



**INSTITUTO POTOSINO DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA, A.C.**

POSGRADO EN CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

**Diseño escalable de un protocolo de control distribuido basado
en retardos para una clase de sistemas multiagente**

Tesis que presenta

Luis Andrés Martínez Escobar

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

En la opción de

Control y Sistemas Dinámicos

Directores de la Tesis:

Dr. Adrián René Ramírez López

Dr. Marco Antonio Gómez Álvarez

San Luis Potosí, S.L.P., Diciembre de 2023



Constancia de aprobación de la tesis

La tesis **Diseño escalable de un protocolo de control distribuido basado en retardos para una clase de sistemas multiagente** presentada para obtener el Grado de Maestro en Ciencias Aplicadas en la opción Control y Sistemas Dinámicos fue elaborada por **Luis Andrés Martínez Escobar** y aprobada el **dd de mm de aaaa** por los suscritos, designados por el Colegio de Profesores de la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C.

Dr. Adrián René Ramírez López
Director de la tesis

Dr. Marco Antonio Gómez Álvarez
Director de la tesis

Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar
(Asesor de la tesis)

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez
(Asesor de la tesis)



Créditos Institucionales

Esta tesis fue elaborada en la División de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., bajo la dirección de los Doctores Adrián René Ramírez López y Marco Antonio Gómez Álvarez.

Durante la realización del trabajo el autor recibió una beca académica del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología 1152041 y del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A. C.

(Página en Blanco que se va a utilizar para colocar la copia del acta de examen.)

A mis queridos padres y hermanos, por su amor, apoyo incondicional y constante inspiración. Gracias por ser mi fuerza y motivación a lo largo de este viaje académico.

Agradecimientos

Quiero expresar mi profunda gratitud a mi familia, cuyo amor, apoyo y sacrificio hicieron posible este logro. También, mis más sinceros agradecimientos al Dr. Adrián René Ramírez López y al Dr. Marco Antonio Gómez Álvarez, mis asesores de tesis, por su orientación, paciencia y dedicación. Sus valiosos consejos y conocimientos han sido fundamentales para el desarrollo y éxito de esta investigación. A mis profesores de maestría en el IPICYT, por su valiosa orientación y enseñanzas que han moldeado mi trayectoria académica. Además, al jurado de tesis conformado por el Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez y el Dr. Daniel Alejandro Melchor Aguilar, quienes generosamente dedicaron su tiempo y experiencia para evaluar y enriquecer este trabajo. Mi gratitud también se extiende al Dr. Tonámetl Sánchez Ramírez por su coordinación académica y valiosos aportes. Finalmente, mi sincero agradecimiento al IPICYT y al CONAHCYT por brindarme la oportunidad y apoyo financiero a través de la beca, que ha sido fundamental para la realización de mis estudios en el IPICYT.

Resumen

En el presente trabajo de tesis, se presentan fórmulas analíticas para la sintonización de un protocolo distribuido Proporcional-Retardado (PR) operando en una clase de sistema multiagente (SMA) en donde cada agente tiene dinámica de doble integrador vectorial. Los resultados son obtenidos a través de un estudio de la geometría de las zonas de estabilidad en el espacio de los parámetros asociados al protocolo PR. La metodología desarrollada en este trabajo se soporta en: *(i)* técnicas de descomposición modal para obtener una factorización de la ecuación característica asociada al SMA en lazo cerrado con el protocolo PR; *(ii)* el método de D-particiones para caracterizar el dominio de estabilidad (de la dinámica colectiva) en el espacio de parámetros; y *(iii)* resultados de la teoría de direcciones convexas para cuasipolinomios para hacer posible la obtención de formulas de sintonización analíticas con características escalables.

Abstract

In this thesis, we present analytical tuning formulas for the parameters of a Proportional-Retarded (PR) distributed protocol operating in a class of (vectorial) double-integrator multi-agent system (MAS). The results are obtained by exploring the geometry of the stability regions in the space of parameters associated with the PR protocol. The methodology developed in this work is supported on: *(i)* modal decomposition techniques to factorize the characteristic equation associated with the MAS in closed-loop with the PR protocol, *(ii)* the D-subdivision method to characterize the stability domain of the collective dynamics in the space of parameters and, *(iii)* the theory of convex directions for quasipolynomials to enable deriving analytical tuning formulas with scalable characteristics.

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Estado del arte	2
1.2. Formulación del problema	4
1.3. Objetivos	5
1.4. Estructura de la tesis	6
2. Preliminares	8
2.1. Introducción a la teoría de gráficas	8
2.1.1. Matrices asociadas con gráficas	10
2.1.2. Definiciones y lemas auxiliares	10
2.2. Problemas en coordinación distribuida de SMA	11
2.2.1. Consenso y sincronización	11
2.2.2. Control de formación	12
3. Análisis del protocolo PR	16
3.1. Descomposición modal del sistema	16
3.2. Descomposición del espacio de parámetros (h, k_2)	20
3.2.1. Fronteras de cruce de estabilidad	20
3.3. Suavidad de las fronteras de cruce	21
3.4. Caso de estudio	23
3.4.1. Resultados numéricos	24
3.4.2. Observaciones finales	25
4. Diseño escalable del protocolo PR	28
4.1. Escalabilidad en gráficas no-dirigidas	28
4.2. Sintonización	31
4.3. Caso de estudio	35
4.3.1. Resultados numéricos	35
4.3.2. Observaciones finales	35

5. Conclusiones y trabajo futuro	38
5.1. Conclusiones	38
5.2. Trabajo futuro	39
Bibliografía	47

Notación

Símbolo	Descripción
\otimes	Producto Kronecker
I_N	Matriz identidad de dimensión $N \times N$
\cup	Unión de conjuntos o elementos
\cap	Intersección de conjuntos o elementos
A^T	Matriz transpuesta
h	Retardo en el tiempo, $h > 0$
i	Unidad imaginaria
s	Operador de Laplace
ω	Frecuencia de cruce
\mathcal{G}	Gráfica, $\mathcal{G} = (\mathbf{v}, \varepsilon)$
\mathbf{v}	Conjunto de nodos o vértices de una gráfica, $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$
ε	Conjunto de aristas o enlaces de una gráfica, $\varepsilon \subseteq \mathbf{v} \times \mathbf{v}$
N_i	Conjunto de vecinos del nodo v_i
\mathcal{L}	Matriz Laplaciana de la gráfica \mathcal{G}
$\partial\mathcal{D}$	Frontera del conjunto \mathcal{D}
$\text{grado}(q_i)$	Grado del polinomio q_i
$\text{card}(N_i)$	Cardinalidad del conjunto N_i
$\text{Re}\{\circ\}$	Parte real de \circ
$\text{Im}\{\circ\}$	Parte imaginaria de \circ

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis resuelve el problema de sintonización de los parámetros de un algoritmo de control distribuido Proporcional-Retardado (PR) en una clase de sistema compuesto por múltiples agentes con dinámica de doble integrador vectorial, al cual nos referimos como sistema multiagente (SMA). El algoritmo bajo estudio emplea tanto ganancias de control tradicionales como retardos artificiales para mejorar la respuesta dinámica del SMA. La principal contribución de este trabajo es la obtención de formulas de sintonización cerradas¹ para los parámetros del controlador, garantizando un decaimiento exponencial deseado para el sistema en lazo cerrado. De acuerdo a la revisión bibliográfica realizada, no existen resultados similares reportados en la literatura y la solución aquí propuesta proporciona nueva información sobre los mecanismos de sintonización para esta clase de controladores basados en retardos operando en dinámicas colectivas a gran escala. Con este fin, hacemos uso extensivo de herramientas en el dominio de la frecuencia. En particular, herramientas como la descomposición modal para factorizar la ecuación característica asociada al sistema; el método de las D-particiones para obtener mapas de estabilidad y analizar el decaimiento exponencial de las soluciones del sistema; la teoría sobre direcciones convexas para simplificar el análisis de estabilidad; y el teorema de la función implícita para finalmente obtener la sintonización de los parámetros del controlador. Los resultados obtenidos también se validan vía simulaciones numéricas en MATLAB/Simulink.

1.1. Estado del arte

En años recientes, el problema de control distribuido en SMA ha atraído un gran interés en ingeniería, biología y computación [1]. A pesar de que resultados para sistemas lineales con y sin retardos [12] se han obtenido desde varias perspectivas, extenderlos no es trivial cuando el número de agentes en el sistema es “grande”. Un enfoque clásico para resolver el

¹Llamamos “fórmulas cerradas” a aquellas ecuaciones que se pueden expresar analíticamente en términos de un número finito de funciones conocidas y operaciones aritméticas elementales [64].

problema de control distribuido es realizar una descomposición modal del SMA, con la cual, el problema de control distribuido se reduce al análisis de estabilidad de un número finito de subsistemas con complejidad reducida [58, 59]. Sin embargo, si el tamaño del SMA es muy grande, la idea de la técnica de descomposición modal pierde validez, ya que la complejidad del análisis incrementa con el aumento del número de subsistemas [60, 61]. Este problema se torna particularmente relevante en el análisis y diseño de controladores que proporcionen ciertas características de desempeño del sistema, como la rapidez de respuesta. El análisis de estabilidad de los subsistemas cuando este número es elevado es un problema interesante, ya que asegurar estabilidad del sistema implica asegurar la estabilidad de todos los subsistemas. Esto es lo que se trata de resolver en el presente trabajo.

Es bien sabido que mejorar la respuesta transitoria de un sistema lineal es posible mediante un controlador por retroalimentación [54]. En control clásico, por ejemplo, esto es posible usando acciones de control derivativas, las cuales pueden inducir una amplificación no deseada en las señales de control debido a la medición de señales contaminadas con ruido de alta frecuencia [13]. Es por eso que, en la práctica, es recomendable realizar el control sin éstas [14–20]. Sin embargo, diseñar un control libre de acciones derivativas puede ser una tarea complicada, ya que no se tienen suficientes ganancias (grados de libertad) para obtener las características deseadas del sistema. En el contexto de SMA, uno de los principales objetivos es lograr que los estados de los agentes se acerquen entre ellos lo más rápido posible, y de esta manera, lograr un acuerdo entre los mismos a través de protocolos de control distribuido [21–29]. En la literatura, existen trabajos relacionados con mejorar la velocidad de respuesta—sin emplear acciones de control derivativas—basados en el cambio de flujo de información entre los agentes [21–23] y otros relacionados con la optimización de la infraestructura de la comunicación [24–26].

Una alternativa a las acciones derivativas puras es la introducción de retardos intencionales a través de controladores retardados. Sin embargo, lograr una implementación práctica y una técnica efectiva de sintonización para los parámetros de este tipo de controladores es complicado debido a que el espectro del sistema tiene un número infinito de elementos. Esta dificultad se acrecenta en el caso de SMA. Para resolver esta problemática, resultados recientes se basan en métodos de optimización convexa para garantizar la estabilidad y la robustez frente a mediciones ruidosas [37], [38]. No obstante, enfoques de diseño analítico solo se han reportado en la literatura para sistemas *SISO* (*single-input single-output*, por sus siglas en inglés) con un solo retardo [39, 40], pero no en configuraciones con múltiples agentes y múltiples retardos. Según nuestros conocimientos, este problema se mantiene abierto y este trabajo de tesis proporciona una solución escalable por primera vez.

Por otro lado, protocolos con términos retardados han sido propuestos en redes dinámi-

cas libres de ruido, principalmente para regular el comportamiento de los agentes cuando buscan un estado deseado [41–49]. Con ese fin, se utilizan medidas de posición en los términos retardados para crear controladores tipo derivativo para cada uno de los agentes y se investigan las características de estabilidad de la red dinámica que surge. Notese que el único punto en común en los estudios previamente citados es que consideran un solo retardo en los protocolos. Entonces, el alcance del acuerdo de los SMA se debe garantizar al elegir adecuadamente en el control distribuido las ganancias y el retardo dentro de ciertos intervalos. De acuerdo con estos estudios y los obtenidos con la configuración SISO, el acuerdo se puede alcanzar más rápido en presencia de términos retardados [41–44] con capacidades de atenuación de ruido [50], [51] e incluso podemos obtener un rendimiento deseable con un esfuerzo de control reducido [45], [46] sin necesidad de mediciones de velocidad [47–49].

Una cuestión que permanece sin ser plenamente abordada en la literatura, y que conforma el principal interés de esta tesis, es la obtención de reglas de sintonización para control distribuido basado en retardos de sistemas con grandes cantidades de agentes. Algunos resultados en esta línea de investigación se han reportado recientemente en [55–57]. Sin embargo, los protocolos distribuidos propuestos en dichos trabajos requieren de múltiples retardos no conmensurables y ganancias de control heterogéneas. Por lo tanto, su implementación resulta impráctica. Los resultados presentados en este trabajo se centran en una clase de SMA a gran escala, para la cual se desarrolla un enfoque *escalable* que permite el diseño e implementación de protocolos de control distribuido con retardos.

1.2. Formulación del problema

En este trabajo de tesis se considera una red de N agentes moviéndose en el plano (x, y) [3]. Cada vehículo es representado por dos dobles integradores de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + Bu_i(t) \\ z_i(t) &= Cx_i(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $i = 1, \dots, N$ es el número de agente; el vector de estados $x_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, y_{i1}, y_{i2})$ representa la posición y velocidad en x del i -ésimo agente, (x_{i1}, x_{i2}) , así como la posición y velocidad en y del i -ésimo agente, (y_{i1}, y_{i2}) ; y el control del i -ésimo agente es llevado a cabo por $u_i(t)$.

Observación. *Note que cada agente se puede considerar como un punto que se mueve libremente en el plano (x, y) . El movimiento en la coordenada horizontal (x) es gobernado por un doble integrador y de manera similar el movimiento en la coordenada vertical (y) es gobernado por otro doble integrador.*

Los coeficientes matriciales están definidos como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (1.2)$$

Con base en la definición de C en (1.2) tenemos que $z_i = (x_{i1}, y_{i1})^T$. El sistema (1.1) está sujeto al protocolo de control distribuido PR:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -k_1 z_i(t) + k_2 (z_i(t-h) + \sigma_i(t-h) - d_i) \\ \sigma_i(t-h) &= \sum_{j=1}^N a_{ij} (z_i(t-h) - z_j(t-h)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde $d_i \in \mathbb{R}^2$ representa información relativa del desplazamiento entre los agentes, el retardo h es introducido intencionalmente como un parámetro de control adicional², y $k_1 \neq 0$ y $k_2 \neq 0$ son las ganancias del controlador. Por otro lado, a_{ij} representa a los elementos de la matriz de adyacencia correspondientes a la gráfica asociada a (1.1) que además, se considera no-dirigida³. Si $a_{ij} \neq 0$ decimos que existe intercambio de información entre los agentes i y j . Además, por ser una gráfica no-dirigida, el flujo de información entre los agentes es bidireccional.

De acuerdo a lo mencionado previamente, existen varias investigaciones referentes al comportamiento de los estados de los agentes que conforman la red y sobre cómo la presencia de términos retardados pueden generar un acuerdo más rápido entre los mismos. Sin embargo, no existen fórmulas analíticas para los parámetros del controlador distribuido PR (1.3).

1.3. Objetivos

El principal objetivo de este trabajo de tesis es encontrar reglas de sintonización para los parámetros (h, k_1, k_2) del controlador (1.3) operando en el sistema (1.1) tal que la velocidad de respuesta para todos los agentes sea óptima.

Objetivos particulares

- Realizar una descomposición modal que permita expresar la ecuación característica asociada al SMA como un número finito de factores con complejidad reducida.

²El intercambio de información entre los agentes sucede de manera instantánea. Sin embargo, en este trabajo de tesis utilizamos de intencionalmente la información transmitida h unidades de tiempo atrás.

³El lector es referido al Capítulo 2 para conceptos básicos sobre teoría de gráficas.

- Construir mapas de estabilidad que faciliten la descripción del dominio de estabilidad del SMA con base en sus factores característicos.
- Caracterizar las propiedades de suavidad de las curvas de cruce de estabilidad que contienen al dominio de estabilidad del SMA.

1.4. Estructura de la tesis

El resto de la tesis se organiza de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se presentan varios conceptos preliminares relacionados con la teoría de gráficas, el problema de consenso y formación en SMA, así como lemas y métodos necesarios para la comprensión de este trabajo de tesis. En el Capítulo 3 se estudia el protocolo de control distribuido PR, se realiza la descomposición modal del sistema, la descomposición del espacio de parámetros del protocolo propuesto y finalmente se realiza un ejemplo con diez agentes en el cual se hacen observaciones relacionadas con el dominio de estabilidad del sistema. En el Capítulo 4 se obtiene la sintonización del protocolo de control distribuido propuesto y se presentan resultados numéricos obtenidos a partir de dicha sintonización. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y el trabajo futuro.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se introducen distintos conceptos y definiciones necesarias para una mejor comprensión de la presente tesis. En la Sección 2.1 se abordan conceptos básicos de la teoría de gráficas. En la Sección 2.1.1 se explica el papel de las matrices para representar las gráficas y en la Sección 2.1.2 se enuncian un par de Lemas fundamentales. Finalmente, en la Sección 2.2 se presentan los problemas de investigación más comunes en el área de coordinación distribuida de SMA.

2.1. Introducción a la teoría de gráficas

Una *gráfica* se define como un par de conjuntos (\mathbf{v}, ϵ) , donde $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_N\}$ representa un conjunto no vacío y finito de elementos conocidos como vértices o nodos, y $\epsilon \subseteq \mathbf{v} \times \mathbf{v}$ es un conjunto de parejas de nodos distintos denominados aristas o enlaces. Esta pareja de conjuntos se denota de la siguiente manera:

$$\mathcal{G} = (\mathbf{v}, \epsilon).$$

El conjunto de todos los *vecinos* del nodo v_i está dado por

$$N_i = \{v_j \in \mathbf{v} : (v_i, v_j) \in \epsilon\}.$$

Una de las características que hacen que la teoría de gráficas sea tan atractiva es la facilidad con la que se puede representar cualquier gráfica mediante un dibujo. Esto es siempre posible debido a que los conjuntos \mathbf{v} y ϵ son finitos. Para realizar una representación visual de una gráfica, se asigna a cada uno de los nodos de \mathbf{v} un punto en el plano, y cada uno de los enlaces de ϵ se representa como una línea que conecta dos nodos distintos de \mathbf{v} . A modo de ejemplo, consideremos la gráfica de persecución cíclica que se muestra en la siguiente figura.

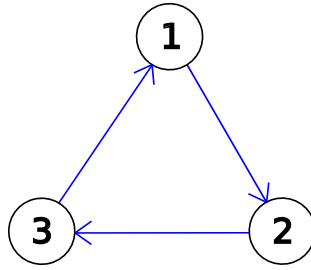


Figura 2.1: Gráfica de persecución cíclica.

En la Figura 2.1, podemos notar que en la gráfica existen tres nodos $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ que comparten información mediante enlaces que están representados por flechas azules $\varepsilon = \{(v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_3, v_2)\}$. Además, el conjunto de vecinos correspondiente a cada uno de los nodos será $N_1 = \{v_3\}$, $N_2 = \{v_1\}$ y $N_3 = \{v_2\}$. En general, para un enlace de la forma $e_{ij} = (v_i, v_j)$, $i \neq j$, decimos que e_{ij} *incide* en v_i y en v_j . Además, v_i y v_j son *adyacentes*.

Por otro lado, una gráfica \mathcal{G} puede ser dirigida o no-dirigida dependiendo de la forma en que los nodos en \mathcal{G} intercambian información entre sí.

Gráfica dirigida: Se dice que una gráfica es dirigida cuando los enlaces son dirigidos, es decir, cuando el flujo de información entre dos nodos va en un solo sentido. Un ejemplo de este tipo de gráfica se puede ver en la Figura 2.1.

Gráfica no-dirigida: Se dice que una gráfica es no-dirigida cuando los enlaces no son dirigidos, es decir, cuando el flujo de información entre dos nodos es bidireccional. Un ejemplo de este tipo de gráfica se puede ver en la siguiente Figura.

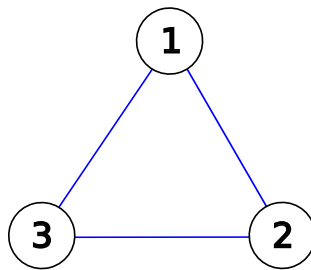


Figura 2.2: Gráfica no-dirigida.

En este caso, los enlaces están representados con líneas de color azul que indican que el flujo de información es bidireccional $\varepsilon = \{(v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_2, v_1), (v_1, v_2), (v_3, v_2), (v_2, v_3)\}$. Además, el conjunto de vecinos correspondiente a cada uno de los nodos será $N_1 = \{v_2, v_3\}$, $N_2 = \{v_1, v_3\}$ y $N_3 = \{v_1, v_2\}$.

2.1.1. Matrices asociadas con gráficas

Además de las representaciones pictográficas con puntos y líneas, las gráficas también pueden ser representadas utilizando matrices.

Matriz de adyacencia: La matriz de adyacencia de una gráfica dirigida \mathcal{G} de N nodos es una matriz \mathcal{A} en la cual sus entradas a_{ij} son iguales al número de flechas apuntando del nodo j al nodo i . Si G es una gráfica no-dirigida, entonces $a_{ij} = a_{ji}$ y entonces \mathcal{A} es una matriz simétrica.

Matriz de grado: La matriz de grado de una gráfica dirigida \mathcal{G} de N nodos es una matriz diagonal \mathcal{B} en la cual sus entradas d_{ii} son iguales al número de flechas apuntando al nodo i . Si \mathcal{G} es una gráfica no dirigida, entonces d_{ii} es igual a la cantidad de vecinos del nodo i .

Matriz Laplaciana: Dadas las definiciones de matriz de adyacencia y matriz de grado, podemos notar que en la matriz de adyacencia los elementos de la diagonal son todos igual a cero, y los elementos que no forman parte de la diagonal pueden o no ser distintos a cero, mientras que en el caso de la matriz de grado es lo opuesto, es decir, los elementos de la diagonal pueden o no ser distintos a cero, y los elementos que no forman parte de la diagonal son todos iguales a cero. La información que proporcionan ambas matrices es condensada en una matriz conocida como *matriz Laplaciana*, \mathcal{L} , la cual podemos expresar como

$$\mathcal{L} = \mathcal{B} - \mathcal{A}.$$

Observe que de la matriz Laplaciana podemos conocer el flujo de información mediante los elementos l_{ij} con $i \neq j$ y el número de aristas o flechas dirigidas al nodo i mediante los elementos l_{ii} .

2.1.2. Definiciones y lemas auxiliares

A continuación enunciamos algunas definiciones y lemas de utilidad en el desarrollo de este trabajo de tesis.

Camino: Un camino en una gráfica no-dirigida \mathcal{G} es una sucesión alternada de nodos y enlaces, denotado como

$$\langle v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \dots, v_{n-1}, (v_{n-1}, v_n), v_n \rangle.$$

Observe que: (i) esta sucesión empieza y termina con un nodo y (ii) cada enlace es incidente con su nodo antecesor y sucesor. Entonces, el camino que une a v_1 y v_n , se puede denotar

también como

$$\langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \rangle.$$

Trayectoria: Se conoce como trayectoria a un camino en el cual todos sus nodos (y por lo tanto todos sus enlaces) son distintos.

Conexidad: Decimos que una gráfica no-dirigida \mathcal{G} es *conexa* si para todo par de nodos en \mathcal{G} , existe una trayectoria que los une. La gráfica es *disconexa* si no es conexa. Decimos que una gráfica conexa tiene un componente. Entonces, una gráfica disconexa tiene más de un componente.

Lema 2.1.1. *Sea \mathcal{L} la matriz Laplaciana asociada a la gráfica no-dirigida \mathcal{G} . Entonces, cero es un eigenvalor de \mathcal{L} y todos sus eigenvalores distintos de cero tienen parte real positiva [8].*

Lema 2.1.2. *Sea \mathcal{L} la matriz Laplaciana asociada a la gráfica no-dirigida \mathcal{G} . Entonces cero es un eigenvalor simple si y solo si \mathcal{G} es conexa [8].*

2.2. Problemas en coordinación distribuida de SMA

Para proporcionar contexto al problema que abordamos en este trabajo de tesis, en esta sección discutimos brevemente dos problemas de investigación comunes en el área de coordinación distribuida de SMA.

2.2.1. Consenso y sincronización

Suponga que cada nodo en una gráfica \mathcal{G} es un *agente dinámico* con dinámica

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

en donde $x_i \in \mathbb{R}$ es el valor del nodo v_i . Una **gráfica dinámica** es un sistema con estado (\mathcal{G}, x) en el cual el valor de x evoluciona de acuerdo con la *dinámica de la red* $\dot{x} = u$. Aquí, $u = (u_1, \dots, u_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ y $x = (x_1, \dots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N$.

Nos referimos a

$$\mathcal{G}_x = (\mathcal{G}, x),$$

como la **red** con valor x y **topología** \mathcal{G} . El valor del nodo puede representar cantidades físicas como altitud, posición, temperatura, voltaje, etc. Decimos que los nodos v_i y v_j **coinciden** en una red si $x_i = x_j$. Decimos que los nodos de la red han llegado a un **acuerdo** α si

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N = \alpha.$$

Cuando los valores de todos los nodos de la red coinciden, el valor común α de todos los nodos lo llamamos **valor de acuerdo grupal**.

El objetivo principal en el diseño de protocolos de consenso para SMA es que éstos logren el consenso de forma autónoma sin conocer *a priori* el valor de acuerdo grupal. Con este fin, los agentes deben cooperar entre sí para lograr que sus estados convergan a α . Dicha cooperación es posible si cada agente se comunica con sus vecinos para recolectar información acerca de los estados de sus vecinos, y después usa esta información para compararla con su propio estado y tomar decisiones con el objetivo de lograr el consenso.

De manera formal, un SMA (2.2.1) logra consenso si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$$

para cualquier i, j y cualquier condición inicial x_0 .

Sea \mathcal{X}_i el **conjunto de valores** de los vecinos del nodo i dado por

$$\mathcal{X}_i = \{x_j : v_j \text{ es vecino de } v_i\}.$$

Entonces, el controlador por retroalimentación de estado u_i dado por

$$u_i = g(\mathcal{X}_i, x_i), \quad (2.2)$$

se dice ser un protocolo para la red \mathcal{G}_x .

Protocolo distribuido: El protocolo (2.2) se dice ser distribuido si $\text{card}(N_i) < N - 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$. Es decir, ningún nodo en \mathcal{G} esta conectado a todos los nodos.

Entonces, el problema de consenso en una red de agentes es una manera distribuida de calcular el valor de decisión grupal por medio de un protocolo de red que depende solamente del estados del agente i y de los estados de sus vecinos.

Observación. *En este contexto, notamos que los términos consenso y sincronización se pueden usar de manera intercambiable.*

2.2.2. Control de formación

En el área de SMA, entendemos como **formación** a cualquier patrón geométrico o configuración que un grupo de agentes logre mantener sobre algún intervalo de tiempo. Dicha formación se puede especificar por un conjunto de distancias *relativas* deseadas entre los agentes; es decir,

$$D = \{d_{ij} \in \mathbb{R} : d_{ij} > 0, i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j\},$$

con $d_{ij} = d_{ji}$. Al conjunto D lo conocemos como **especificación de formación** y suponemos que D es realizable.

Una forma de “codificar” la especificación de formación es con una **gráfica ponderada**

$$\mathcal{G}_f = (\mathbf{v}, \mathcal{E}_f, w),$$

en donde el subíndice f denota formación, \mathbf{v} es el conjunto de nodos, \mathcal{E}_f es el conjunto de enlaces que especifican que distancias *entre-agentes* se definen por D y $w : \mathcal{E}_f \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ es el peso del enlace, el cuál codifica las distancias deseadas como

$$w(e_{ij}) = d_{ij},$$

en donde $e_{ij} = (v_i, v_j)$.

Cuando a una formación se le permite *trasladarse* es necesario incorporar esto en la especificación de formación. Entonces, en lugar de usar D , usamos

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^p, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

en donde p es la dimensión del estado del agente v_i , y

$$\|\xi_i - \xi_j\| = d_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j.$$

Decimos que cualquier colección de puntos x_1, \dots, x_N satisface la especificación Ξ si

$$x_i = \xi_i + \tau \quad \forall i,$$

para una traslación arbitraria $\tau \in \mathbb{R}^p$. A este tipo de formación la llamamos **formación de traslación invariante**.

Sea $x_i \in \mathbb{R}^p$ la posición del agente i . Entonces, para resolver el problema de formación de traslación invariante, buscamos que para algún $\tau \in \mathbb{R}^p$, desconocido para todos los agentes, un protocolo distribuido de formación garantice que para todo i se cumpla que $x_i = \xi_i + \tau$. Para este fin, podemos usar una **gráfica de interacción dinámica**

$$\mathcal{G}_{f,x} = (\mathcal{G}_f, x),$$

y buscamos diseñar un protocolo de formación que conduzca a los agentes tal que:

$$\|x_j(t) - x_i(t)\| \text{ converge asintóticamente a } d_{ij} \text{ con } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}_f.$$

Con este objetivo, definimos τ_i como el desplazamiento de x_i desde la ubicación objetivo $\xi_i \in \Xi$. Es decir,

$$\tau_i(t) = x_i(t) - \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Por lo tanto, alcanzar consenso en τ_i implica que

$$\tau_i(t) = x_i(t) - \xi_i = \tau,$$

es decir,

$$\xi_i = x_i(t) - \tau,$$

para un vector de desplazamiento constante τ . Por lo tanto, tenemos que

$$\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_N = \tau.$$

Debido al hecho que $\xi_i \in \Xi$, podemos concluir de lo anterior que

$$\|\xi_i - \xi_j\| = \|x_i(t) - \tau - x_j(t) + \tau\| = \|x_i(t) - x_j(t)\| = d_{ij}.$$

Si este es el caso, decimos finalmente que el problema de control de formación de traslación invariante se ha resuelto.

Observación. *En este contexto, note que resolver el problema de control de formación es equivalente a resolver un problema de sincronización bajo un cambio de coordenadas adecuado, como el que se especifica en (2.3).*

Capítulo 3

Análisis del protocolo PR

Este capítulo está dedicado al análisis de un SMA con dinámica de doble integrador en lazo cerrado con un protocolo de control distribuido con retardos intencionales conocido como protocolo de control distribuido Proporcional Retardado (PR), o simplemente protocolo PR. Se presenta una descomposición modal de la dinámica colectiva y se emplean herramientas frecuenciales para descomponer el espacio de parámetros asociados con el protocolo PR. En la Sección 3.1 se realiza la descomposición modal del sistema y se obtiene una forma factorizada de la ecuación característica. En la Sección 3.2 se realiza la descomposición del espacio de parámetros del protocolo PR propuesto para obtener ecuaciones de las fronteras de estabilidad del sistema. Finalmente en la Sección 3.3 se presenta un ejemplo para un caso particular de tal forma que se puedan apreciar los resultados obtenidos y realizar observaciones a partir de estos.

3.1. Descomposición modal del sistema

Como se mencionó en el primer capítulo, en este trabajo de tesis se considera un SMA compuesto por N agentes cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + Bu_i(t) \\ z_i(t) &= Cx_i(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

sujeto al protocolo PR

$$\begin{aligned}u_i(t) &= -k_1 z_i(t) + k_2(z_i(t-h) + \sigma_i(t-h) - d_i) \\ \sigma_i(t-h) &= \sum_{j \in N_i} a_{ij}(z_i(t-h) - z_j(t-h))\end{aligned}\tag{3.2}$$

con $i = 1, \dots, N$ siendo el número de agente; las matrices A , B y C están dadas por (1.2); con base en la definición de C en (1.2) tenemos que $z_i = (x_{i1}, y_{i1})^T$; el vector de estados $x_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, y_{i1}, y_{i2})$ representa la posición y velocidad en x del i -ésimo agente, (x_{i1}, x_{i2}) ,

así como la posición y velocidad en y del i -ésimo agente, (y_{i1}, y_{i2}) ; y el control es llevado a cabo por $u_i(t)$. Además, $d_i \in \mathbb{R}^2$ representa información relativa del desplazamiento entre los agentes, el retardo h es introducido intencionalmente como un parámetro de control adicional, y $k_1 \neq 0$ y $k_2 \neq 0$ son las ganancias del controlador. Por otro lado, a_{ij} representa a los elementos de la matriz de adyacencia correspondientes a la gráfica asociada a (3.1).

Suposición 3.1.1. *La gráfica es conexa y es no-dirigida¹.*

Observación. *Debido a que no es posible estabilizar el sistema para una retroalimentación de salida estática, el sistema (3.4) no es estable para $h = 0$.*

Si se reescribe la parte distribuida del protocolo propuesto usando la matriz Laplaciana y se compacta la información de todos los agentes de forma matricial, (3.2) puede ser reescrita de una forma compacta y conveniente como se muestra a continuación:

$$U(t) = -(I_N \otimes K_1 C)X(t) + (I_N \otimes K_2)D + ((I_N + \mathcal{L}) \otimes K_2 C)X(t - h) \quad (3.3)$$

donde $K_1 = k_1 I_2$, $K_2 = k_2 I_2$, $I_N \otimes K_1 C \in \mathbb{R}^{2N \times 4N}$, $I_N \otimes K_2 \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$, $(I_N + \mathcal{L}) \otimes K_2 C \in \mathbb{R}^{2N \times 4N}$ y

$$X_f = \begin{bmatrix} x_1^f & 0 & y_1^f & 0 & \cdots & x_N^f & 0 & y_N^f & 0 \end{bmatrix}^T$$

donde (x_i^f, y_i^f) representa la posición en estado estable del i -ésimo agente. Cabe mencionar que $D \in \mathbb{R}^{2N}$ es un parámetro libre que se construirá a conveniencia más adelante. Además, $X(t) \in \mathbb{R}^{4N}$ está formado por la concatenación de los vectores de estado de los N agentes descritos en el Capítulo 1, es decir, $X(t) = \begin{bmatrix} x_1^T(t) & \cdots & x_N^T(t) \end{bmatrix}^T$. Del mismo modo, $U(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ está formado por la concatenación de los vectores de control, es decir, $U(t) = \begin{bmatrix} u_1^T(t) & \cdots & u_N^T(t) \end{bmatrix}^T$.

Sustituyendo (3.3) en (3.1) se obtiene

$$\dot{X}(t) = \bar{A}_0 X(t) + \bar{A}_1 X(t - h) + (I_N \otimes BK_2)D \quad (3.4)$$

donde $\bar{A}_0 = I_N \otimes (A - BK_1 C)$, y $\bar{A}_1 = (I_N + \mathcal{L}) \otimes BK_2 C$.

Introduciendo la transformación $\zeta(t) = X(t) - X_f$ se obtiene [3]

$$\dot{\zeta}(t) = \bar{A}_0 \zeta(t) + \bar{A}_1 \zeta(t - h) + (\bar{A}_0 + \bar{A}_1)X_f + (I_N \otimes BK_2)D. \quad (3.5)$$

El objetivo ahora es lograr que $(\bar{A}_0 + \bar{A}_1)X_f + (I_N \otimes BK_2)D = 0$ al elegir D . Suponga que K_1 y K_2 son dadas y que el vector de compensación D se escoge de tal forma que satisfaga

$$(I_N \otimes K_2)D = ((I_N \otimes K_1 C) - ((I_N + \mathcal{L}) \otimes K_2 C))X_f. \quad (3.6)$$

¹Cabe mencionar que consideramos gráficas no-dirigidas ya que los valores propios asociados a la matriz Laplaciana son reales. El caso de valores propios complejos está relacionado con gráficas dirigidas; sin embargo, este caso está fuera del alcance de este trabajo.

Como $K_2 = k_2 I_2$, $(I_N \otimes K_2) = k_2 I_{2N}$ y $k_2 \neq 0$, entonces (3.6) tiene solución única

$$D = \frac{1}{k_2} ((I_N \otimes K_1 C) - ((I_N + \mathcal{L}) \otimes K_2 C)) X_f. \quad (3.7)$$

Es claro ver que para la matriz A en (3.1) y cualquier X_f , se tiene que $(I_N \otimes A) X_f = 0$. Premultiplicando el término $(I_N \otimes B)$ en ambos lados de (3.6) se obtiene

$$(I_N \otimes B)(I_N \otimes K_2)D = (I_N \otimes B)((I_N \otimes K_1 C) - ((I_N + \mathcal{L}) \otimes K_2 C))X_f$$

la cual es, por propiedades del producto de Kronecker, equivalente a

$$(I_N \otimes BK_2)D = (I_N \otimes BK_1 C)X_f - (I_N \otimes B)((I_N + \mathcal{L}) \otimes K_2 C)X_f.$$

Restando el término nulo $(I_N \otimes A)X_f = 0$ resulta en

$$\begin{aligned} (I_N \otimes BK_2)D &= -(I_N \otimes A)X_f + (I_N \otimes BK_1 C)X_f - (I_N \otimes B)((I_N + \mathcal{L}) \otimes K_2 C)X_f \\ &= -(I_N \otimes (A - BK_1 C) + (I_N + \mathcal{L}) \otimes BK_2 C)X_f \\ &= -(\bar{A}_0 + \bar{A}_1)X_f. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Así, usando (3.8) en (3.5), el sistema (3.4) se puede reescribir como

$$\dot{\zeta}(t) = \bar{A}_0 \zeta(t) + \bar{A}_1 \zeta(t-h). \quad (3.9)$$

Dado que \mathcal{L} es simétrico y semidefinido positivo, $(I_N + \mathcal{L})$ es simétrico y definido positivo. Por lo tanto, por descomposición espectral, tenemos que $(I_N + \mathcal{L}) = V\Lambda V^T$ donde V es una matriz unitaria formada por los vectores propios de $(I_N + \mathcal{L})$ y $\Lambda = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N)$ está formada por los valores propios de $(I_N + \mathcal{L})$. Note que, debido a que \mathcal{L} tiene un valor propio igual a 0, $\mu_i \geq 1$ para todo $i = 1, \dots, N$. Considere la transformación de estado ortogonal $\zeta \rightarrow (V^T \otimes I_4)\zeta = \xi$. En las nuevas coordenadas (3.9) se convierte en

$$\dot{\xi}(t) = (I_N \otimes (A - BK_1 C))\xi(t) + (\Lambda \otimes BK_2 C)\xi(t-h) \quad (3.10)$$

donde los coeficientes matriciales se encuentran en forma diagonalizada por bloques. Por lo tanto, el sistema (3.10) se puede descomponer en N subsistemas de la forma

$$\dot{\xi}_j(t) = (A - BK_1 C)\xi_j(t) + \mu_j(BK_2 C)\xi_j(t-h), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.11)$$

Con base en (3.11), la función característica de (3.1) con (3.2) se puede expresar como el producto de N factores de complejidad reducida. Es decir,

$$\bar{P}(s) = \prod_{j=1}^N \bar{p}_j(s) \quad (3.12)$$

en donde s es la variable compleja y

$$\bar{p}_j(s) = (s^2 + k_1 - k_2 \mu_j e^{-sh})^2$$

donde μ_j con $j = 1, \dots, N$, denota los valores propios de la matriz $I_N + \mathcal{L}$, y \mathcal{L} representa la matriz Laplaciana de la gráfica asociada a (3.1).

Con base en la Suposición 3.1.1, se sigue del Lema 2.1.2 que el valor propio más pequeño de \mathcal{L} es igual a 0 y es simple. Este valor propio está relacionado con la dinámica del acuerdo y el resto de los factores están relacionados con la dinámica del desacuerdo [4]. Como convención, en el resto de esta tesis, adoptamos el siguiente orden

$$1 = \mu_1 < \mu_2 \leq \dots \leq \mu_N. \quad (3.13)$$

Aquí, estamos interesados en mejorar la respuesta dinámica del sistema. Con este fin, realizamos el cambio de variable $s \rightarrow s - \gamma$, $\gamma > 0$, en los cuasipolinomios característicos, y estudiamos la estabilidad de los factores desplazados

$$p_j(s) = (s^2 - 2s\gamma + \gamma^2 + k_1 - k_2 e^{\gamma h} \mu_j e^{-sh})^2. \quad (3.14)$$

Por lo tanto, el cuasipolinomio mediante el cual se estudia la estabilidad relativa a γ de (3.1) con (3.2) es

$$P(s) = \prod_{j=1}^N p_j(s) = 0. \quad (3.15)$$

Decimos que los agentes logran un acuerdo exponencialmente rápido, con una velocidad de convergencia determinada por el valor de desplazamiento γ , si y solo si todas las raíces de (3.15) tienen parte real menor o igual que $-\gamma$. En el resto de la tesis, nos referimos a γ como el decaimiento exponencial del sistema. A la luz de lo anterior, estamos interesados en encontrar un valor máximo para γ en términos de los parámetros de diseño (h, k_1, k_2) .

Observe que analizar γ -estabilidad en el SMA bajo estudio, es equivalente a estudiar γ -estabilidad en N factores. Un problema que surge con este tipo de análisis es que el número de factores aumenta conforme aumenta el número de agentes, lo que vuelve complejo el análisis para un número elevado de agentes. Nos enfrentamos a dos retos técnicos. El primero es que solo tenemos tres parámetros, h , k_1 y k_2 , para diseñar un total de N factores. Esta restricción limita nuestras opciones de diseño. El segundo es que diseñar estos parámetros para algún μ_j puede colocar las raíces dominantes del factor p_j en el lugar deseado. Sin embargo, los mismos valores de parámetros pueden no producir raíces dominantes deseadas para el resto de los factores. Así, la competencia entre las raíces dominantes de los diferentes factores merece particular atención.

Observación. *En este trabajo de tesis, se explicará que garantizar la estabilidad de 2 de estos N factores, a través de la sintonización del protocolo en (1.3), es equivalente a garantizar la estabilidad del sistema completo. Con base en este hecho, se obtienen reglas de sintonización para h , k_1 y k_2 que proporcionan γ -estabilidad del SMA (3.1) en lazo cerrado con (3.2).*

3.2. Descomposición del espacio de parámetros (h, k_2)

Como un paso preliminar a la caracterización del máximo decaimiento exponencial, descomponemos el espacio de parámetros dado por

$$\mathcal{D} = \{(h, k_2) : h \in \mathbb{R}_{>0}, k_2 \in \mathbb{R}\}. \quad (3.16)$$

Para esto empleamos el método de las D-subdivisiones [11]. En este caso, este método consiste en realizar una partición del plano (h, k_2) en regiones separadas por hipersuperficies. Las regiones antes mencionadas se denotan por $\mathcal{D}(\nu)$, donde ν es el número de raíces inestables asociadas con dicha región, también conocido como el *grado de inestabilidad*. Por lo tanto,

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathcal{D}(\nu), \quad (3.17)$$

forma una partición del espacio de parámetros. En particular, estamos interesados en la región estable, llamada dominio de estabilidad y denotada por $\mathcal{D}(0)$.

3.2.1. Fronteras de cruce de estabilidad

Antes de presentar un resultado importante de este trabajo, hay que tener en cuenta las siguientes definiciones.

Definición 3.2.1. *Decimos que una colección de puntos $(h, k_2) \in \mathcal{D}$ es una frontera de cruce de estabilidad si para todo punto en esta colección, (3.14) tiene al menos una raíz en el eje imaginario. Cada uno de estos puntos se conoce como punto de cruce.*

Definición 3.2.2. *Decimos que $\mathcal{K} = \partial\mathcal{D}(0)$ es la frontera del dominio de estabilidad.*

Considerando las definiciones anteriores, presentamos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1. *Dados $\mu_j \geq 1$, $\gamma > 0$, $\omega > 0$ y $k_1 \in \mathbb{R}$, los puntos de cruce que generan las fronteras de estabilidad asociadas al j -ésimo factor $p_j(s)$ en (3.14) están dados por*

$$h(\omega) = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left(\frac{2\omega\gamma}{-\omega^2 + \gamma^2 + k_1} \right) + \frac{n\pi}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.18)$$

$$k_2(\omega, \mu_j) = \frac{-\omega^2 + \gamma^2 + k_1}{e^{\gamma h} \mu_j \cos(\omega h)}. \quad (3.19)$$

Para el caso $\omega = 0$ la ecuación

$$k_2(0, \mu_j) = \frac{\gamma^2 + k_1}{e^{\gamma h} \mu_j}, \quad (3.20)$$

genera un punto de cruce para cualquier $h > 0$.

Demostración. De acuerdo al método de las D-particiones, se fija $s = 0$ en los cuasipolinomios desplazados (3.14) para obtener:

$$p_j(0) = \gamma^2 + k_1 - k_2 e^{\gamma h} \mu_j = 0 \quad (3.21)$$

y resolviendo (3.21) para k_2 se obtiene (3.20) como función de μ_j . Por otro lado, con $s = i\omega$, se tiene:

$$p_j(i\omega) = -\omega^2 - 2i\omega\gamma + \gamma^2 + k_1 - k_2 e^{\gamma h} \mu_j (\cos(\omega h) - i \sin(\omega h)) = 0 \quad (3.22)$$

La ecuación anterior es cierta si y solo si:

$$\operatorname{Re}\{p_j(i\omega)\} = -\omega^2 + \gamma^2 + k_1 - k_2 e^{\gamma h} \mu_j \cos(\omega h) = 0, \quad (3.23)$$

$$\operatorname{Im}\{p_j(i\omega)\} = -2\omega\gamma + k_2 e^{\gamma h} \mu_j \sin(\omega h) = 0. \quad (3.24)$$

De (3.23) se tiene que

$$k_2 = \frac{-\omega^2 + \gamma^2 + k_1}{e^{\gamma h} \mu_j \cos(\omega h)},$$

que es idéntica a (3.19) en donde la dependencia en ω y μ_j se ha escrito explícitamente. Más aún, de (3.24) se tiene que

$$k_2 = \frac{2\omega\gamma}{e^{\gamma h} \mu_j \sin(\omega h)}. \quad (3.25)$$

Eliminando k_2 de las ecuaciones anteriores, se tiene que

$$\frac{\sin(\omega h)}{\cos(\omega h)} = \frac{2\omega\gamma}{-\omega^2 + \gamma^2 + k_1}$$

y finalmente, resolviendo para h se obtiene (3.18) en función de ω y μ_j . \square

3.3. Suavidad de las fronteras de cruce

De acuerdo con las observaciones realizadas y el objetivo de la presente tesis, las reglas de sintonización para los parámetros (h, k_1, k_2) darán como resultado el máximo decaimiento exponencial del sistema, el cual además se encuentra en el dominio de estabilidad, es decir, en $\mathcal{D}(0)$. Más aún, tomando en cuenta la factorización de la ecuación característica del sistema, el dominio de estabilidad lo podemos descomponer como

$$\mathcal{D}(0) = \bigcap_{j=1}^N \mathcal{D}(0, \mu_j), \quad (3.26)$$

en donde $\mathcal{D}(0, \mu_j)$ es el dominio de estabilidad asociado a cada uno de los factores. Más aún, para cada $\mathcal{D}(0, \mu_j)$, usamos $\mathcal{K}(\mu_j)$ para denotar su frontera; es decir $\mathcal{K}(\mu_j) = \partial\mathcal{D}(0, \mu_j)$.

Antes de proseguir, realizamos la siguiente descomposición para el j -ésimo factor en parte real e imaginaria:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_j}{\partial \omega} &= R_0 + iI_0 = (h\mu_j k_2 e^{\gamma h} \sin(\omega h) - 2\omega) + i(h\mu_j k_2 e^{\gamma h} \cos(\omega h) - 2\gamma), \\ -\frac{\partial p_j}{\partial h} &= R_1 + iI_1 = (k_2 e^{\gamma h} \mu_j (\gamma \cos(\omega h) - \omega \sin(\omega h))) + i(-k_2 e^{\gamma h} \mu_j (\omega \cos(\omega h) + \gamma \sin(\omega h))), \\ -\frac{\partial p_j}{\partial k_2} &= R_2 + iI_2 = (e^{\gamma h} \mu_j \cos(\omega h)) + i(-e^{\gamma h} \mu_j \sin(\omega h)),\end{aligned}\tag{3.27}$$

en donde R_m e I_m , $m = 0, 1, 2$, son evidentes de la descomposición.

Proposición 3.3.1. *La tangente de la curva $\mathcal{K}(\mu_j)$ asociada al factor p_j en (3.14) puede expresarse como*

$$\begin{pmatrix} \frac{dh}{d\omega} \\ \frac{dk_2}{d\omega} \end{pmatrix} = \frac{1}{R_1 I_2 - R_2 I_1} \begin{pmatrix} I_2 R_0 - I_0 R_2 \\ I_0 R_1 - I_1 R_0 \end{pmatrix}.\tag{3.28}$$

Demostración. Considere un valor fijo para γ ; es decir, $\gamma = \gamma^*$. Entonces, sobre el eje imaginario desplazado, el factor p_j describe una función analítica de (ω, h, k_2) , ver [65]; por lo tanto:

$$i \frac{\partial p_j}{\partial \omega} + \frac{\partial p_j}{\partial h} \frac{dh}{d\omega} + \frac{\partial p_j}{\partial k_2} \frac{dk_2}{d\omega} = 0.\tag{3.29}$$

Sustituyendo (3.27) en (3.29) se obtiene

$$\begin{aligned}R_0 &= R_1 \frac{dh}{d\omega} + R_2 \frac{dk_2}{d\omega}, \\ I_0 &= I_1 \frac{dh}{d\omega} + I_2 \frac{dk_2}{d\omega},\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ I_1 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dh}{d\omega} \\ \frac{dk_2}{d\omega} \end{pmatrix}.$$

La tangente, puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} \frac{dh}{d\omega} \\ \frac{dk_2}{d\omega} \end{pmatrix} = \frac{1}{R_1 I_2 - R_2 I_1} \begin{pmatrix} I_2 & -R_2 \\ -I_1 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ I_0 \end{pmatrix}.$$

El lado derecho de la ecuación anterior es idéntico al lado derecho de (3.28).

□

3.4. Caso de estudio

Con el objetivo de observar los resultados de la Proposición 3.2.1, se realizó un ejemplo numérico en el cual se consideraron $N = 10$ agentes. La gráfica de la red se muestra en la Figura 3.1.

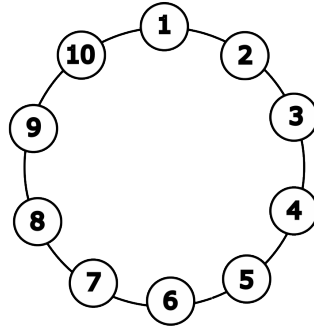


Figura 3.1: Gráfica circular no-dirigida de la red para $N = 10$ agentes.

La matriz Laplaciana correspondiente a la gráfica de la red está dada por

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces, que los valores propios de la matriz $I_{10} + L$ son $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = 1.3820$, $\mu_4 = \mu_5 = 2.3820$, $\mu_6 = \mu_7 = 3.6180$, $\mu_8 = \mu_9 = 4.6180$ y $\mu_{10} = 5$. Las fronteras de cruce de estabilidad asociadas con los factores característicos, considerando $\gamma = 0.2$ y $k_1 = 10$ se obtienen con la Proposición 1 y se muestran en la Figura 3.2.

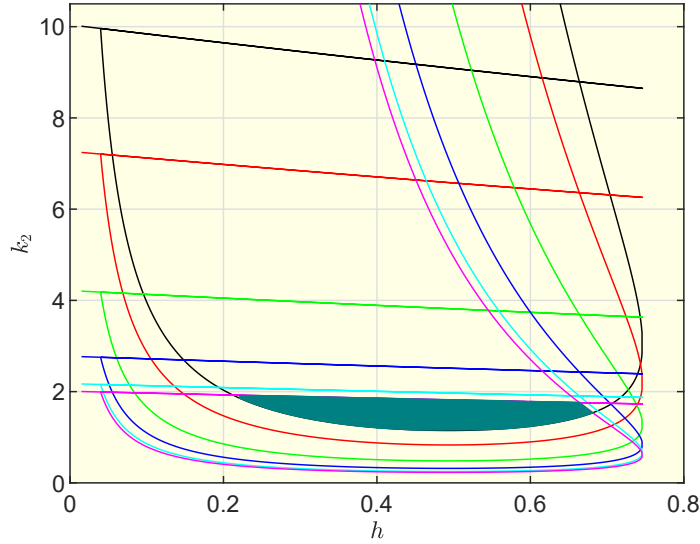


Figura 3.2: Fronteras de γ -estabilidad asociado a los factores característicos $p_j(s)$ en (3.14). La región rellena de ■ corresponde al dominio de estabilidad del sistema completo. Las fronteras están dadas por — para $j = \{1\}$, — para $j = \{2,3\}$, — para $j = \{4,5\}$, — para $j = \{6,7\}$, — para $j = \{8,9\}$ y — para $j = \{10\}$.

Observación. En la Figura 3.2 la región estable del sistema completo (rellena en color verde) es determinada por la intersección de los dominios de estabilidad asociados a solamente dos de los factores característicos, es decir, $\mathcal{D}(0) = \mathcal{D}(0, \mu_1) \cap \mathcal{D}(0, \mu_{10})$. Esta observación se sustentará formalmente en el siguiente capítulo.

3.4.1. Resultados numéricos

Ahora bien, supongamos que se desea diseñar un control tal que lleve los 10 agentes de las coordenadas iniciales

$$\{(x_1^i, y_1^i), \dots, (x_{10}^i, y_{10}^i)\} = \{(5, 20), (15, 10), (25, 0), (15, -10), (5, -20), \\ (-5, -20), (-15, -10), (-25, 0), (-15, 10), (-5, 20)\}$$

a las coordenadas finales

$$\{(x_1^f, y_1^f), \dots, (x_{10}^f, y_{10}^f)\} = \{(0, 25), (10, 15), (20, 5), (20, -5), (10, -15), \\ (0, -25), (-10, -15), (-20, -5), (-20, 5), (-10, 15)\}.$$

Bajo los parámetros establecidos, y fijando $\gamma = 0.2$ y $k_1 = 10$, se obtienen los resultados mostrados en las Figuras 3.3 y 3.4. En particular, la Figura 3.3, eligiendo $(h, k_2) = (0.5, 1.5)$ presenta un caso γ -estable donde se aprecia que los agentes tienen como posición final las coordenadas deseadas, mientras que la Figura 3.4, eligiendo $(h, k_2) = (0.8, 1.3)$ presenta un caso inestable en el cual los agentes jamás lograrán llegar a las coordenadas deseadas.

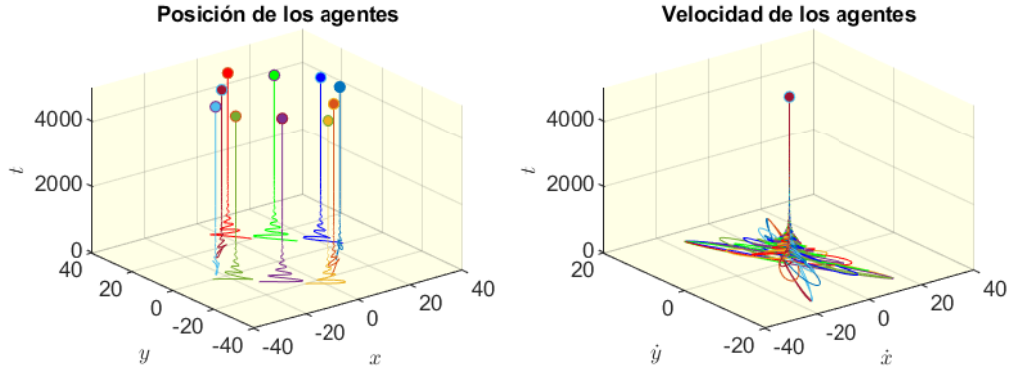


Figura 3.3: Caso estable con $N = 10$ agentes. (Panel izquierdo) Posición de los agentes con respecto al tiempo. (Panel derecho) Velocidad de los agentes con respecto al tiempo. El punto $(h, k_2) = (0.5, 1.5)$ se encuentra dentro del dominio de estabilidad.

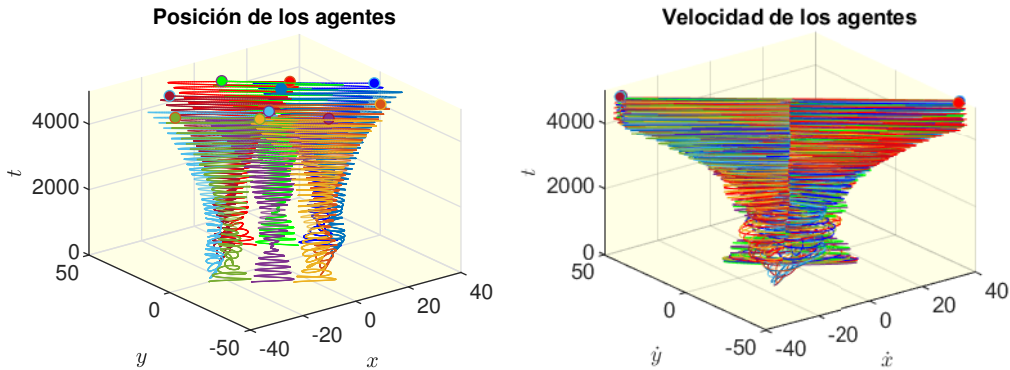


Figura 3.4: Caso inestable con $N = 10$ agentes. (Panel izquierdo) Posición de los agentes con respecto al tiempo. (Panel derecho) Velocidad de los agentes con respecto al tiempo. El punto $(h, k_2) = (0.8, 1.3)$ se encuentra fuera del dominio de estabilidad.

3.4.2. Observaciones finales

El dominio de estabilidad de la red; es decir, la región en el espacio de parámetros (h, k_2) que nos permite tener un comportamiento estable de las soluciones del SMA en lazo cerrado con el protocolo PR, está determinado por la intersección de los dominios de estabilidad de todos los factores característicos. Este dominio puede ser observado en la región verde de la Figura 3.2, y está determinado solamente por dos factores, en este ejemplo, por los factores característicos $p_1(s)$ y $p_{10}(s)$ asociados a los valores propios más pequeño y más grande; es decir, μ_1 y μ_{10} .

En el próximo capítulo, en la Proposición 4.1.1, formalizamos estas observaciones usando la noción de direcciones convexas para cuasipolinomios [52]. Con base en ellos, pro-

pondremos reglas de sintonización para los parámetros del protocolo PR con características escalables. En otras palabras, las formulas de sintonización propuestas, seguiran siendo validas independientemente del tamaño de la red.

Capítulo 4

Diseño escalable del protocolo PR

Este capítulo está dedicado al diseño escalable del protocolo PR bajo estudio. El objetivo es encontrar reglas de sintonización analíticas para los parámetros (h, k_1, k_2) del protocolo PR tal que el dominio de estabilidad del sistema completo (3.1)-(3.2) colapse en un único punto en el espacio de parámetros \mathcal{D} . Con esta sintonización, se asegura la velocidad de respuesta más rápida posible para todos los agentes que integran el sistema, independientemente de su número.

El capítulo se estructura en tres secciones distintas. En la primera, se presenta un ejemplo ilustrativo que aborda el impacto del valor de γ en el dominio de estabilidad $\mathcal{D}(0)$. Además, se presenta un resultado básico relacionado con la propiedad de escalabilidad en gráficas no-dirigidas. En la segunda sección, se deducen reglas de sintonización del protocolo PR. Por último, la tercera sección incluye un ejemplo específico que sirve para ilustrar con claridad los resultados obtenidos.

4.1. Escalabilidad en gráficas no-dirigidas

En este trabajo de tesis consideramos *escalabilidad* del SMA (3.1) con protocolo de control distribuido PR (3.2) como la propiedad que permite una sintonización del protocolo para cualquier número de agentes N dado estudiando únicamente dos cuasipolinomios. De acuerdo a la complejidad del análisis de estabilidad inducida por el número de agentes, esta es una propiedad deseable para cualquier $N \geq 3$.

Para proporcionar una perspectiva al problema que abordamos en este capítulo, presentamos el siguiente ejemplo ilustrativo. Cabe señalar que las siguientes discusiones no se utilizan en ningún sentido para realizar generalizaciones de ningún tipo.

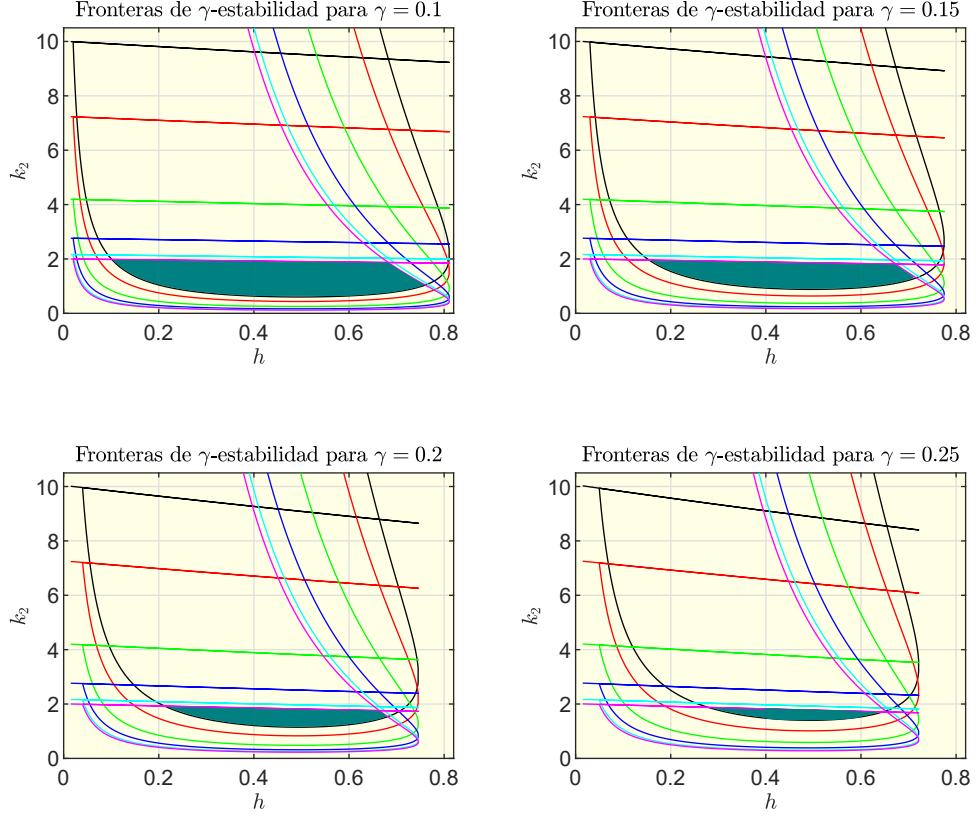


Figura 4.1: Fronteras de γ -estabilidad asociado a los factores característicos $p_j(s)$ en (3.14). La región rellena de ■ corresponde al dominio de estabilidad del sistema completo. Las fronteras están dadas por — para $j = \{1\}$, — para $j = \{2, 3\}$, — para $j = \{4, 5\}$, — para $j = \{6, 7\}$, — para $j = \{8, 9\}$ y — para $j = \{10\}$. La primera figura corresponde a un valor de $\gamma = 0.1$, la segunda a $\gamma = 0.15$, la tercera a $\gamma = 0.2$ y la última a $\gamma = 0.25$.

Ejemplo ilustrativo: Considerando la gráfica circular con 10 agentes presentada en el caso de estudio en la Sección 3.4 y la Proposición 3.2.1 del capítulo anterior, obtenemos la Figura 4.1. Para asistir al lector, para un γ dado, el dominio de estabilidad $\mathcal{D}(0)$ se rellena en color verde. Observe que el dominio de estabilidad del sistema completo se hace más pequeño a medida que el valor de γ incrementa, de tal forma que el valor máximo posible de γ se da cuando los dominios de estabilidad $\mathcal{D}(0, \mu_1)$ y $\mathcal{D}(0, \mu_N)$ colapsan en un punto (h, k_2) , el cual se da en algún punto tangente a las curvas $\mathcal{K}(\mu_1)$ y $\mathcal{K}(\mu_N)$.

Esta intersección existe cuando se cumplen las siguientes condiciones.

$$\text{Condición de ganancias : } k_2(\omega, \mu_1) = k_2(0, \mu_N) \quad (4.1)$$

$$\text{Condición de derivadas : } \frac{dk_2}{dh}(\omega, \mu_1) = \frac{dk_2}{dh}(0, \mu_N) \quad (4.2)$$

Efectivamente, si la intersección entre los dominios de estabilidad desaparece, es necesaria la existencia de un punto tangencial entre las curvas $\mathcal{K}(\mu_1)$ y $\mathcal{K}(\mu_N)$. La deducción de las condiciones bajo las cuales el punto tangencial existe se deja para trabajo futuro.

Observación. *El valor propio $\mu_1 = 1$ de la matriz $M(\mathcal{G}) = I_N + \mathcal{L}$ es simple y está asociado con el vector propio $(1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.*

Note que los factores en (3.12) asociados con $M(\mathcal{G})$ tienen la forma:

$$p_j(s) = q_0(s) + q_1(s)\mu_j e^{-sh}, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.3)$$

donde $\text{grado}(q_1(s)) \leq \text{grado}(q_0(s))$, $q_0(s) = s^2 - 2s\gamma + \gamma^2 + k_1$ y $q_1(s) = -k_2 e^{\gamma h}$.

Usando el teorema de las aristas y el concepto de direcciones convexas para cuasipolinomios, originalmente introducido en [52], los autores en [5] presentan la siguiente proposición que nos permite reducir el análisis de estabilidad del SMA completo al estudio de *solo dos* factores característicos en lugar de los N factores que componen la ecuación característica del SMA. Para una fácil referencia, el resultado es condensado en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1 ([5]). *El SMA (3.1) - (3.2) es estable si y solo si ambos $p_1(s)$ y $p_N(s)$ en (3.12) son estables.*

Recordando los resultados obtenidos en la Proposición 3.2.1, para dados k_1 y γ , las fronteras de cruce de estabilidad, para $\omega > 0$, asociadas con cada factor característico se pueden obtener usando

$$h(\omega) = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left(\frac{2\omega\gamma}{-\omega^2 + \gamma^2 + k_1} \right) + \frac{n\pi}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$k_2(\omega, \mu_j) = \frac{-\omega^2 + \gamma^2 + k_1}{e^{\gamma h} \mu_j \cos(\omega h)},$$

y para $\omega = 0$ y cualquier $h > 0$, sabemos que

$$k_2(0, \mu_j) = \frac{\gamma^2 + k_1}{e^{\gamma h} \mu_j}.$$

también genera una frontera de cruce de estabilidad.

Además, de acuerdo con los resultados obtenidos en la Proposición 4.1.1, el dominio de estabilidad del sistema completo estará dado por la intersección del dominio de estabilidad de los polinomios extremos; es decir, de p_1 y p_N . Por lo tanto, las curvas $\mathcal{K}(\mu_1)$ y $\mathcal{K}(\mu_N)$ contienen al dominio de estabilidad del sistema completo, y el punto único (h, k_1, k_2) que se busca se alcanza cuando este dominio de estabilidad colapsa en un punto que, además, es tangente a las curvas $\mathcal{K}(\mu_1)$ y $\mathcal{K}(\mu_N)$.

4.2. Sintonización

Con base en el análisis de la Sección 4.1, la siguiente proposición proporciona un método de diseño escalable para los parámetros del protocolo PR, con las cuales se garantiza la velocidad de respuesta del SMA más rápida posible. Cabe mencionar que inicialmente se proponía un valor para k_1 de tal forma que se buscaba el valor de γ que nos garantizará el máximo decaimiento exponencial de las soluciones. Por brevedad, en la siguiente proposición, buscamos resolver el problema de diseño; es decir, dado un γ deseado buscar el valor de (h, k_1, k_2) que garantice el máximo decaimiento exponencial de las soluciones.

Proposición 4.2.1. *Considere el SMA (3.1) en lazo cerrado con el protocolo PR (3.2) y sea dado $\gamma > 0$. Sean los parámetros de control (h, k_1, k_2) elegidos como sigue:*

$$h = \frac{1}{\omega} \sin^{-1}(\theta), \quad (4.4)$$

$$k_1 = \frac{2\omega\gamma\mu_N}{\mu_1 \sin(\omega h)} - \gamma^2, \quad (4.5)$$

$$k_2 = \frac{\gamma^2 + k_1}{e^{\gamma h} \mu_N}, \quad (4.6)$$

en donde

$$\omega = \frac{\gamma}{\mu_1} \sqrt{2} \sqrt{-\Delta_\mu + \sqrt{-\mu_N^2 \Delta_\mu}}, \quad (4.7)$$

$$\theta = 2\gamma \frac{\omega\mu_N + \sqrt{\omega^2\mu_1^2 + 4\gamma^2\Delta_\mu}}{\mu_1(4\gamma^2 + \omega^2)}, \quad (4.8)$$

con $\Delta_\mu = \mu_1^2 - \mu_N^2$, donde μ_1 y μ_N denotan, respectivamente, el valor propio más pequeño y más grande de $I_N + \mathcal{L}$. Entonces existen al menos tres raíces características de (3.12) con parte real igual a $-\gamma$.

Demostración. Considere la derivada con respecto a h de $k_2(0, \mu_N)$ en (3.20), con $j = N$,

$$\frac{dk_2}{dh}(0, \mu_N) = -\frac{\gamma(\gamma^2 + k_1)}{e^{\gamma h} \mu_N} = -\gamma k_2(0, \mu_N). \quad (4.9)$$

Además, usando la Proposición 3.3.1 tenemos que

$$\frac{dk_2}{dh}(\omega, \mu_1) = \frac{I_0 R_1 - I_1 R_0}{I_2 R_0 - I_0 R_2}. \quad (4.10)$$

Por un lado, de la condición de derivadas en (4.2), la siguiente igualdad se satisface:

$$\frac{I_0 R_1 - I_1 R_0}{I_2 R_0 - I_0 R_2} = -\gamma k_2(0, \mu_N). \quad (4.11)$$

Por otro lado, la condición de ganancias en (4.1) implica que:

$$\frac{2\omega\gamma}{e^{\gamma h}\mu_1 \sin(\omega h)} = \frac{\gamma^2 + k_1}{e^{\gamma h}\mu_N}. \quad (4.12)$$

Por lo tanto, en el punto de colapso de $\mathcal{D}(0)$, es necesario que (4.11) y (4.12) se satisfagan de manera concurrente. Cabe destacar que, para obtener (4.12), se utilizó la segunda definición de $k_2(\omega, \mu_j)$ con $j = 1$ obtenida en la demostración de la Proposición 3.2.1, es decir, la ecuación (3.25), y la definición de $k_2(0, \mu_j)$ para $j = N$ en (3.20). El resto de la prueba consiste en emplear (4.11) y (4.12) para encontrar formulas analíticas para los parámetros del protocolo PR que dependan exclusivamente de los valores propios μ_1 y μ_N , y de algún decaimiento exponencial deseado γ .

Comenzamos estudiando la condición de derivadas. Para ello, usando (3.27) con $\mu_j = \mu_1$, es posible reescribir (4.11) como

$$\begin{aligned} 0 = & \left(h\mu_1 k_2 e^{\gamma h} \cos(\omega h) - 2\gamma \right) \left(k_2 e^{\gamma h} \gamma \mu_1 \cos(\omega h) - k_2 e^{\gamma h} \mu_1 \omega \sin(\omega h) \right) \\ & - \left(-k_2 e^{\gamma h} \mu_1 \omega \cos(\omega h) - k_2 e^{\gamma h} \gamma \mu_1 \sin(\omega h) \right) \left(h\mu_1 k_2 e^{\gamma h} \sin(\omega h) - 2\omega \right) \\ & + \gamma k_2 \left(-e^{\gamma h} \mu_1 \sin(\omega h) \right) \left(h\mu_1 k_2 e^{\gamma h} \sin(\omega h) - 2\omega \right) \\ & - \gamma k_2 \left(h\mu_1 k_2 e^{\gamma h} \cos(\omega h) - 2\gamma \right) \left(e^{\gamma h} \mu_1 \cos(\omega h) \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

en donde empleamos el hecho que, en el punto de colapso, $k_2 = k_2(0, \mu_N) = k_2(\omega, \mu_1)$. Es decir,

$$k_2 = \frac{\gamma^2 + k_1}{e^{\gamma h}\mu_N}, \quad (4.14)$$

que es idéntica a (4.6). Sustituyendo entonces k_2 en (4.14) en la condición de derivada en (4.13) se obtiene:

$$-\frac{2k_2 \left((\gamma^2 + \omega^2) \cos(\omega h) - \frac{1}{2} k_2 \mu_1 h \gamma e^{\gamma h} \right)}{2\omega \sin(\omega h) - k_2 \mu_1 h e^{\gamma h} + 2\gamma \cos(\omega h)} + \frac{\gamma(\gamma^2 + k_1)}{e^{\gamma h}\mu_N} = 0 \quad (4.15)$$

la cual utilizaremos más adelante para obtener el valor de ω , en el punto de colapso, como una función explícita de μ_1 , μ_N y γ . Procedemos como sigue:

Primero, notamos de (4.12) que

$$\frac{2\omega\gamma\mu_N - (\gamma^2 + k_1)(\mu_1 \sin(\omega h))}{\mu_1\mu_N e^{\gamma h} \sin(\omega h)} = 0. \quad (4.16)$$

Expandiendo (4.16), sumando el término $k_1(\mu_1 \sin(\omega h))/(\mu_1\mu_N e^{\gamma h} \sin(\omega h))$ en ambos lados de la ecuación y después de algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos

$$\frac{2\omega\gamma\mu_N - \gamma^2(\mu_1 \sin(\omega h))}{\mu_1\mu_N e^{\gamma h} \sin(\omega h)} = \frac{k_1(\mu_1 \sin(\omega h))}{\mu_1\mu_N e^{\gamma h} \sin(\omega h)}.$$

Resolviendo k_1 de la expresión anterior se tiene que

$$k_1 = \frac{2\omega\gamma\mu_N}{\mu_1 \sin(\omega h)} - \gamma^2, \quad (4.17)$$

que es idéntica a (4.5). Sustituyendo ahora (4.17) en

$$h = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left(\frac{2\omega\gamma}{-\omega^2 + \gamma^2 + k_1} \right),$$

o de manera equivalente,

$$\tan(\omega h) = \left(\frac{2\gamma\mu_1 \sin(\omega h)}{2\gamma\mu_N - \omega\mu_1 \sin(\omega h)} \right),$$

y utilizando la identidad $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ tenemos que

$$\frac{\sin(\omega h) (\omega\mu_1 \sin(\omega h) - 2\gamma\mu_N + 2\gamma\mu_1 \cos(\omega h))}{\cos(\omega h) (\omega\mu_1 \sin(\omega h) - 2\gamma\mu_N)} = 0.$$

La expresión anterior se cumple sí su numerador se desvanece; es decir, sí $\sin(\omega h) = 0$, o sí

$$\omega\mu_1 \sin(\omega h) - 2\gamma\mu_N + 2\gamma\mu_1 \cos(\omega h) = 0.$$

Considerando la igualdad anterior, se puede ver que

$$\cos^2(\omega h) = \left(\frac{\mu_N}{\mu_1} - \frac{\omega}{2\gamma} \sin(\omega h) \right)^2.$$

Dado que $\cos^2(\omega h) = 1 - \sin^2(\omega h)$, y después de algunas manipulaciones algebraicas, se tiene de la igualdad anterior que

$$\left(\frac{4\gamma^2 + \omega^2}{4\gamma^2} \right) \sin^2(\omega h) + \left(-\frac{\omega\mu_N}{\gamma\mu_1} \right) \sin(\omega h) + \left(\frac{\mu_N^2 - \mu_1^2}{\mu_1^2} \right) = 0. \quad (4.18)$$

Note que (4.18) se puede entender como un polinomio en $x = \sin(\omega h)$ con soluciones

$$\sin(\omega h)_{1,2} = \frac{\left(\frac{2\gamma^2 \omega\mu_N}{\gamma\mu_1} \right) \pm 2\gamma^2 \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_1^2 + 4\gamma^2 \mu_1^2 - 4\gamma^2 \mu_N^2}{\gamma^2 \mu_1^2}}}{4\gamma^2 + \omega^2},$$

de donde se sigue que

$$h_{1,2} = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left(2\gamma \frac{\omega\mu_N \pm \sqrt{\omega^2 \mu_1^2 + 4\gamma^2 \mu_1^2 - 4\gamma^2 \mu_N^2}}{\mu_1 (4\gamma^2 + \omega^2)} \right),$$

con $\Delta_\mu = \mu_1^2 - \mu_N^2$. De manera más precisa:

$$h_1 = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left(2\gamma \frac{\omega\mu_N + \sqrt{\omega^2\mu_1^2 + 4\gamma^2\Delta_\mu}}{\mu_1(4\gamma^2 + \omega^2)} \right),$$

$$h_2 = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left(2\gamma \frac{\omega\mu_N - \sqrt{\omega^2\mu_1^2 + 4\gamma^2\Delta_\mu}}{\mu_1(4\gamma^2 + \omega^2)} \right),$$

En donde h_1 es precisamente (4.4).

Ahora, usando nuevamente k_1 en (4.17) y sustituyendola en la condición de derivada en (4.15) se tiene que

$$-\frac{2k_2((\gamma^2 + \omega^2)\cos(\omega h) - \frac{1}{2}k_2\mu_1 h\gamma e^{\gamma h})}{2\omega \sin(\omega h) - k_2\mu_1 h e^{\gamma h} + 2\gamma \cos(\omega h)} + \frac{2\omega\gamma^2}{\mu_1 e^{\gamma h} \sin(\omega h)} = 0. \quad (4.19)$$

Sustituyendo $h = h_1$ en (4.19) y observando únicamente el numerador de la ecuación resultante se tiene que:

$$2\omega^5(4\gamma^2 + \omega^2)^3 \left(8\gamma^4\Delta_\mu + 6\gamma^2\omega^2\Delta_\mu + \mu_N\omega^3\sqrt{4\gamma^2\Delta_\mu + \omega^2\mu_1^2} + \omega^4\mu_1^2 \right) = 0. \quad (4.20)$$

Entonces, para un γ fijo, (4.20) se puede entender como un polinomio en ω , cuyas soluciones califican como los valores que puede tomar ω cuando $\mathcal{D}(0)$ colapsa. Dado que se buscan soluciones que cumplan con $\omega > 0$, se descartan las soluciones no positivas así como las imaginarias; por lo tanto, la única solución factible para ω está dada por (4.7). La prueba concluye notando que en el punto de colapso: (i) el valor de ω , dado por (4.7), depende exclusivamente en los valores propios, y conocidos, μ_1 y μ_N , y en algún γ deseado, sujeto a h , k_1 y k_2 en (4.4), (4.5) y (4.6), respectivamente, y (ii) las curvas $\mathcal{K}(\mu_1)$ y $\mathcal{K}(\mu_N)$ están asociadas con las raíces características $s = -\gamma \pm i\omega$ y $s = -\gamma$, respectivamente. \square

La Proposición 4.2.1 establece las condiciones necesarias para garantizar que el colapso del dominio de estabilidad asociado con el SMA ocurrirá para algún valor de γ deseado. Es en este sentido que decimos que γ es el máximo decaimiento exponencial de las soluciones del SMA (3.1) sujeto al protocolo PR (3.2), el cual se puede asignar de manera arbitraria a través de la sintonización de los parámetros (h, k_1, k_2) en (4.4), (4.5) y (4.6).

Observación. Cabe mencionar que la sintonización propuesta puede considerarse como un método de asignación (parcial) de polos. Más aún, es posible verificar que dicha asignación garantiza, en efecto, γ -estabilidad en el SMA. Sin embargo, una prueba formal de este hecho se deja para investigación futura.

Observación. Note que la sintonización en la Proposición 4.2.1 es válida de manera independiente al número de agentes en la red; es decir, la sintonización solo se requiere conocer el valor de μ_1 y de μ_N sin importar el valor de N , estableciendo así la escalabilidad de la propuesta de sintonización del protocolo PR bajo estudio.





4.3. Caso de estudio

A continuación se realiza un ejemplo en el que se utiliza un sistema compuesto por cuatro agentes, cuyas conexiones son representadas por

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para ilustrar la sintonización presentada en la subsección anterior, se considerarán tres valores diferentes de γ , a saber, $\gamma = \{1.5, 2, 2.5\}$. Para estos valores se calcularán las raíces y las fronteras de γ -estabilidad con la sintonización correspondiente a (h, k_1, k_2) proporcionada por la Proposición 4.2.1.

4.3.1. Resultados numéricos

En las Figuras 4.2- 4.4 podemos ver del lado izquierdo las raíces del cuasipolinomio $\bar{P}(s)$ en (3.12) de tal forma que las raíces dominantes se encuentran en el valor de γ utilizado que está representado por la línea discontinua . En el lado derecho podemos ver las fronteras de γ -estabilidad asociadas a los factores característicos $p_j(s)$ en (3.14). El  corresponde al punto en el que las curvas $\mathcal{K}(\mu_1)$ y $\mathcal{K}(\mu_N)$ son tangentes una con otra. Las fronteras están dadas por  para $j = \{1\}$ y  para $j = \{4\}$.

4.3.2. Observaciones finales

Se puede observar que, con la sintonización a partir de la Proposición 4.2.1, el dominio de estabilidad del sistema completo $\mathcal{D}(0)$ colapsa en el punto (h, k_1, k_2) calculado. De esta forma, se garantiza el máximo decaimiento exponencial, lo cual a su vez ocasionará que la velocidad de respuesta de todos los agentes sea la máxima posible.

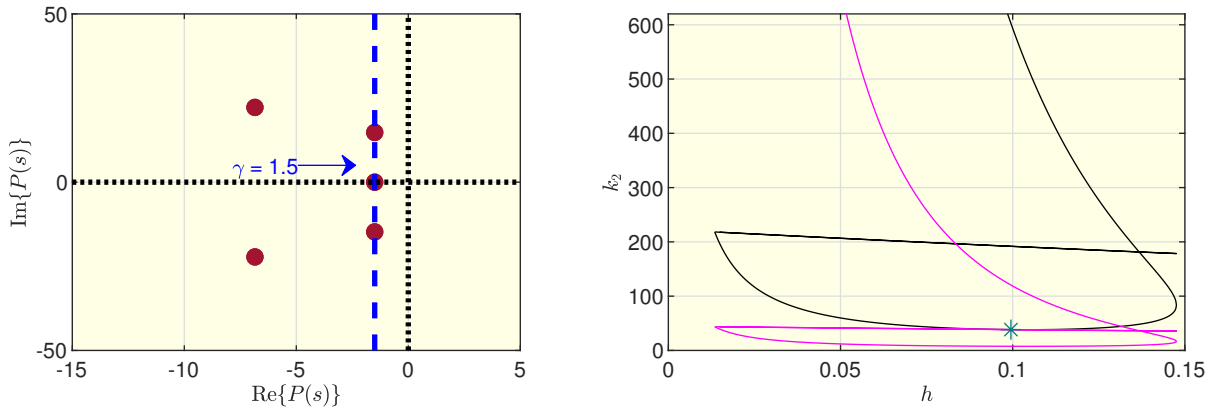


Figura 4.2: Raíces del cuasipolinomio $\bar{P}(s)$ en (3.12) y fronteras de γ -estabilidad asociadas a los factores característicos $p_j(s)$ en (3.14) para $\gamma = 1.5$. La sintonización obtenida con la Proposición 4.2.1 da como resultado $(h, k_1, k_2) = (0.0995, 220.4770, 38.3704)$.

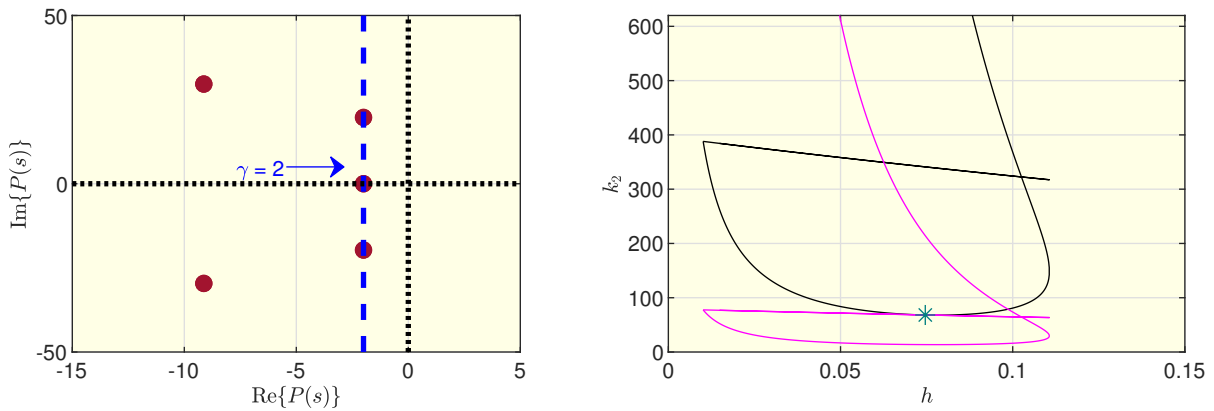


Figura 4.3: Raíces del cuasipolinomio $\bar{P}(s)$ en (3.12) y fronteras de γ -estabilidad asociadas a los factores característicos $p_j(s)$ en (3.14) para $\gamma = 2$. La sintonización obtenida con la Proposición 4.2.1 da como resultado $(h, k_1, k_2) = (0.0746, 391.9592, 68.2140)$.

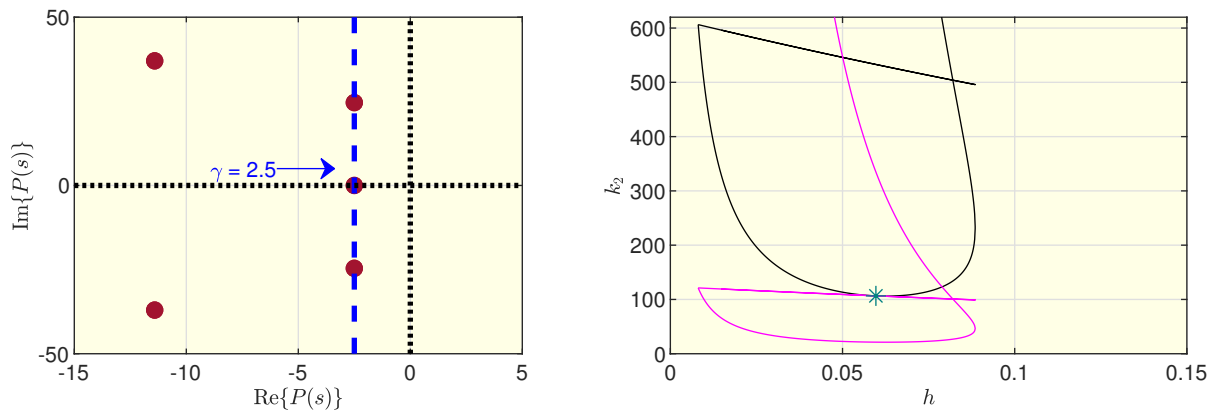


Figura 4.4: Raíces del cuasipolinomio $\bar{P}(s)$ en (3.12) y fronteras de γ -estabilidad asociadas a los factores característicos $p_j(s)$ en (3.14) para $\gamma = 2.5$. La sintonización obtenida con la Proposición 4.2.1 da como resultado $(h, k_1, k_2) = (0.0597, 612.4362, 106.5844)$.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo de tesis se presenta un nuevo método de diseño para un protocolo distribuido Proporcional-Retardado (PR). Este método no solo asegura la estabilidad de las soluciones en una clase de sistemas multiagente (SMA), sino que también optimiza la velocidad de respuesta de cada uno de los agentes que componen la red, *independientemente del tamaño de la red*. En este capítulo, se presentan conclusiones generales del trabajo realizado y se describen algunas posibles direcciones para trabajo futuro.

5.1. Conclusiones

El objetivo general de este estudio fue la obtención de fórmulas analíticas para la sintonización de los parámetros de un protocolo distribuido PR, originalmente propuesto en [3], operando en un sistema compuesto por múltiples agentes con dinámica de doble integrador vectorial. Esto se logró a través de un estudio de la geometría de las zonas de estabilidad en el espacio de los parámetros asociados al protocolo PR. Cuando el número de agentes en la red es grande, el análisis de estabilidad para el SMA en lazo cerrado con el protocolo PR se vuelve intratable. Como se mostró en el Capítulo 3, descomponer la dinámica colectiva en sus modos permite simplificar dicho análisis con la factorización de la función característica. Sin embargo, el diseño del controlador sigue siendo un desafío. A este respecto, y con ayuda del método de las D-particiones, se observó que *solamente dos* factores característicos son responsables de la estabilidad del SMA completo. Dicha observación se verificó formalmente con ayuda de la teoría de direcciones convexas para cuasipolinomios.

Con los factores característicos responsables a la mano; a saber, con $p_1(s)$ y $p_N(s)$, fue posible sintonizar los parámetros del protocolo PR tal que garantizan un decaimiento exponencial deseado para las soluciones del SMA. Con este fin, mostramos que minimizar de manera concurrente las abscisas espectrales asociadas con $p_1(s)$ y $p_N(s)$ es equivalente a minimizar la abscisa espectral del SMA completo. Dicho proceso de optimización resultó,

en última instancia, en la obtención de formulas analíticas para los parámetros del protocolo PR, como se mostró en el Capítulo 4.

Cabe señalar que, a pesar que las raíces características se comportan de manera suave con respecto a variaciones paramétricas, la abscisa espectral no lo hace. En efecto, la abscisa espectral es en general una función no-convexa, no-suave y no-Lipschitz. Por lo tanto, procesos de optimización tradicionales no son aplicables en este contexto. Esta tesis proporcionó una solución simple a este problema con base en geometría algebraica.

5.2. Trabajo futuro

Algunas observaciones adicionales que merecen ser mencionadas y conforman el punto de partida para trabajo futuro son las siguientes:

- El protocolo PR no resuelve un problema de formación en un sentido estricto, como se menciona en [3], sino únicamente un problema de regulación al origen. Cabe mencionar que a la fecha, esto no ha sido señalado en la literatura. La razón es simple, la estructura del protocolo PR propuesto en [3] colapsa el *subespacio de acuerdo* en un solo punto, el origen. Por lo tanto, las trayectorias del SMA son atraídas únicamente al origen en donde, claramente, $x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0$ independientemente de las condiciones iniciales. Un replanteamiento del problema sugiere, en cambio, que el protocolo puede ser empleado para resolver problemas de sincronización.
- La metodología empleada para la obtención de los resultados en este trabajo de tesis puede ser extendida a clases más generales de SMA, cuya caracterización se encuentra más allá de los objetivos de esta tesis.
- El planteamiento del problema descrito en el Capítulo 1 admite una interpretación en el contexto de control robusto si se considera un parámetro $\mu \in [\mu_1, \mu_n]$ como un parámetro incierto. En este sentido, los resultados aquí descritos equivalen a optimizar las raíces de una clase de cuasipolinomios intervalo de la forma

$$p(s) = q_0(s) + q_1(s)\mu e^{-sh}, \quad \mu \in [\mu_1, \mu_n],$$

en donde $\text{grado}(q_1) \leq \text{grado}(q_0)$.

- Además de los resultados obtenidos en el presente trabajo, se mencionó que el dominio de estabilidad del sistema completo colapsa en un único punto en el espacio de parámetros \mathcal{D} y esto se da en algún punto tangente a las curvas $\mathcal{K}(\mu_1)$ y $\mathcal{K}(\mu_N)$. Una prueba formal de este hecho se deja para trabajo futuro.

- Otro aspecto importante es que la sintonización propuesta en el Capítulo 4 hasta ahora solo se ha confirmado mediante simulaciones numéricas. La validación de estos resultados mediante pruebas realizadas en laboratorio, es de interés para trabajo futuro.

Bibliografía

- [1] N. A. Lynch, “Distributed Algorithms,” San Mateo, CA: Morgan Kaufman, 1997.
- [2] M. Wooldridge, “An Introduction to MultiAgent Systems,” John Wiley & Sons Ltd, 2002.
- [3] P. Deshpande, P. P. Menon, & C. Edwards, “Delayed static output feedback control of a network of double integrator agents,” *Automatica*, vol. 49, no. 11, pp. 3498–3501, 2013.
- [4] R. Olfati-Saber & R. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topologies and time delay,” *IEEE Trans. on Autom. Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533, Sep. 2004.
- [5] M. A. Gomez & A. Ramírez, “A Scalable Approach for Consensus Stability Analysis of a Large-Scale Multi-Agent System with Single Delay,” *IEEE Trans. on Autom. Control*, 2022.
- [6] M. A. Gomez & A. Ramírez, “Simplifying Consensus Stability Analysis of Multi-Agent Systems Using the Concept of Convex Directions for Quasipolynomials,” 2021.
- [7] R. Cepeda-Gomez & N. Olgac, “Exhaustive stability analysis in a consensus system with time delay and irregular topologies,” *International Journal of Control*, 2011.
- [8] M. Mesbahi & M. Egerstedt, “Graph theoretic methods in multiagent networks,” Princeton University Press, 2010.
- [9] R. A. Horn & C. R. Johnson, “Matrix Analysis,” Cambridge University Press, 1990.
- [10] H. K. Khalil, “Nonlinear Systems,” 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.
- [11] J. Neimark, “D-subdivisions and spaces of quasipolynomials,” *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, vol. 13, pp. 349–380, 1949.

- [12] J. Qin, Q. Ma, Y. Shi, & L. Wang, “Recent advances in consensus of multi-agent systems: A brief survey,” *IEEE Trans. Industrial Electron.*, vol. 64, no. 6, pp. 4972–4983, 2016.
- [13] K. J. Åström & T. Hägglund, “The future of PID control,” *Control Eng. Pract.*, vol. 9, no. 11, pp. 1163–1175, 2001.
- [14] I. H. Suh & Z. Bien, “Proportional minus delay controller,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-24, no. 2, pp. 370–372, Apr. 1979.
- [15] H. Berghuis & H. Nijmeijer, “Global regulation of robots using only position measurements,” *Syst. Control Lett.*, vol. 21, no. 4, pp. 289–293, 1993.
- [16] F. M. Atay, “Van der pol’s oscillator under delayed feedback,” *J. Sound Vib.*, vol. 218, no. 2, pp. 333–339, 1998.
- [17] E. Nuno, “Consensus of Euler–Lagrange systems using only position measurements,” *IEEE Trans. Control Netw. Syst.*, to be published, doi: 10.1109/TCNS.2016.2620806.
- [18] W. Ren, “On consensus algorithms for double-integrator dynamics,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1503–1509, Jul. 2008.
- [19] H. Ghapani, W. Ren, F. Chen, & Y. Song, “Distributed average tracking for double-integrator multi-agent systems with reduced requirement on velocity measurements,” *Automatica*, vol. 81, pp. 1–7, Jul. 2017.
- [20] K. Liu, Z. Ji, & W. Ren, “Necessary and sufficient conditions for consensus of second-order multiagent systems under directed topologies without global gain dependency,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 47, no. 8, pp. 2089–2098, Aug. 2017.
- [21] Y. Kim, “Bisection algorithm of increasing algebraic connectivity by adding an edge,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 55, no. 1, pp. 170–174, Jan. 2010.
- [22] W. Qiao, F. M. Atay, & R. Sipahi, “Graph Laplacian design for fast consensus of a LTI system with heterogeneous agent couplings and homogeneous inter-agent delays,” in *Proc. ASME Dyn. Syst. Control Conf.*, 2013, pp. 1–8.
- [23] K. Ogiwara, T. Fukami, & N. Takahashi, “Maximizing algebraic connectivity in the space of graphs with a fixed number of vertices and edges,” *IEEE Trans. Control Netw. Syst.*, vol. 4, no. 2, pp. 359–368, Jun. 2017.
- [24] Y. Kim & M. Mesbahi, “On maximizing the second smallest eigenvalue of a state-dependent graph Laplacian,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 51, no. 1, pp. 116–120, Jan. 2006.

- [25] J. He, M. Zhou, P. Cheng, L. Shi, & J. Chen, “Consensus under bounded noise in discrete network systems: An algorithm with fast convergence and high accuracy,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 46, no. 12, pp. 2874–2884, Dec. 2016.
- [26] D. Chowdhury & H. K. Khalil, “Fast consensus in multi-agent systems with star topology using high gain observers,” *IEEE Control Syst. Lett.*, vol. 1, no. 1, pp. 188–193, Jul. 2017.
- [27] R. Olfati-Saber, “Ultrafast consensus in small-world networks,” in *Proc. Amer. Control Conf.*, Portland, OR, USA, 2005, pp. 2371–2378.
- [28] W. Yang, X. Wang, & H. Shi, “Fast consensus seeking in multi-agent systems with time delay,” *Syst. Control Lett.*, vol. 62, no. 3, pp. 269–276, 2013.
- [29] Y. Qi, Z. Zhang, Y. Yi, & H. Li, “Consensus in self-similar hierarchical graphs and sierpinski graphs: Convergence speed, delay robustness, and coherence,” *IEEE Trans. Cybern.*, to be published.
- [30] D. Hunt, G. Korniss, & B. K. Szymanski, “Network synchronization in a noisy environment with time delays: Fundamental limits and tradeoffs,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, Aug. 2010, Art. no. 068701.
- [31] D. Hunt, B. K. Szymanski, & G. Korniss, “Network coordination and synchronization in a noisy environment with time delays,” *Phys. Rev. E, Stat. Phys. Plasmas Fluids Relat. Interdiscip. Top.*, vol. 86, Nov. 2012, Art. no. 056114.
- [32] S. Liu, L. Xie, & H. Zhang, “Distributed consensus for multi-agent systems with delays and noises in transmission channels,” *Automatica*, vol. 47, no. 5, pp. 920–934, 2011.
- [33] J. Liu, X. Liu, W.-C. Xie, & H. Zhang, “Stochastic consensus seeking with communication delays,” *Automatica*, vol. 47, no. 12, pp. 2689–2696, 2011.
- [34] L. Fang, P. J. Antsaklis, & A. Tzimas, “Asynchronous consensus protocols: Preliminary results, simulations and open questions,” in *Proc. IEEE Conf. Decis. Control*, Seville, Spain, 2005, pp. 2194–2199.
- [35] Y. Sun, D. Zhao, & J. Ruan, “Consensus in noisy environments with switching topology and time-varying delays,” *Physica A Stat. Mech. Appl.*, vol. 389, no. 19, pp. 4149–4161, 2010.
- [36] Y. Shang, “Group consensus of multi-agent systems in directed networks with noises and time delays,” *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 46, no. 14, pp. 2481–2492, 2015.
- [37] E. Fridman & L. Shaikhet, “Simple LMIs for stabilization by using delays,” in *Proc. IEEE Conf. Decis. Control*, Las Vegas, NV, USA, 2016, pp. 3240–3245.

- [38] E. Fridman & L. Shaikhet, “Stabilization by using artificial delays: An LMI approach,” *Automatica*, vol. 81, pp. 429–437, Jul. 2017.
- [39] A. Ramírez, R. Sipahi, S. Mondié, & R. Garrido, “An analytical approach to tuning of delay-based controllers for LTI-SISO systems,” *SIAM J. Control Optim.*, vol. 55, no. 1, pp. 397–412, 2017.
- [40] A. Ramírez, “Design of maximum exponential decay rate for LTI-SISO systems via delay-based controllers,” Ph.D. dissertation, Dept. Autom. Control, CINVESTAV, México City, México, 2015
- [41] Y. Cao, W. Ren, & Y. Chen, “Multi-agent consensus using both current and outdated states,” in *Proc. IFAC World Congr.*, 2008, pp. 2874–2879.
- [42] Y. Cao & W. Ren, “Multi-agent consensus using both current and outdated states with fixed and undirected interaction,” *J. Intell. Robot. Syst.*, vol. 58, no. 1, pp. 95–106, 2010.
- [43] N. Huang, Z. Duan, & G. Chen, “Some necessary and sufficient conditions for consensus of second-order multi-agent systems with sampled position data,” *Automatica*, vol. 63, pp. 148–155, Jan. 2016.
- [44] W. Yu, W. X. Zheng, G. Chen, W. Ren, & J. Cao, “Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data,” *Automatica*, vol. 47, no. 7, pp. 1496–1503, 2011.
- [45] Z. Meng, Y. Cao, & W. Ren, “Stability and convergence analysis of multi-agent consensus with information reuse,” *Int. J. Control*, vol. 83, no. 5, pp. 1081–1092, 2010.
- [46] J. Li, S. Xu, Y. Chu, & H. Wang, “Distributed average consensus control in networks of agents using outdated states,” *IET Control Theory Appl.*, vol. 4, no. 5, pp. 746–758, May 2010.
- [47] W. Yu, G. Chen, M. Cao, & W. Ren, “Delay-induced consensus and quasi-consensus in multi-agent dynamical systems,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, vol. 60, no. 10, pp. 2679–2687, Oct. 2013.
- [48] Z. Meng, Z. Li, A. V. Vasilakos, & S. Chen, “Delay-induced synchronization of identical linear multiagent systems,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 43, no. 2, pp. 476–489, Apr. 2013.
- [49] Q. Song, W. Yu, J. Cao, & F. Liu, “Reaching synchronization in networked harmonic oscillators with outdated position data,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 46, no. 7, pp. 1566–1578, Jul. 2016.

- [50] A. Ramírez & R. Sipahi, “Proportional-retarded (PR) protocol for a large scale multi-agent network with noisy measurements; stability and performance,” in *Advances in Delays and Dynamics*, G. Valmorbidia, R. Sipahi, I. Boussaada, and A. Seuret, Eds. Cham, Switzerland: Springer, 2018.
- [51] A. Ramírez & R. Sipahi, “Fast consensus against noise in a large scale multi-agent system with distributed proportional-retarded (PR) controllers,” in *Proc. Amer. Control Conf.*, Milwaukee, WI, USA, 2018.
- [52] V. L. Kharitonov & A. P. Zhabko, “Robust stability of time-delay systems,” *IEEE Trans. Autom. Control*, 39(12), 2388–2397, 1994.
- [53] Y. Cao, W. Yu, W. Ren & G. Chen, “An Overview of Recent Progress in the Study of Distributed Multi-Agent Coordination,” *IEEE Trans. Industrial Inf.*, vol. 9, no. 1, pp. 427-438, Feb. 2013.
- [54] O. Katsuhiko, “*Ingeniería de control moderna*,” Madrid, Prentice Hall Hispanoamericana, 1998.
- [55] A. Ramírez, R. Sipahi, S. Mondié & R. Garrido, “Fast consensus in a large-scale multi-agent system with directed graphs using time-delayed measurements.” *Phil. Trans. Royal Society A*. 2019 Sep 9;377(2153):20180130.
- [56] A. Ramírez & R. Sipahi, “Single-Delay and Multiple-Delay Proportional-Retarded (PR) Protocols for Fast Consensus in a Large-Scale Network,” in *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 64, no. 5, pp. 2142-2149, May 2019.
- [57] A. Ramírez & R. Sipahi, “Multiple Intentional Delays Can Facilitate Fast Consensus and Noise Reduction in a Multiagent System,” in *IEEE Trans. Cybernetics*, vol. 49, no. 4, pp. 1224-1235, April 2019.
- [58] R. Wei & C. Yongcan, “Distributed coordination of multi-agent networks,” 2011.
- [59] J. Shamma, “Cooperative control of distributed multi-agent systems,” John Wiley & Sons, 2008.
- [60] P. TOŠIĆ, “Distributed coalition formation for collaborative large-scale multi-agent systems,” 2006.
- [61] C. Zhang, “Scaling multi-agent learning in complex environments,” University of Massachusetts Amherst, 2011.
- [62] S. Xie, G. Russo, & R. Middleton, “Scalability in nonlinear network systems affected by delays and disturbances,” *IEEE Control Netw. Syst.*, vol. 8, no. 3, pp. 1128–1138, Sep. 2021.

- [63] B. Besselink & S. Knorn, “Scalable input-to-state stability for performance analysis of large-scale networks,” *IEEE Control Syst. Lett.*, vol. 2, no. 3, pp. 507–512, Jul. 2018.
- [64] Y. Chow. “What is a Closed-Form Number?” *The American Mathematical Monthly.*, vol. 106, no. 5, pp. 440-448, May. 1999.
- [65] K. Gu, S.-I. Niculescu & J. Chen, “On stability crossing curves for general systems with two delays,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications.*, vol. 311, no. 1, pp. 231-253, 2005.