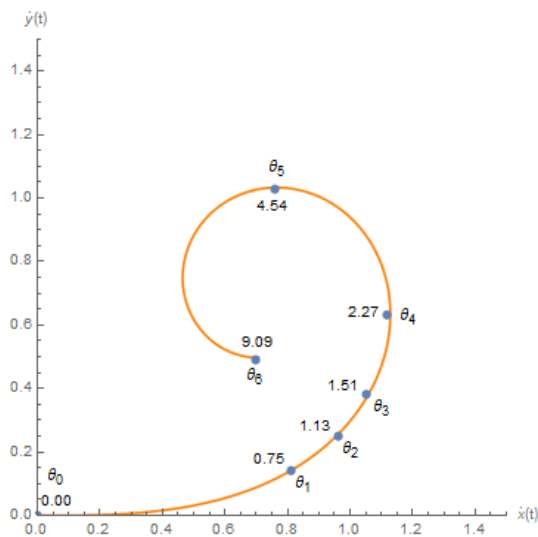
Notemos que la espiral de la esfera hueca (color naranja) es de mayor tamaño en comparación de la espiral de la esfera sólida (color verde) debido a que al aplicar una fuerza sobre



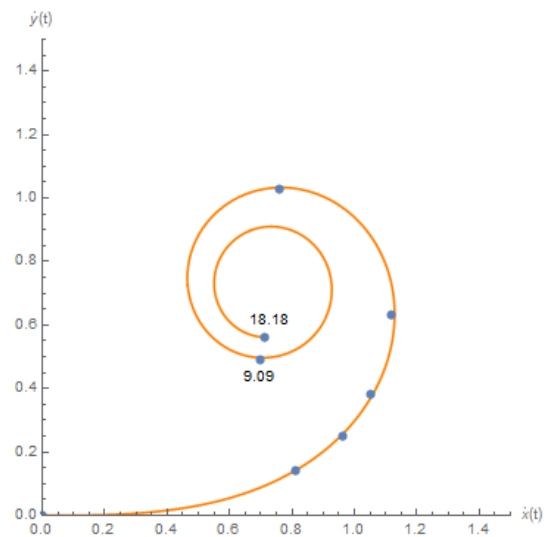
(a) Espiral a un período de 2π para la esfera sólida.



(b) Espiral a un período de 4π para la esfera sólida.



(c) Espiral a un período de 2π para la esfera hueca.

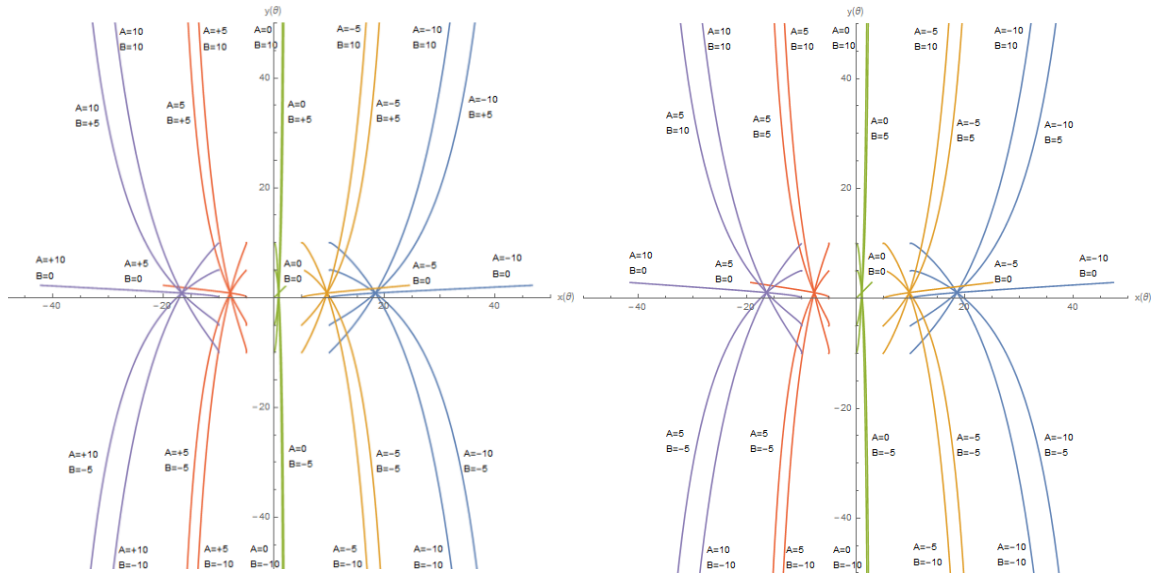


(d) Espiral a un período de 4π para la esfera hueca.

Figura 5.7: Espiral a dos diferentes períodos donde los puntos representan el recorrido de longitud de arco que se recorre a una posición angular $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$.

el objeto hueco este generará un torque mayor al del objeto sólido, y por tanto tendrá un momento de rotación mayor.

Por otro lado, en la familia de curvas de la trayectoria del centro de masa en la esfera



(a) Trayectoria del centro de masa para una esfera sólida. (b) Trayectoria del centro de masa para una esfera hueca.

Figura 5.8: Representación gráfica de las posiciones cartesianas para la esfera sólida y para la esfera hueca.

hueva se encuentra un poco más desplazada en comparación a la familia de curvas de la esfera sólida. Ya que la diferencia del momento de inercia entre los dos objetos es de $\frac{4}{15}$.

Con lo que se puede concluir que entre mayor sea el momento de inercia del objeto mayor será su velocidad y por ende recorrerá una mayor longitud de arco en la espiral, y además las familias de curvas en la trayectoria de masas se verán desplazada (lo que sucede en este caso con la esfera hueca).

5.3. Dinámica Rotacional usando la ecuación de Riccati

Como hemos visto existen varias generalizaciones de la espiral de Cornu desde el punto de vista de diferentes aplicaciones se puede encontrar en la literatura [47–50]. En esta sección presentamos una generalización paramétrica que también se puede considerar como una deformación de la espiral de Cornu. Esto se logra por medio de un parámetro complejo que aparece en la solución general de la ecuación de Riccati que corresponde a las integrales de

Fresnel.

Notemos que las ecuaciones (5.24) y (5.25) se pueden reescribir en términos de la velocidad y la aceleración, tal como

$$x(t) = t\dot{x}(t) - \frac{1}{K}\ddot{y}(t), \quad (5.30)$$

$$y(t) = t\dot{y}(t) + \frac{1}{K}\ddot{x}(t), \quad (5.31)$$

esto es

$$\frac{1}{K}\ddot{x} + t\dot{y} - y = 0,$$

$$\frac{1}{K}\ddot{y} - t\dot{x} + x = 0,$$

arreglando términos tenemos que el sistema de ecuaciones acoplado a resolver es

$$\ddot{x} + Kt\dot{x} - Kx = 0, \quad (5.32)$$

$$\ddot{y} - Kt\dot{y} + Ky = 0, \quad (5.33)$$

para calcular la solución se utiliza el método de factorización $[D_t - \phi_2][D_t - \phi_1]x(t) = 0$ [51] para resolver para la ecuación 5.32 y $[D_t - \phi_4][D_t - \phi_3]y(t) = 0$ [51] para resolver para la ecuación 5.33, donde $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$ y $\phi_4(t)$ actúan como funciones auxiliares. Obteniendo así la ecuación de Riccati asociada a las ecuaciones 5.32 y 5.33 respectivamente

$$\dot{\phi}_1 + \phi_1^2 + Kt\phi_1 - K = 0, \quad (5.34)$$

$$\dot{\phi}_3 + \phi_3^2 - Kt\phi_3 + K = 0, \quad (5.35)$$

proponiendo $\phi_1 = \frac{1}{u_1} + \phi_{p_1}$ y $\phi_3 = \frac{1}{u_3} + \phi_{p_3}$ y resolviendo por factor integrante $e^{\int(-2\phi_p - Kt)dt}$ y $e^{\int(-2\phi_p + Kt)dt}$ para las ecuaciones 5.34 y 5.35 respectivamente, donde ϕ_{p_1} y ϕ_{p_3} son soluciones particulares conocidas que se obtienen del hecho de que

$$\begin{aligned}\phi_{p_1} &= \frac{d}{dt} \ln |x| = \frac{1}{t}, \\ \phi_{p_3} &= \frac{d}{dt} \ln |y| = \frac{1}{t},\end{aligned}$$

entonces se obtiene que

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{d}{dt} \left\{ \ln \left| tC_1 - C_2 e^{-\frac{K}{2}t^2} - C_2 \sqrt{\frac{\pi K}{2}} t \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{K}{2}} t \right) \right| \right\}, \\ \phi_3 &= \frac{d}{dt} \left\{ \ln \left| tC_3 - C_4 e^{\frac{K}{2}t^2} + C_4 \sqrt{\frac{\pi K}{2}} t \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{K}{2}} t \right) \right| \right\},\end{aligned}$$

con C_1, C_2, C_3 y C_4 constantes de integración. Así finalmente se llega a que

$$x(t) = t - A \left[e^{-\frac{K}{2}t^2} + \sqrt{\frac{\pi K}{2}} t \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{K}{2}} t \right) \right], \quad (5.36)$$

$$y(t) = t - B \left[e^{\frac{K}{2}t^2} - \sqrt{\frac{\pi K}{2}} t \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{K}{2}} t \right) \right], \quad (5.37)$$

con A y B constantes.

Por tanto llegamos a que las ecuaciones cartesianas del movimiento de rotación en términos del tiempo de un objeto rígido quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{K}} C \left(\sqrt{\frac{K}{\pi}} t \right), \quad (5.38)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{K}} S \left(\sqrt{\frac{K}{\pi}} t \right), \quad (5.39)$$

$$x(t) = t - A \left[e^{-\frac{K}{2}t^2} + \sqrt{\frac{\pi K}{2}} t \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{K}{2}} t \right) \right], \quad (5.40)$$

$$y(t) = t - B \left[e^{\frac{K}{2}t^2} - \sqrt{\frac{\pi K}{2}} t \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{K}{2}} t \right) \right], \quad (5.41)$$

notemos que es posible que las ecuaciones 5.38 - 5.41 pueden ser descritas en términos de la posición angular $\theta(t) = \frac{K}{2}t^2$, además del torque y del momento de inercia del objeto $K = \frac{Fd}{I} = \frac{\tau}{I}$, obteniendo así

$$\frac{dx(\theta)}{d\theta} = \frac{\sqrt{\pi I \tau}}{Md} C \left(\sqrt{\frac{2\theta}{\pi}} \right), \quad (5.42)$$

$$\frac{dy(\theta)}{d\theta} = \frac{\sqrt{\pi I \tau}}{Md} S \left(\sqrt{\frac{2\theta}{\pi}} \right), \quad (5.43)$$

$$x(\theta) = \sqrt{\frac{2\theta I}{\tau}} - A \left[e^{-\theta} + \sqrt{\pi\theta} \operatorname{erf}(\sqrt{\theta}) \right], \quad (5.44)$$

$$y(\theta) = \sqrt{\frac{2\theta I}{\tau}} - B \left[e^{\theta} - \sqrt{\pi\theta} \operatorname{erfi}(\sqrt{\theta}) \right], \quad (5.45)$$

en donde si $\theta = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dx(0)}{d\theta} &= 0, & \frac{dy(0)}{d\theta} &= 0, \\ x(0) &= -A, & y(0) &= -B, \end{aligned}$$

lo que implica que la velocidad inicial será nula ya que se inicia del reposo y las coordenadas cartesianas iniciales son $(-A, -B)$, esto es que podría ser cualquier punto del objeto rígido.

5.4. Jerk: algunas aplicaciones

En esta sección señalamos algunas propiedades de sacudidas o Jerk de este tipo de movimiento. Donde los desplazamientos cartesianos x e y que presentan dos jerks del tipo

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\tilde{K}t\ddot{y}, \\ \ddot{y} &= \tilde{K}t\ddot{x},\end{aligned}\tag{5.46}$$

donde $\tilde{K} = FK/M$, como se puede inferir de las derivadas de (5.22) y (5.22), aunque la aceleración total es constante, $a = F/M$. Esto es similar al caso del movimiento circular de radio arbitrario R y velocidad angular Ω , donde las sacudidas o Jerks cartesianos son dada por

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\Omega\ddot{y}, \\ \ddot{y} &= \Omega\ddot{x},\end{aligned}\tag{5.47}$$

y la aceleración centrípeta es $a_c = \Omega^2 R$.

Es interesante encontrar la ecuación diferencial que satisfacen los Jerks, que a priori debería ser de tercer orden [52]. Escribiendo el sistema (5.24) y (5.25) en la forma

$$\begin{aligned}x(t) &= t\dot{x} - \frac{1}{K}\ddot{y}, \\ y(t) &= t\dot{y} + \frac{1}{K}\ddot{x} - \frac{1}{x},\end{aligned}\tag{5.48}$$

y usando \ddot{x} de la segunda ecuación en la derivada de la primera, nos lleva a la ecuación diferencial lineal no homogénea de tercer orden

$$\ddot{w} + K^2 t^2 \dot{w} - K^2 t w = Kt\tag{5.49}$$

Esta ecuación tiene las siguientes soluciones lineales independientes,

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= x(t), \\
w_2(t) &= y(t), \\
w_3(t) &= \sqrt{\frac{\pi}{K}}t - \frac{1}{K}.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Los primeros dos de ellos son Jerk con tirones entremezclados dados en (5.47) y son solo los desplazamientos cartesianos dados en (5.24) y (5.25) y se representa en la Fig. (5.5). La tercera solución lineal independiente es una solución degenerada, no es un Jerk, ya que también es una solución de la ecuación lineal de primer orden más simple

$$K^2 t^2 \dot{w} - K^2 t w = K t \tag{5.51}$$

Esta solución se descarta debido a las condiciones iniciales de el movimiento.

La importancia de la ecuación diferencial de tercer orden reside en su uso como una definición (desacoplada) de los Jerks que se pueden calcular de

$$\begin{aligned}
\ddot{w}_1(t) &= K^2 t (w_1 - t \dot{w}_1) = -K t \sin\left(\frac{K t^2}{2}\right), \\
\ddot{w}_2(t) &= K^2 t (w_2 - t \dot{w}_2) = K t \cos\left(\frac{K t^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

respectivamente.

5.5. Factorización de la ecuación de Fresnel y una aproximación Supersimétrica

Una de las aplicaciones más desarrolladas de la factorización desarrollada en la sección (5.3) es que se puede dar un tratamiento supersimétrico. Donde las soluciones de las ecuaciones (5.32) y (5.33) se podrían interpretar de la solución en la que el parámetro complejo de Riccati. La forma factorizada $A^-A^+v = 0$ usando los operadores diferenciales dados por

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d}{dz} + \pi\sqrt{z} \tan \frac{\pi z^2}{2}, \\ A^- &= \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d}{dz} - \pi\sqrt{z} \tan \frac{\pi z^2}{2}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde $z = \frac{1}{kt}$, $K = \pi^2 z^2$ y $v = x = -y$. Procediendo como en la mecánica cuántica supersimétrica, la ecuación pareja supersimétrica de (5.32) ó (5.33) es

$$A^+A^-\psi \equiv \psi'' - \frac{1}{z}\psi' + (\pi^2 z^2 + \Delta_{Darb}(z))\psi = 0 \quad (5.53)$$

El término extra en (5.53) con respecto a (5.32) ó (5.33) es dada por

$$\Delta_{Darb}(z) = -2\pi^2 z^2 + \frac{3}{4z^2} - \pi \tan \frac{\pi z^2}{2} - 2\pi^2 z^2 \tan^2 \frac{\pi z^2}{2} \quad (5.54)$$

es la distorsión de Darboux de (5.32) ó (5.33), y se presenta en el primer gráfico de la Fig. (5.9).

Para saber a qué EDO lineal de segundo orden corresponde a las espirales de Cornu deformadas, primero escribimos el general Solución de Riccati en forma trigonométrica

$$\begin{aligned} y_p(z) &= -\pi z \tan \left(\frac{\pi z^2}{2} + \varphi \right), \\ \theta &= \frac{1}{R} e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (5.55)$$

y simplemente sustituirlo en lugar de la solución particular de Riccati en la factorización (5.53)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d}{dz} - \frac{y_p(z)}{\sqrt{z}} \right] \\ & \left[\frac{d}{dz} \frac{1}{z} + \frac{y_p(z)}{\sqrt{z}} \right] \tilde{\Psi} = 0 \end{aligned} \quad (5.56)$$

Se obtiene la ecuación

$$\tilde{\Psi}'' - \frac{1}{z} \tilde{\Psi}' + (\pi^2 z^2 + \Delta_{Darb}(z)) \tilde{\Psi} = 0 \quad (5.57)$$

con la distorsión de Darboux dependiendo paramétricamente en el cambio de fase φ

$$\Delta_{Darb}(z, \varphi) = -2\pi^2 z^2 + \frac{3}{4z^2} - \pi \tan\left(\frac{\pi z^2}{2} + \varphi\right) - 2\pi^2 z^2 \tan^2\left(\frac{\pi z^2}{2} + \varphi\right) \quad (5.58)$$

Para encontrar la solución general de (5.57), hacemos $A - \tilde{\Psi} = \tilde{\phi}$ entonces la ecuación homogénea $A^+ \phi = 0$ tiene solución

$$\tilde{\phi}(z; \varphi) = b_1 \cos\left(\frac{\pi z^2}{2} + \varphi\right) \quad (5.59)$$

Resolviendo la ecuación no homogénea $A - \tilde{\Psi} = \tilde{\phi}$ podemos obtener la solución general de (5.57)

$$\tilde{\Psi}(z, \varphi) = \frac{\sqrt{z} b_2 + 2b_1 z + \sqrt{2} b_1 \left[\cos 2\varphi C(\sqrt{2}z) - \sin 2\varphi S(\sqrt{2}z) \right]}{4 \cos\left(\frac{\pi z^2}{2} + \varphi\right)} \quad (5.60)$$

denotando

$$\tilde{C}(z; \varphi) = \int_0^z \cos(\pi s^2 + 2\varphi) ds \quad (5.61)$$

y eligiendo las constantes arbitrarias para que sean $b_1 = 2$, $b_2 = 0$, (5.60) toma la forma compacta

$$\tilde{\Psi}(z, \varphi) = \sqrt{z} \frac{z + \tilde{C}(z; \varphi)}{\cos\left(\frac{\pi z^2}{2} + \varphi\right)} \quad (5.62)$$

En la Fig. (5.9), mostramos varios casos de la paramétrica de distorsiones de Darboux $\Delta_{Darb}(z; \varphi)$ de Cornu deformado espirales presentadas en la Fig. (5.10). Notamos que la

envolvente negativa parabólica es dada por el primer término en (5.58) junto con las singularidades debidas a los términos que contienen las tangentes para z distinto de cero. Las singularidades en el origen se deben al término $1/z^2$ excepto en los casos $\phi = \pm\pi/2$ cuando la contribución dominante proviene de los términos cotangentes.

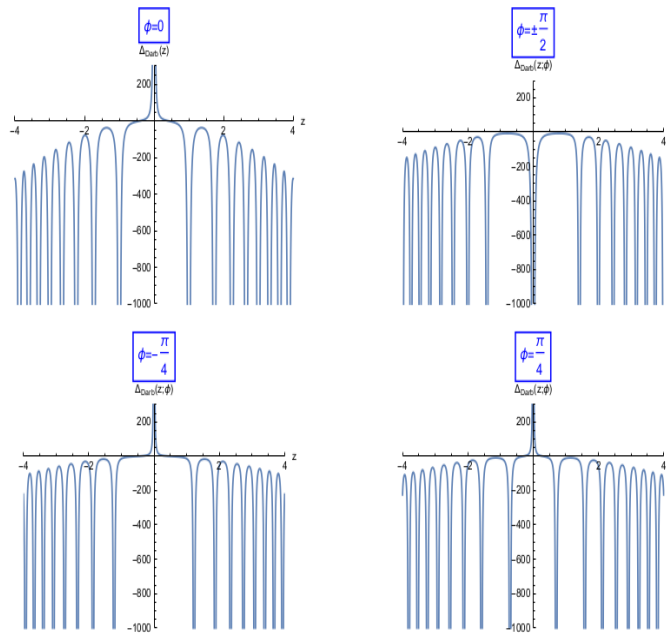


Figura 5.9: Distorsión de Darbux para varias fases

Los patrones de factorización discutidos aquí desentrañan el origen de Darboux de esta deformación, que es un contraparte de la misma construcción en cantidad supersimétrica en mecánica de giros, donde las familias paramétricas supersimétricas. Donde se han obtenido potenciales isoespectrales con el propiedad de que todos los miembros de esas familias tienen la mismo potencial de pareja supersimétrica [46, 53, 54]. El potencial inicial y su pareja supersimétrica son reproducidos para valores extremos de los parámetros. En el caso de la espiral de Cornu, nuestra parametrización ha sido elegido de tal manera que cuando a y b son cero, la supersimetría se obtiene con la espiral pareja, mientras que el estándar La espiral de Cornu se obtiene cuando $a \rightarrow \infty$ y $b = 0$. Esto es demostrado gráficamente en la Fig. (5.11) donde incluso para el valor bastante pequeño de $a = 10$ y $b = 0$, la espiral es muy cercano al estándar como se conoce en los libros de texto [2].

Una deformación paramétrica de la espiral de Cornu ha sido introducida basado en el uso de la correspondiente solución general de Riccati en lugar de la solución particular. Geométricamente, el origen de este tipo de deformación se encuentra en los dos desplazamientos independientes, a lo largo de los dos ejes ortogonales del plano en el que se traza la espiral.

Estos desplazamientos pueden generar no sólo la deformación del enredo de la espiral sino también su rotación global como se ve en las parcelas.

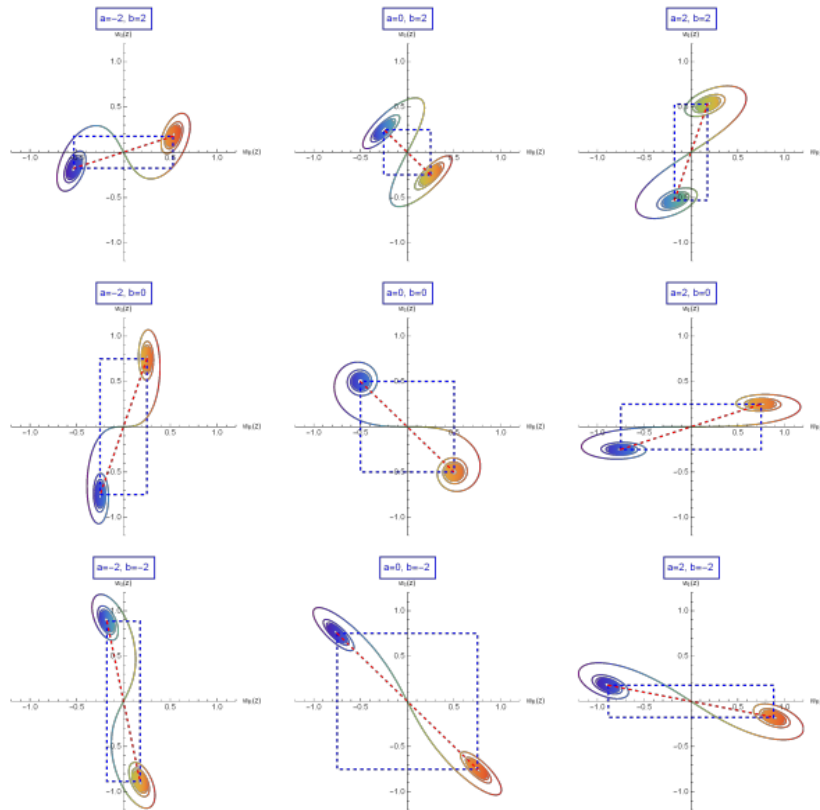


Figura 5.10: Espiral de Cornu para la ecuación de Riccati correspondiente a las parejas supersimétricas: ecuación (5.53) gráfica central y ecuación (5.57) para los demás casos de las gráficas

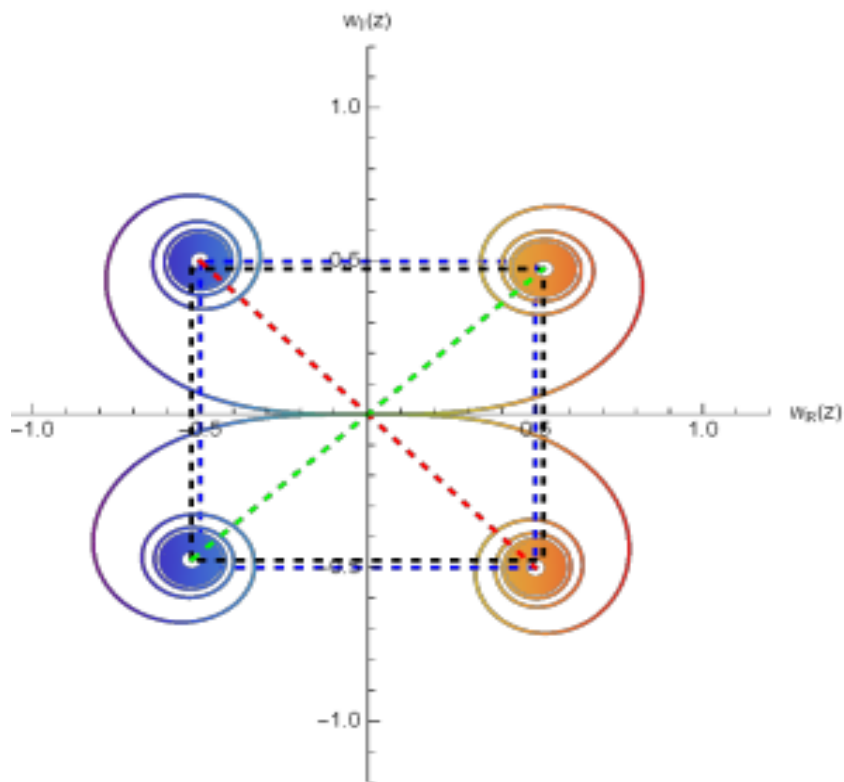


Figura 5.11: Pareja Supersimétrica de espirales de Cornu

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones

Esté documento de tesis se desarrollo como un estudio específico de la difracción óptica, tanto en el determinado campo cercano como campo lejano, donde en los dos primeros capítulos se analizan los aspectos importantes de este fenómeno óptico, mediante su descripción matemática, desarrollando una extensión de visualización usando el denominado número de Fresnel, aspecto poco usado en la literatura conocida.

Continuando en este ambito, dentro del capítulo 3 y en el capítulo 5 se ha desarrollado una modelación matemática de dos situaciones diferentes, con aplicación de las expresiones matemáticas de la teoría difractiva. Siendo que, en el capítulo 3 se hace la descripción dentro del marco de óptica física, donde se presenta el análisis de aberturas difractivas haciendo uso de la teoría de la difracción escalar y el número de Fresnel. Mientras que en el capítulo 5, se hace referencia a la dinámica rotacional newtoniana de un cuerpo rígido dentro del marco de la mecánica clásica y una pequeña extensión al marco de la mecánica cuántica superimétrica. A pesar de ser dos situaciones diferentes en ambas, se utiliza una herramienta matemática en común conocida como las integrales de Fresnel y por ende su representación Argand cuya gráfica es la espiral de Cornu. Esto es basado, en que es bien sabido que tanto estas integrales de Fresnel como la espiral de Cornu sirven para describir el patrón de difracción en abertura de diversas geometrías con las descritas en este documento como los son aberturas rectangulares y sus casos particulares como los son la abertura cuadrada, las rendijas y el borde recto. Pero también la espiral de Cornu y las integrales de Fresnel muestran otra situación donde es posible

emplear esta matemática que NO se encuentra dentro del área de la óptica física, como es la mecánica clásica en el desarrollo de sistemas que llevan rotaciones. Mostrando que se han encontrado diferentes interpretaciones físicas y aplicaciones de las integrales de Fresnel y espiral de Cornu.

De manera particular en el capítulo 3, se ha expuesto un enfoque diferente a la teoría de difracción escalar para el estudio de aberturas mediante el Número de Fresnel. Donde la importancia del uso de este concepto adimensional como parámetro proporciona la ventaja de poder estudiar el patrón de difracción tanto del régimen de campo lejano como de campo cercano para aberturas con cualquier geometría, matemática que surgió a partir del manejo de la fórmula integral Fresnel-Kirchhoff para el régimen de difracción de Fresnel. Y a pesar de que el análisis de las aberturas se ha realizado para geometrías simples como lo son la abertura rectangular, la abertura circular y la abertura triangular, estas geometrías tienen aplicaciones importantes en el área de la biología, mediante el estudio y la obtención de imágenes de células biológicas transparentes a partir del fenómeno de la difracción.

De igual forma, en el capítulo 4 se propone una extensión de la teoría de difracción escalar con aplicación en el desarrollo fractal pero bajo el tratamiento de número de Fresnel además que se analizó la estructura fractal especial de una rendija de Cantor donde se da la interpretación desde el punto de vista físico de la colorimetría, obteniendo como resultado que para diferentes geometrías y estructuras en las rejillas de difracción se genera una coloración. Además de, observar que la ventaja de utilizar la teoría de difracción escalar para el cálculo de coordenadas colorimétricas presenta un mayor desempeño debido a la facilidad en la realización del cómputo, pero también, se observa la desventaja de que este tratamiento no considera las propiedades del material. Y sumado a estas observaciones se verifica que dependiendo del perfil de las alturas y la geometría de la rendija rectangular y fractal, se aprecia la generación de diferentes colores.

Como se ha mencionado anteriormente, la matemática utilizada en la difracción óptica, también se puede aplicar en otras áreas de la física como es la mecánica clásica de manera específica en la cinemática rotacional como se muestra en el capítulo 5, donde se presentó una generalización matemática de las integrales de Fresnel, aplicadas a esta rama, donde son tomadas las condiciones iniciales de reposo para el movimiento mecánico rotacional de un objeto rígido sobre una superficie sin fricción; tal que, bajo la descripción matemática utilizada se puede dar la interpretación física debido a la representación en la gráfica Argand de estas integrales, describiendo que esta, representa

la derivada temporal de la posición cartesiana del centro de masa del objeto rígido, y además que cuando la constante $k = \frac{Fd}{J}$ adquiere el valor de π , nos muestra la espiral de Cornu, por lo que se puede generar una espiral para cada posición.

Siendo que en el análisis de las propiedades mecánicas de rotación, se observa que el movimiento plano de un cuerpo rígido con componentes de velocidad cartesiana se pueden expresar a través de las integrales de Fresnel, donde la la velocidad tiende rápidamente a un valor constante afectado por pequeñas oscilaciones de la función sinc cuyas amplitudes son amortiguadas adicionalmente por el parámetro K . En consecuencia, no es de extrañar que también la trayectoria corresponde a un movimiento plano de casi uniforme velocidad con sólo algunas oscilaciones pequeñas. Sin embargo, estas ondulaciones son importantes ya que revelan las características sacudidas de movimiento, que están determinados por ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas obtenidas en este trabajo.

6.2. Perspectivas

Es posible extender el análisis de las aberturas dentro del marco de la teoría de difracción escalar mediante el número de Fresnel implementando algunas otras geometrías como lo podrían ser las aberturas elípticas, la doble rendija o las múltiples rendijas, lo que también nos lleva a casos fractales como diseños de Fibonacci, y utilizarlos en estructuras de placas zonales. Además se pueden implementar algunas propiedades físicas de los materiales como lo serían los índice de refracción de los objetos a analizar mediante el fenómeno de difracción y hacer una descripción colorimétrica más detallada.

Tal que al realizar el cálculo de las coordenadas cromáticas rgb y su representación en el espacio de color RGB, se podrían calcular las curvas espectrales en el canal de color, buscando sistemas de iridisencia.

También se pretende diseñar una metodología inversa en la que se pueda describir de antemano el tipo de geometría de la rejilla necesaria para generar un color deseado, y con ello crear los colores primarios con base a la geometría de la estructura, posiblemente en el ámbito de los metamateriales.

Por otro lado, en el estudio de la dinámica de rotación se puede extender el análisis en la parte de la interpretación física relacionando la longitud de arco de la espiral de Cornu con la posición

angular o el ángulo de rotación del objeto rígido. También sería pertinente considerar que el objeto tuviera un movimiento tridimensional, el cual podría tener aplicaciones significativas en el análisis de movimiento de satélites espaciales.

Por último se podría hacer un desarrollo más detallado de la estructura supersimétrica obtenida bajo el tratamiento matemático para este ámbito rotacional.

Bibliografía

- [1] Stephanie M. Doucet and Melissa G. Meadows. Iridescence: a functional perspective. *J. R. Soc. Interf.*, 6(S115–S132), 2009.
- [2] Grant R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Dover Publications Inc, New York, second edition, 1975.
- [3] Karen Barad. Diffracting diffraction: Cutting together-apart. *Parallax*, 20(3):168–187, 2014.
- [4] Daniel Malacara. *Óptica Tradicional y Moderna*. La ciencia para todos, Fondo de Cultura Económica, México, 1997.
- [5] I.V Lindell. Huygens principle in electromagnetics. *IEE Proc. -Sci. Meas. Technol.*, 143:103–105, 1996.
- [6] Daniel Malacara. *Óptica Básica*. Fondo de Cultura Económica, México, 1989.
- [7] Julio A. Romero and Luis Hernández. Nueva formulación del principio de huygens para ondas planas. *Rev. Col. Fís*, 22:67–72, 2005.
- [8] Yadira Ortega Barrera. *Aberturas arbitrarias mediante difracción de Fresnel*. PhD thesis, Departamento de Física de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2015.
- [9] Eugene Hecht. *Óptica*. Addison Wesley Iberoamericana, tercera edition, 2000.
- [10] Max Born and Emili Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 1980.
- [11] Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Pearson, Addison Wesley, quinta edition, 2004.
- [12] David A.B. Miller. Huygens’s wave propagation principle corrected. *Optics Letters*, 16(18):1370–1372, 1991.

- [13] E.W. Marchand and E.Wolf. Consistent formulation of kirchhoff's diffraction theory. *J. Opt. Soc. Am.*, 56(12):1712–1721, 1966.
- [14] Min Gu. *Advanced Optical Imaging Theory*. First edition, 2000.
- [15] Martí I. Franqués. *Joptiks: Curso de óptica*, 2010.
- [16] Zemax. Optical design program, user's manual. *Radiant Zemax LLC*, pages 628–629, 2011.
- [17] K. Iizuka. *Engineering Optics*. Springer Series in Optical Sciences, Springer, 2008.
- [18] J.W. Goodman. *Introduction of Fourier Optics*. The McGraw-Hill Companies, Inc, second edition, 1996.
- [19] B. Rossi. *Ottica*. Masson Italia Editori Milano, 1977.
- [20] Francis A. Jenkins. *Fundamentals of Optics*. McGraw-Hill Companies, fourth edition, 2001.
- [21] A.M. Steane and H.N. Rutt. Diffraction calculations in the near field and validity of the fresnel approximation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 6(12):1809–1814, 1989.
- [22] E.A. Rueda, F.F. Medina, and J.F. Barrera. Criterio generalizado para la distinción entre difracción de fraunhofer y fresnel. *Rev. Col. Fís.*, 41(1):128–130, 2009.
- [23] Yu.N. Makov and V.J. Sánchez-Morcillo. Fresnel number concept and revision of some characteristics in the linear theory of focused acoustic beams. *arXiv: 0801.1476*, 2008.
- [24] S. Wang, Q. Lin, L. Yu, and X. Xu. Fresnel number of a regular polygon and slit. *Appl. Opt.*, 39(20):3453–3455, 2000.
- [25] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge University Press, seventh edition, 1999.
- [26] Y.P. Kathuria and G. Herziger. Annular apertures focused in the fresnel region. *SPIE*, 288:505–511, 1981.
- [27] E. Lommel. Theory and experimental investigations of diffraction phenomena at a circular aperture and obstacle. *Abh. Bayer. Akad.*, 15Abth(3):531, 1886.
- [28] P.M. Rinard. Large-scale diffraction patterns from circular objects. *Am. J. Phys.*, 44:70–76, 1976.

- [29] Y. Li and E. Wolf. Three-dimensional intensity distribution near the focus in systems of different fresnel numbers. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1(8):801–808, 1984.
- [30] R.C. Smith and J.S. March. Diffraction patterns of simple apertures. *J. Opt. Soc. Am.*
- [31] X. Zhou, D.P. Poenar, K.Y. Liu, M.S. Tse, C.-K. Heng, S.N Tan, and N. Zhang. Algorithm and simulation for analysis of bioimages obtained by aperture diffraction based optical mems. *Opt. Expr.*, 16:11937–11953, 2008.
- [32] X. Zhou, D.P. Poenar, K.Y. Liu, M.S. Tse, C.-K. Heng, S.N Tan, and N. Zhang. Design of mems devices with optical apertures for the detection of transparent biological cells. *Biomed. Microdevices*, 10:639–652, 2008.
- [33] K.M. Abedin and S.M.M. Rahman. Computer simulation of fresnel diffraction from double rectangular apertures in one and two dimensions using the iterative fresnel integrals method. *Optics & Laser Technology*, 44:394–402, 2012.
- [34] Y. Sakurada, J. Uozumi, and T. Asakura. Fresnel diffraction by one-dimensional regular fractals. *Pure Appl. Opt.*, 1:29–40, 1992.
- [35] Yulan Fu, Cary A. Tippets, Eugenii U. Donev, and Rene Lopez.
- [36] Villads Egede Johansen, Jacob Andkjaer, and Ole Sigmund. Design of structurally colored surfaces based on scalar diffraction theory. *J. Opt. Soc. Am. B.*, 31(2), 2014.
- [37] Silvia Vignolinia, Paula J. Rudallb, Alice V. Rowlandb, Alison Reedc, Edwige Moyroud, Robert B. Fadend, Jeremy J. Baumberga, Beverley J. Gloverc, and Ullrich Steinera. Pointillist structural color in pollia fruit. *Proc. Nat. Acad. Scie.*, 109(39), 2012.
- [38] Andrew Richard Parker. 515 million years of structural colour. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2, 2000.
- [39] Jiyu Sun, Bharat Bhushan, and Jin Tonga. Structural coloration in nature. *RSC Adv.*, 3, 2013.
- [40] Mathieu Hébert, Roger D. Hersch, and Patrick Emmel. *Fundamentals of Optics and Radiometry for Color Reproduction*. 2015.
- [41] Chris Wyman, Peter-Pike Sloan, and Peter Shirley. Simple analytic approximations to the cie xyz color matching functions. *Journal of Computer Graphics Techniques*, 2(2), 2013.

- [42] E.L. Staristin, R.A. Grant, G. Dougill, G.H.M. Van Der Heijden, and V.G.A. Goss. The euler spiral of rat whiskers. *Sci.Adv.*, 3, 2020.
- [43] L. Bartholdi and A.G. Henriques. Orange peels and fresnel integrals. *Math. Intelligencer.*, 34, 2012.
- [44] A.V. Ferris-Prabhu. On the appearance of fresnel’s integrals in dynamics. *Am. J. Phys.*, 38:1356–1357, 1970.
- [45] H. C. Rosu, S. C. Mancas, and E. Flores-Garduño. Riccati parametric deformations of the cornu spira. *Z. Naturforsch. A*, 73:479–484, 2018.
- [46] H.C. Rosu, S.C.Mancas, and P. Chen. One-parameter families of supersymmetric isospectral potentials from riccati solutions in function composition form. *Ann. Phys.*, 343:87–102, 2014.
- [47] D.A. Hill. A generalization of the cornu spiral for lossy media. *J. Appl. Phys.*, 69:1772–1774, 1991.
- [48] J.M. Ali, R.M. Tookey, J.V. Ball, and A.A. Ball. The generalised cornu spiral and its application to span generation. *J. Comp. Appl. Math.*, 102:37–47, 1999.
- [49] F. Werdiger, M.J. Kitchen, and D.M. Paganin. Generalised cornu spirals: an experimental study using hard x-rays. *Optics Express*, 24:10620–10634, 2016.
- [50] L. Korkut, D. Vlah, D. Zubrinić, and V. upanović. Generalized fresnel integrals and fractal properties of related spirals. *Appl. Math. Comp.*, 206:236–244, 2008.
- [51] Haret Codratian Rosu, Octavio Cornejo-Pérez, Maximino Pérez-Maldonado, and J. A. Belichón. Extension of a factorization method of nonlinear second order ode’s with variable coefficients. *Rev. Mex. Fis.*, 63:218–222, 2017.
- [52] G.D. Birkhoff. On the solutions of ordinary linear homogeneous differential equations of the third order. *Ann.Math.*, 12:103–127, 1911.
- [53] B. Mielnik. Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum. *J. Math. Phys.*, 25:3387, 1984.
- [54] H. C. Rosu. in: Short survey of darbox transformations in symmetries, in quantum mechanics, and quantum optics, (eds. f. j. herranz, a. ballesteros, l. m. nieto, j. negro, and c. m. pereña). *Servicio de Publicaciones Universidad de Burgos*.

Apéndice A

Artículos de Investigación producidos durante el doctorado

A.1. 1er. Artículo

Artículo publicado en la Revista Alemana Zeitschrift für Naturforschung A., con identificación: Zeitschrift für Naturforschung A, **73**(6): 479-484, (2018). <https://doi:10.1515/zna-2018-0111>

A.2. 2do. Artículo

Artículo publicado en la Revista Ciencia ergo-sum, con identificación: CIENCIA ergo-sum, [S.l.], **27** (4), ISSN 2395-8782, (2020). <https://doi.org/10.30878/ces.v27n4a3>

A.3. 3er. Artículo

Artículo publicado en la Revista Mexicana de Física, con identificación: Revista Mexicana de Física, **66**(5): 585–588. <https://doi.org/10.31349/revmexfis.66.585>

Haret C. Rosu*, Stefan C. Mancas and Elizabeth Flores-Garduño

Riccati Parametric Deformations of the Cornu Spiral

<https://doi.org/10.1515/zna-2018-0111>

Received March 6, 2018; accepted April 15, 2018; previously published online May 23, 2018

Abstract: In this article, a parametric deformation of the Cornu spiral is introduced. The parameter is an integration constant which appears in the general solution of the Riccati equation and is related to the Fresnel integrals. The Argand plots of the deformed spirals are presented and a supersymmetric (Darboux) structure of the deformation is revealed through the factorization approach.

Keywords: Argand Plot; Cornu Spiral; Darboux Distortion; General Solution; Riccati Equation.

1 Introduction

One of the most famous spirals with important scientific and technological consequences is Euler's spiral, also known as Cornu's spiral in optics, and also as the clothoid, which means looking like Clotho, as proposed by the noted geometer Cesàro in 1890. Schwartzman, in his book "The Words of Mathematics" [1], mentions that Clotho was the youngest of the three fates "moirai" in ancient Greek mythology. The little sister Clotho was responsible for spinning the thread of human life. Presumably, Cesàro was inspired by the resemblance of the spiral to a spinning wheel. However, here we will call this spiral as Cornu's spiral as it was Cornu who first drew the entire spiral with its two foci, while Euler drew only the positive arm.

Perhaps, the simplest mathematical definition of the Cornu spiral \mathcal{F} is the Argand plane representation, $\mathcal{F} = X + iY$, with X and Y as the two Fresnel integrals

***Corresponding author: Haret C. Rosu**, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT), Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potos, S.L.P., Mexico, E-mail: hcr@ipicyt.edu.mx.
<https://orcid.org/0000-0001-5909-1945>

Stefan C. Mancas: Department of Mathematics, Embry-Riddle Aeronautical University, Daytona Beach, FL 32114-3900, USA, E-mail: mancass@erau.edu. <https://orcid.org/0000-0003-1175-6869>

Elizabeth Flores-Garduño: Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT), Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potos, S.L.P., Mexico, E-mail: elizabeth.flores@ipicyt.edu.mx

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}s^2\right) ds \equiv X, \quad (1)$$

$$S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}s^2\right) ds \equiv Y, \quad (2)$$

which are parametrised by the arclength of the spiral s . In optics, the square modulus $|\mathcal{F}|^2$ is related to the intensity of light at a given point in diffraction patterns.

On the other hand, geometrically, the Cornu spiral is defined as the curve whose curvature increases linearly with the arclength, which means the radius of curvature $\rho(t)$ times the arc length $s(t)$ is constant at each point of the curve. This is represented by the Cesàro equation $\rho(t) = \frac{c^2}{s(t)}$, with c as any constant. The other important property is related to the Fresnel integrals for which $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$; both slowly approach the point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ as $s \rightarrow \infty$ in the first quadrant, and because both the functions are odd, the curve spirals towards $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ in the third quadrant [2].

Its most immediate technological use is in the layout of civil engineering works (roads, railways, pipelines among others) as road transitions to join straight sections with curved sections or to connect two circular sections [3, 4]. This is one of its most important engineering applications, as the radius of curvature decreases inversely proportional to the distance travelled on it, and this feature allows the driver a smooth change of trajectory. Other applications in which clothoids are considered useful are for the controlled trajectories of robots [5], for the design of roller coasters [6], and aesthetic shapes of industrial products [7].

Various generalisations of the Cornu spiral from the viewpoint of its different applications are found in literature [8–11]. In this communication, we introduce a parametric generalisation which can be also considered as a deformation of the Cornu spiral. This is achieved by means of a complex parameter which appears in the general solution of the Riccati equation that corresponds to the Fresnel integrals. In Section 2, we show the reduction of the third-order ordinary differential equation (ODE) satisfied by the Fresnel integrals as

particular solutions to the corresponding Riccati equation, whose general solution is obtained explicitly. We then write the solution of the third-order ODE based on the general Riccati solution and present the Argand plots of this solution. In Section 3, the similarity with supersymmetric quantum mechanics is emphasized by means of the factorization approach [12–16] which is applied to the second-order linear ODE that comes into play in the reduction process of Section 2.

2 From the Third-Order ODE to the Riccati Equation and Back

We start with the known linear third-order ODE satisfied by the Fresnel integrals [17]

$$zw''' - w'' + \pi^2 z^3 w' = 0, \tag{3}$$

which can be reduced by using $w'(z) = v(z)$, with $' = \frac{d}{dz}$, to obtain

$$v'' - \frac{1}{z}v' + \pi^2 z^2 v = 0. \tag{4}$$

Letting $z^2 = \zeta$ we obtain the simple harmonic oscillator

$$\frac{d^2 v}{d\zeta^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 v = 0. \tag{5}$$

Thus, the solution to (4) is

$$v(z) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right), \tag{6}$$

and by one integration the solution to (3) is

$$w(z) = c_1 C(z) + c_2 S(z) + w(0), \tag{7}$$

where $C(z)$ and $S(z)$ are the Fresnel integrals given by (1) and (2).

On the other hand, by using the logarithmic derivative

$y(z) = \frac{v'(z)}{v(z)}$, (4) becomes the Riccati equation

$$y' + y^2 = \frac{1}{z}y - \pi^2 z^2 \tag{8}$$

with particular solution

$$y_p(z) = i\pi z. \tag{9}$$

As $v(z) = c_1 e^{\int y_p dz}$, then a particular solution to (4) is

$$v_p(z) = c_1 e^{\frac{i\pi}{2} z^2}, \tag{10}$$

which can be also obtained from (6) by setting $c_2 = ic_1$. Thus, the particular solution of (3) for $w(0) = 0$ is

$$w_p(z) = c_1 \int_0^z e^{\frac{i\pi}{2} s^2} ds. \tag{11}$$

To construct the general solution of Riccati equation (8) using any particular solution y_p we let

$$y(z) = y_p(z) + \frac{1}{u(z)}, \tag{12}$$

where u satisfies the linear equation

$$u' + \left(\frac{1}{z} - 2y_p\right)u = 1. \tag{13}$$

The solution of (13) is

$$u(z) = \frac{\gamma + \int_0^z \mu(s) ds}{\mu(z)}, \tag{14}$$

where $\mu(z)$ is the integrating factor

$$\mu(z) = z e^{-2 \int y_p(z) dz}, \tag{15}$$

which gives the general solution

$$y_g(z) = y_p(z) + \frac{\mu(z)}{\gamma + \int_0^z \mu(s) ds}, \tag{16}$$

with γ arbitrary constant.

We now use the particular solution given by (9) to construct the linear equation in u which becomes

$$u' + \left(\frac{1}{z} - 2i\pi z\right)u = 1. \tag{17}$$

By using the integrating factor

$$\mu(z) = z e^{-i\pi z^2}, \tag{18}$$

the general solution of Riccati equation (8) is

$$y_g(z) = \pi z \left(i + \frac{2}{i + (2\pi\gamma - i)e^{i\pi z^2}} \right). \tag{19}$$

By redefining the constant $\gamma = \frac{i(\theta+1)}{2\pi}$, (19) takes the simpler form

$$y_g(z) = i\pi z \left(\frac{\theta e^{i\pi z^2} - 1}{\theta e^{i\pi z^2} + 1} \right). \tag{20}$$

Notice that for the limiting cases of $\theta \rightarrow 0$, and $\theta \rightarrow \infty$, $y_g(z) \rightarrow -i\pi z$, and $y_g(z) \rightarrow i\pi z$, respectively. When $\theta \rightarrow 1$, and $\theta \rightarrow -1$, then $y_g(z) \rightarrow -\pi z \tan\left(\frac{\pi z^2}{2}\right)$, and $y_g(z) \rightarrow \pi z \cot\left(\frac{\pi z^2}{2}\right)$, respectively.

To find the general solution to (4), we use $v_g(z) = R e^{\int y_g(z) dz}$ to obtain

$$v_g(z) = R \left(e^{-\frac{i\pi}{2}z^2} + \theta e^{\frac{i\pi}{2}z^2} \right). \tag{21}$$

By one integration, assuming $w(0)=0$ and using Euler's formula, the deformed solution of (3) is given by

$$w_g(z) = R[(1+\theta)C(z) + i(-1+\theta)S(z)]. \tag{22}$$

By writing the solution as

$$w_g(z) = w_R(z) + iw_I(z) \tag{23}$$

and letting $\theta = a + ib$, we obtain

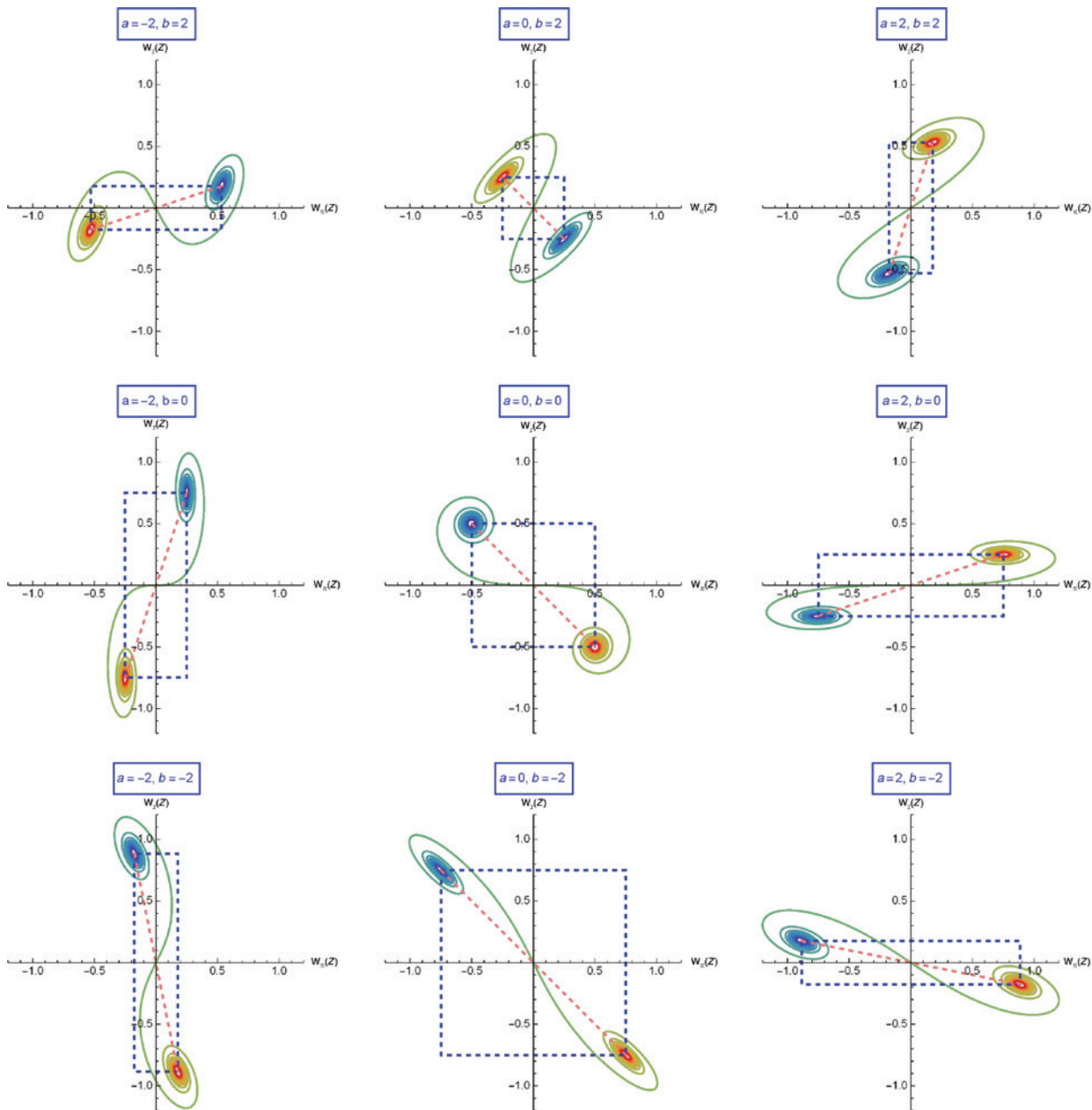


Figure 1: Argand plots for the Riccati-deformed Cornu spirals for different values of a and b . The $a = 0, b = 0$ case at the center corresponds to the supersymmetric partner equation (26), while all the other cases correspond to (30).

$$\begin{aligned} w_{\mathcal{R}}(z) &= R[(a+1)C(z) - bS(z)], \\ w_{\mathcal{I}}(z) &= R[bC(z) + (a-1)S(z)]. \end{aligned} \tag{24}$$

Comparing (7) with (23) and (24), one can see that we managed to replace the superposition constants c_1 and c_2 by the real and imaginary components of the parameters entering the general Riccati solution. This is not a trivial replacement because, as we will see next, one can disentangle an underlying supersymmetric structure of the solution expressed in this way. We present the Argand plots $Y = w_{\mathcal{I}}(z)$, $X = w_{\mathcal{R}}(z)$ in Figure 1 for various parameters a and b . All figures except $a=0, b=0$ are scaled by the factor $R = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3 Factorization of (4) and Supersymmetric Approach

We will now demonstrate the supersymmetric features of the solution in which the complex Riccati parameter is used.

Equation (4) can be written in the factorized form $A^-A^+v=0$ using the differential operators given by

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d}{dz} + \pi\sqrt{z} \tan \frac{\pi z^2}{2} \\ A^- &= \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{z}} - \pi\sqrt{z} \tan \frac{\pi z^2}{2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Proceeding as in supersymmetric quantum mechanics, the supersymmetric partner equation of (4) is

$$A^+A^-\Psi \equiv \Psi'' - \frac{1}{z}\Psi' + (\pi^2 z^2 + \Delta_{\text{Darb}}(z))\Psi = 0. \tag{26}$$

The extra term in (26) with respect to (4) is given by

$$\Delta_{\text{Darb}}(z) = -2\pi^2 z^2 + \frac{3}{4z^2} - \pi \tan \frac{\pi z^2}{2} - 2\pi^2 z^2 \tan^2 \frac{\pi z^2}{2} \tag{27}$$

which is the Darboux distortion of (4), and is presented in the first plot of Figure 2.

To find out if the second-order linear ODE corresponds to the deformed Cornu spirals, we first write the general Riccati solution (20) in the trigonometric form

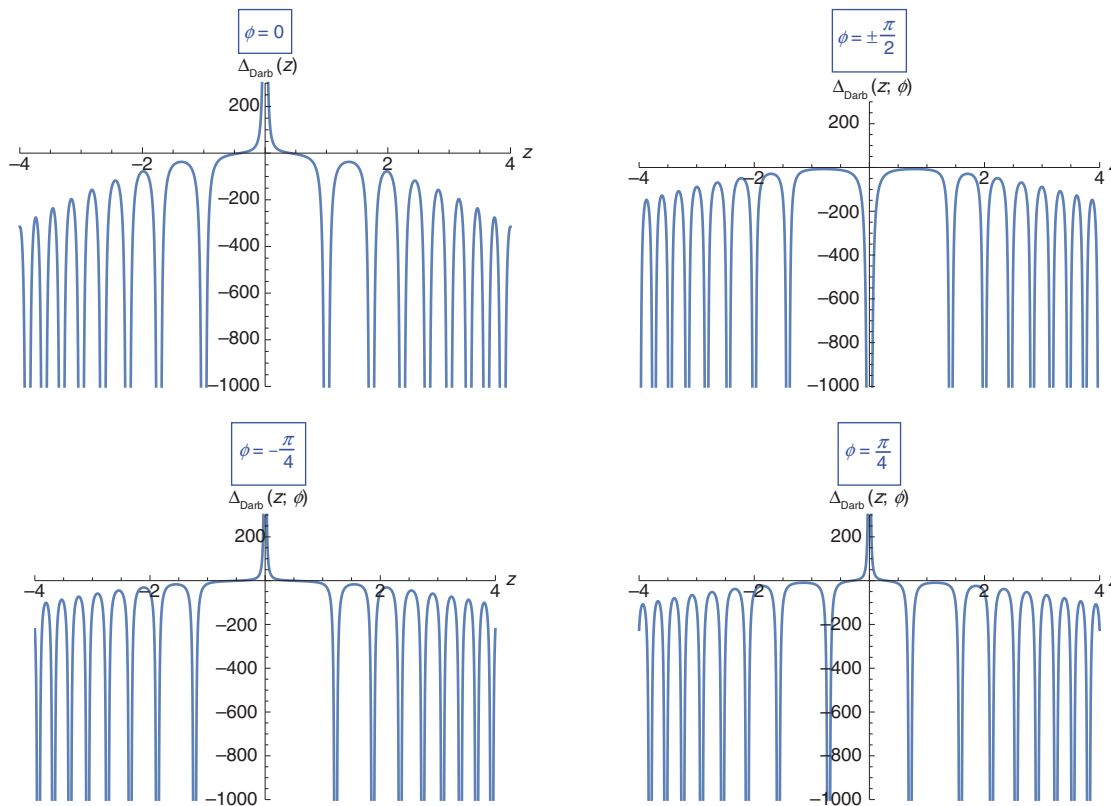


Figure 2: Darboux distortion of (4) for various phases ϕ . The Darboux distortion of the supersymmetric partner of the Cornu spiral corresponds to $\phi=0$. The other cases correspond to members of the parametric deformed family of spirals having the same supersymmetric partner.

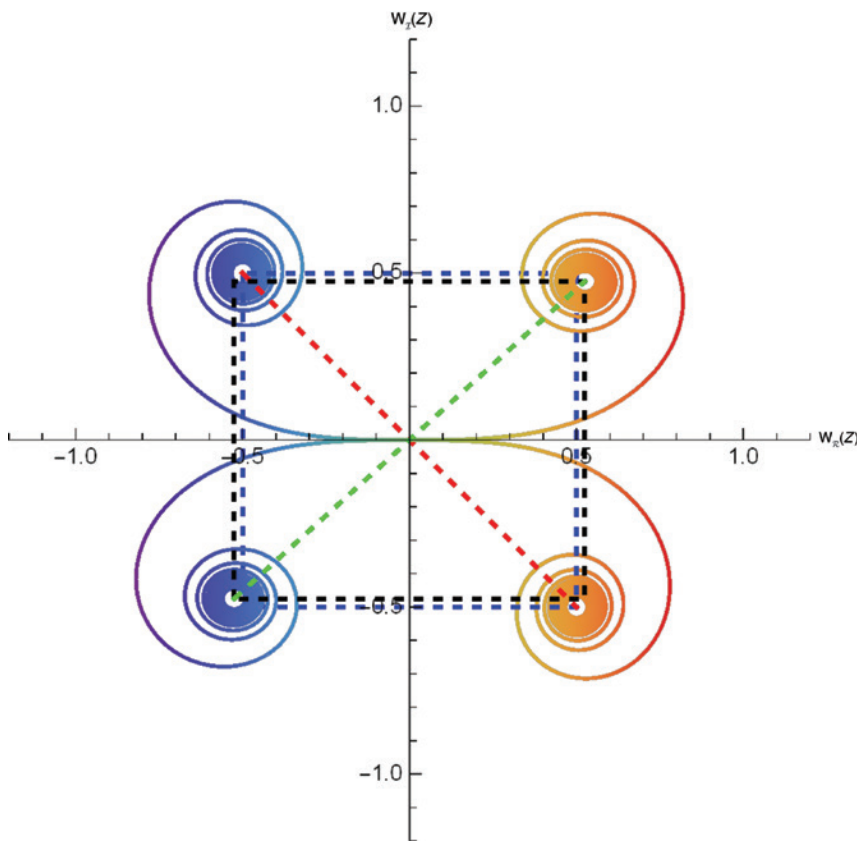


Figure 3: The Cornu supersymmetric partner spiral, $a=0, b=0$, from the center of Figure 1 and the parametric Cornu spiral for $a=10, b=0$ which is already very close to the standard Cornu spiral. Notice also that in the limit $a \rightarrow \infty$ the supersymmetric partner spiral is the image of the standard spiral under real axis reflection.

$$y_g(z) = -\pi z \tan\left(\frac{\pi z^2}{2} + \phi\right), \quad \theta = \frac{1}{R} e^{i\phi}, \quad (28)$$

$$\tilde{\Phi}(z; \phi) = b_1 \cos\left(\frac{\pi z^2}{2} + \phi\right). \quad (32)$$

and simply substitute it instead of the particular Riccati solution in the factorization (26)

$$\left[\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d}{dz} - \frac{y_g(z)}{\sqrt{z}} \right] \left[\frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{y_g(z)}{\sqrt{z}} \right] \tilde{\Psi} = 0. \quad (29)$$

One obtains the equation

$$\tilde{\Psi} - \frac{1}{z} \tilde{\Psi} + [\pi^2 z^2 + \Delta_{\text{Darb}}(z; \phi)] \tilde{\Psi} = 0, \quad (30)$$

with the Darboux distortion depending parametrically on the phase shift ϕ

$$\Delta_{\text{Darb}}(z; \phi) = -2\pi^2 z^2 + \frac{3}{4z^2} - \pi \tan\left(\frac{\pi z^2}{2} + \phi\right) - 2\pi^2 z^2 \tan^2\left(\frac{\pi z^2}{2} + \phi\right). \quad (31)$$

To find the general solution to (30), we let $A^{-1}\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}$, thus the homogenous equation $A^+\tilde{\Phi} = 0$ has the solution

By solving the non-homogeneous equation $A^{-1}\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}$, we obtain the general solution of (30)

$$\tilde{\Psi}(z; \phi) = \frac{\sqrt{z} b_2 + 2b_1 z + \sqrt{2} b_1 [\cos 2\phi C(\sqrt{2}z) - \sin 2\phi S(\sqrt{2}z)]}{4 \cos\left(\frac{\pi z^2}{2} + \phi\right)}. \quad (33)$$

Denoting

$$\tilde{C}(z; \phi) = \int_0^z \cos(\pi s^2 + 2\phi) ds \quad (34)$$

and choosing the arbitrary constants to be $b_1=2, b_2=0$, (33) takes the compact form

$$\tilde{\Psi}(z; \phi) = \sqrt{z} \frac{z + \tilde{C}(z; \phi)}{\cos\left(\frac{\pi z^2}{2} + \phi\right)}. \quad (35)$$

In Figure 2, we display various cases of parametric Darboux distortions $\Delta_{\text{Darb}}(z; \phi)$ of the deformed Cornu spirals presented in Figure 1. We notice the negative parabolic envelope as given by the first term in (31) together with the singularities due to the terms containing the tangents for nonzero z . The singularities at the origin are due to the $1/z^2$ term except for the cases $\phi = \pm\pi/2$ when the dominant contribution comes from the cotangent terms. For these values of the phase, the Darboux distortion simplifies to

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{Darb}}(z; 0) &= \frac{3}{4z^2} - \frac{\pi(\sin \pi z^2 + 4\pi z^2)}{\cos \pi z^2 + 1}, \\ \Delta_{\text{Darb}}(z; \pm\pi/4) &= \frac{3}{4z^2} + \frac{\pi(\cos \pi z^2 \pm 4\pi z^2)}{\sin \pi z^2 \mp 1}, \\ \Delta_{\text{Darb}}(z; \pm\pi/2) &= \frac{3}{4z^2} - \frac{\pi(\sin \pi z^2 - 4\pi z^2)}{\cos \pi z^2 - 1}.\end{aligned}$$

The factorization patterns discussed here unravel the Darboux origin of this deformation, which is a counterpart of the same construction in supersymmetric quantum mechanics, where the parametric families of supersymmetric isospectral potentials are obtained with the property that all the members of those families have the same supersymmetric partner potential [12, 13, 15]. The initial potential and its supersymmetric partners are reproduced for extremal values of the parameters. In the case of the Cornu spiral, our parametrization chosen is such that when a and b are nought, the supersymmetric partner spiral is obtained, whereas the standard Cornu spiral is obtained when $a \rightarrow \infty$ and $b=0$. This is graphically demonstrated in Figure 3 where even for the rather small values of $a=10$ and $b=0$, the spiral is very close to the standard one as known from textbooks [2].

4 Conclusion

A parametric deformation of the Cornu spiral is introduced based on the usage of the corresponding general Riccati solution instead of the particular solution. Geometrically, the origin of this kind of deformation lies in the

two independent scales, a and b , along the two orthogonal axes of the plane in which the spiral is plotted. These scales can generate not only the deformation of the rolls of the spiral, but also its global rotation as seen in the plots. Foreseen applications are in the same range as those of the standard Cornu spiral.

Acknowledgements: The third author acknowledges the financial support of CONACyT through a doctoral fellowship at IPICYT.

References

- [1] S. Schwartzman, *The Words of Mathematics: An Etymological Dictionary of Mathematical Terms Used in English*, The Mathematical Association of America, Washington, DC 1994.
- [2] G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Second Edition, Dover Publications, New York 1975.
- [3] K. G. Baas, *Transportation Forum* **1**, 47 (1984).
- [4] D. J. Walton, *Microcomp. Civil Eng.* **4**, 99 (1989).
- [5] S. Fleury, P. Soueres, J. P. Laumond, and R. Chatila, *IEEE Trans. Rob. Autom.* **11**, 441 (1995).
- [6] A.-M. Pendrill, *Eur. J. Phys.* **34**, 1379 (2013).
- [7] R. U. Gobithassan and K. T. Miura, *Sains Malaysiana* **40**, 1301 (2011).
- [8] D. A. Hill, *J. Appl. Phys.* **69**, 1772 (1991).
- [9] J. M. Ali, R. M. Tookey, J. V. Ball, and A. A. Ball, *J. Comp. Appl. Math.* **102**, 37 (1999).
- [10] L. Korkut, D. Vlah, D. Žubrinić, and V. Županović, *Appl. Math. Comp.* **206**, 236 (2008).
- [11] F. Werdiger, M. J. Kitchen, and D. M. Paganin, *Opt. Exp.* **24**, 10620 (2016).
- [12] B. Mielnik, *J. Math. Phys.* **25**, 3387 (1984).
- [13] H. C. Rosu, S. C. Mancas, and P. Chen, *Ann. Phys.* **343**, 87 (2014).
- [14] B. Mielnik and O. R. Ortiz, *J. Phys. A Math. Gen.* **37**, 10007 (2004).
- [15] H. C. Rosu, in: *Short Survey of Darboux Transformations in Symmetries, in Quantum Mechanics, and Quantum Optics*, (Eds. F. J. Herranz, A. Ballesteros, L. M. Nieto, J. Negro, and C. M. Pereña), Servicio de Publicaciones Universidad de Burgos, Burgos 1999.
- [16] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, Chapter 6, World Scientific, Singapore 2001.
- [17] *Introduction to the Fresnel integrals*, <http://functions.wolfram.com>. Accessed on April 14, 2018.



Non-autonomous Ginzburg-Landau solitons using the He-Li mapping method

Pérez Maldonado, Maximino; C. Rosu, Haret; Flores Garduño, Elizabeth
Non-autonomous Ginzburg-Landau solitons using the He-Li mapping method
CIENCIA *ergo-sum*, Número especial "Retos de la física no lineal" 2020 | e104
Universidad Autónoma del Estado de México, México

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

Pérez Maldonado, M., C. Rosu, H. y Flores Garduño, E. (2020). Non-autonomous Ginzburg-Landau solitons using the He-Li mapping method. CIENCIA *ergo-sum*, Número especial "Retos de la física no lineal". <https://doi.org/10.30878/ces.v27n4a3>

Non-autonomous Ginzburg-Landau solitons using the He-Li mapping method

Solitones Ginzburg-Landau no autónomos mediante el método de mapeo de He-Li

Maximino Pérez Maldonado

Universidad Politécnica de San Luis Potosí, México

maximino.perez@upslp.edu.mx

 <https://orcid.org/0000-0002-6785-2203>

Recepción: 24 de junio de 2019

Aprobación: 17 de febrero de 2020

Haret C. Rosu

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, México

hcr@ipicyt.edu.mx

 <https://orcid.org/0000-0001-5909-1945>

Elizabeth Flores Garduño

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, México

elizabeth.flores@ipicyt.edu.mx

 <https://orcid.org/0000-0002-5715-0347>

ABSTRACT

We find and discuss the non-autonomous soliton solutions in the case of variable nonlinearity and dispersion implied by the Ginzburg-Landau equation with variable coefficients. In this work we obtain non-autonomous Ginzburg-Landau solitons from the standard autonomous Ginzburg-Landau soliton solutions using a simplified version of the He-Li mapping. We find soliton pulses of both arbitrary and fixed amplitudes in terms of a function constrained by a single condition involving the nonlinearity and the dispersion of the medium. This is important because it can be used as a tool for the parametric manipulation of these non-autonomous solitons.

KEYWORDS: nonlinear, Ginzburg-Landau Equation, Non-Autonomous Solitons.

RESUMEN

Se hallan y discuten soluciones de tipo solitones no autónomos en el caso de no linealidad y dispersión implícitas en la ecuación de Ginzburg-Landau con coeficientes variables. El principal objetivo del artículo es obtener de manera sistemática las soluciones de dicha ecuación mediante una versión simplificada del mapeo propuesto por He-Li a partir de las soluciones solitónicas autónomas de la ecuación de Ginzburg-Landau estándar de coeficientes constantes. Bajo este mapeo, se encuentran pulsos solitónicos de amplitudes tanto fijas como arbitrarias que dependen de una función que es restringida por una única condición que involucra la no linealidad y la dispersión del medio. Este resultado es importante porque puede usarse como una herramienta para la manipulación paramétrica de solitones no autónomos.

PALABRAS CLAVE: no lineal, ecuación de Ginzburg-Landau, solitones no autónomos.

INTRODUCTION

As it is well known, dispersion and dissipation are extremely important for soliton pulse propagation in nonlinear media. These two processes are the main cause for the distortion and losses of the signal (Agrawal, 2001; Hasegawa, & Matsumoto, 2003; Ablowitz, Prinari, & Trubatch, 2004), and have been studied since the end of

1960's, although it was not until 1980's that people began to use amplifiers to compensate those losses (Hasegawa, & Matsumoto, 2003). In the amplification process, the silica doping of fibers is commonly used (AbLOWITZ, Prinari, & Trubatch, 2004).

Theoretically, this kind of propagation is mainly described by the nonlinear Schrödinger equation (NLS), but other equations can be used, such as the Sine-Gordon, Korteweg-de Vries, and Ginzburg-Landau equations that can also describe this kind of soliton propagation (Agrawal, 2001; Hasegawa, & Matsumoto, 2003; AbLOWITZ, Prinari, & Trubatch, 2004).

Nowadays, there are significant advances in the description of pulses in nonlinear media and the way they can be manipulated. The NLS equation with variable coefficients, and its non-autonomous nonlinear dynamical systems form (Malomed, 2006; He & Li, 2011; Pérez-Maldonado, & Rosu, 2015) are very important in this context of variable dispersion and nonlinearity, which bring losses and gains during the propagation. The manipulation of these pulses for optimal propagation is usually called "soliton management", or also for its specific use in optical devices as "dispersion management" (Malomed, 2006; Porsezian *et al.*, 2007; Centurion *et al.*, 2006).

In the case of non-autonomous models, the soliton management is defined by four parameters (Zhao, Luo, & He, 2010): *a*) amplitude (or width), *b*) frequency (or velocity), *c*) phase and *d*) time position. It is possible to control the soliton dynamics with a careful selection of their functional form of these parameters.

In this paper, we work out an extension of the method of non-autonomous NLS management (Pérez-Maldonado, & Rosu, 2015) to the Ginzburg-Landau equation (GL), employing both fixed amplitudes and arbitrary ones.

Compared to NLS, the GL equation has smaller damped terms and considerably bigger nonlinear terms (Malomed, 1991), and thus it governs the amplitude evolution of the dissipative waves in finite spatial neighborhoods over instabilities close to the critical points of the singularities (Akhmediev & Ankiewicz, 2005).

1. THE NON AUTONOMOUS MODEL

Soliton interaction between NLS non-autonomous solitons has been studied in a systematic way by Serkin and coworkers (Serkin, & Hasegawa, 2000; Serkin, & Belyaeva, 2001; Serkin & Hasegawa, 2002; Serkin, Hasegawa, & Belyaeva, 2004) who have been the pioneers in the discussion of the non-autonomous solitons (Serkin, Hasegawa, & Belyaeva, 2007). They proved that the non-autonomous solitons can propagate within nonlinear media when their amplitude and velocity are controlled (Serkin, Hasegawa, & Belyaeva, 2007).

The NLS equation governing the propagation of an optical soliton through an optical material with engineered dispersion and nonlinearity is

$$i \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + f(z) \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} + g(z) |\psi(z, t)|^2 \psi(z, t) + i\gamma(z)\psi = 0. \quad (1)$$

where $f(z)$ and $g(z)$ are the dispersion and nonlinearity management, respectively, and $\gamma(z) = \gamma_{loss} + \gamma_R$, with $\gamma_{loss} > 0$, the constant loss parameter of the fiber, and $\gamma_R < 0$ is the Raman gain parameter. If the functions $f(z)$, $g(z)$, and $\gamma(z)$ are complex functions, then equation (1) is known as the complex nonlinear Ginzburg-Landau equation (CGL) (Fang & Xiao, 2006).

We now apply the He-Li mapping (He & Li, 2011) of transforming the NLS equation with variable coefficients (NLS-CV) to a standard NLS equation of constant coefficients to the case of pulse propagation in doped fiber amplifiers for which the one-dimensional cubic CGL equation (Agrawal, 1991)

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + (p_r(z) + ip_i(z)) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + (q_r(z) + iq_i(z)) |\psi|^2 \psi = i(\gamma_r(z) + i\gamma_i(z))\psi \quad (2)$$

is considered as a good model. Here $\psi(z, t)$ is the field envelope function, t is the retarded time and z the propagation distance, p_r measures the wave dispersion, p_i the spectral filtering ($p_i < 0$) of the amplifier, which is important because it suppresses the Gordon-Haus jitter of the soliton central frequency;^[1] q_r and $q_i > 0$ represent the nonlinear coefficient and the nonlinear gain/absorption processes, respectively. We noticed that the nonlinear gain helps to suppress the growth of radiative background (linear mode) which always affects the propagation of nonlinear stationary pulses in real fiber links; γ_r and γ_i are the linear gain and the frequency shift, respectively (Fewo *et al.*, 2005). The parameters $p_r, p_i, q_r, q_i, \gamma_r$ and γ_i are real functions depending on the propagation coordinate. In many cases, this type of model is used for dispersion-managed solitons (DMS) (Biswas, 2002; Hasegawa, 2000) in transmission lines employing a periodic map, such that each period is built up by two types of fibers of generally different lengths and opposite group velocity dispersion (Turitsyn *et al.*, 2003; Turitsyn, 1998; Turitsyn *et al.*, 1999). On the other hand, a too strong dispersion management could lead to system performances even worse than the conventional soliton systems (Hirooka, Nakada, & Hasegawa, 2000).

Previously, some exact solutions were obtained by other methods. For example, the stability of chirped bright and dark soliton-like solutions of the cubic CGL equation with variable coefficients has been investigated in (Fang, & Xiao, 2006), but here we will use a modified He-Li mapping (He & Li, 2011; Pérez-Maldonado, & Rosu, 2015).

1. 1. AUTONOMOUS MAPPING OF THE NON-AUTONOMOUS SOLITONS IN AMPLIFIED DISSIPATIVE FIBERS

Firstly, we should look for the integrability of the equation (2) by finding a direct relationship with the standard GL equation (Akhmediev & Afanasjev, 1995; Soto-Crespo *et al.*, 1997) (without quintic term), given by

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \left(\frac{D}{2} - i\beta \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + (s - i\varepsilon)|\psi|^2 \psi = i\delta \psi, \quad (3)$$

where ψ is the envelope of the optical field, and z and t are the propagation distance and retarded time, respectively. The parameters in (3) are all real parameters, namely, δ stands for linear gain or loss, β for spectral filtering, and ε for nonlinear gain. The parameters D and s may only take the values ± 1 , i.e., when $D = 1$ the dispersion is anomalous and when $D = -1$ the dispersion is normal, and $s = 1$ or $s = -1$ stands for positive or negative Kerr effect (Facao & Carvalho, 2015), respectively. The proposed ansatz is similar to the Talanov ansatz (Talanov, 1970),

$$\psi(t, z) = u(T, Z)e^{-i\phi(t, z)}, \quad (4)$$

where the phase function describes the instability (Hasegawa, & Matsumoto, 2003). With $T = T(z, t)$ and $Z = Z(z)$, the central task is to determine the specific expressions for $p_r, p_i, q_r, q_i, \gamma_r, \gamma_i, \phi, T$, and Z by requesting $u(T, Z)$ to satisfy the standard autonomous GL equation (3). It is important to mention that for rare-earth doped optical fibers, which are normally used by people for pulse amplification with retarded time $T = t - \beta_1^{eff} z$ (Agrawal, 1991), where β_1^{eff} is related to the effective group velocity, we have a T -dependent Z . Therefore, by derivating the ansatz (4) and taking into account that $\partial \psi / \partial t = \psi_t$ and $\partial \psi / \partial z = \psi_z$, we obtain

$$iu_z + \left(\frac{D}{2} - i\beta \right) u_{TT} + (s - i\varepsilon)|u|^2 u + (k_1 + ik_2)u_T + (k_3 + ik_4)u = i\delta u, \quad (5)$$

from where one can see the following relationships between the parameters $p_r(z) = \frac{D}{2} \frac{Z_z}{T_t^2}$, $p_i(z) = -\beta \frac{Z_z}{T_t^2}$, $q_r(z) = sZ_z$, $q_i(z) = -\varepsilon Z_z$ y $\gamma_r(z) = \delta Z_z$, with

$$k_1 = \frac{D}{2} \frac{T_{tt}}{T_t^2} - 2\beta \frac{\phi_t}{T_t}, \quad (6)$$

$$k_2 = \frac{T_z}{z_z} - \beta \frac{T_{tt}}{T_t^2} - D \frac{\phi_t}{T_t}, \quad (7)$$

$$k_3 = \frac{\phi_z}{z_z} - \beta \frac{\phi_{tt}}{T_t^2} - \frac{D}{2} \frac{\phi_t^2}{T_t^2} + \frac{\gamma_i(z)}{z_z}, \quad (8)$$

$$\delta = \beta \frac{\phi_t^2}{T_t^2} - \frac{D}{2} \frac{\phi_{tt}}{T_t^2}. \quad (9)$$

When $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, we have the standard cubic CGL equation (3). For the complete description, we need to solve the latter equations to find the specific functional form of each of the mentioned terms.

Taking $T = t - \beta_1^{eff} z$

$$T_t = \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} = T_\zeta$$

$$T_z = \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dz} = -\beta_1^{eff} T_\zeta$$

and substituting into (9)

$$k_1 = \frac{D}{2} \frac{T_{\zeta\zeta}}{T_\zeta^2} - 2\beta \frac{\phi_t}{T_\zeta}, \quad (10)$$

$$k_2 = \frac{-\beta_1^{eff} T_\zeta}{z_z} - \beta \frac{T_{\zeta\zeta}}{T_\zeta^2} - D \frac{\phi_t}{T_\zeta}, \quad (11)$$

$$k_3 = \frac{\phi_z}{z_z} - \beta \frac{\phi_{tt}}{T_\zeta^2} - \frac{D}{2} \frac{\phi_t^2}{T_\zeta^2}, \quad (12)$$

$$\delta = \frac{\gamma_r(z)}{z_z} - \beta \frac{\phi_t^2}{T_\zeta^2} + \frac{D}{2} \frac{\phi_{tt}}{T_\zeta^2}, \quad (13)$$

we can solve this system of equations, obtaining the following results

$$T(z, t) = F_1(z) + \frac{\sqrt{s.c}}{k} \sqrt{g(z)} \sqrt{2k(t - \omega z) + f_1}, \quad (14)$$

$$Z(z) = (s.c) \int g(z) dz + f_2, \quad (15)$$

$$\phi(z, t) = -\frac{D}{8\beta} \ln(2k(t - \omega z) + f_1), \quad (16)$$

where f_1 and f_2 are integration constants, $s.c$ and $D.c$ are mapping complex quantities of the form

$s.c = \frac{s + i\epsilon}{s^2 + \epsilon^2}$ and $D.c = \frac{\frac{D}{2} + i\beta}{\frac{D^2}{2} + \beta^2}$. These complex numbers are related to the nonlinear and dispersion

coefficients of the autonomous GL equation, respectively; also, $\omega = k/8\beta(16\beta^2 + D^2)$ and $\kappa = \beta_1^{eff} \left(\frac{4\beta}{D^2 + \beta^2} \right)$, and so we can obtain the transformation function $F_1(z)$

$$F_1(z) = \left(\frac{1}{k} + \frac{4\beta_1^{eff}}{\omega} \right) \sqrt{\frac{s.c}{D.c}} \sqrt{g(z)p(z)}. \quad (17)$$

Therefore, we can express the function for the loss/gain with dependence on nonlinearity and dispersion in the form

$$\gamma(z) = s.c \ g(z) - \frac{3D^2 k^2}{16\beta p(z)}, \quad (18)$$

so that we are able to obtain the integrability of the system.

2. EXACT SOLUTION FOR CGL EQUATION OF STANDARD COEFFICIENTS

There exist some exact solutions of the equation (3) (Akhmediev & Afanasjev, 1995; Soto-Crespo *et al.*, 1997; Facao & Carvalho, 2015; Conte & Musette, 1995) and for our mapping method we can use any of these solutions. In this work, we make use only of the solution proposed by Soto-Crespo *et al.* (1997) for bright solitons with anomalous dispersion $D = s = 1$. This is because in the anomalous dispersion regime it is possible to study the main properties of the soliton-like solutions of equation (3) by applying the well-developed soliton perturbation theory of the NLS equation. There are two different solutions proposed by Soto-Crespo *et al.* (1997), one is for solitons with fixed amplitude and the other is for solitons with arbitrary amplitude. In both cases, the soliton solution has the form

$$u(T, Z) = a(T) \exp[i d \ln[a(T)] - \omega Z], \quad (19)$$

where $a(T)$ is a real function, and d and ω are real constants with values

$$d_{\pm} = \frac{3(1 + 2\varepsilon\beta D) \pm \sqrt{9(1 + 2\varepsilon\beta D)^2 + 8(\varepsilon - 2\beta D)^2}}{2(\varepsilon - 2\beta D)} \quad (20)$$

$$\omega = \frac{\delta(1 - d^2 - 4\beta d D)}{2(d - \beta D + \beta d^2 D)}. \quad (21)$$

We also consider the special stability conditions as proposed by Soto-Crespo *et al.* (1997).

2. 1. The soliton with fixed amplitude

The solution for $a(T)$ is in this case

$$a(T) = CB \operatorname{sech}(BT), \quad (22)$$

where

$$B = \sqrt{\frac{\delta}{\beta d^2 + Dd - \beta}} \quad (23)$$

$$C = \sqrt{\frac{3d(1 + 4\beta^2)}{2(2\beta - \epsilon D)}} \tag{24}$$

and d is given by equation (20) after choosing the plus (minus) sign in front of the square root if D is negative (positive). The second value of d does not lead to a physical solution (Akhmediev & Afanasjev, 1995; Akhmediev, Afanasjev, & Soto-Crespo, 1996), as the expression under the square root for C becomes negative.

Soto-Crespo *et al.* (1997) also provided the following condition of existence of the solution (22),

$$\epsilon_S = \beta \frac{\sqrt[3]{1 + 4\beta^2 - D}}{4 + 18\beta^2} \tag{25}$$

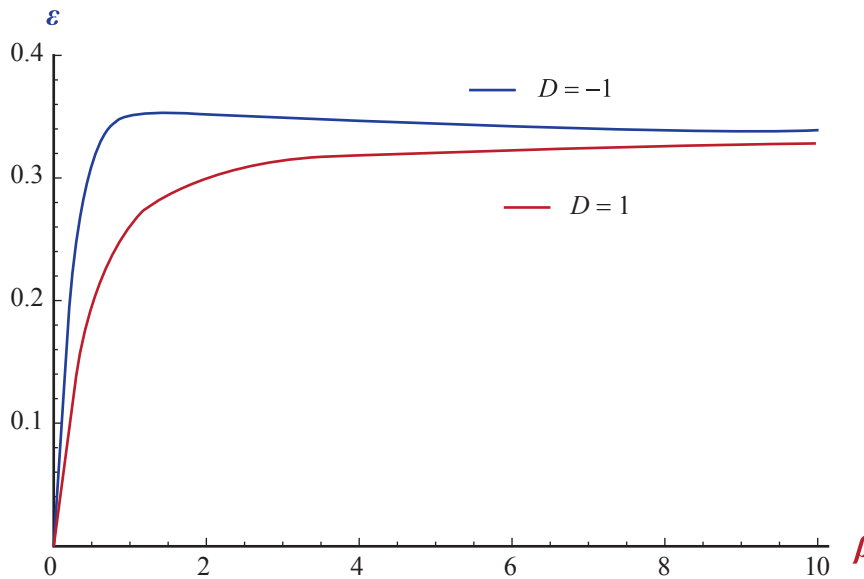


FIGURE 1

Range of existence of solution (22)

Nota: The curve S (25) in the plane (ϵ, β) where the solutions with fixed amplitudes (22) become singular, and where the classes of special solutions with arbitrary amplitude (26) exist. This plot applies for cubic and quintic cases. The corresponding one for the case of anomalous dispersion is also shown by the blue curve for comparison. Above the curve S , δ must be positive for solution (22) to exist, and negative below it. The red curve depicts S for $D = + 1$, similar to obtained by Soto-Crespo *et al.* (1997).

As this solution exists almost everywhere in the (ϵ, β) plane, we call it the general solution (Figure 1). The curve S itself is the line where this solution becomes singular, i.e., its amplitude BC tends to infinity, while the width $1/B$ vanishes.

2. 2. The solution with arbitrary amplitude

Another special solution proposed by Soto-Crespo *et al.* (1997) is obtained if we also impose the condition $\delta = 0$. Then, the solution, valid only on the line (25), is

$$a(T) = GF \operatorname{sech}(GT), \tag{26}$$

where G is an arbitrary positive parameter, and d, ω and F are given by

$$d = \frac{\sqrt{1 + \beta^2 - D}}{2\beta} \tag{27}$$

$$\omega = - \frac{(1 + 4\beta^2) (\sqrt{1 + 4\beta^2} - D)}{4\beta^2} \quad G^2 = -d \frac{\sqrt{1 + \beta^2} - D}{2\beta} G^2 \quad (28)$$

$$F = \left(\frac{d\sqrt{1 + \beta^2} - D}{2\varepsilon} \right)^{1/2} = \left[\frac{(2 + 9\beta^2)\sqrt{1 + \beta^2} (\sqrt{1 + \beta^2} - D)}{2\beta^2 (3\sqrt{1 + \beta^2} - D)} \right]^{1/2} \quad (29)$$

The solution (26) represents the arbitrary amplitude soliton. The reason for the existence of the arbitrary amplitude solutions is that, when $\delta = 0$, the cubic CGL equation becomes invariant relative to the scaling transformation $u \rightarrow Gu$, $T \rightarrow GT$, $Z \rightarrow G^2 Z$. Hence, if we know a particular solution of this equation, the whole family can be generated using this transformation. Notice that all parameters of solution (26) except G and the coefficient ε are expressed in terms of β .

3. SOLUTION OF THE CGL WITH VARIABLE COEFFICIENTS

We will now use a specific case for the CGL equation with variable coefficients employed in the work of Fang and Xiao (2006), to describe a fiber with inhomogeneities. They found solutions for chirped, bright and dark solitons. Here, we work with their dispersion parameter and solve their CGL equation by the mapping method.

First, we introduce their dispersion and nonlinearity parameters

$$p(z) = -\frac{1}{2} p_0 [1 + \alpha_1 \sin(\sigma z)] \exp(-\mu_1 z), \quad (30)$$

$$g(z) = g_0 [1 + \alpha_2 \sin(\sigma z)] \exp(-\mu_2 z), \quad (31)$$

where $p_r;0$ and $q_r;0$ are ideal fiber parameter; α_1 is a small parameter that characterizes the amplitude of the fluctuations; μ_1 is a small constant; is related to the variation period of the fiber parameters. In our case, we only need the dispersion parameter and the frequency shift parameter $\gamma_i(z)$ is set equal zero, so and we can solve the problem analytically.

Now, taking into account all parameters, we obtain the complete solution, with the T equation (14), Z equation (15) and ϕ equation (16) for both cases, where from (17)

$$F_1(z) = \left(\frac{1}{k} + \frac{4v}{\omega} \right) \sqrt{\frac{s.c}{D.c}} \sqrt{-\frac{1}{2} p_0 g_0 [1 + \alpha_2 \sin(\sigma z)] \exp(-\mu_2 z) [1 + \alpha_1 \sin(\sigma z)] \exp(-\mu_1 z)}. \quad (32)$$

It is possible to define more solutions, one is for bright solitons with $\beta\delta > 0$ and another for dark solitons when $\beta\delta < 0$.

3. 1. The soliton solution for fixed amplitude

In accordance with the proposed solution by Soto-Crespo *et al.* (1997) our solution is

$$\psi(t, z) = CB \operatorname{sech}(BT) \exp[i(d \ln[a(T)] - \omega Z - \phi(t, z))], \quad (33)$$

which is displayed graphically in Figure 2.

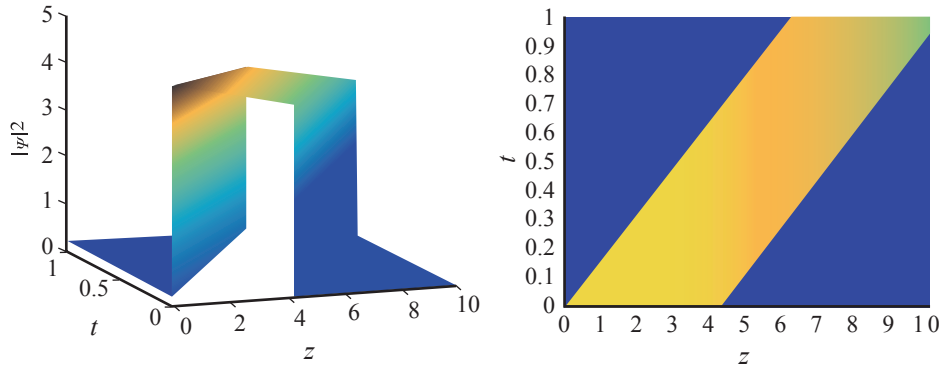


FIGURE 2

Non-autonomus soliton with fixed amplitude

Nota: a) Soliton solution with fixed amplitude for bright solitons obtained from (33). b) Contour plot.

Figure 2 shows the graphs for the soliton solution of the nonlinear CGL equation with variable coefficients with anomalous dispersion, i. e. the coefficient $D = 1$. We note that our solutions present similarities with the solutions reported by Soto-Crespo *et al.* (1997). The values of the parameters are the following: $\beta = 0.25$, $\delta = -0.1$, $\alpha_1 = 0.05$, $\alpha_2 = 0.1$, $\sigma = 0.05$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.01$, $p_0 = -0.5$, $g_0 = 0.3$, and $s = 1$, likewise those of Soto-Crespo *et al.* (1997) and Fang, & Xiao (2006).

3. 2. The soliton solution with arbitrary amplitude

On the other hand, we obtain the following soliton solution with arbitrary amplitude,

$$\psi(t, z) = GF \operatorname{sech}(GT) \exp[i(d \ln[a(T)] - \omega Z - \phi(t, z))], \tag{34}$$

with its graphic representation in the figure (3), where we have used the following values of the parameters: $G = 1$, $\beta = 0.1$, $\alpha_1 = 0.05$, $\alpha_2 = 0.1$, $\sigma = 0.05$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.01$, $p_0 = -0.5$, $g_0 = 0.3$, and $s = 1$.

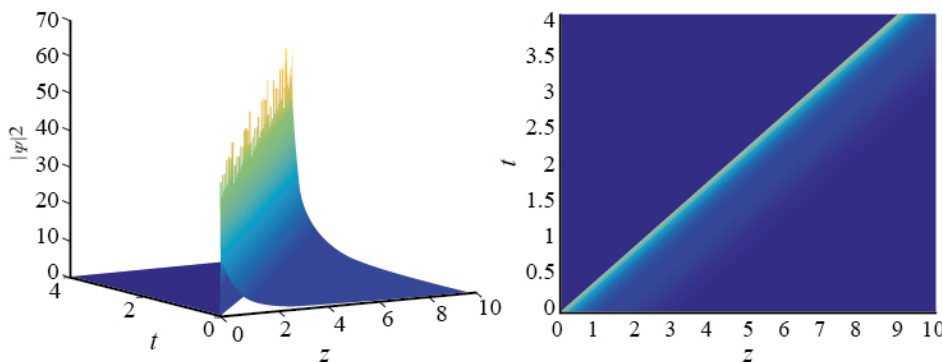


FIGURE 3

Non-autonomus soliton with arbitrary amplitude

Note: a) Bright soliton of arbitrary amplitude obtained from (34). b) Contour plot.

Examination of the obtained solution in equation (19) shows that it is scalable in the amplitude and the variable $T(z, t)$, whereas the scaling in the $Z(z)$ variable produces only a change of the phase of the soliton solution, so essentially the solution (19) can be considered as scalable. The importance of the scaling properties lies in the

possibility to obtain a whole family of solutions once a particular solution is known, just by varying the scaling parameter. In our case, each member of the family of solutions will have a different phase. Physically, changes in the scaling parameter can be achieved by varying the power of the source (laser) of the pulses.

Furthermore, we can notice that under this transformation, the propagation function only depends on the nonlinearity, as expected, because the nonlinearity is a characteristic of the medium where the pulse is propagating. Indeed, the function $T(z, t)$ has a direct dependence on the nonlinearity of the medium, but also depends on the traveling variable and the dispersion of the medium as one can see from equation (14). This is what assures the management of solitons through the compensation of the dispersion and nonlinearity functions according to equation (18).

PROSPECTIVE

The mathematical treatment uses the simplified mapping of the He-Li method as a way to find solutions of nonlinear equations of variable coefficients, commonly used in nonlinear optics for modeling the propagation of solitons in nonlinear media.

The method can be implemented for other nonlinear equations different from the ones treated here, taking into account that it is only necessary to find the transformation equation that takes us to the mapping itself, where we can use all the solutions of autonomous nonlinear equations already known.

CONCLUSION

Using a modified He-Li mapping approach we have been able to obtain the appropriate conditions that assure the system integrability for the management of non-autonomous solitons in nonlinear media, such as, fiber optics or waveguides, for the nonlinear Ginzburg-Landau equation with variable coefficients. In addition, it is possible to use all known solutions of the autonomous Ginzburg-Landau equation, because, in our development we find a transformation function that maps the GL equation of variable coefficients to the autonomous GL equation, as well as we can use the stability conditions of the GL equation presented in the literature.

REFERENCES

- Ablowitz, M. J., Prinari, B., & Trubatch, A. (2004). *Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1007/b11728>.
- Agrawal, G. P. (1991). Optical pulse propagation in doped fiber amplifiers, *Phys. Rev. A.*, 44(11), 7493-7501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.44.7493>.
- Agrawal, G. P. (2001). *Nonlinear fibers optics*. Elsevier Science.
- Akhmediev, N., & Afanasjev, V. (1995). Novel arbitrary-amplitude soliton solutions of the cubic-quintic complex Ginzburg-Landau equation. *Phys. Rev. Lett.*, 75(12), 2320-2324. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.2320>.
- Akhmediev, N., Afanasjev, V., & Soto-Crespo, J. M. (1996). Singularities and special soliton solutions of the cubic-quintic complex Ginzburg-Landau equation. *Phys. Rev. E.*, 53(1), 1190-1201. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.1190>.
- Akhmediev, N. & Ankiewicz, A. (2005). Adrian (Eds.), *Dissipative Solitons, Lecture Notes in Physics*, 661. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

- Biswas, A. (2002). Dispersion-managed solitons in optical fibers, *J. Optics A.*, 4(1), 84-97. <https://doi.org/10.1088/1464-4258/4/1/315>.
- Centurion, M., Porter, M. A., Kevrekidis, P. G. & Psaltis, D. (2006). Nonlinearity management in optics: Experiment, theory, and simulation, *Phys. Rev. Lett.*, 97, 033903-1-033903-4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.033903>.
- Conte, R., & Musette, M. (1995). Exact solutions to the complex Ginzburg-Landau equation of nonlinear optics. *Pure Appl. Opt.*, 4, 315-320. <https://doi.org/10.1088/0963-9659/4/4/005>.
- Facao, M., & Carvalho, M. I. (2015). Existence and stability of solutions of the cubic complex Ginzburg-Landau equation with delayed Raman scattering. *Phys. Rev. E.*, 92, 022922-1-022922-5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.022922>.
- Fang, F., & Xiao, Y. (2006). Stability of chirped bright and dark soliton-like solution of cubic complex Ginzburg-Landau equation with variable coefficients. *Optics Communications*, 268, 305-310. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2006.07.014>.
- Fewo, S., Atangana, J., Kenfack-Jiotsa, A., & Kofane, T. (2005). Dispersion-managed solitons in the cubic complex Ginzburg-Landau equation as perturbations of nonlinear Schrödinger equation. *Opt. Comm.*, 252, 138-149. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2005.03.031>.
- Hasegawa, A. (2000). *Massive WDM and TDM Soliton Transmission Systems*. Kluwer Academic Publishers.
- Hasegawa, A., & Matsumoto, M. (2003). *Optical Solitons in Fibers*. Springer.
- He, J., & Li, Y. (2001). Designable integrability of the variable coefficient nonlinear Schrödinger equations. *Stud. Appl. Math.*, 126, 1-15. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9590.2010.00495.x>.
- Hirooka, T., Nakada, T. & Hasegawa, A. (2000). Feasibility of densely dispersion managed soliton transmission at 160 Gb/s. *IEEE Photon. Technol. Lett.* 12(6), 633-635. <https://doi.org/10.1109/68.849067>.
- Malomed, B. A. (1991). Bound solitons in the Nonlinear Schrödinger/Ginzburg-Landau equation. In J. D. Fournier, & P. L. Sulem (Eds.), *Large Scale Structures in Nonlinear Physics. Lecture Notes in Physics*, 392. Springer, Heidelberg. Springer-Verlag.
- Malomed, B. (2006). *Soliton Management in Periodic Systems*. Springer. <https://doi.org/10.1007/0-387-29334-5>.
- Pérez-Maldonado, M. & Rosu, H. (2015). Solitones no autónomos en fibras ópticas. *Rev. Mex. Fís.*, 61, 351-355. <https://rmf.smf.mx/ojs/rmf/article/view/4161>
- Porsezian, K., Hasegawa, A., Serkin, V., Belyaeva, T., & Ganapathy, R. (2007). Dispersion and nonlinear management for femtosecond optical solitons. *Phys. Lett. A*, 361, 504-508. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.10.022>.
- Serkin, V. N., & Hasegawa, A. (2000). Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model. *Phys. Rev. Lett.*, 85, 4502-4505. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4502>.
- Serkin, V. N., & Belyaeva, T. (2001). High-energy optical Schrödinger solitons. *JETP Letters*, 74, 573-576. <https://doi.org/10.1134/1.1455063>
- Serkin, V. N. & Hasegawa, A. (2002). Exactly integrable nonlinear Schrödinger equation models with varying dispersion, nonlinearity and gain: Application for soliton dispersion. *IEEE J. Sel. Top. in Quantum Electron.* 8, 418-431. <https://doi.org/10.1109/JSTQE.2002.1016344>.
- Serkin, V. N., Hasegawa, A., & Belyaeva, T. (2004). Comment on exact self-similar solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients. *Phys. Rev. Lett.*, 92, 199401-1. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.199401>.

- Serkin, V. N., Hasegawa, A. & Belyaeva, T. (2007). Nonautonomous solitons in external potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 98, 074102-1-074102-4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.074102>.
- Soto-Crespo, J. M., Akhmediev, N. N., Afanasjev, V. V., & Wabnitz, S. (1997). Pulse solutions of the cubic-quintic complex Ginzburg-Landau equation in the case of normal dispersion. *Phys. Rev. E.*, 55(4), 4783-4796. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.4783>
- Talanov, V. (1970). Focusing of light in cubic media. *JETP Lett.*, 11, 199-201. Retrieved from <http://www.jetpletters.ac.ru/ps/1719/article26119.pdf>
- Turitsyn, S. (1998). *Theory of guiding-center breathing soliton propagation in optical communication systems with strong dispersion management, in new trends in optical soliton transmission systems*. A. Hasegawa (Ed.). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 225-243. <https://doi.org/10.1364/OL.22.001544>
- Turitsyn, S. K., Doran, N. J., Nijhof, J. H. B., Mezentsev, V. K., Shaefer, T., & Forysiak, W. (1999). *Dispersion-Managed Solitons, in Theoretical Challenges and Industrial Perspectives*. V. E. Zakharov, & S. Wabnitz, S. (Eds. Kluwer.). Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands. Retrieved from <https://www.lpsm.paris/pageperso/garnier/publi/reviewsolitonoptics.pdf>
- Turitsyn, S. K., Shapiro, E. G., Medvedev, S. B., Fedoruk, M. P., & Mezentsev, V. K. (2003). Physics and mathematics of dispersion-managed optical solitons. *Comptes Rendus Physique, Acad'emie des sciences/ Editions scientifiques et m'edicales*, 4, 145-161.
- Zhao, D., Luo, H.-G., & He, X.-G. (2010). On the nonautonomous nonlinear Schrödinger equations and soliton management. *AIP Conf. Proc.*, 1212, 213-218. <https://doi.org/10.1063/1.3367048>.

NOTES

- [1] The Gordon-Haus jitter effect refers to the fact that the fluctuations of the central frequencies of the optical pulses are temporally coupled through the group velocity dispersion: a change of the central frequency is presented as a change of the group velocity dispersion, which affects the time coordinate of the pulse.

CC BY-NC-ND

Planar motion with Fresnel integrals as components of the velocity

E. Flores-Garduño

*Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica,
Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potosí, S.L.P., México.
e-mail: elizabeth.flores@ipicyt.edu.mx*

Stefan C. Mancas

*Department of Mathematics, Embry-Riddle Aeronautical University,
Daytona Beach, FL 32114-3900, USA.
e-mail: mancass.erau.edu*

Haret C. Rosu

*Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, Advanced Materials Division,
Camino a la presa San José 2055, Col. Lomas 4a Sección, 78216 San Luis Potosí, S.L.P., México.
e-mail: hcr@ipicyt.edu.mx*

M. Pérez-Maldonado

*Universidad Politécnica de San Luis Potosí,
Urbano Villalón No 500 Col. La Ladrillera C.P 78363 San Luis Potosí, S.L.P., Mexico.
email: maximino.perez@upslp.edu.mx*

Received 31 May 2020; accepted 7 July 2020

We analyze the two-dimensional motion of a rigid body due to a constant torque generated by a force acting on the body parallel to the surface on which the body moves extending an old note of Ferris-Prabhu [Am. J. Phys. **38**, 1356-1357 (1970)] and supplement it with a short discussion of the jerking properties.

Keywords: Planar motion; torque; Fresnel integrals; jerk.

PACS: 02.30.Hq; 45.40.Cc; 45.20.D-

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.66.585>

1. Introduction

While there are recent surprising applications of Fresnel integrals, such as to rat whiskers [1] and orange peel [2], it is surely much less known that fifty years ago Ferris-Prabhu [3] discussed a two-dimensional motion of a rigid body in classical Newtonian mechanics as an example in which Fresnel integrals occur beyond their usual context of near-field optical diffraction generated by slits and apertures [4–8]. Since the paper of Ferris-Prabhu is a very short note and has also some ambiguous points, we provide here a more detailed analysis of the kinematical quantities of this interesting motion supported by their plots adding also a discussion of its jerked properties.

2. Motion with velocity whose cartesian components are Fresnel integrals

Let us consider a small rigid and compact object of mass M and moment of inertia I on a frictionless surface defined by the cartesian coordinates x and y with the origin placed at the center of mass of the object. We assume the object is initially at rest and apply at time $t = 0$ a constant force, F , along the positive x direction at the point $(x, y) = (0, -d)$, where d is

some distance on the y axis smaller than the size of the object in that direction. During the course of motion, the line of application of the force is maintained at the distance d for any instantaneous angle θ made by the force with the x axis, *i.e.*, the force as a vector does not change in the rotating cartesian system defined by the axes x' and y' bound to the body, see Fig. 1.

We are interested in the trajectory of the center of mass of the object under these conditions. Choosing the center of mass as a reference point for the motion is theoretically very convenient because this planar motion is a superposition of translational and rotational motions and for the center of mass the translational motion is due to Newton's second law, and the rotational motion is due to the torque equation in their standard form.

The torque equation for the motion, as depicted in Fig. 1 is

$$\tau = I\ddot{\theta} = Fd, \quad (1)$$

where I is the moment of inertia of the body, and the dot stands for the time derivative. Denoting $K = Fd/I$ and using zero initial conditions, we find the polar angle $\theta(t) = (K/2)t^2$. We now use this quadratic angle to write the cartesian components of acceleration provided by Newton's second law

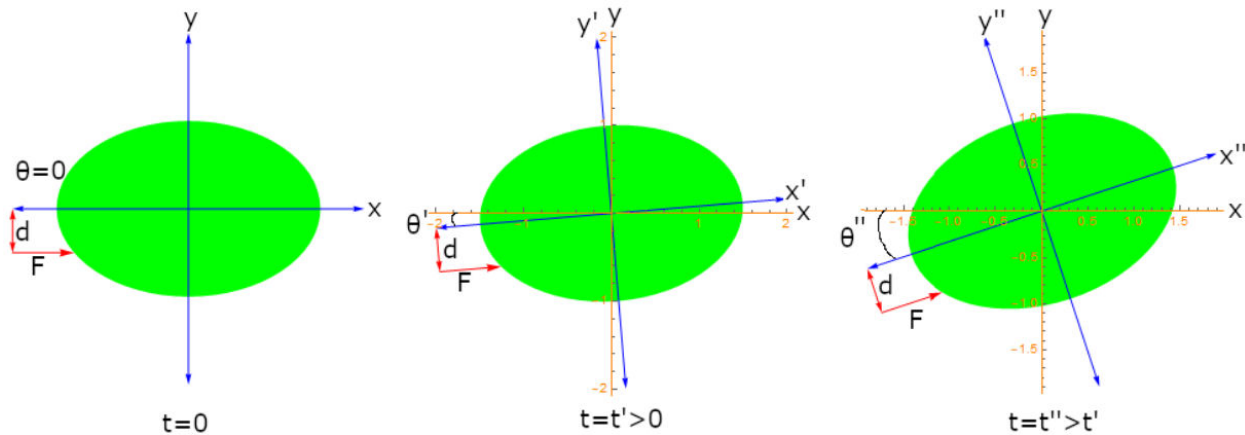


FIGURE 1. The planar motion of a rigid object considered in this paper at the initial moment and two subsequent instants.

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \frac{F}{M} \cos\left(\frac{K}{2}t^2\right), \\ \ddot{y}(t) &= \frac{F}{M} \sin\left(\frac{K}{2}t^2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{K}} C\left(\sqrt{\frac{K}{\pi}}t\right), \\ \dot{y}(t) &= \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{K}} S\left(\sqrt{\frac{K}{\pi}}t\right). \end{aligned} \tag{3}$$

By one integration and assuming zero integration constants, we find the cartesian components of the velocity, expressed in terms of the Fresnel integrals,

$$C(\tau) = \int_0^\tau \cos(\pi u^2/2) du$$

and

$$S(\tau) = \int_0^\tau \sin(\pi u^2/2) du,$$

where $\tau = \sqrt{(K/\pi)}t$ [3]

Since both velocities are zero at $t = 0$, it confirms that the center of mass undergoes a planar movement as an instant center of rotation. These components are plotted in Fig. 2 for three values of K , together with their renowned Argand plot (the positive part of the clothoid/Cornu/Euler spiral [9]) and the speed $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

Integrating again with zero integration constants, the cartesian components for the position are

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{K}} \left[t C\left(\sqrt{\frac{K}{\pi}}t\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi K}} \sin\left(\frac{K}{2}t^2\right) \right], \\ y(t) &= \frac{F}{M} \sqrt{\frac{\pi}{K}} \left[t S\left(\sqrt{\frac{K}{\pi}}t\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi K}} \left(\cos\left(\frac{K}{2}t^2\right) - 1 \right) \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Since F/M is an overall scaling factor, we proceed here by assuming $F/M = 1$, which does not change the analytical behavior of the solutions. We plot the displacements (4) in Fig. 3 together with the radial displacement $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$. The plots show a linear behavior that sets in at already moderate instants of time with some superposed ripples which are smaller and almost disappearing at increasing K . This is easy to understand by using the large argument expansion of the Fresnel integrals which we write in the form

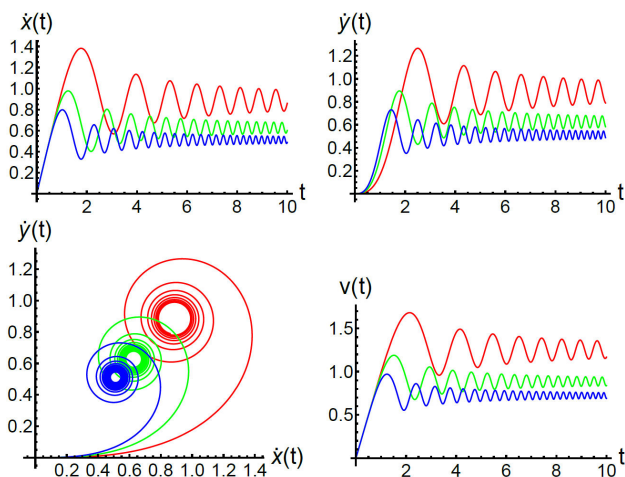


FIGURE 2. The cartesian components of the velocity for $K = 1, 2, 3$ (red, green, and blue, respectively), and force and mass taken as unity. The corresponding Argand plots (bottom left) and the speed $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ (bottom right).

$$\begin{aligned} C(t) &\sim \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \sim \frac{1}{2} \left(1 + t \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\right), \\ S(t) &\sim \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) - \frac{1}{\pi t} \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \sim \frac{1}{2} \left(1 + t \operatorname{sinc}^*\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\right), \end{aligned} \tag{5}$$

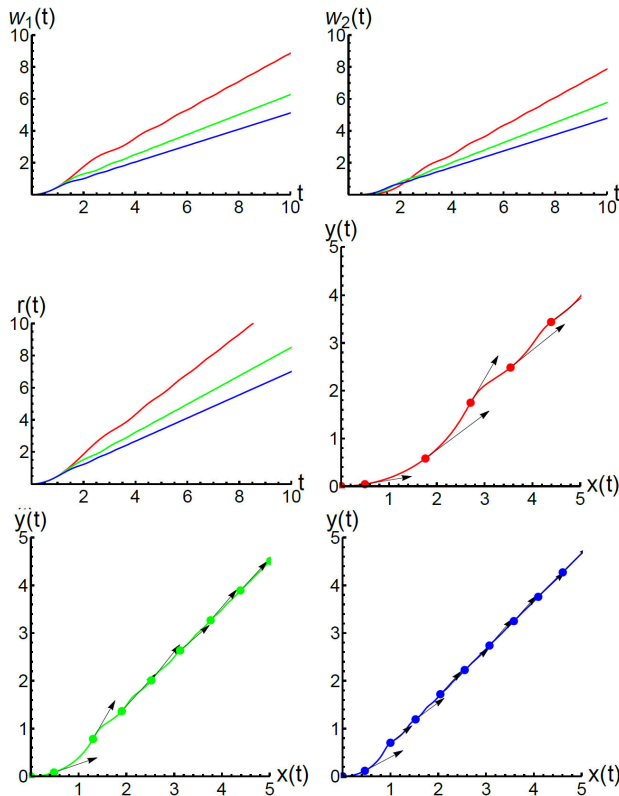


FIGURE 3. Cartesian displacements $w_1 \equiv x(t)$ (top left) and $w_2 \equiv y(t)$ for a rigid particle constrained to a plane under the action of a constant force acting as described in the text for $K = 1, 2, 3$. The position on the surface is $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$, concerning to the origin at time t (middle left). The fluctuations in the direction of the speed (black arrows) in the course of motion for the same values of K (middle right and bottom). Both force and mass are taken as unity.

for $t \gg 1$ and where the notation

$$\text{sinc}^* \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) = -\frac{\cos(\frac{\pi}{2} t^2)}{\frac{\pi}{2} t^2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} t^2 - \pi/2)}{\frac{\pi}{2} t^2}$$

is introduced to emphasize the well-known sinc type ripples in the plateau region of the Fresnel integrals considered as switching functions. The linear rising in the amplitude of the ripples in the large asymptotic Fresnel integrals (5) is by far compensated by the natural damping of the sinc oscillations. In the case of the cartesian displacements (4), we notice that the last oscillatory terms are bounded by their amplitude, $1/K$, and so their effect in the plots cannot be perceived. In other words, the displacement plots are dominated by the even functions tC and tS , which asymptotically in the first quadrant are given by

$$\begin{aligned} tC(t) &\sim \frac{1}{2}t \left(1 + t \text{sinc} \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) \right), \\ tS(t) &\sim \frac{1}{2}t \left(1 + t \text{sinc}^* \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

to which the diminishing effect of the factor $\sqrt{\pi/K}$ should be added. Using (6) in (4) for $F/M = 1$, one can see that the

graphs of the displacements are essentially the straight lines $\sqrt{\pi/K} t/2$ with the superposed $1 + t \text{sinc}$ and $1 + t \text{sinc}^*$ modulations quickly damping down.

3. Some jerk properties

We now point out some jerked properties of this kind of motion. The cartesian displacements x and y present two coupled jerks of the type

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\tilde{K}t\dot{y}, \\ \ddot{y} &= \tilde{K}t\dot{x}, \end{aligned} \quad (7)$$

where $\tilde{K} = FK/M$, as can be inferred from the derivatives of (2), although the total acceleration is constant, $a = F/M$. This is similar to the case of circular motion of arbitrary radius R and angular velocity ω , where the cartesian jerks are given by

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega\dot{y}, \\ \ddot{y} &= \omega\dot{x}, \end{aligned} \quad (8)$$

and the centripetal acceleration is $a_c = \omega^2 R$.

It is interesting to find out the differential equation satisfied by the jerks, which *a priori* should be a third-order one [10]. Writing the system (4) in the form

$$\begin{aligned} x(t) &= t\dot{x} - \frac{1}{K}\dot{y}, \\ y(t) &= t\dot{y} + \frac{1}{K}\dot{x} - \frac{1}{K}, \end{aligned} \quad (9)$$

and using \ddot{x} from the second equation in the derivative of the first one, we are led to the nonhomogeneous third-order linear differential equation

$$\ddot{w} + K^2 t^2 \dot{w} - K^2 t w = Kt. \quad (10)$$

This equation has the following linear independent solutions,

$$w_1(t) = x(t), \quad w_2(t) = y(t), \quad w_3(t) = \sqrt{\frac{\pi}{K}} t - \frac{1}{K}. \quad (11)$$

The first two of them are jerked with intermingled jerks given in (7) and are just the cartesian displacements given in (4) and plotted in Fig. 3. The third linear independent solution is a non jerked, degenerate solution since it is also a solution of the simpler first-order linear equation

$$K^2 t^2 \dot{w} - K^2 t w = Kt. \quad (12)$$

This solution is discarded because of the initial conditions of the motion.

The importance of the third order differential equation resides in its usage as a (decoupled) definition of the jerks which can be calculated from $\ddot{w}_1 = K^2 t(w_1 - t\dot{w}_1) = -Kt \sin(Kt^2/2)$ and $\ddot{w}_2 = K^2 t(w_2 - t\dot{w}_2) = Kt \cos(Kt^2/2)$, respectively.

4. Conclusion

In the planar motion of a rigid body with cartesian velocity components expressed through the Fresnel integrals, the speed tends quickly to a constant value affected by small sinc ripples whose amplitudes are additionally damped by the K

parameter. Consequently, there is no surprise that also the trajectory corresponds to a planar motion of almost uniform velocity with only some small undulations. However, these undulations are important as they reveal the jerked features of the motion, that are determined by the third-order nonhomogeneous linear differential equation obtained in this paper.

-
1. E.L. Starostin, R.A. Grant, G. Dougill, G.H.M. van der Heijden, V.G.A. Goss, The Euler spiral of rat whiskers, *Sci. Adv.* **6** (2020) eaax5145, <https://doi.org/10.1126/sciadv.aax5145>
 2. L. Bartholdi, A.G. Henriques, Orange peels and Fresnel integrals, *Math. Intelligencer* **34** (2012) 1-3. <https://doi.org/10.1007/s00283-012-9304-1>
 3. A.V. Ferris-Prabhu, On the appearance of Fresnel's integrals in dynamics, *Am. J. Phys.* **38** (1970) 1356-1357. <https://doi.org/10.1119/1.1976105>
 4. E. Hecht, *Optics*, Fifth Edition, (Pearson Education Limited, London, 2017) 457-541
 5. G.R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Second Edition, (Dover Publications Inc., New York, 1975) 106-147.
 6. B. Rossi, *Ottica*, (Masson Italia Editori, Milan, 1977) 178-260.
 7. J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Second Edition, (McGraw-Hill Companies, 1996) 63-90.
 8. K. Iizuka, *Engineering Optics*, Third Edition, (Springer, New York, 2008) 53-100. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-75724-7>
 9. H.C. Rosu, S.C. Mancas, E. Flores-Garduño, Riccati parametric deformations of the Cornu spiral, *Z. Naturforsch. A* **73** (2018) 479-484. <https://doi.org/10.1515/zna-2018-0111>
 10. G.D. Birkhoff, On the solutions of ordinary linear homogeneous differential equations of the third order, *Ann. Math.* **12** (1911) 103-127. <https://doi.org/10.2307/2007241>